Controle ótimo

Antonio M. N. Lima

DEE/CEEI/UFCG

Introdução

☞1696 pode ser considerado o marco zero da teoria de controle ótimo. Neste ano J. Bernoulli publicou *A new problem that mathematicians are invited to solve* no *Acta Eruditorium*, e desafiou os matemáticos com o problema da braquistócrona.

☞*Given two points A and B in a vertical plane, what is the curve traced out by a particle acted on only by gravity, which starts at A and reaches B in the shortest time.*

☞Braquistócrona é de origem grega: brachistos (βραχιστσ) é "o mais curto", e chronos (χρονοσ) é "tempo".

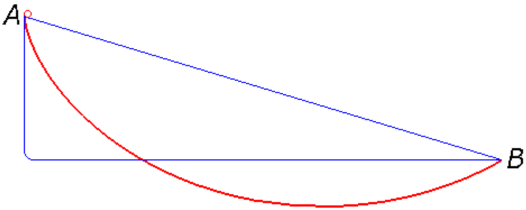

Figure 1: Problema da braquistócrona.

Introdução+

- O problema da braquistócrona pode ser considerado o primeiro problema de cálculo variacional.
- Newton foi desafiado a resolvê-lo num dia 1696, e o resolveu no dia seguinte. A prova de que a curva solução é um segmento de uma ciclóide, também foi encontrada por Leibniz, L'Hôpital, e pelos irmãos Bernoulli (Johann e Jakob).
- Johann resolveu o problema usando uma análogia baseada no caminho da luz refratada por camadas transparentes de índices de refração variáveis. De fato, Johann encontrou inicialmente uma prova incorreta e desafiou seu irmão Jakob a encontrar a prova correta. Jakob encontrou a prova correta, e Johann tentou usá-lo com se fosse de sua autoria.

Solução-distância

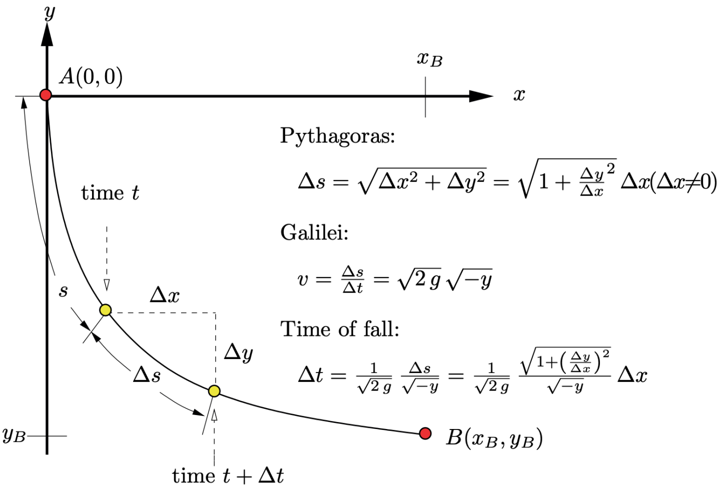

Figure 2: $x(\theta) = r(\theta - \sin(\theta))$, $y(\theta) = -r(1 - \cos(\theta))$, $0 \leq \theta \leq \theta_B$, $x(\theta_B) = x_B$ e $y(\theta_B) = y_B$.

Solução-tempo

$$T = \int_A^B (\nu)^{-1}\, ds, \frac{1}{2} m\nu^2 = mgy, \nu = (2gy)^{1/2} \tag{1}$$

$$ds = \left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2} = \left(1 + y'^2\right)^{1/2} dx, y' \triangleq \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

$$T = \int_A^B \left(1 + y'^2\right)^{1/2} (2gy)^{-1/2}\, dx \tag{3}$$

$$f = \left(1 + y'^2\right)^{1/2} (2gy)^{-1/2} \tag{4}$$

$$f^* = \arg\min_{f \in \mathcal{F}} T \tag{5}$$

Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{6}$$

Problema de Bolza - Oskar Bolza, 1913

Se não há restrições para $\mathbf{x}(t)$ ou $\mathbf{u}(t)$, e se t_i e t_f são fixos, o problema de controle ótimo de tempo contínuo pode ser definido como: qual a trajetória do vetor $\mathbf{u} : [t_i, t_f] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_u}$ que minimiza o indice de desempenho $J(\mathbf{u})$

$$J(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\, dt, \tag{7}$$

sujeito a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i, \tag{8}$$

where

- $[t_i, t_f]$ é o intervalo de tempo de interesse,
- $\mathbf{x} : [t_i, t_f] \to \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados,
- $\varphi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a uma função de custo terminal,
- $L : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a uma função de custo intermediária,
- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_x}$ é um campo vetorial.

Restrições

Restrições podem ser incluídas no índice de desempenho usando uma função vetorial de multiplicadores de Lagrange variantes no tempo $\lambda : [t_i, t_f] \mapsto \mathbb{R}^{n_x}$, para definir um índice de desempenho aumentado $\bar{J}$:

$$\bar{J}(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} \left\{ L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T(t) \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}} \right] \right\} dt \qquad (9)$$

Definindo uma função hamiltoniana $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda(t)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

o índice de desempenho aumentado por ser re-escrito como

$$\bar{J}(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_o}^{t_f} \left\{ \mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) - \lambda^T(t) \dot{\mathbf{x}} \right\} dt. \qquad (10)$$

Condições de primeira ordem

Se t_i e t_f são constants, uma variação infinitesimal $\delta\mathbf{u}$ resultará em variações infinitesimais de $\delta\mathbf{x}$ e $\delta\bar{J}$, i.e.,

$$\begin{aligned}\delta\bar{J} = &\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} - \lambda^T\right)\delta\mathbf{x}\right]_{t=t_f} + \left[\lambda^T\delta\mathbf{x}\right]_{t=t_i}\cdots \\ &+ \int_{t_i}^{t_f}\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}} + \dot{\lambda}^T\right)\delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}}\right)\delta\mathbf{u}\right\}dt\end{aligned} \tag{11}$$

Considerando que os multiplicadores de Lagrange são arbitrários, podemos escolhe-los para que os termos associados a $\delta\mathbf{x}(t)$ e $\delta\mathbf{x}(t_f)$ sejam iguais a zero, i.e.,

$$\dot{\lambda}(t)^T = -\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}}, \tag{12}$$

$$\lambda(t_f)^T = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right|_{t=t_f}. \tag{13}$$

A escolha feita para $\lambda(t)$ resulta que

$$\delta \bar{J} = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \delta \mathbf{u} \right\} dt. \tag{14}$$

Considerando que o estado inicial é constante $\delta \mathbf{x}(t_i) = 0$, o mínimo valor $\bar{J}$ é obtido quando $\delta \bar{J} = 0$. Isto resulta na condição de estacionariedade dada por

$$\frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}. \tag{15}$$

- As equações (8), (12), (13), e (15) são denominadas de condições de primeira ordem que são necessárias para obter o mínimo de J.
- A equação (12) é denominada de co-estado (ou estado adjunto).
- A equação (13) e $\mathbf{x}\left(t_i\right) = \mathbf{x}_i$ são condições de contorno (ou de transversalidade).

Existência da lei de controle ótimo

- Essa teoria não trata da existência da lei de controle ótimo que minimize o índice de desempenho J.
- As condições necessárias de otimalidade, definem duas condições de contorno e são úteis para:
  - encontrar soluções analíticas para problemas específicos;
  - definir algoritmos numéricos para buscar soluções de problemas genéricos;
  - verificar se uma solução extrema que satisfaz as condições necessárias de otimalidade realmente produz um mínimo, e determinar qual o tipo de mínimo que é alcançado.
- Condições suficientes para problemas não lineares genéricos e distinções entre condições suficientes para mínimos locais fracos/fortes e globais fortes.
- Vale destacar que um dos pontos chave da teoria é a existência do multiplicador de Lagrange, $\lambda(t)$.

Restrição terminal - Formulação variacional

Considerando o problema de determinar a trajetória de **u** que minimiza o indice de desempenho $J(\mathbf{u})$ sujeito a um conjunto de restrições terminais do tipo

$$\psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0}.$$

sen $\psi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n_\psi}$ uma função vetorial. Para esse problema, a formulação variacional, além das condições (8), (12), (13), e (15) exige que

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}^T + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}^T \nu - \lambda \right)^T \Bigg|_{t_f} \delta \mathbf{x}(t_f) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}^T \nu + H \right) \Bigg|_{t_f} \delta t_f = \mathbf{0},$$

sendo $\nu \in \mathbb{R}^{n_\psi}$ um multiplicador de Lagrange associado à restrição terminal, δt_f é a variação do tempo final, e $\delta \mathbf{x}(t_f)$ é a variação do estado final; se o tempo final e o estado final são fixados, então $\delta t_f = 0$ e o segundo da expressão se anula. Se na restrição terminal $\mathbf{x}_j(t_f)$ é fixado, então $\delta \mathbf{x}_j(t_f)$ também é nulo.

Programação dinâmica

- É uma forma de resolver problemas de controle ótimo (política ótima) sem recorrer a métodos variacionais.
- Foi proposta por Bellman na década de 1950, e é uma extensão da teoria de Hamilton-Jacobi.
- Princípio de otimalidade de Bellman
  - "An optimal policy has the property that regardless of what the previous decisions have been, the remaining decisions must be optimal with regard to the state resulting from those previous decisions".
  - O uso desse princípio permite limitar o número de leis de controle ótimas candidatas que devem ser investigadas.
  - O uso desse princípio permite explicita que a lei ótima ótima deve ser determinada do tempo final para o tempo inicial.

Restrições do estado terminal - Programação dinâmica

Considerando o problema de determinar a trajetória de **u** que minimiza o indice de desempenho $J(\mathbf{u})$,

$$J(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\, dt, \tag{16}$$

sujeito a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i, \varphi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0}. \tag{17}$$

Para esse problema, usando o princípio de otimalidade de Bellman, obtém-se

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}} \left(L + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \right),$$

a qual é denominada de Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Controle ótimo de tempo discreto

A programação dinâmica também aplica-se a sistemas de tempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\mathbf{k}), k),\ \mathbf{x}(N_0) = \mathbf{x}_0,$$

$k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{n_x}$. O objetivo é determinar a sequencia de ações de controle $\{\mathbf{u}(k)\}$, $k = N_0, \ldots, N_f - 1$, que minimiza

$$J(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}(N_f)) + \sum_{k=N_0}^{N_f-1} L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k).$$

A programação dinâmica também é aplicada aos sistemas combinatórios, que são sistemas discretos com estados e ações de controles quantizados. A programação dinâmica discreta, entretanto, sofre com a "maldição da dimensionalidade", que faz com que os cálculos e requisitos de memória cresçam dramaticamente com o tamanho do problema.

Restrição do estado terminal: integrador duplo

$$J(u) = \int_{t_i}^{t_f} u(t)^2 dt, t_i = 0, t_f = 1,$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \; \dot{x}_2(t) = u(t),$$

$$x_1(0) = 1, \; x_2(0) = 1, \; x_1(1) = 0, \; x_2(1) = 0.$$

$$\boxed{\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t)} \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u,$$

$$\boxed{\frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}} \Rightarrow u + \lambda_2 = 0 \implies u = -\lambda_2,$$

$$\boxed{\dot{\lambda}(t)^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}} \Rightarrow \dot{\lambda}_1 = 0, \; \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1.$$

Desse modo

$$\lambda_1(t) = c_1, \; \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2,$$

sendo c_1 e c_2 constantes a serem determinadas e

$$u(t) = c_1 t - c_2.$$

Restrição terminal: integrador duplo+

A restrição terminal é

$$\psi(\mathbf{x}(t_f)) = [x_1(1), x_2(1)]^T = [0,\ 0]^T \ ,$$

de modo que $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ e $\delta\mathbf{x}(t_f) = 0$. Semelhantemente $\delta t_f = 0$, já que $t_f = 1$; todas as condições de (11) são satisfeitas. Para determinar a e b, substitui-se $u(t) = c_1 t - c_2$ na equação de estado

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = c_1 t - c_2,$$

e avalia-se a solução

$$x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3,\ \ x_1(t) = \frac{1}{6}c_1 t^3 - \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4,$$

em $t = t_i = 0$

$$1 = c_4,\ 1 = c_3,$$

e em $t = t_f = 1$

$$0 = \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + c_3 + c_4,\ \ 0 = \frac{1}{2}c_1 - c_2 + c_3 \Rightarrow c_1 = 18, c_2 = 10, \boxed{u = 18t - 10}.$$

Quando o índice de desempenho é

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}(t_f)^T\mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f}(\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt, \tag{18}$$

com $\mathbf{S}_f$ e $\mathbf{Q}$ sendo matrizes semi-definidas positivas, $\mathbf{R}$ uma matriz positiva definida, e

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),\ \ \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i, \tag{19}$$

configura-se o problema do regulador linear quadrático. Neste caso, usando as condições de otimalidade, determina-se que o vetor de controle é

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \tag{20}$$

sendo o vetor de ganhos

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t), \tag{21}$$

na qual $\mathbf{S}(t)$ é a solução de

$$-\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} + \mathbf{Q},\ \mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f. \tag{22}$$

Regulador de horizonte infinito

Quando $t_f \to \infty$ e $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é estabilizável (os modos estáveis são controláveis e os modos não controláveis são estáveis), a equação diferencial de Ricatti converge para $\mathbf{S}_\infty$. Deste modo, o vetor de controle é

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}_\infty \tag{23}$$

sendo $\mathbf{S}_\infty$ uma matrix positiva definida que é solução de

$$\mathbf{A}^T\mathbf{S}_\infty + \mathbf{S}_\infty\mathbf{A} - \mathbf{S}_\infty\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}_\infty + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{24}$$

Além disto, se $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ é observável, $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{Q}$, então o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \tag{25}$$

é assintoticamente estável. O regulador linear quadrático proporciona uma forma de estabilizar qualquer sistema linear que seja estabilizável.

Problema linear-quadrático

Seja

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

a lei de realimentação

$$\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x}(t),$$

e a função de custo

$$V = \int_t^T [\mathbf{x}^T(\tau)Q\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^T(\tau)R\mathbf{u}(\tau)]d\tau$$

com Q e R sendo matrices simétricas, isto é $Q = Q^T$ e $R = R^T$. A lei de realimentação modifica a equação dinâmica do sistema para

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(-K\mathbf{x}) = (A - BK)\mathbf{x} = A_c\,(t)\,\mathbf{x}.$$

Resolução do problema

Com o horizonte finito, $[t, T]$, K é variante no tempo e deste modo, A_c é variante no tempo e

$$\mathbf{x}(\tau) = \Phi_c(\tau, t)\mathbf{x}(t)$$

A função de custo pode ser re-escrita como

$$V = \int_t^T [\ \underbrace{\mathbf{x}^T(\tau)}_{(\Phi_c(\tau,t)\mathbf{x}(t))^T}\ Q\ \underbrace{\mathbf{x}(\tau)}_{\Phi_c(\tau,t)\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\mathbf{u}^T(\tau)}_{(-K\mathbf{x}(\tau))^T}\ R\ \underbrace{\mathbf{u}(\tau)}_{-K\mathbf{x}(\tau)}\ ]d\tau$$

$$V = \mathbf{x}^T(t)\{\int_t^T \Phi_c^T(\tau, t)[Q + K^T RK]\Phi_c(\tau, t)d\tau\}\mathbf{x}(t)$$

$$V = \mathbf{x}^T(t)M(t, T)\mathbf{x}(t)$$

$$M(t, T) = \int_t^T \Phi_c^T(\tau, t)[Q + K^T RK]\Phi_c(\tau, t)d\tau$$

Resolução do problema+

A função de custo V depende do tempo e L não é necessariamente constante

$$V(t) = \int_t^T \mathbf{x}^T(\tau)[Q + K^T RK]\mathbf{x}(\tau)d\tau = \int_t^T \mathbf{x}^T(\tau)L(\tau)\mathbf{x}(\tau)d\tau$$

sendo $L = Q + K^T RK$. Desta equação acima pode-se escrever que

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\mathbf{x}^T(\tau)L(\tau)\mathbf{x}(\tau)\Big|_{\tau=t} = -\mathbf{x}^T(t)L(t)\mathbf{x}(t)$$

Entretanto

$$\frac{dV(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^T(t)\,M(t,T)\,\mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}^T(t)\,\dot{M}(t,T)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\,M(t,T)\,\dot{\mathbf{x}}(t)$$

com

$$\dot{M}(t,T) = \frac{\partial M(t,T)}{\partial t}$$

Resolução do problema+

Utilizando a equação do sistema realimentado obtemos

$$\frac{dV(t)}{dt} = \mathbf{x}^T(t)\left[A_c^T(t)\,M(t,T) + \dot{M}(t,T) + M(t,T)\,A_c(t)\right]\mathbf{x}(t)$$

obtém-se uma segunda expressão para $\frac{dV(t)}{dt}$. Essas duas expressões (21) e (22) são formas quadráticas que dependem do estado inicial que é arbitrário. Desse modo

$$-L(t) = A_c^T(t)\,M(t,T) + \dot{M}(t,T) + M(t,T)\,A_c(t)$$

ou

$$-\dot{M}(t,T) = M(t,T)\,A_c(t) + A_c^T(t)\,M(t,T) + L(t)\,.$$

A condição inicial necessária para a solução dessa equação é $M(T,T) = 0$, otida de

$$M(t,T) = \int_t^T \Phi_c^T(\tau,t)[Q + K^T RK]\Phi_c(\tau,t)d\tau.$$

Resolução do problema+

A função de custo é

$$V(t) = \mathbf{x}^T(t) M(t, T) \mathbf{x}(t)$$

com $M(t, T)$ obtido pela solução de (22) que pode ser re-escrita em termos de A, B, K, Q e R como

$$-\dot{M} = M[A - BK] + [A - BK]^T M + Q + K^T RK.$$

O problema é determinar K que minimize essa função de custo, isto é, encontar $\hat{M}$ tal que

$$\hat{V} = \mathbf{x}^T \hat{M} \mathbf{x} < \mathbf{x}^T M \mathbf{x}, \forall \hat{M} \neq M.$$

Para determinar matriz de ganhos considera-se que $\exists \hat{K}$ que resulta um valor ótimo, isto é, um valor mínimo da função de custo $\hat{M}$ que também satisfaz a

$$-\dot{\hat{M}} = \hat{M}\left[A - B\hat{K}\right] + \left[A - B\hat{K}\right]^T \hat{M} + Q + \hat{K}^T R\hat{K}.$$

Deste modo, se $K = \hat{K} + k \Rightarrow M = \hat{M} + m$ então

$$-\left(\dot{\hat{M}} + \dot{m}\right) - \left(-\dot{\hat{M}}\right) = -\dot{m},$$

$$-\dot{m} = mA_c + A_c^T m + \hat{L},$$

$$A_c = A - B\left(\hat{K} + k\right),$$

e

$$\hat{L} = \left(\hat{K}^T R - \hat{M}B\right)k + k^T\left(R\hat{K} - B^T\hat{M}\right) + k^T Rk.$$

Consequentemente

$$m(t, T) = \int_t^T \Phi_c^T(\tau, t)\hat{L}\Phi_c(\tau, t)d\tau.$$

Se $\hat{V}$ é mínimo $\mathbf{x}^T\hat{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T M\mathbf{x}$, então

$$\mathbf{x}^T\hat{M}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(M - m)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T M\mathbf{x} - \mathbf{x}^T m\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T M\mathbf{x}.$$

Resolução do problema+

Dado que $\mathbf{x}^T m \mathbf{x} \geq 0$ é necessário assegurar que $\mathbf{x}^T \hat{L} \mathbf{x} > 0$, $\forall k$. Isto é garantido se

$$R\hat{K} - B^T \hat{M} = \hat{K}^T R - \hat{M} B = 0$$

ou

$$\hat{K} = R^{-1} B^T \hat{M} \Rightarrow \hat{L} = k^T R k.$$

Nessas condições

$$-\dot{\hat{M}} = \hat{M} A + A^T \hat{M} + \hat{M} B R^{-1} B^T \hat{M} + Q$$

que é denominada de equação de Riccati. Um método usado na resolução dessa equação é a integração numérica e, como $\hat{M}$ é simétrica, existem $n(n+1)/2$ equações escalares acopladas. Essas equações são resolvidas na ordem de tempo inversa já que a condição inicial conhecida é $M(T,T) = 0$, ou seja,a integração numérica fornece

$$M(t,T), t < T$$