Wahadło matematyczne

Marek Łukasiewicz

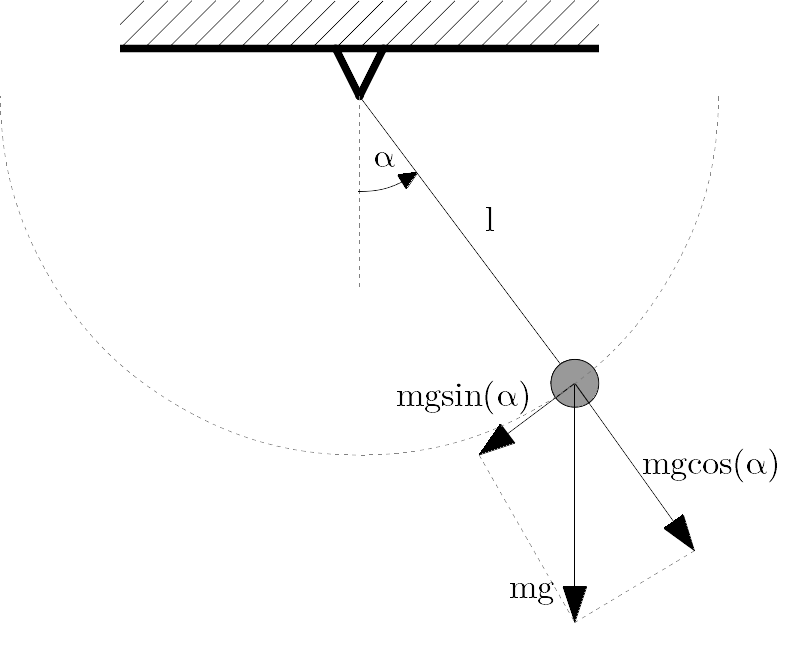
czerwiec 2017

# Techniki komputerowe II - zadanie domowe nr 2

**Zadanie:** Różniczkowe równania ruchu wahadła matematycznego o dużym wychyleniu tzn.

## Wyprowadzenie

Opiszmy ruch punktu materialnego we współrzędnych biegunowych o początku w punkcie zamocowania nici. Ponieważ nić jest nieważka i nierozciągliwa, stale pozostaje prosta, a punkt porusza się po okręgu o promieniu . Na potrzeby tego modelu załóżmy że odchylenie nici od pionu nie przekracza .



Wtedy:

##### Równowaga sił na kierunku normalnym:

gdzie to napięcie nici

##### Zasada zmienności krętu:

Jeśli dodatkowo wprowadzimy prędkość kątową $\Large{ \omega = \frac{d\alpha}{dt} }$, można przekształcić powyższe równanie różniczkowe II rzędu na układ dwóch równań I rzędu:

$$\Large{ \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(\alpha) \\ \frac{d\alpha}{dt} = \omega \end{cases} }$$

### Energia mechaniczna

Energia mechaniczna jest sumą energii mechanicznej potencjalnej i kinetycznej:

Ponieważ jednorodne pole grawitacyjne które jest zadane w tym zadaniu jest polem potencjalnym, można liczyć energię potencjalną grawitacji jako różnicę potencjałów. Przyjmując za poziom odniesienia położenie równowagi, otrzymujemy:

Energię kinetyczną obliczymy korzystając z podstawowego wzoru:

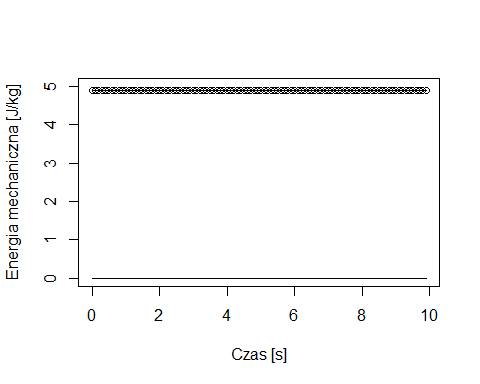
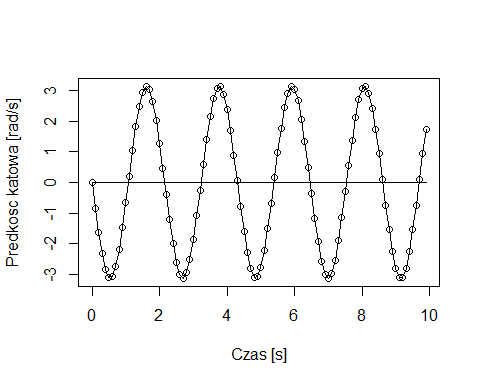
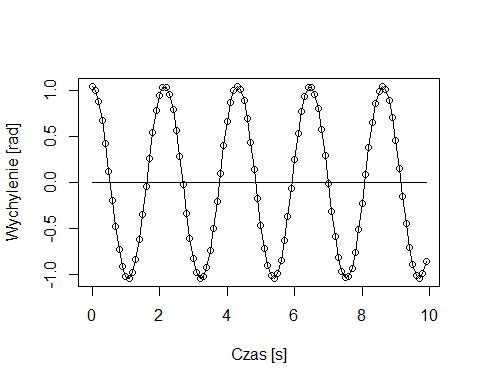
$$\large{ \begin{cases} E\_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \\ v = \omega \cdot l \end{cases} } \implies E\_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot l^2$$

Ponieważ masa punktu nie wpływa na opis ruchu, jedynie na wartość energii mechanicznej, dla wygody przedstawimy energię po podzieleniu przez masę.

## Przykładowe dane

### Zestaw 1:

Przyspieszenie ziemskie , wahadło długości , o początkowym wychyleniu , bez nadanej prędkości początkowej



### Zestaw 2:

Przyspieszenie ziemskie , wahadło długości , o początkowym wychyleniu , z nadaną początkową prędkością

