Configuraties van magnetische balletjes

Tweedejaarsproject bachelor natuur- en sterrenkunde

Universiteit van Amserdam

Maarten Post   David Hendriks

5 juli 2013

Samenvatting

Door gebruik te maken van Mathematica is een model gemaakt voor magnetische speelgoedballetjes, beter bekend als Neocubes of Neoclicks. In dit onderzoek is ervan uitgegaan dat de magnetische balletjes zijn te beschouwen als dipolen. Het programma in Mathematica berekend de dipoolconfiguratie, het magneetveld, de resulterende krachten en de energiewaarde van een configuratie balletjes door middel van een relaxatieproces. Door de onderzochte configuraties met echte magnetische balletjes na te maken is geconcludeerd dat het programma werkt naar behoren. Ook is onderzocht of twee hangende kettingen van magnetische balletje, in een parallel opgelijnde situatie, onder invloed van de zwaartekracht aan elkaar klikken. De interesse naar stabiele configuraties komt van het feit dat de balletjes als 'puzzel' bedoelt zijn en men moet proberen om een zo ingewikkelt mogelijk figuur te bouwen. Eerder onderzoek hierna is gedaan door Ruud Hendriks [1].

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Dit verslag behandeld het onderzoek uitgevoerd door Maarten Post en David Hendriks tijdens het tweedjejaarsproject van hun bachelor natuur- & sterrenkunde, begeleidt door prof. dr. Nienhuis gedurende 3 tot 28 juni 2013.

1.1 Stabiele configuraties

Na puzzels als de 'Rubikscube' zijn de 'Neoclicks' de nieuwe puzzel voor natuur- en wiskundestudenten. Men kan van deze magnetische speelgoedballetjes zeer complexe figuren maken en de mogelijkheden zijn eindeloos. Deze balletjes zijn onder andere gemaakt van het metaal neodymium wat een zeer sterke ferromagneet is. Het leuke aan deze balletjes is dat het niet als blokken in elkaar gezet kan worden maar men rekening dient te houden met de magnetische krachten die niet altijd 'meewerken'. Hier onstaat ook de interesse van uit een natuurkundig oogpunt, wat doen deze magnetische krachten allemaal?
In dit onderzoek wordt op een bepaalde manier dezelfde vraag gesteld als die van een puzzelaar: 'welke configuraties kan ik maken?'. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van magnetostatica [2] en Mathematica.

1.2 Twee hangende kettingen

Een ander opvallend vraagstuk, geopperd door prof. dr. Nienhuis, is wat gebeurt er als men twee lange kettingen van balletjes naast elkaar laat hangen. De kettingen stoten elkaar af vanwege de magnetische kracht maar als men de kettingen naar elkaar drukt en twee balletjes tegen elkaar aan laat klikken gaat de rest van de ketting van zelf ook tegen elkaar aan klikken. Nu is de vraag of dit ook kan gebeurden door de zwaartekracht, en zo ja hoelang moeten de kettingen dan zijn?'
Dit onderzoek probeert een antwoord te geven op de vragen 'Welke configuraties van magnetische balletjes zijn stabiel?' en 'Hoelang moeten twee kettingen van balletjes zijn zodat deze spontaan aan elkaar klikken?'.

2 Theorie

2.1 Dipoolveld

De magnetische balletjes worden tijdens dit onderzoek gezien als een dipool in het midden van het balletje met een harde bolschil daarom heen. Het magnetischveld van een dipool is:

$$B_{dip}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}] \tag{1}$$

waar $\vec{m}$ staat voor het magnetische-dipool-moment-vector van het balletje. In het onderzoek naar stabiele configuraties wordt de magnetische permabiliteit van het vacuüm μ_0 gelijk gesteld aan 4π zodat de voorterm wegvalt.

2.2 Krachten

Als een dipool zich in een magneetveld bevindt dan ondervind deze een torsiekracht zodanig dat $\vec{m}$ in de richting van dit veld zal draaien. Voor de torsie N geldt:

$$N = \vec{m} \times \vec{B} \tag{2}$$

Voor de potentiele energie van een dipool $\vec{m}$ in een magneetveld $\vec{B}$ geldt

$$E_p = \vec{m}\cdot\vec{B} \tag{3}$$

daaruit volgt de kracht

$$F = \nabla E_p = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) \tag{4}$$

Een stabiele configuratie wordt gedefinieerd door de som van de krachtvectoren, als deze netto nul is of in het minimum zit wordt een configuratie stabiel genoemd. Voor de kracht die een balletje 1 op balletje 2 uitoefent substitueren we vergelijking 1 in vergelijking 4

$$F = \nabla(\vec{m}_1\cdot\vec{B}_2) = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5}[(\vec{m}_1\cdot\hat{r})\vec{m}_2 + (\vec{m}_2\cdot\hat{r})\vec{m}_1 + (\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2)\hat{r} - \frac{5(\vec{m}_1\cdot\hat{r})(\vec{m}_2\cdot\hat{r})}{r^2}] \tag{5}$$

Voor grote aantalen balletjes berekenen we de kracht numeriek met mathematica.

2.3 Waarden van de neocubes

De magnetische ballen zijn gemaakt van o.a. Neodymium. Het is niet het pure element maar een alliage van Neodymium, Ijzer en Boron.

Er bestaan een aantal gradaties van sterkte en soort neodymium magneet. Varierend van N24 tot N52, met de N voor Neodymium en het getal is het maximale energie product, het punt aan waar het product van het B-veld en het H-veld op zijn maximum is, in Mega-Gauss Oersteds (MGOe). 1 MGOe is gelijk aan $\frac{7958\ kJ}{m^3}$

Hier volgt enkele informatie over de magnetische balletjes zoals die verkocht worden:

Materiaal	$Nd_2Fe_{14}B$
Gradatie	N35
KristalStructuur	$Tetragonaal$
Radius	0.25 cm
Soortelijk gewicht	$\frac{1081.12\ gram}{mol}$
Dichtheid	$\frac{7.3-7.5\ gram}{cm^3}$
Volume per balletje	$6.54498 * 10^{-8}\ m^3$ Of $0.0654498\ cm^3$
Gewicht per balletje	0.484329 $gram$
Magnetische permabiliteit	$1.05\ *\ \mu_0$

2.4 Situatie van twee kettingen

In de situatie waar twee kettingen in een parallelle configuratie(zie onderstaand Figuur), kan het zo zijn dat de twee kettingen zodanig dicht (horizontaal) in de buurt van elkaar hangen dat ze 'spontaan' tegen elkaar aan klikken. Dit gevolg ziet er dan uit als een rits die wordt dichtgeritst

In deze configuratie wordt er hoofdzakelijk gekeken naar twee krachten die werken op de magnetische balletjes. Ten eerste de zwaartekracht; elk balletje is zo zwaar als zijn eigen massa plus alle opvolgende balletjes, hij moet namelijk de rest 'dragen'. Zodoende is de bovenste het zwaarst en de onderste het lichtst.

Daarnaast wordt er ook naar de horizontale magnetische afstoting gekeken. Dit is het werkende mechanisme achter het onderling wegduwen van de twee rijen. Een voorbeeld hiervan ziet er zo (zie onderstaand figuur) uit.

Er is een keuze gemaakt om de andere richtingen van de magneetkracht niet te beschouwen. Deze zullen ten eerste er niet voor zorgen dat de kettingen verder of dichterbij elkaar komen te staan. Ten tweede is het wel degelijk het geval de de krachten in de verticale richting iets uitmaken in de realiteit, namelijk het in stand houden van de ketting ofwel de magnetische ballen aan elkaar binden. Dit is bekend maar het is niet nodig om dit mee te nemen in het programma, aangezien de bindingskracht zo sterk is dat ze zelfs met meer dan honderd(?) aan 1 magneet kunnen hangen. Wanneer in de simulatie de conclusie is dat er zelfs met meer dan honderd(?) magneten per ketting het ritsen nogsteeds niet plaatsvind valt er te concluderen dat dit dus nooit gaat gebeuren in de bijbehorende opstelling.

De zwaartekracht kan zodanig sterk zijn dat de het grootste deel van de magneten bovenaan bij benadering loodrecht naar beneden hangen en dit kan als gevolg hebben, wanneer de afstand tussen de bovenste twee magneten klein genoeg is, dat de twee kettingen gaan ritsen. Wanneer en bij welke onderlinge afstand tussen de twee bovenste magneten dit gebeurt is de vraag en dat zal geprobeerd worden te onderzoeken.

3 Methode

3.1 Stabiele Configuraties

3.1.1 Input

Het programma in Mathematica heeft als input een lijst met positievectoren, deze geven de posities van de balletjes aan en dus ook de configuratie die onderzocht wordt. Vervolgens wordt door mathematica aan elk van de balletjes een dipool toegekend, de lengte van de dipool is voor elk balletje hetzelfde omdat we ervanuit gaan dat de balletjes even sterk zijn. De richting van de dipolen is aanvankelijk willekeurig. De rest van het programma berekend de richtingen van dipolen waarvan de totale energie het laagst is, ookwel grondtoestand genoemd.

```
lijst.posities = Tuples[{20, 40, 60}, 3];

lijst.dipolen = Table[{RandomInteger[{−10, 10}], RandomInteger[{−10, 10}],
RandomInteger[{−10, 10}]}, {Length[lijstp]}];
```


```
lijst.posities = Tuples[{20, 40, 60}, 3];

lijst.dipolen = Table[{RandomInteger[{−10, 10}], RandomInteger[{−10, 10}],
RandomInteger[{−10, 10}]}, {Length[lijstp]}];
```


3.1.2 Magnetisch veld

Aangezien van elke magnetisch balletje het magnetisch veld bekend is, kan het totale veld berekend worden door een superpositie te nemen van alle dipoolvelden.

```
positie[r_]:=lijst.positie[[r]]
lengte[w_]:=Sqrt[(x − Part[postitie[w], 1])^2 + (y − Part[postitie[w], 2])^2 + (z − Part[postitie[w], 3])^2]
r[e_]:=({x, y, z} − postitie[e])/lengte[e]
B[i_]:=(3 ∗ (Normalize[lijstm[[i]]].r[i])r[i] − Normalize[lijstm[[i]]])/lengte[i]^3
Btot = Sum[B[i], {i, Length[lijstp]}];
```


```
positie[r_]:=lijst.positie[[r]]
lengte[w_]:=Sqrt[(x − Part[postitie[w], 1])^2 + (y − Part[postitie[w], 2])^2 + (z − Part[postitie[w], 3])^2]
```

r[e_]:=($\{x, y, z\}$ − postitie[e])/lengte[e]

B[i_]:=(3 ∗ (Normalize[lijstm[[i]]].r[i])r[i] − Normalize[lijstm[[i]]])/lengte[i]^3

Btot = Sum[B[i], {i, Length[lijstp]}];

3.1.3 Herschikking dipolen

Op een willekeurige volgorde worden alle richtingen van de dipolen veranderd, zodat deze in de richting van het externe magnetische veld wijzen. Deze verandering beinvloed uiteraard het totale magnetische veld en daarom dient deze handeling herhaald te worden. Na een aantal keer dit proces herhaald te hebben is de grondtoestand bereik en veranderen de dipolen niet of nauwelijks meer. Hier dient wel vermeld te worden dat de dipolen op dit moment nog hele kleine veranderingen in richting hebben ondergaan maar dit is te verklaren door de nauwkeurigheid van het programma. Afhankelijk van complexiteit van de configuratie wordt de grondtoestand tussen de drie en honderd keer herschikken bereikt.

```
For[j = 1, j ≤ 500, j++,
{LijstR = RandomSample[Range[1, Length[lijstp]]],
For[i = 1, i ≤ Length[lijstp], i++,
{
R = Part[LijstR, i],
lijstm[[R]] =
Normalize[((Btot − B[R])//N)/.{x → Part[p[R], 1], y → Part[p[R], 2],
z → Part[p[R], 3]}],
B[R] = (3 ∗ (Normalize[lijstm[[R]]].r[R])r[R] − Normalize[lijstm[[R]]])/len[R]^3,
Btot = Sum[B[e], {e, Length[lijstp]}]
}
], If[Mod[j, 10] == 0, Print[Style[j, 20, Red]]]
}
]

For[j = 1, j ≤ 500, j++,
{LijstR = RandomSample[Range[1, Length[lijstp]]],
```

```
For[i = 1, i ≤ Length[lijstp], i++,
{
R = Part[LijstR, i],
lijstm[[R]] =
Normalize[((Btot − B[R])//N)/.{x → Part[p[R], 1], y → Part[p[R], 2],
z → Part[p[R], 3]}],
B[R] = (3 ∗ (Normalize[lijstm[[R]]].r[R])r[R] − Normalize[lijstm[[R]]])/len[R]^3,
Btot = Sum[B[e], {e, Length[lijstp]}]
}
], If[Mod[j, 10] == 0, Print[Style[j, 20, Red]]]
}
]
```

3.1.4 Output

Het meeste triviale onderdeel van het programma is de output. Mathematica is zeer geschikt om driedimensionale afbeeldingen te genereren en daar wordt gebruik van gemaakt. Op de afbeelding zijn om elke positievector een balletje getekend en zijn de (gerangschikte) dipoolvectoren en krachtvectoren zichtbaar.

```
Ballen = Table[Sphere[p[n], 10], {n, 1, Length[lijstp]}];
Polen = Table[Arrow[{p[j], p[j] + 10Normalize[lijstm[[j]]]}], {j, 1, Length[lijstp]}];

Output = Show[
Graphics3D[
{Opacity[.2], ColorFunction → Hue, Ballen}],
Graphics3D[Polen]


]
```

```
Ballen  = Table[Sphere[p[n], 10], {n, 1, Length[lijstp]}];

Polen = Table[Arrow[{p[j], p[j] + 10Normalize[lijstm[[j]]]}], {j, 1, Length[lijstp]}];


Output = Show[

Graphics3D[

{Opacity[.2], ColorFunction → Hue, Ballen}],

Graphics3D[Polen]


]
```

3.1.5 Stabiliteit bepalen

Als de configuratie de grondtoestand heeft bereikt kan gekeken worden naar de kracht vectoren. Als deze niet netto nul geven is de configuratie niet stabiel, het kan echter ook zo zijn dat de configuratie zich in een krachten-minimum bevindt en dit is niet per definitie onstabiel. Deze controle gebeurt door de output handmatig te bestuderen.

3.2 Twee Hangende kettingen

Doormiddel van Mathematica is er ook een simulatie gemaakt waarbij er twee kettingen welke parallel opgelijnd staan naast elkaar worden gehangen. Hier spelen uiteraard krachten in mee en deze zijn gesimuleerd.

3.2.1 Input, Definities en Voorwaarden

Het eerste deel van de code bevat het invoeren van de beginpositie van de bovenste ballen aan beide kettingen. Vervolgens kan er een aantal ballen worden opgegeven, het aantal iteraties voor de relaxatie-loop, en de DH. De DH is hoeveelste van de berekende hoek tussen de zwaartekrachtsvector en de resulterende vector (deze als gevolg van zwaartekracht tegenover magneetkracht) er daadwerkelijk wordt gebruikt om de dipolen te pivoteren.
(HIER DE CODE VOOR HET BEGIN)

3.2.2 Dipolen

Het genereren van dipolen is belangrijk, aangezien deze de daadwerkelijke kracht genereren zoals te zien is in de (formule voor de kracht). Dit gebeurt in dit proces door een lijn te trekken tussen de voorgaande magneet en de volgende magneet, en vervolgens een genormaliseerde (lengte 1) vector te genereren. Deze ligt parallel aan de lijn zoals hiervoor

beschreven en deze is gepositioneerd op het punt welke tussen de andere twee magneten ligt. Deze benadering zorgt ervoor dat de dipoolrichtingen ofwel op een lijn liggen, ofwel een kromme volgen
(HIER DE CODE VOOR DIPOLEN)

3.2.3 Krachten laten werken en posities/dipolen aanpassen

Nadat de dipolen zijn gegenereerd is het mogelijk om de krachten daadwerkelijk te laten werken op elke dipoolmagneet. Hierdoor wordt een magneetkracht vector gevormd en een zwaartekrachtsvector. Tussen de resulterende vector en de zwaartekrachtsvector wordt een hoek berekend. Vervolgens wordt de dipool met diezelfde hoek (indien voor een correcte DH, zie boven, is gekozen) gedraaid. Dit valt zou je het best kunnen beschrijven als het pivoteren rond een bepaald punt, waar het bepaalde punt de positie van de voorgaande dipool is.
(HIER CODE VOOR DRAAIEN)

Wanneer de posities zijn aangepast kunnen de dipoolvectoren weer worden berekend, en kan het hele proces overnieuw plaatsvinden.

3.2.4 Output

De output van deze berekening is hoofdzakelijk een afbeelding van de twee kettingen, waarbij in een dynamisch process is te zien wat er gebeurt als de krachten werken op de magneten. Om dit te genereren, en een goede benadering te maken is een iteratief process nodig wat de voorgaande functies en opdrachten van de code een aantal keer herhaald. Dit is vergelijkbaar met het relaxatieproces van de code in 'Stabiele Configuraties'.

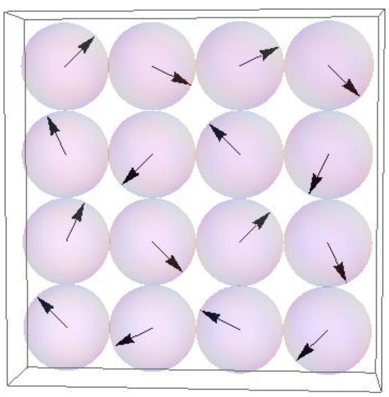
Een aanpassing op onze laatste versie is de extra voorwaarde voor wanneer de kettingen daadwerkelijk 'ritsen'. Dit zal vervolgens een numerieke benadering worden waarin het aantal magneten per ketting telkens wordt verhoogd, en waarbij wordt gekeken of er aan de voorwaarde van het 'ritsen' wordt voldaan. Een andere variabele is het aanpassen van de onderlinge afstand van de bovenste magneten. Dit is echter in een andere situatie niet nodig. Deze situatie bevat een driekhoeksformatie bovenaan waarbij de kettingen aan de hoekpunten van de driehoek hangen.

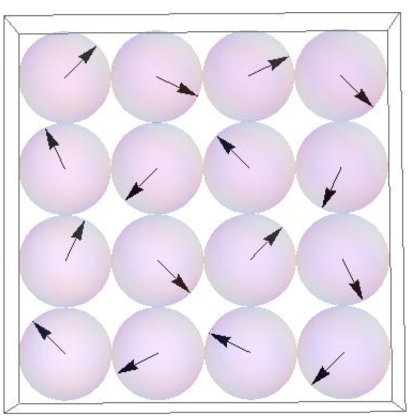
4 Resultaten

Het programma is een platform voor veder onderzoek naar de balletjes, omdat het zowel het magneetveld, de engergie waarden en de krachten kan bekijken. Tijdens dit onderzoek zijn een aantal bekende configuraties onderzocht, omdat deze configuraties makkelijk na zijn te maken met echte balletjes en dus ook makkelijk te controleren is of het programma een juiste voorspelling maakt. Hieronder volgen enkele van de configuraties die zijn doorgerekend en welke conclusies aan het resultaat kunnen worden verbonden.

4.1 Herschikken van de dipolen

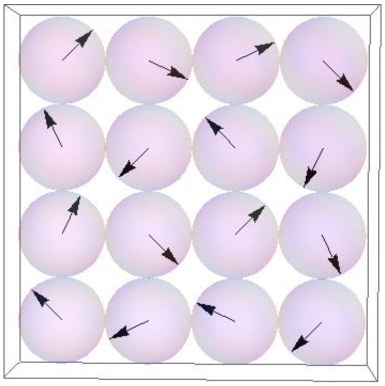
Om een goed inzicht te krijgen in wat er gebeurt tijden het herschikken van de dipolen volgen hier onder verschillende 'opnames' van een plat vlak met balletjes

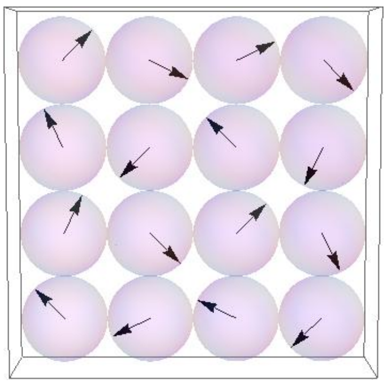




4.2 Rijen

De simpelste configuratie balletjes is een ketting, waar de dipolen allemaal in de richting van de ketting wijzen. Wat interessanter is zijn twee rijen naast elkaar omdat hier namelijk twee verschillende van rangschikken zijn, een parallelle en een anti-parallelle (zie figuur hieronder). Naar de hand van ons model en een aantal simulaties is de conclusie dat de





anti-parallelle configuratie de laagste energiewaarde heeft.
(FIGUUR PARALLEL EN ANTI-PARALLEL)

4.3 Kubus

Een interessante configuratie om in elkaar te zetten is de kubus. Er is gezien dat niet alle kubusen stabiel zijn.

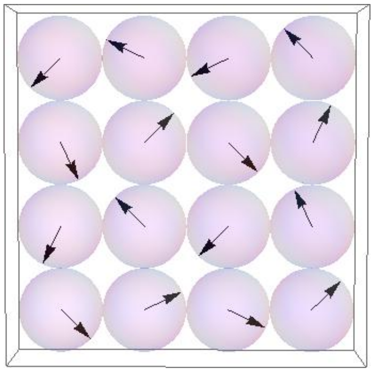
4.3.1 2^3 kubus

4.3.2 3^3 kubus

4.3.3 N^3 kubus

4.4 3 bij 3 vlak

Bij een configuratie van negen balletjes in een vierkant voorspeld het programma een krachtvector op het middelste balletje. In het echt is deze configuratie wel te maken, hoewel zeer onstabiel. Dat dit mogelijk is is te verklaren door in acht te nemen dat er nog een wrijvingskracht werkt op het middelste balletje waardoor deze situatie in het echt toch mogelijk is.



4.5 Twee Parallelle Ketingen

Hier zijn op dit moment nog geen uitsluitende resultaten voor beschikbaar. Deze zullen in de tweede versie wel beschikbaar zijn.

5 Discussie

5.1 Vergelijking met programma R.Hendriks

De resultaten die het programma opleverde waren zoals te verwachten. Het grootste nadeel aan het programma is dat bij configuraties met een groot aantal magneten het erg lang duurt voordat de grondtoestand is bereikt. Het is onduidelijk of het programma geschreven door R.Hendrikx[1] sneller deze berekeningen uitvoerd. Wat wel opvalt is dat hoewel het programma onafhankelijk van elkaar is gemaakt en een andere methode gebruik, het programma van R.Hendrikx[1] herschikt de dipolen namelijk zodanig dat de energiewaarde lager wordt inplaats van het oplijnen naar de hand van het magneetveld zoals ons model, het toch dezelde resultaten geeft.

5.2 Weerstand

Zoals in 4.4 al genoemd wordt is het soms mogelijk onstabiele configuraties toch te bouwen. Dit is in dit onderzoek verklaard door te stellen dat wrijving de netto kracht kan opheffen. Een reden om dit te onderbouwen is dat het zeer moeilijk is deze configuraties te bouwen en deze bij een kleine verstoring verspringen naar een andere configuratie

5.3 Verder onderzoek

Omdat er veel tijd is gestoken in het schrijven van het programma is er weinig aandacht besteed aan het bestuderen van complexere configuraties waardoor de resultaten groten deels overeen komen met eerder onderzoek. Veder onderzoek zou zich kunnen richten op hoe de energiewaarden zich verhoud met de complexiteit van configuraties.

5.4 Hangende kettingen

In het onderzoek naar het effect en de gevolgen van twee parallel opgelijnde kettingen is er moeite geweest met een realistische benadering. Om echt iets zinnigs te kunnen zeggen over het gedrag van deze situatie zijn de correcte fysische waarden nodig. De werkelijke grootte van de kracht op de dipool moet worden ingevoerd en de randeffecten moeten worden meegenomen. Het eerste is opgelost door een correcte waarde te proberen te benaderen. Dit door het programma met verschillende grootte van magneetsterkte te laten werken, en vervolgens kijken wat het meest op de realiteit lijkt.

De randeffecten zijn tot nog toe onoverkoombaar gebleken, en de keuze is gemaakt om de magneten te beschouwen als pure dipolen welke gesitueerd zijn in het midden van de ballen waardoor het een dipool met een harde schil wordt.

Daarnaast is ook de wrijving buitenwegen gelaten, omdat dit nagenoeg onmogelijk is om te simuleren.

In sommige situaties werden de dipolen te veel gedraaid waardoor en een chaotische beweging ontstond en om dit te verhelpen is de variabele 'DH', welke de draaiing indempt, het leven ingeroepen.

6 Conclusie

6.1 Stabiele configuraties

Het programma wat gemaakt is geeft goede voorspelling over configuraties van de magnetische balletjes, en kan bij verder onderzoek gebruikt worden. Alle resultaten van configuraties die onderzocht zijn komen overeen met wat gezien is bij de echte magnetische balletjes, kleine afwijkingen kunnen verklaard worden door het verwaarlozen van de wrijving. Alle resultaten komen overeen met die geproduceerd met het programma van R.Hendrikx **??**. Een nadeel aan het programma is dat het bij configuraties met veel balletjes lang duurt voordat de grondtoestand is gevonden.

6.2 Hangende kettingen

De code die geschreven is voor de simulatie van de hangende kettingen werkt zoals het zou moeten en zou met enige aanpassingen een zeer correcte benadering kunnen maken voor de realiteit. Nu al zijn grote overeenkomsten met de werkelijke situatie te zien. Een verandering en aanpassing van de variabelen, en er voor zorgen dat de waarden die er gebruikt zijn ook fysisch verantwoord zijn kunnen er voor zorgen dat er een correct model ontstaat.

Een concluderend antwoord op de vraag: 'Wanneer ritsen de twee kettingen aan elkaar?' wordt beantwoord met: 'hoogstwaarschijnlijk nooit'. Dit is een 'educated guess', maar het gevoel komt bij ons op dat er een evenwicht gaat ontstaan tussen de afstoting en 'rechttrekking' door de zwaartekracht. Het programma heeft tot nog toe geen uitsluitsel kunnen geven hierop, aangezien het nog niet helemaal werkt zoals het hoort en er nog geen voorwaarde in is gestopt om de computer een antwoord op te laten geven.

Referenties

[1] Ruud Hendrikx, *Harde Magnetische dipolen*, Universiteit van Amsterdam, Bachelorproject Natuur en Sterrenkunde, 2011.

[2] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Pearson, Fouth edition.