Estadística Matemática

Sergio Cadavid, Guirlessa De La Hoz, Valerie Martínez, Mariangel Mercado, Alex Teran

April 2025

1. **Deducción de un estimador por el método de momentos**

La función de densidad de probabilidad de una variable:

$$X \sim \text{Uniforme } (0, \theta), \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El valor esperado de X se calcula:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^\theta x \cdot \frac{1}{\theta} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta x dx$$

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\theta = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\theta^2}{2} = \frac{\theta}{2}$$

Dada la muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$, el primer momento muestral es la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Igualar el primer momento poblacional ($E[X] = \frac{\theta}{2}$) con el primer momento muestral ($\bar{X}$):

$$\frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \theta = 2\bar{X}$$

El estimador por el método de momentos es $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$

Calculando $E[\hat{\theta}_1]$

$$E[\hat{\theta}_1] = E[2\bar{X}] = 2E[\bar{X}]$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{(por la linealidad de la esperanza)}$$

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot nE[X] = E[X]$$

$$E[X] = \frac{\theta}{2} \Rightarrow E[\hat{\theta}_1] = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

$$E[\hat{\theta}_1] = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_1 \text{ es insesgado}$$

El estimador insesgado de θ por el método de momentos:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

2. **Calcule el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_2$ de θ. ¿Es sesgado?**

Dado que los $X_i \sim U(0, \theta)$, su función de densidad conjunta es:

$$f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & \text{si } 0 \leq x_i \leq \theta \text{ para todo } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto se reescribe usando el máximo de la muestra:

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \quad \text{si } \theta \geq \max(X_1, \ldots, X_n)$$

Ahora, encontramos el estimador de máxima verosimilitud.

La función $L(\theta)$ decrece con θ, entonces se maximiza cuando θ es lo más pequeño posible pero mayor o igual al valor máximo observado, es decir:

$$\hat{\theta}_2 = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

¿Es sesgado este estimador?

Calcular:

$$E[\hat{\theta}_2] = E[\max(X_1, \ldots, X_n)]$$

La función de distribución acumulada de $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$ es:

$$F_M(m) = P(M \leq m) = P(X_1 \leq m, \ldots, X_n \leq m) = \left(\frac{m}{\theta}\right)^n, \quad \forall 0 < m \leq \theta$$

Entonces la función de densidad de M es:

$$f_M(m) = \frac{d}{dm}F_M(m) = \frac{nm^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < m \leq \theta$$

Se calcula la esperanza:

$$E[M] = \int_0^\theta m f_M(m)\, dm = \int_0^\theta m \cdot \frac{nm^{n-1}}{\theta^n}\, dm = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta m^n\, dm$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \left[\frac{m^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta$$

Entonces:

$$E[\hat{\theta}_2] = E[\max(X_1, \ldots, X_n)] = \frac{n}{n+1}\theta$$

El estimador de máxima verosimilitud es:

$$\hat{\theta}_2 = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

Y sí es sesgado ya que:

$$E[\hat{\theta}_2] = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta$$

3. **Sea $m = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ el mínimo valor de la muestra. Calcule $\mathbb{E}(m)$ y deduzca un estimador insesgado $\hat{\theta}_3$ de θ.**

   Como queremos calcular $\mathbb{E}(m)$, partimos de la f.d. acumulada para hallar la función de densidad.

$$F_X = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & x > \theta \end{cases}$$

$$F_m(x) = P(m \leq x) = 1 - P(m > x)$$

$$P(m > x) = P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x)$$

como tienen la misma distribución

$$= (P(X_1 > x))^n = (1 - P(X_1 \leq x))^n \approx (1 - F_X(x))^n$$

$$\Rightarrow F_m(x) = 1 - P(m > x) \approx 1 - (1 - F_X(x))^n \approx 1 - (1 - x/\theta)^n$$

(Por la definición de la función de distribución acumulada)
Calcularemos la función de densidad derivando $F_m(x)$:

$$f_m(x) = \frac{d}{dx} F_m(x) = \frac{n}{\theta}(1 - x/\theta)^{n-1}$$

Ahora, calcularemos $\mathbb{E}(m)$:

$$\mathbb{E}(m) = \int_0^\theta \frac{n}{\theta}(1 - x/\theta)^{n-1} \cdot x\, dx = \frac{n}{\theta} \int_0^\theta (1 - x/\theta)^{n-1} x\, dx$$

$$u = 1 - x/\theta \Rightarrow du = -\frac{1}{\theta} dx \Rightarrow dx = -\theta du, \quad x = (1 - u)\theta$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(m) \approx \frac{n}{\theta} \int_1^0 u^{n-1}(1 - u)\theta \cdot (-\theta) du$$

$$\approx \frac{n}{\theta} \int_0^1 u^{n-1}(1 - u)\theta^2\, du = n \int_0^1 u^{n-1}(1 - u)\theta^2\, du$$

$$= n\theta^2 \int_0^1 u^{n-1}(1 - u) du$$

$$\approx \frac{n}{\theta} \left(\int_0^1 u^{n-1}\theta^2\, du - \int_0^1 u^n \theta^2\, du \right)$$

$$= \frac{n}{\theta} \left(\left[\frac{u^n \theta^2}{n} \right]_0^1 - \left[\frac{u^{n+1}\theta^2}{n+1} \right]_0^1 \right)$$

$$= \frac{n}{\theta} \left(\frac{\theta^2}{n} - \frac{\theta^2}{n+1} \right) = \frac{n\theta^2}{\theta} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \theta \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{\theta}{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(m) \approx \frac{\theta}{n+1}$$

Ahora definiremos el estimador:

$$\hat{\theta}_3 = (n + 1) \cdot m$$

Nuestro objetivo es que este $\hat{\theta}_3$ sea insesgado.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\hat{\theta}_3) = \theta$$

Verifiquemoslo:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_3) = \mathbb{E}((n+1)\cdot m) = (n+1)\cdot \mathbb{E}(m)$$

$$= (n+1)\cdot \left(\frac{\theta}{n+1}\right) = \theta$$

$$\text{i.e.} \quad \hat{\theta}_3 = (n+1)\cdot m \quad \text{es un estimador insesgado} \quad \blacksquare$$

4. **Calcule la varianza de $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$**

   Varianza del estimador $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$

   Sabemos que $X_i \sim U[0,\theta]$, entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{2}, \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12}$$

   Como $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$, entonces:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) = \mathrm{Var}(2\bar{X}) = 4\cdot \mathrm{Var}(\bar{X}) = 4\cdot \frac{\mathrm{Var}(X)}{n} = 4\cdot \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta^2}{3n}}$$

   Varianza del estimador $\hat{\theta}_2 = \max(X_1,\ldots,X_n)$

   Esperanza de M:

$$\mathbb{E}[M] = \int_0^\theta x f_M(x)\,dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n\,dx = \frac{n}{\theta^n}\cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta$$

   Esperanza de M^2

$$\mathbb{E}[M^2] = \int_0^\theta x^2 f_M(x)\,dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\cdot \frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

   Entonces, tenemos que

$$\mathrm{Var}(M) = \mathbb{E}[M^2] - (\mathbb{E}[M])^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2$$

$$= \theta^2 \left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} \right)$$

$$= \theta^2 \cdot \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \theta^2 \cdot \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}}$$

Varianza del estimador $\hat{\theta}_3 = (n+1) \cdot m$, con $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$

Esperanza del mínimo

$$\mathbb{E}[m] = \int_0^\theta x \cdot f_m(x) dx = \int_0^\theta x \cdot n \cdot \frac{(\theta - x)^{n-1}}{\theta^n} dx$$

Hacemos el cambio $u = \theta - x \Rightarrow x = \theta - u$, $dx = -du$, entonces:

$$\mathbb{E}[m] = \int_0^\theta (\theta - u) \cdot n \cdot \frac{u^{n-1}}{\theta^n} du = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta (\theta u^{n-1} - u^n) du$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left(\theta \cdot \frac{\theta^n}{n} - \frac{\theta^{n+1}}{n+1} \right) = \theta \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{\theta}{n+1}$$

Esperanza del cuadrado del mínimo

$$\mathbb{E}[m^2] = \int_0^\theta x^2 \cdot f_m(x) dx = \int_0^\theta x^2 \cdot n \cdot \frac{(\theta - x)^{n-1}}{\theta^n} dx$$

Cambiando variable como antes:

$$= \int_0^\theta (\theta - u)^2 \cdot n \cdot \frac{u^{n-1}}{\theta^n} du = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta (\theta^2 - 2\theta u + u^2) u^{n-1} du$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\theta^2 \int_0^\theta u^{n-1} du - 2\theta \int_0^\theta u^n du + \int_0^\theta u^{n+1} du \right]$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left(\theta^2 \cdot \frac{\theta^n}{n} - 2\theta \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} + \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \right) = \theta^2 \left(1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

Así,

$$\mathrm{Var}(m) = \mathbb{E}[m^2] - (\mathbb{E}[m])^2 = \theta^2 \left(1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{\theta}{n+1}\right)^2$$

$$= \theta^2 \left[\left(1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(m) = \frac{\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}}$$

Entonces:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3) = (n+1)^2 \cdot \mathrm{Var}(m) = (n+1)^2 \cdot \frac{\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2}{n+2}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3) = \frac{\theta^2}{n+2}}$$