Go to goal PID

Antonio MN Lima

Automação Inteligente
UFCG/CEEI/DEE

Modelos

- Modelo cinemático do robô

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \cos(\phi) \\ \nu \sin(\phi) \\ \omega \end{bmatrix}$$

- Função de transferência do PID

$$G_{\mathrm{PID}}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + s\frac{k_d p_d}{s + p_d} = \frac{\Omega(s)}{E(s)} = \frac{\mathcal{L}(\omega(t))}{\mathcal{L}(e(t))}$$

- Modelo de estado do PID
  - Determinar A, B, C, D do modelo

$$\dot{z} = Az + Be,$$

$$\omega = Cz + De,$$

  tais que

$$C(sI - A)^{-1} B + D = \underbrace{\frac{(k_p + k_d p_d) s^2 + (k_i + k_p p_d) s + k_i p_d}{s^2 + p_d s}}_{G_{\mathrm{PID}}(s)}.$$

Modelo de estado do PID+

Considere que

$$G_{\text{PID}}(s) = \frac{\Omega(s)}{E(s)} = \frac{\Omega(s)}{\Psi(s)}\frac{\Psi(s)}{E(s)},$$

com

$$\frac{\Omega(s)}{\Psi(s)} = (k_p + k_d p_d)\, s^2 + (k_i + k_p p_d)\, s + k_i p_d$$

e

$$\frac{\Psi(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^2 + p_d s}.$$

No domínio do tempo, $\Psi(s)\left(s^2 + p_d s\right) = E(s)$ é representada por $\frac{d^2\psi}{dt^2} + p_d \frac{d\psi}{dt} = e$. Desse modo, uma representação de estado seria

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}}_{\dot{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_d & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} e.$$

Modelo de estado do PID++

Para obter $\omega(t)$ é necessário converter $\Omega(s) = \left((k_p + k_d p_d) s^2 + (k_i + k_p p_d) s + k_i p_d\right) \Psi(s)$ para o domínio do tempo, ou seja,

$$\omega = (k_p + k_d p_d) \ddot{\psi} + (k_i + k_p p_d) \dot{\psi} + k_i p_d \psi.$$

Usando a segunda linha de $\dot{z} = Az + Be$ obtem-se que

$$\omega = (k_p + k_d p_d)(-p_d \dot{\psi} + e) + (k_i + k_p p_d) \dot{\psi} + k_i p_d \psi,$$

ou equivalentemente

$$\omega = \left(k_i - k_d p_d^2\right) \dot{\psi} + k_i p_d \psi + (k_p + k_d p_d) e.$$

Desse modo, a representação de estados do PID é

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -p_d \end{bmatrix}}_{A} z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} e,$$

$$\omega = \underbrace{\begin{bmatrix} k_i p_d & \left(k_i - k_d p_d^2\right) \end{bmatrix}}_{C} z + \underbrace{(k_p + k_d p_d)}_{D} e.$$

Sistema realimentado

A lei de controle especificada é

$$\nu = v_0, \phi_d = \tan^{-1}\left(\frac{y_g - y}{x_g - x}\right), e = \phi_d - \phi, \omega = PID(e)$$

Desse modo, a composição do modelo do robô com o modelo do controlador resulta no seguinte sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\chi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \cos(\phi) \\ v_0 \sin(\phi) \\ k_i p_d z_1 + \left(k_i - k_d p_d^2\right) z_2 + \left(k_p + k_d p_d\right) e \\ z_2 \\ -p_d z_2 + e \end{bmatrix}}_{\mathrm{f}(\chi)},$$

$$e = \tan^{-1}\left(\frac{y_g - y}{x_g - x}\right) - \phi.$$

Matriz Jacobiana

$$\dot{\chi} = \mathcal{A}\chi$$

$$\mathcal{A} = \left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \chi}\right|_{\chi=\chi_0}, \chi_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \phi_0 & z_1^0 & z_2^0 \end{bmatrix}^T, x_g = 2, y_g = 2$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_0 \sin\left(\phi_0\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 \cos\left(\phi_0\right) & 0 & 0 \\ -\frac{\left(k_p + k_d p_d\right)(y_0 - 2)}{\left(\frac{(y_0-2)^2}{(x_0-2)^2}+1\right)(x_0-2)^2} & \frac{\left(k_p + k_d p_d\right)}{\left(\frac{(y_0-2)^2}{(x_0-2)^2}+1\right)(x_0-2)} & -k_p - k_d p_d & k_i p_d & -k_d p_d^2 + k_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(y_0-2)}{\left(\frac{(y_0-2)^2}{(x_0-2)^2}+1\right)(x_0-2)^2} & \frac{1}{\left(\frac{(y_0-2)^2}{(x_0-2)^2}+1\right)(x_0-2)} & -1 & 0 & -p_d \end{bmatrix}$$