Лабораторная работа № 8
Принятие решений в условиях определенности.
Задача линейного программирования. Графический метод.

Моделирование как метод системного анализа

При проведении системного анализа зачастую исследователи сталкиваются с проблемой эксперимента над системой вследствие значительных материальных затрат и потерь информации. Поэтому необходимо проводить эксперимент над моделями систем, для чего применяют методы планирования эксперимента, «черного ящика», теорию графов, математическое программирование и другие методы в зависимости от сложности задачи и имеющейся информации.

Однако, при математическом моделировании стремление к простым, элементарным моделям, игнорирование важных, влияющих на систему факторов может привести к неадекватности модели реальному объекту. Вообще, соответствие модели может быть экспериментально проверено для отдельных элементов системы. Но для подсистем, а тем более системы в целом, существует высокая вероятность ошибки при принятии решения, связанная с невозможностью оценить адекватность модели большой системы на логическом уровне.

Задачи линейного программирования в системах

Имеется обширный класс задач, связанных с оптимальным распределением ресурсов в экономических, технических, социальных и т.п. системах, которые могут быть системно исследованы с привлечением методологии исследования операций. Приведенные ниже традиционные формулировки задач соответствуют полной информационной определенности.

Реальные задачи приходится решать в условиях риска, неопределенности и неясности, что изменяет их информационное содержание и результаты. Системный подход играет важную роль при постановке задач и их неформальном анализе.

Классификация задач оптимизации

Классификация в зависимости от достоверности информации о задаче.

1. Детерминированная задача. Все параметры задачи заранее известны. Для решения детерминированных задач в основном применяются методы математического программирования.

2. Недетерминированная задача. Не все параметры задачи заранее известны. Например, необходимо принять решение об управлении устройством, некоторые узлы которого могут непредсказуемо выходить из строя. Оптимальное решение недетерминированной задачи исследования

операций (ИО) отыскать практически невозможно. Однако некоторое «разумное» решение отыскать можно.

2,1. Стохастическая задача. Не все параметры задачи заранее известны, но имеются статистические данные о неизвестных параметрах (вероятности, функции распределения, математические ожидания и т.д.).

Для отыскания оптимального решения стохастической задачи применяется один из следующих приемов:

– искусственное сведение к детерминированной задаче (неизвестные параметры заменяются их средними значениями).

– «оптимизация в среднем» (вводится и оптимизируется некоторый статистический критерий).

2,2. Задача в условиях (полной) неопределенности. Статистические данные о неизвестных параметрах отсутствуют. Задачи ИО в условиях неопределенности в основном изучаются в рамках теории игр.

Общая постановка задачи линейного программирования

Общая задача линейного программирования (ЗЛП) состоит в нахождении экстремума (максимума или минимума) линейной целевой функции

$$f(x_1, x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

при ограничениях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,$$

. . . .

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,$$

$a_{ij},\ b_i,\ c_j,\ \ i = 1,m,\ \ j = 1,n$ – заданные постоянные величины.

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений (2), называется *допустимым решением или планом ЗЛП*. Множество всех планов называется допустимой областью или областью допустимых решений. План, который доставляет максимум (минимум) целевой функции, называется оптимальным планом или оптимальным решением ЗЛП. Таким образом, решить ЗЛП – значит найти ее оптимальный план.

Общая ЗЛП может быть приведена к стандартному виду, в котором целевая функция должна быть максимизирована, а все ограничения записаны в виде равенств с неотрицательными переменными:

$$f(x_1, x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0,$$

$$b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Для приведения общей ЗЛП к основной используют следующие очевидные правила.

1. Минимизация целевой функции f равносильна максимизации функции $g = -f$.

2. Ограничение в виде неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$ равносильно уравнению $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$ при условии, что дополнительная переменная $x_{n+1} \geq 0$.

Аналогично

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \\ x_{n+1} \geq 0 \end{cases}$$

3. Если на некоторую переменную x_j не накладывается условие неотрицательности, делают замену переменной

$$x_j = x_j^{'} - x_j^{''},\ x_j^{'} \geq 0,\ x_j^{''} \geq 0.$$

2.3. Графический метод решения ЗЛП

Графический метод может быть применен, если модель содержит только две переменные. В случае трех переменных этот метод становится менее наглядным, а при большем числе переменных – невозможным. Рассмотрим этот метод на примере конкретной задачи.

Пример. Предприятие изготавливает два вида продукции: мороженое и сгущенное молоко. Для их производства используются 3 вида сырья. Расходы исходных материалов и максимальные суточные запасы указаны в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные

Исходный материал	Расход исходных материалов на 1 ед. продукции		Суточный запас сырья	Ед. изм.
	Мороженое	Сгущенное молоко		
Молоко сухое	4	2	20	Упаковка 5 кг
Молоко цельное	15	8	50	Упаковка 10 кг
Сахар	3	1	9	Упаковка 5 кг
Цена 1 уп. продукции, тыс.руб.	5	2		Упаковка 100 кг

Маркетинговые исследования показывают устойчивый суточный спрос на сгущенное молоко – не менее 4 упаковок, расфасованных по 100 кг. Определите оптимальный план производства, максимизирующий суточную выручку компании.

Решение. Обозначим x_1, x_2 – объем производства мороженого и молока сгущенного соответственно (в единицах измерения – упаковка по 100 кг). Выручка от реализации составит (в виде целевой функции) $f(x_1, x_2) = 5x_1+2x_2$.

Построим ограничения задачи. Рассмотрим первое ограничение. На складе имеется всего 20 упаковок сухого молока, необходимых для производства и мороженого, и молока сгущенного. Если будет произведено x_1 упаковок мороженого, то израсходуют $4 \cdot x_1$упаковок молока сухого. Аналогично, на молоко сгущенное израсходуют $2 \cdot x_1$ упаковок молока сухого. Таким образом, на производство всей продукции потратят $(4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1)$ упаковок молока сухого, а всего их на складе 20 упаковок. Следовательно, первое ограничение имеет вид $4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \leq 20$. Проводя рассуждения, построим ограничения задачи в виде системы неравенств:

$$
\begin{array}{ll}
I & \\
II & \\
III & \\
IV & \\
V &
\end{array}
\quad
\begin{cases}
4x_1 + 3x_2 \leq 15, \\
15x_1 + 8x_2 \leq 50, \\
3x_1 + x_2 \leq 9, \\
x_2 \leq 4, \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{cases}
$$

Изобразим на координатной плоскости область допустимых решений. Множество решений каждого из неравенств есть полуплоскость, на которую указывает стрелка (рис. 1)

Граница полуплоскости (прямая) задается соответствующим уравнением (когда знак неравенства заменяется знаком равенства). Полученная таким образом допустимая область – заштрихованный многоугольник. Среди точек этого многоугольника необходимо найти точку, в которой целевая функция f принимает максимальное значение.

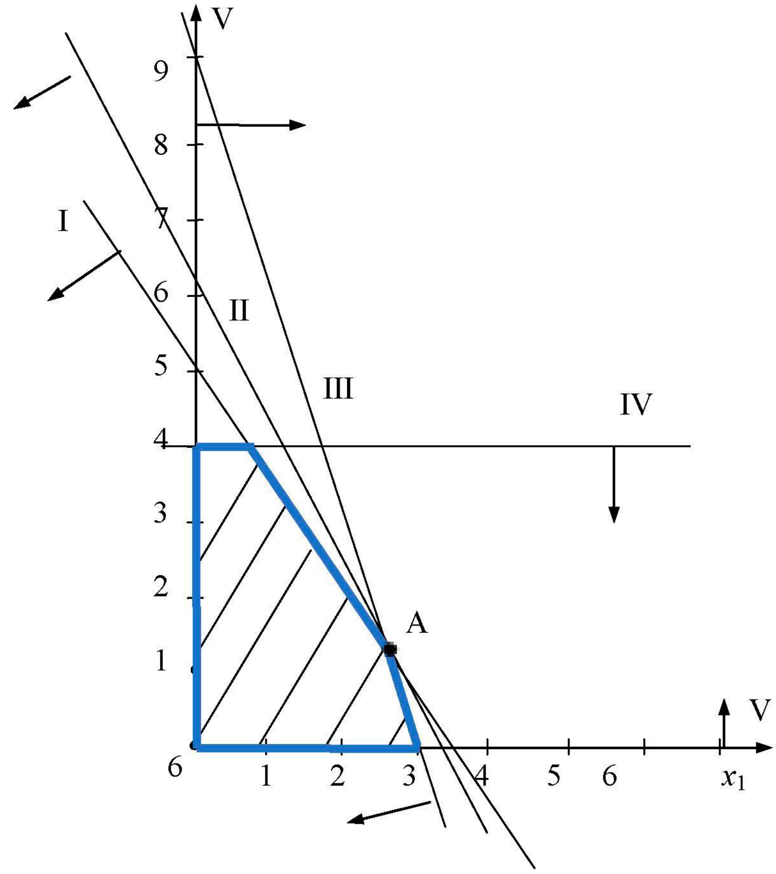

Рис. 1. Построение области допустимых решений задачи

Построим **линию уровня** функции *f*, т. е. линию, вдоль которой эта функция принимает одно и то же фиксированное значение *c*, т. е. $f(x_1, x_2) = const = c$. В данном случае линия уровня $5x_1 + 2x_2 = c$ есть прямая. При различных значениях *c* линии уровня параллельны. На рис. 2 изображены три линии уровня. Одна из них проходит через начало координат и соответствует значению $c = 0$, другая соответствует значению $c = 10$. Вектор нормали $\bar{n}(5;2)$ показывает направление возрастания уровня.

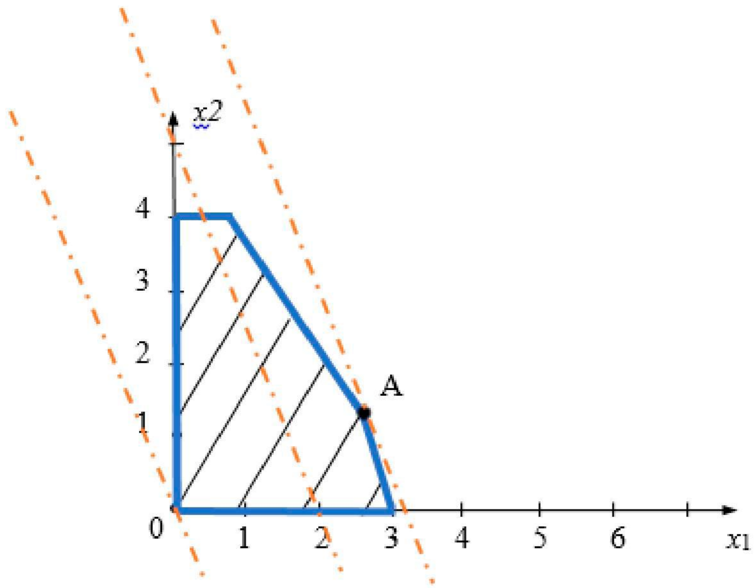

Рис. 2. Построение линий уровня целевой функции

Оптимальное решение достигается в точке А пересечения (это точка допустимой области, соответствующая максимальному значению c). Точка А есть точка пересечения прямых (I) и (II) и поэтому ее координаты определяются из решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 15, \\ 15x_1 + 8x_2 = 50. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_1 = 2\frac{4}{13}$, $x_2 = 1\frac{36}{39}$ упаковок. Оптимальный доход при этом составит

$$f(2\frac{4}{13}, 1\frac{36}{39}) = 5 \cdot 2\frac{4}{13} + 2 \cdot 1\frac{36}{39} = 15\frac{15}{39} \text{ (тыс. руб.).}$$

Полученное оптимальное решение – дробное. В нашем примере единица измерение – упаковка по 100 кг, такой ответ допустим. Если же единица измерения – штуки, то необходимо применять специальные методы целочисленного программирования, такие как: метод ветвей и границ, метод Гоморри, позволяющие получать решение в целых числах.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача 1.

Предприятие изготавливает два вида продукции: мороженое и сгущенное молоко. Для их производства используются 3 вида сырья. Расходы исходных материалов и максимальные суточные запасы указаны в табл. 1.

Таблица 1 – Исходные данные

Исходный материал	Расход исходных материалов на 1 ед. продукции		Суточный запас сырья	Ед. изм.
	Мороженое	Сгущенное молоко		
Молоко сухое	4	3	15	Упаковка 5 кг
Молоко цельное	15	8	50	Упаковка 10 кг
Сахар	3	1	9	Упаковка 5 кг
Цена 1 уп. продукции, тыс.руб.	5	2		Упаковка 100 кг

Маркетинговые исследования показывают устойчивый суточный спрос на сгущенное молоко – не более 4 упаковок, расфасованных по 100 кг. Определите оптимальный план производства, максимизирующий суточную выручку компании.

Задача 2

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Исходные данные

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на 1 ед. продукции		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина 1 вида	0,2	0,1	40
Древесина 2 вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-часов)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.