

# Modelagem dinâmica de robôs móveis com tração diferencial utilizando as metodologias de Lagrange e Newton-Euler: uma perspectiva unificada

Rached Dhaouadi e Ahmad Abu Hatab

*College of Engineering, American University of Sharjah, Sharjah, UAE*

## Resumo

Este trabalho apresenta uma estrutura de modelagem dinâmica unificada para robôs móveis de acionamento diferencial (*Differential-Drive Mobile Robots, DDMR* do inglês). Duas formulações para a dinâmica de robôs móveis são desenvolvidas; uma é baseada na mecânica Lagrangiana, e a outra na Mecânica Newton-Euler. As maiores dificuldades experimentadas ao modelar sistemas não-holonômicos em ambos os métodos são ilustrados e os procedimentos de projeto são delineados. É mostrado que as duas formulações são matematicamente equivalentes proporcionando uma verificação de sua consistência. O trabalho apresentado leva a uma melhor compreensão da dinâmica dos robôs móveis de tração diferencial, o que ajudará os estudantes de engenharia e pesquisadores na modelagem e projeto de controladores adequados para navegação e rastreamento de trajetória DDMR.

Keywords: Tração Diferencial, Robôs Móveis, Dinâmica, Modelagem, Lagrange, Newton-Euler

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, tem havido um interesse considerável na área de robótica móvel e tecnologias educacionais [1-7]. Para engenheiros de controle e pesquisadores, há uma riqueza de literatura tratando do controle e aplicações de robôs móveis com rodas (*Wheeled Mobile Robots, WMR* do inglês) e suas aplicações. Entretanto, enquanto o assunto da modelagem cinemática de WMR é bem documentado e de fácil compreensão pelos estudantes, o assunto de modelagem dinâmica de WMR não é abordado adequadamente na literatura. As dinâmicas de WMR são altamente não-lineares e envolvem restrições não-holonômicas que dificultam sua modelagem e análise especialmente para novos estudantes de engenharia que iniciam suas pesquisa neste campo. Portanto, um modelo dinâmico detalhado e preciso descrevendo o movimento de WMR precisa ser desenvolvido para oferecer aos estudantes uma estrutura geral para análise de simulações e desenvolvimento de sistemas utilizando controle baseado em modelos.

No caso de um robô móvel de tração diferencial (DDMR), por exemplo, não há um livro didático disponível que investigue a fundo a abordagem de modelagem dinâmica levando em consideração as restrições não-holonômicas em um procedimento passo a passo. A análise é disponível principalmente em revistas, artigos de conferência e relatórios técnicos [8]. Além disso, o material apresentado difere de um artigo para outro com diferentes variáveis e quadros de referência utilizados, e várias suposições. Além disso, alguns trabalhos apresentam resultados diferentes para o mesmo DDMR utilizado, o que aumenta a confusão da modelagem dinâmica.

Para o caso do DDMR, os métodos utilizados são ou a abordagem Lagrangiana [9-15] ou a abordagem de Newton-Euler [16-19]. Outros formalismos como o método de Kane também foram sugeridos como abordagens viáveis da modelagem DDMR [20]. Portanto, não está

claro para novos estudantes de engenharia e pesquisadores qual conceito utilizar e qual método oferece uma melhor percepção física sobre o comportamento dinâmico do sistema e o efeito das restrições não-holonômicas. Além disso, não está claro se ambos os métodos conduzirão ao mesmo modelo dinâmico final.

No método de Newton-Euler, é preciso levar em conta dois tipos de forças aplicadas a um sistema: as forças dadas e as forças de restrição. As forças dadas incluem as forças exercidas externamente por os atuadores, enquanto as forças de restrição são as forças de interação entre a plataforma do robô e o solo através das rodas. Além disso, em um sistema com elementos interligados, os componentes podem interagir uns com os outros por meio de engrenagens, molas e elementos de fricção. Portanto, precisamos levar em conta todas essas forças. É evidente que a abordagem newtoniana inclui algumas dificuldades práticas já que na maioria dos casos, essas forças não são facilmente quantificáveis.

A metodologia desenvolvida por Lagrange supera esses problemas ao expressar as forças em termos de energias no sistema, i.e., a energia cinética e a energia potencial, que são quantidades escalares facilmente representadas em termos das coordenadas do sistema. A derivação de as equações de Lagrange requerem também que as coordenadas generalizadas sejam independentes.

A abordagem Lagrangiana geralmente fornece um poderoso e versátil método para a formulação das equações de movimento para sistemas holonômicos. Entretanto, para sistemas não-holonômicos, o método usual é introduzir as equações de restrição de movimento nas equações dinâmicas usando os multiplicadores de Lagrange. Estes multiplicadores não são constantes e são geralmente funções de todas as coordenadas generalizadas e muitas vezes também de tempo. Eles representam um conjunto de incógnitas cujos valores devem ser obtidos como parte da solução. Para resolver esta complexidade computacional, métodos adici-

onais têm sido sugeridos para remover a presença dos multiplicadores das equações dinâmicas do sistema em questão [21,22].

O foco deste trabalho é formular equações dinâmicas simples e bem estruturadas do DDMR, levando em conta as restrições não-holonômicas. Primeiro, é apresentada a formulação de Lagrange. A transformação das coordenadas é utilizada para cancelar os multiplicadores de Lagrange para obter equações bem estruturadas. Segundo, o método de Newton-Euler é usado para derivar as equações dinâmicas do DDMR. As principais dificuldades experimentadas na utilização de ambos os métodos são ilustradas e os procedimentos são delineados para oferecer uma abordagem sistemática da modelagem dinâmica do DDMR sem grande complexidade matemática. É mostrado que ambos métodos alcançam equações dinâmicas equivalentes para o robô móvel, proporcionando uma verificação de sua consistência.

### SISTEMA DE COORDENADAS

A fim de descrever a posição do WMR em seu ambiente, dois sistemas de coordenadas (quadros) diferentes precisam ser definidos.

1. Sistema de Coordenadas Inerciais: este sistema de coordenadas é um sistema de coordenadas global, que é fixado no ambiente ou no plano em que o WMR se move. Além disso, este quadro é considerado como o quadro de referência e é designada como  $\{X_I, Y_I\}$ .

2. Sistema de Coordenadas do robô: este sistema de coordenadas é um sistema de coordenadas local, anexado ao WMR, e assim, movendo-se com ele. Este quadro é denotado como  $\{X_r, Y_r\}$ .

Os dois quadros definidos são mostrados na Figura 1. A origem do quadro do robô é definido para ser o ponto médio  $A$  no eixo entre as rodas. O centro da massa  $C$  do robô é assumido como estando no eixo de simetria, a uma distância  $d$  da origem  $A$ .

Como mostrado na Figura 1 a posição e orientação do robô no quadro inercial pode ser definida como

$$q^I = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

A questão importante que precisa ser explicada nesta fase é o mapeamento entre estes dois quadros. A posição de qualquer ponto sobre o robô pode ser definido no quadro do robô e no quadro inercial da seguinte forma.

Sejam  $X^r = \begin{bmatrix} x^r \\ y^r \end{bmatrix}$ , e  $X^I = \begin{bmatrix} x^I \\ y^I \end{bmatrix}$  as coordenadas de um dado ponto no quadro do robô e no quadro inercial, respectivamente.

Então, as duas coordenadas são relacionadas pela seguinte transformação:

$$X^I = R(\theta)X^r \quad (2)$$

Onde  $R(\theta)$  é a matriz de rotação ortogonal

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

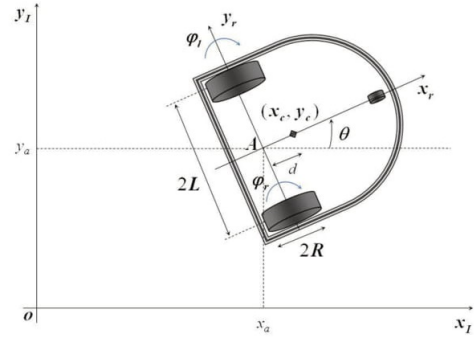


Figura 1. Robô móvel com tração diferencial (DDMR)

Esta transformação permitirá também o manejo do movimento entre quadros.

$$\dot{X}^I = R(\theta)\dot{X}^r \quad (4)$$

Será visto na próxima seção que a equação (4) é muito importante para derivar os modelos cinemáticos e dinâmicos do DDMR, pois descreve a relação entre as velocidades no quadro inercial e no quadro do robô.

### RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS DO ROBÔ DE TRAÇÃO DIFERENCIAL

O movimento de um robô móvel de tração diferencial é caracterizado por duas equações de restrição não-holonômicas, que são obtidas a partir de duas suposições principais:

- Nenhum movimento de deslizamento lateral:

Esta restrição significa simplesmente que o robô pode se mover apenas em um movimento curvo (para frente e para trás), mas não para os lados. No quadro do robô, esta condição significa que a velocidade do ponto central  $A$  é zero ao longo do eixo lateral:

$$\dot{y}_a^r = 0 \quad (5)$$

Usando a matriz de rotação ortogonal  $R(\theta)$ , a velocidade no quadro inercial é

$$- \dot{x}_a \sin\theta + \dot{y}_a \cos\theta = 0 \quad (6)$$

- Restrição de rolagem pura:

A restrição de rolamento pura representa o fato de que cada roda mantém um ponto de contato  $P$  com o solo, como mostrado na Figura 2. Não há deslizamento da roda em seu eixo longitudinal ( $x_r$ ) e nem derrapagem em seu eixo ortogonal ( $y_r$ ).

As velocidades dos pontos de contato na estrutura do robô estão relacionados com as velocidades das rodas por:

$$\begin{cases} v_{pR} = R\dot{\varphi}_R \\ v_{pL} = R\dot{\varphi}_L \end{cases} \quad (7)$$

No quadro inercial, essas velocidades podem ser calculadas como uma função das velocidades do ponto central  $A$  do robô:

$$\begin{cases} \dot{x}_{pR} = \dot{x}_a - L\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_{pR} = \dot{x}_a - L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{pL} = \dot{x}_a + L\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_{pL} = \dot{x}_a + L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad (9)$$

Usando a matriz de rotação  $R(\theta)$ , as equações de restrição de rolagem são formuladas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pR}\cos\theta + \dot{y}_{pR}\sin\theta &= R\dot{\varphi}_R \\ \dot{x}_{pL}\cos\theta + \dot{y}_{pL}\sin\theta &= R\dot{\varphi}_L \end{aligned} \quad (10)$$

Usando as velocidades do ponto de contato das equações  $(x, y)$  e substituindo em  $(x, y)$ , as três equações de restrição podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\Lambda(q)\dot{q} = 0 \quad (11)$$

Onde

$$\Lambda(q) = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & L & -R & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -L & 0 & -R \end{bmatrix} \quad (12)$$

e

$$\dot{q} = [\dot{x}_a \quad \dot{y}_a \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}_R \quad \dot{\varphi}_L]^T \quad (13)$$

$$\begin{cases} v_R = R\dot{\varphi}_R \\ v_L = R\dot{\varphi}_L \end{cases} \quad (14)$$

A matriz de restrições acima  $\Lambda(q)$  será usada na próxima seção para a modelagem dinâmica do DDMR.

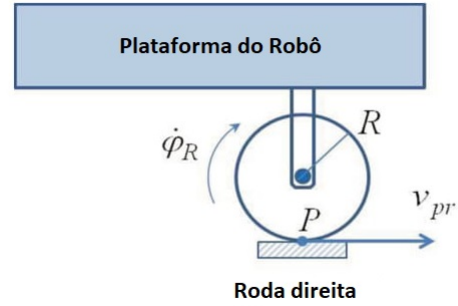


Figura 2. Restrição de rolagem pura

## MODELO CINEMÁTICO

A modelagem cinemática é o estudo do movimento da mecânica sistemas sem considerar as forças que afetam o movimento. Para o DDMR, o principal objetivo da modelagem cinemática é representar as velocidades do robô em função das velocidades das rodas motrizes, juntamente com os parâmetros geométricos do robô.

A velocidade linear do DDMR no moldura do robô é a média das velocidades lineares das duas rodas

$$v = \frac{v_R + v_L}{2} = R \frac{(\dot{\varphi}_R + \dot{\varphi}_L)}{2} \quad (15)$$

e a velocidade angular do DDMR é

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{2L} = R \frac{(\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L)}{2} \quad (16)$$

As velocidades do DDMR no quadro do robô podem agora ser representadas em termos da velocidade do ponto central  $A$  no quadro do robô da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_a^r = R \frac{(\dot{\varphi}_R + \dot{\varphi}_L)}{2} \\ \dot{y}_a^r = 0 \\ \dot{\theta} = \omega = R \frac{(\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L)}{2} \end{cases} \quad (17)$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a^r \\ \dot{y}_a^r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (18)$$

As velocidades do DDMR também podem ser obtidas no quadro inercial da seguinte forma:

$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \dot{x}_a^I \\ \dot{y}_a^I \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2}\cos\theta & \frac{R}{2}\cos\theta \\ \frac{R}{2}\sin\theta & \frac{R}{2}\sin\theta \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (19)$$

A equação (19) representa o modelo cinemático direto do DDMR. Outra forma alternativa para o modelo cinemático pode ser obtida através da representação das velocidades do DDMR em termos das velocidades linear e

angular do DDMR no quadro do robô.

$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \dot{x}_a^r \\ \dot{y}_a^r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (20)$$

### MODELO DINÂMICO

A dinâmica é o estudo do movimento de um sistema mecânico levando em consideração as diferentes forças que afetam seu movimento, ao contrário da cinemática, onde as forças não são levadas em consideração. O modelo dinâmico do DDMR é essencial para a análise de simulações do movimento do DDMR e para o projeto de vários algoritmos de controle de movimento.

Um DDMR não-holonômico com  $n$  coordenadas generalizadas  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  e sujeito a  $m$  restrições pode ser descrito pela seguinte equação de movimento:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (21)$$

onde:

$M(q)$ , uma matriz positiva  $n \times n$  simétrica definida como matriz de inércia,  $V(q, \dot{q})$  é a matriz centrípeta e coriolis,  $F(\dot{q})$  é a matriz de fricção superficial,  $G(q)$  é o vetor gravitacional,  $\tau_d$  é o vetor de perturbações limitadas desconhecidas, incluindo dinâmicas não estruturadas e não modeladas,  $B(q)$  é a matriz de entrada,  $\tau$  é o vetor de entrada,  $\Lambda^T(q)$  é a matriz associada com as restrições cinemáticas, e  $\lambda$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange [21, 22].

### ABORDAGEM DINÂMICA DE LAGRANGE

A abordagem dinâmica de Lagrange é um método muito poderoso para formular as equações de movimento dos sistemas mecânicos. Este método, que foi introduzido por Lagrange, é usado para derivar sistematicamente as equações de movimento, levando consideração as energias cinética e potencial do sistema em questão.

A equação de Lagrange pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = F - \Lambda^T(q)\lambda \quad (22)$$

Onde  $L = T - V$  é a função Lagrangiana,  $T$ , é a energia cinética do sistema,  $V$  é a energia potencial do sistema,  $q_i$  são as coordenadas generalizadas,  $F$  é o vetor de força generalizado,  $\Lambda$  é a matriz de restrições, e  $\lambda$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições.

O primeiro passo para derivar o modelo dinâmico usando a abordagem Lagrange é encontrar as energias cinéticas e potenciais que governam o movimento do DDMR.

Além disso, já que o DDMR está se movendo no plano  $X_I - Y_I$ , a energia potencial do DDMR é considerada zero.

Para o DDMR, as coordenadas generalizadas são selecionadas como:

$$q = [x_a y_a \ \theta \ \varphi_R \ \varphi_L]^T \quad (23)$$

A energia cinética do DDMR é a soma da energia cinética da plataforma do robô sem rodas mais as energias cinéticas das rodas e dos atuadores.

A energia cinética da plataforma do robô é:

$$T_c = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 \quad (24)$$

Enquanto a energia cinética das rodas direita e esquerda:

$$T_{wR} = \frac{1}{2} m_w v_{wR}^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\varphi}_R^2 \quad (25)$$

$$T_{wL} = \frac{1}{2} m_w v_{wL}^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\varphi}_L^2 \quad (26)$$

onde,  $m_c$  é a massa do DDMR sem as rodas e atuadores (motores CC),  $m_w$  é a massa de cada roda motriz (com atuador),  $I_c$  é o momento de inércia do DDMR sobre o eixo vertical através do centro da massa,  $I_w$  é o momento de inércia de cada roda motriz com um motor sobre o eixo da roda, e  $I_m$  é o momento de inércia de cada roda com um motor sobre o diâmetro da roda.

Todas as velocidades serão primeiro expressadas em função das coordenadas generalizadas por meio da equação geral da velocidade no quadro inercial.

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \quad (27)$$

Os componentes  $X_I$  e  $Y_I$  do centro de massa e rodas pode ser obtido em termos das coordenadas generalizadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_c = x_a + d \cos\theta \\ y_c = y_a + d \sin\theta \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} x_{wR} = x_a + L \sin\theta \\ y_{wR} = y_a - L \cos\theta \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} x_{wL} = x_a - L \sin\theta \\ y_{wL} = y_a + L \cos\theta \end{cases} \quad (30)$$

Usando as equações (24)-(26) com as equações (27)-(30), a energia cinética total do DDMR é:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) - m_c d \dot{\theta} (\dot{y}_a \cos\theta - \dot{x}_a \sin\theta) + \frac{1}{2} I_w (\dot{\varphi}_R^2 + \dot{\varphi}_L^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (31)$$

onde os seguintes parâmetros foram introduzidos:

$m = m_c + 2m_w$  é a massa total do robô e  $I = I_c + m_c d^2 + 2m_w L^2$  é o momento de inércia equivalente total.

Usando a equação (22) com a função Lagrangiana  $L = T$ , as equações de movimento do DDMR são dadas por:

$$m\ddot{x}_a - m d \ddot{\theta} \sin \theta - m d \dot{\theta}^2 \cos \theta = C_1 \quad (32)$$

$$m\ddot{y}_a - m d \ddot{\theta} \cos \theta - m d \dot{\theta}^2 \sin \theta = C_2 \quad (33)$$

$$I\ddot{\theta} - m d \ddot{x}_a \sin \theta + m d \ddot{y}_a \cos \theta = C_3 \quad (34)$$

$$I_w \ddot{\varphi}_R = \tau_R + C_4 \quad (35)$$

$$I_w \ddot{\varphi}_L = \tau_L + C_5 \quad (36)$$

onde  $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$  são os coeficientes relacionados às restrições dinâmicas, que podem ser escritos em termos do vetor de multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  e a matriz de restrições cinemáticas  $\Lambda$  introduzida na seção 3.

$$\Lambda^T(q) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Agora, as equações de movimento obtidas (32)-(36) podem ser representadas na forma generalizada dada pela equação (21) como:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (38)$$

Onde

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m d \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & m & m d \cos \theta & 0 & 0 \\ -m d \sin \theta & m d \cos \theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix},$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -m d \dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m d \dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{and } \Lambda^T(q)\lambda = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & \sin \theta \\ 0 & L & -L \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$$

Em seguida, o sistema descrito pela equação (38) é transformado em uma forma alternativa que é mais conveniente para fins de controle e simulação. O objetivo principal é eliminar o termo de restrição  $\Lambda^T(q)\lambda$  na equação

(38), já que os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$  são desconhecidos. Isto é feito primeiro através da definição do vetor reduzido

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (39)$$

Em seguida, expressamos as velocidades em coordenadas generalizadas utilizando o modelo cinemático direto (19). Temos então

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R \cos \theta & R \cos \theta \\ R \sin \theta & R \sin \theta \\ \frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Que pode ser escrita na forma

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (41)$$

Pode ser verificado que a matriz de transformação  $S(q)$  está no espaço nulo da matriz de restrições  $\Lambda(q)$ . Portanto, temos

$$S^T(q)\Lambda^T(q) = 0 \quad (42)$$

Em seguida, tomando as derivadas em função do tempo da equação (41) resulta em

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta} \quad (43)$$

Substituindo as equações (41) e (43) na equação principal (38) obtemos

$$M(q)[\dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta}] + V(q, \dot{q})[S(q)\eta] = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (44)$$

Rearranjando a equação e multiplicando ambos os lados resulta em

$$S^T(q)M(q)S(q)\dot{\eta} + S^T(q)[M(q)\dot{S}(q) + V(q, \dot{q})S(q)]\eta = S^T(q)B(q)\tau - S^T(q)\Lambda^T(q)\lambda \quad (45)$$

onde o último termo é igual a zero. Agora, definindo as novas matrizes

$$\begin{aligned} \bar{M} &= S^T(q)M(q)S(q) \\ \bar{V} &= S^T(q)M(q)\dot{S}(q) + S^T(q)V(q, \dot{q})S(q) \\ \bar{B} &= S^T(q)B(q) \end{aligned}$$

A equação dinâmica é reduzida para a forma

$$\bar{M}(q)\dot{\eta} + \bar{V}(q, \dot{q})\eta = \bar{B}(q)\tau \quad (46)$$

Onde

$$\begin{aligned} \bar{M}(q) &= \begin{bmatrix} I_w + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) & \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) \\ \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) & I_w + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) \end{bmatrix} \\ \bar{V}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{R^2}{2L}m_c d \dot{\theta} \\ -\frac{R^2}{2L}m_c d \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A equação (46) mostra que a dinâmica do DDMR é expressa apenas em função das velocidades angulares das rodas direita e esquerda ( $\dot{\varphi}_R, \dot{\varphi}_L$ ), da velocidade angular  $\dot{\theta}$  do robô e dos torques dos motores ( $\tau_R, \tau_L$ ). A equação de movimento (46) também pode ser transformada em uma forma alternativa que é representada pelas velocidades linear e angular ( $v, \omega$ ) do DDMR. Usando os modelos cinemáticos das equações (15) e (16), é facilmente possível mostrar que o modelo de equações (46) pode ser rearranjado na seguinte forma compacta

$$\begin{cases} \left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right) \dot{v} - m_c d\omega^2 = \frac{1}{R}(\tau_R + \tau_L) \\ \left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w\right) \dot{\omega} + m_c d\omega v = \frac{L}{R}(\tau_R - \tau_L) \end{cases} \quad (47)$$

### ABORDAGEM DE NEWTON-EULER

O primeiro e mais importante passo na modelagem dinâmica de Newton-Euler é desenhar o diagrama de corpo livre do sistema e analisar as forças que atuam sobre ele. O diagrama de corpo livre do DDMR é mostrado na Figura 3. Usando o quadro local do robô  $x_r, y_r$ , são introduzidas as seguintes notações

$(v_u, v_w)$  representa a velocidade do centro de massa  $C$  do veículo da massa  $C$  no quadro local;  $v_u$  é a velocidade longitudinal e  $v_w$  é a velocidade lateral;  $(a_u, a_w)$  representam a aceleração do centro de massa  $C$  do veículo;  $(F_{uR}, F_{uL})$ , são as forças longitudinais exercidas sobre o veículo pelas rodas direita e esquerda;  $(F_{wR}, F_{wL})$ , são as forças laterais exercidas sobre o veículo pelas rodas direita e esquerda;  $\theta$  é a orientação do robô;  $\omega$  é a velocidade angular;  $m$  é a massa do robô; e  $J$  é o momento de inércia de guinada em relação ao centro da massa.

Como pode ser visto no diagrama do corpo livre na Figura 3, as únicas forças que atuam sobre o robô são as forças do atuador que atuam sobre as rodas do robô, que nesse caso são os provenientes dos motores CC.

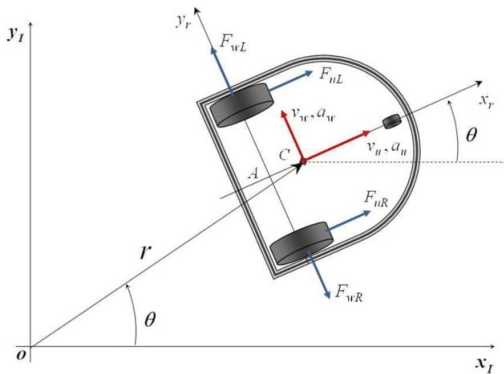


Figura 3. Diagrama de corpo livre do robô para a modelagem Newtoniana

Iniciamos a formulação representando a posição do robô em coordenadas polares. Assumindo que o robô é um

corpo rígido, suas coordenadas polares no quadro inercial podem ser representadas usando um vetor complexo

$$\hat{r} = r e^{j\theta} \quad (48)$$

Derivando a posição acima em relação ao tempo nos dará a velocidade e aceleração do robô no quadro inercial

$$\dot{\hat{r}} = \dot{r} e^{j\theta} + j r \dot{\theta} e^{j\theta} \quad (49)$$

$$\ddot{\hat{r}} = \ddot{r} e^{j\theta} + 2j \dot{r} \dot{\theta} e^{j\theta} + j r \ddot{\theta} e^{j\theta} - r \dot{\theta}^2 e^{j\theta} \quad (50)$$

Simplificando e escrevendo os termos de velocidade e aceleração em termos radiais e tangenciais, teremos

$$\dot{\hat{r}} = [\dot{r}] e^{j\theta} + [r \dot{\theta}] e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} \quad (51)$$

$$\ddot{\hat{r}} = [\ddot{r} - r \dot{\theta}^2] e^{j\theta} + [2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}] e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} \quad (52)$$

Os termos da aceleração e das velocidades radial e tangencial são definidos como

$$v_u = \dot{r} \quad (53)$$

$$v_w = r \dot{\theta} \quad (54)$$

$$a_u = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad (55)$$

$$a_w = 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \quad (56)$$

A partir das quatro equações acima, podemos escrever as seguintes relações entre as componentes radiais e tangenciais da velocidade e aceleração do robô

$$a_u = \dot{v}_u - v_w \dot{\theta} \quad (57)$$

$$a_w = \dot{v}_w - v_u \dot{\theta} \quad (58)$$

As equações (57) e (58) são as equações fundamentais de aceleração que também podem ser obtidas usando o teorema do movimento de um corpo rígido em um quadro de referência rotacional [21,22].

O próximo passo é escrever a segunda lei do movimento de Newton no quadro do robô e encontrar a relação entre as forças, torques e acelerações. O DDMR exibe dois tipos de movimento: translações nas direções radial e tangencial, e rotação em torno do eixo vertical no centro da massa. Seja  $M$  a massa total do robô incluindo as rodas e os atuadores e  $J$  o momento de inércia em relação ao centro de massa. Em seguida, as equações dinâmicas são

$$M a_u = F_{uL} + F_{uR} \quad (59)$$

$$Ma_w = F_{wL} - F_{wR} \quad (60)$$

$$J\ddot{\theta} = (F_{uR} - F_{uL})L + (F_{wR} - F_{wL})d \quad (61)$$

Substituindo os termos da aceleração de (57) e (58) obtemos

$$\dot{v}_u = v_w\dot{\theta} + \frac{F_uL + F_uR}{M} \quad (62)$$

$$\dot{v}_w = -v_u\dot{\theta} + \frac{F_wL + F_wR}{M} \quad (63)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{J}(F_{uR} - F_{uL}) + \frac{d}{J}(F_{wR} - F_{wL}) \quad (64)$$

A ausência de deslizamento (puro rolamento) no sentido longitudinal e nenhum deslizamento no sentido lateral criam independência entre as velocidades longitudinal, lateral e angular e simplificam as equações dinâmicas. Estas restrições não-holonômicas são levadas em conta definindo a velocidade do ponto central A no quadro local e forçando-o a ser zero. Usando a matriz de transformação  $R(\theta)$ , encontramos primeiro a velocidade do centro da massa  $C$  no quadro inercial como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_u \\ v_w \end{bmatrix} \quad (65)$$

Em seguida, usando a equação (28), podemos encontrar a velocidade do ponto central A no quadro inercial. Pode-se então mostrar que a velocidade lateral do ponto A no quadro local é  $v_w - d\dot{\theta}$ . Portanto, na ausência de deslizamento lateral, temos

$$v_w = d\dot{\theta} \quad (66)$$

Em seguida, substituindo (66) em (62), (63), e combinando com (64) obtemos

$$\dot{v}_u = d\dot{\theta}^2 + \frac{1}{M}(F_{uL} + F_{uR}) \quad (67)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{Md^2 + J}(F_{uR} - F_{uL}) - \frac{Mdv_u}{Md^2 + J}\dot{\theta} \quad (68)$$

As duas equações acima são as equações dinâmicas do robô considerando as restrições não-holonômicas. Estas equações podem agora ser facilmente transformadas para mostrar os torques do atuador aplicados às rodas de forma semelhante às notações usadas na abordagem Lagrangiana.

$$M\dot{v}_u\dot{\theta} - Md\dot{\theta}^2 = \frac{1}{R}(\tau_R + \tau_L) \quad (69)$$

$$(Md^2 + J)\ddot{\theta} + Mdv_u\dot{\theta} = \frac{L}{R}(\tau_R - \tau_L) \quad (70)$$

Em seguida, essas duas equações serão reescritas na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & Md^2 + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_u \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Md\dot{\theta} \\ Md\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_u \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (71)$$

Como pode ser observado, a equação (66) é semelhante à equação (47), que foi obtida utilizando a abordagem Lagrangiana. Observe que na abordagem de Newton-Euler a massa e as inércias das rodas não foram levadas em consideração, e o robô é considerado como um corpo rígido. Portanto, ambas as formulações são equivalentes se os parâmetros de inércia e a massa são definidos como

$$M = m_c \quad (72)$$

$$J = I_c \quad (73)$$

Em seguida, utilizando as equações de cinemática direta (15) e (16), podemos facilmente reescrever as equações dinâmicas gerais (71) em termos das velocidades rotacionais das rodas e torques dos atuadores. Os resultados levam à seguinte formulação

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_R \\ & + \left[ -\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_L \\ & - \left( \frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_L^2 + \left( \frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_R\dot{\varphi}_L = \frac{1}{R}\tau_R \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_L \\ & + \left[ -\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_R \\ & - \left( \frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_R^2 + \left( \frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_R\dot{\varphi}_L = \frac{1}{R}\tau_L \end{aligned} \quad (75)$$

As equações acima também são equivalentes àquelas derivadas utilizando a abordagem Lagrangiana dada pela equação (46).

A Figura (4) mostra o modelo dinâmico do DDMR representando as equações de movimento (69) e (70). Este modelo mostra claramente o acoplamento entre os torques do motor, as velocidades linear e angular do robô, e as velocidades das rodas. Este modelo pode ser adequadamente usado para simulação e análise do DDMR.

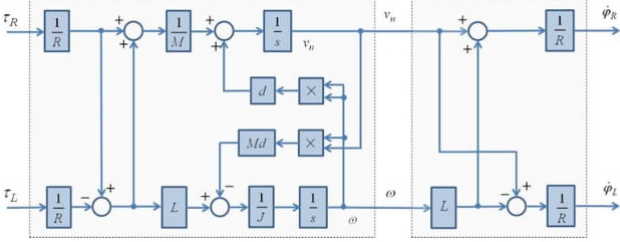


Figura 4. Modelo dinâmico do DDMR

### MODELAGEM DO ATUADOR

Os motores DC que geralmente são usados para acionar as rodas de um sistema de robô móvel com tração diferencial são considerados como os servo atuadores. Em um motor dc controlado por armadura, que é o caso de nosso sistema DDMR, a tensão  $v_a$  de armadura é usada como entrada de controle, mantendo constantes as condições no circuito de campo. Em particular, para um motor dc de ímã permanente, temos as seguintes equações para o circuito de armadura

$$\begin{cases} v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \\ e_a = K_b \omega_m \\ \tau_m = K_t i_a \\ \tau = N \tau_m \end{cases} \quad (76)$$

onde,  $i_a$  é a corrente de armadura,  $(R_a, L_a)$  são a resistência e indutância do enrolamento da armadura respectivamente,  $e_a$  é a força contra eletromotriz,  $\omega_m$  é a velocidade angular do rotor,  $\tau_m$  é o torque do motor,  $(K_t, K_b)$  são as constante de torque e de força contra eletromotriz, respectivamente,  $N$  é a relação da engrenagem, e  $\tau$  é torque de saída aplicado à roda.

Como em um DDMR os motores são mecanicamente acoplados às rodas do robô por meio de engrenagens, as equações mecânicas de movimento dos motores estão ligadas diretamente com as dinâmicas mecânicas do DDMR. Portanto, cada motor dc terá

$$\begin{cases} \omega_{mR} = N \dot{\varphi}_R \\ \omega_{mL} = N \dot{\varphi}_L \end{cases} \quad (77)$$

As equações dinâmicas totais do DDMR com os atuadores são obtidas combinando a equação (76) para cada motor com a dinâmica mecânica do DDMR. Perturbações de torque adicionais atuando sobre as rodas podem ser incluídas como termos aditivos para o torque do motor. A Figura 5 mostra um diagrama de blocos que representa o conjunto do sistema. O modelo cinemático direto(19) pode ser adicionado em cascata ao modelo dinâmico para formar um modelo completo de simulação e análise do DDMR.

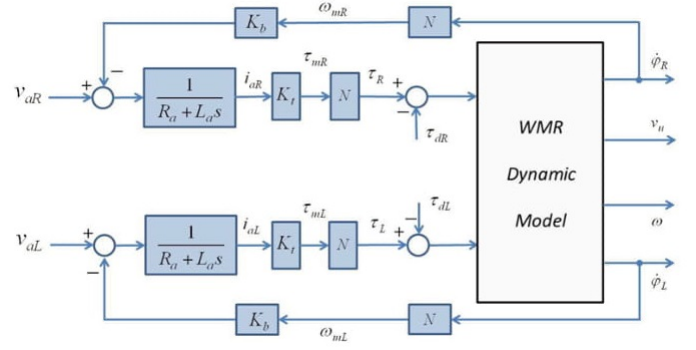


Figura 5. Modelo dinâmico do DDMR com atuadores

### CONCLUSÕES

Apresentamos uma formulação detalhada do modelo dinâmico de um robô móvel de acionamento diferencial usando as abordagens de Lagrange e Newton-Euler. Ambos os métodos se mostraram ser matematicamente equivalentes, proporcionando uma verificação de sua consistência. As equações de movimento dos atuadores também foram acrescentadas para formar o modelo dinâmico completo do DDMR. O conhecimento adquirido neste estudo ajudará os estudantes de engenharia e pesquisadores na modelagem e projeto de controladores adequados para a navegação e rastreamento de trajetória com DDMR.

[1] Mitchell R, Warwick K, Browne WN, Gasson MN, Wyatt J (2010) Engaging Robots: Innovative Outreach for Attracting Cybernetics Students. IEEE Transactions on Educa-

tion 53: 105-113  
[2] Dhaouadi R, Sleiman M (2011) Development of a modular mobile robot platform for motion-control education. IEEE



- Industrial Electronics Magazine 5: 35-45
- [3] Shibata T, Murakami T (2012) Power-Assist Control of Pushing Task by Repulsive Compliance Control in Electric Wheelchair. *IEEE Trans. Ind. Electron* 59: 511-520.
  - [4] Yang SX, Zhu A, Yuan G, Meng MQH (2012) A Bioinspired NeurodynamicsBased Approach to Tracking Control of Mobile Robots. *IEEE Trans. Ind. Electron* 59: 3211-3220
  - [5] Fang Y, Liu X, Zhang X (2012) Adaptive Active Visual Servoing of Nonholonomic Mobile Robots. *IEEE Trans. Ind. Electron* 59: 486-497.
  - [6] Huang HP, Yan JY, Hu Cheng T (2010) Development and Fuzzy Control of a Pipe Inspection Robot. *IEEE Trans. Ind. Electron* 57: 1088-1095
  - [7] Li THS, Yeh YC, Da Wu J, Hsiao MY, Chen CY (2010) Multifunctional Intelligent Autonomous Parking Controllers for Carlike Mobile Robots. *IEEE Trans. Ind. Electron* 57: 1687-1700
  - [8] Campion G, Bastin G, Noel BD (1996) Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robot. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41: 47-62
  - [9] Fukao T, Nakagawa H, Adachi N (2000) Adaptive Tracking Control of a Nonholonomic Mobile Robot. *IEEE Transaction on Robotics and Automation* 16: 609-615.
  - [10] Hou ZG, Zou AM, Cheng L, Tan M (2009) Adaptive Control of an Electrically Driven Nonholonomic Mobile Robot Via Back stepping and Fuzzy Approach. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* 17: 803-815
  - [11] Fierro R, Lewis FL (1997) Control of a nonholonomic mobile robot: back stepping kinematics into dynamics. *Journal of Robotic Systems* 14: 149-163
  - [12] Yamamoto Y, Yun X (1992) On Feedback Linearization of Mobile Robots. Technical Report No. MS- CIS-92-45, Philadelphia, PA
  - [13] Yamamoto Y, Yun X (1992) Coordinating Locomotion and Manipulation of a Mobile Manipulator Technical Report No. MS-CIS-92-18 Philadelphia, PA.
  - [14] Sarkar N, Yun X, Kumar V (1994) Control of mechanical systems with rolling constraints: Application to dynamic control of mobile robots *Int. J. Robot. Res* 13: 55-69
  - [15] Yun X, Yamamoto Y (1993) Internal dynamics of a wheeled mobile robot. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and System (IROS'93)* 2: 1288-1294
  - [16] DeSantis RM (1995) Modeling and Path-tracking Control of a mobile Wheeled Robot with a Differential Drive. *Robotica* 13: 401-410.
  - [17] de Vries TJA, van Heteren C, Huttenhuis L (1999) Modelling and control of a fast moving, highly maneuverable wheelchair. *Proceedings of the International Bio mechatronics Workshop* 6: 110-115.
  - [18] Albagul A, Wahyudi A (2004) Dynamic Modelling and Adaptive Traction Control for Mobile Robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems* 1: 149-154
  - [19] Thanjavur K, Rajagopalan R (1997) Ease of dynamic modelling of wheeled mobile robots (WMRs) using Kane's approach. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 4 : 2926-2931
  - [20] Thanjavur K, Rajagopalan R (1997) Ease of dynamic modelling of wheeled mobile robots (WMRs) using Kane's approach. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 4: 2926-2931
  - [21] Neimark JI, Fufaev NA (1972) Dynamics of Nonholonomic Systems: Translations of Mathematical Monographs. American mathematical Society
  - [22] Bloch A, Crouch P, Baillieul J, Marsden J (2003) Nonholonomic Mechanics and Control