Ongelijkheden voor groot en klein

Peter Vandendriessche
peter.vand-endriessc-he@gma-il.com
(zonder die liggende streepjes)

startdatum: 12 juni 2004
laatste bewerking: 12 maart 2010

Ondersteunend forum op http://www.problem-solving.be/index.php?f=231

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Triviale ongelijkheden

1.1 Inleiding

Ongelijkheden zijn één van de favoriete onderwerpen in veel belangrijke wiskundecompetities als IMO, IMC, Putnam... Het concept is simpel: je gaat bij een bepaalde redenering het argument benutten dat $A > B$ (of $A < B$ of $A \leq B$ of $A \geq B$), om zo tot een interessante conclusie te komen. Soms vraagt men zelfs droogweg om een bepaalde ongelijkheid te bewijzen.

Twee mooie voorbeelden van een klassieke ongelijkheidstoepassing zoals je ze vaak aantreft zijn de volgende.

Voorbeeld. *(NWO 2003) Bepaal alle $n \in \mathbb{Z}$ waarvoor er $a, b \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat*

$$n = a(a+1) = b(b+1)(b+2)(b+3).$$

Oplossing. *Beide leden +1 geeft:* $a^2 + a + 1 = b^4 + 6b^3 + 11b^2 + 6b + 1 = (b^2 + 3b + 1)^2$.

Voor $a > 0$ kan $a^2 + a + 1$ echter nooit het kwadraat van een geheel getal zijn, daar $a^2 < a^2 + a + 1 < (a+1)^2$, dus daar $b^3 + 3b + 1 \in \mathbb{Z}$ moet $a \leq 0$.

Echter, we zien ook dat als (a, b) een oplossing is, dan $(-a-1, -b-3)$ ook een oplossing is (vul gewoon in en zet bij iedere factor een minteken voorop). Dus als er een oplossing was voor $a < -1$ zou dit een oplossing geven voor $a > 0$, die er niet is. Dus moet $a \in \{-1, 0\}$. En voor $a \in \{-1, 0\}$ is uiteraard $n = 0$ de enige oplossing. $\square$

1.2 De triviale ongelijkheid

Stelling. *(Triviale ongelijkheid) Zij $x \in \mathbb{R}$. Dan geldt:*

$$x^2 \geq 0,$$

bovendien treedt gelijkheid op als en slechts als $x = 0$.

Bewijs. *Gevalstudie naargelang het teken van x:*

- *Als $x > 0$ dan is uiteraard $x^2 > 0$.*
- *Als $x = 0$ dan is $x^2 = 0$.*
- *Als $x < 0$ dan is $-x > 0$ dus is $x^2 = (-x)(-x) > 0$.* $\square$

Enerzijds noemt men dit de triviale ongelijkheid, anderzijds noemt men een stelling die in deze mate eenvoudig te bewijzen is ook 'triviaal', en daarnaast noemt men - zoals in de titel van dit hoofdstuk - stellingen waarvoor geen voorafgaande theoretische opbouw nodig is ook triviaal. Opgepast voor woordverwarring dus. Sommige ongelijkheden kunnen zonder veel moeite omgevormd worden tot triviale ongelijkheden, bijvoorbeeld...

Voorbeeld. *(folklore) Zij $a, b \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Wanneer treedt gelijkheid op?*

Oplossing. *Bewijs zelf als oefening.*

Voorbeeld. *(JWO 2002) Zij $a, b, c > 0$. Bewijs dat*

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

en bepaal wanneer gelijkheid optreedt.

Oplossing. *Alles op gelijke noemer zetten geeft $a^2+b^2+c^2 \geq 2ac+2bc-2ab$ wat te schrijven is als $(a+b-c)^2 \geq 0$, dus het is bewezen. Gelijkheid als en slechts als $a+b-c = 0$.* $\square$

Voorbeeld. *Zij $x > 0$. Bewijs dat $\sqrt{1+2x} \leq 1 + x$.*

Oplossing. *Bewijs zelf als oefening.*

Een dergelijk probleem ga je uiteraard nooit krijgen op een moeilijke wiskundecompetitie zoals IMO. Maar dat dit soort ongelijkheden *altijd* makkelijk is, is ook niet juist. Vaak eist dit soort vragen een grote creativiteit. Het is dan ook belangrijk je niet blind te staren op de meer gevorderde methodes, vaak lijkt de oplossing heel elementair en kort, maar je moet er maar op komen. Doorgaans krijg je ook niet een kwadraat dat 0 is, maar een som van kwadraten. Als voor n reële getallen $a_1, ..., a_n$ geldt dat $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0$, dan impliceert dat dus dat elk van de a_i zelf nul is, dus $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Een iets moeilijker voorbeeld nu.

Voorbeeld. *(IMC 1999) Gegeven reële getallen $x_1, ..., x_n > -1$, met $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$. Bewijs dat*

$$x_1 + ... + x_n \leq \frac{n}{3}.$$

Oplossing. *Het antwoord zal eenvoudig lijken, maar bleek op deze internationale competitie toch een zeer slecht beantwoorde vraag te zijn. De truc is nochtans simpel: beschouw volgende* *veelterm en zijn ontbinding:*

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Voor $x = x_i$ *is* $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$*, aangezien* $x_i > -1$*. Tellen we dit nu op voor alle* x_i *dan komt er*

$$(x_1^3 + ... + x_n^3) - \frac{3}{4}(x_1 + ... + x_n) + \frac{n}{4} \geq 0$$

$$\frac{3}{4}(x_1 + ... + x_n) \leq \frac{n}{4}$$

Na deling door $\frac{3}{4}$ *geeft dit het te bewijzen.* □

Weinig mensen hebben op de competitie het antwoord gevonden. De $x_i > -1$ kan je wel doen denken dat je ergens $(x+1) > 0$ nodig hebt. En die som van derdemachten suggereert het ook wel. Maar om dan echt op het idee te komen om precies die veelterm te nemen, dat is altijd wat puzzelen.

1.3 Een gouden raad

Je zult bij bijna iedere ongelijkheid in deze cursus zien staan wat de gelijkheidsvoorwaarde is. **Dat staat daar niet ter versiering.** Een goed inzicht in de ongelijkheden en hun gelijkheidsvoorwaarde is essentieel en kan ook erg veel tijd besparen. Het is een goede taktiek om steeds te beginnen met 'intuïtief' te zoeken naar simpele gevallen wanneer gelijkheid optreedt, of waar een uitdrukking maximaal/minimaal is.

Als je ziet dat er gelijkheid optreedt bij pakweg $x = 2$, probeer daar NOOIT een ongelijkheid op toe te passen die geen gelijkheid heeft in $x = 2$. Immers, $A \geq B$ bewijzen door $A \geq C$ en $C \geq B$ zal niet lukken: $C \geq B$ is namelijk niet eens meer waar voor $x = 2$. Verlies daar dan ook geen tijd mee, want tijd = punten op een competitie.

1.4 Oefeningen

CAVEAT! Het is een veel gemaakte fout om ongelijkheden per ongeluk 'om te draaien'. Uit $A \geq B$ en $B \leq C$ volgt bij sommige studenten plotseling dat $A \geq C$ of $A \leq C$. Een bewijs met zo'n fout in is bijna altijd 0 punten waard.

1. Zij $x, y, z \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

2. Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Bewijs $a^2b^2 + c^2d^2 \geq 2abcd$.

3. Zij $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$.

4. Zij $a, b > 0$. Bewijs dat

$$\max(a, b) \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \min(a, b).$$

5. Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da$.

6. Zij $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$.

7. Vind alle $a \in \mathbb{Z}$ waarvoor $(a + 2007)^2$ deelbaar is door $2007^2 + a^2$.

8. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $x^6 + y^6 \geq 2xy(x^4 - y^4)$.

9. Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 21 = a - 3b + 5c - 7d$. Vind de waarde van $16abcd$.

10. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Bewijs dat

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

11. Zij $x, y, z \in \mathbb{R}$. Bewijs dat

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}\,(x + y + z)\,.$$

12. (ASU 1987) Definieer een rij als volgt: $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Bewijs dat $x_{100} > 14$.

13. Zij $x, y, z \in \mathbb{R}$. Bewijs dat

$$(x + z - y)x^5 + (x + y - z)y^5 + (y + z - x)z^5 \geq 0.$$

14. *Zij $a_i > 0$ en $a_1 + ... + a_n = 1$. Bewijs dat

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

Hoofdstuk 2

Orde-ongelijkheid

2.1 Definities

Eerst voeren we enkele nieuwe symbolen en definities in, die ons in staat zullen stellen de rest van de cursus vlotter te laten gaan, zonder te verdrinken in ellenlange notaties. Eerst de symbolen: $\sum_{k=1}^{n} a_k$ betekent: de som van a_k, startend van $k = 1$ tot en met n.

Dus $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n$. Idem voor producten: $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot ... \cdot a_n$.

Voorbeeld. $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$

Voorbeeld. $\prod_{i=1}^{n} i^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^2 = (n!)^2$

In het begin is het vaak een goeie strategie om de sommen en producten gewoon uit te schrijven. Eens je er goed mee overweg kunt, ga je vaker het omgekeerde doen.

Nog een belangrijke definitie is de volgende: we noemen een functie

$$\sigma : \{x_1, x_2, ..., x_n\} \to \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

een *permutatie* van $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ als en slechts als $\sigma(x)$ alle waarden exact 1 keer bereikt als alle $x \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ doorlopen worden. Dat impliceert dus ook dat ieder element op exact 1 ander element wordt afgebeeld en afkomstig is van exact 1 plaats. Het heeft dus zin om te spreken van $\sigma(x_2)$, of van het unieke getal q waarvoor $\sigma(x_q) = x_2$.

Voorbeeld. $(1, 2, 3, 4) \mapsto (1, 3, 4, 2)$ *is een permutatie, maar* $(1, 2, 3, 4) \mapsto (1, 2, 4, 2)$ *en* $(1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 5, 1, 4)$ *niet. We zullen in het vervolg met* σ *steeds een permutatie aanduiden.*

Een derde - eerder triviale - definitie is die van een matrix. Een matrix is gewoon een rechthoek met getallen in. Dus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

is een 3×4 matrix. We noteren algemeen a_{ij} het element van A in de i-de rij en de j-de kolom. Zo ook x_{ij} het element van matrix X, enzovoorts. Het gebruik van matrices is hier enkel en alleen om de notatie te vereenvoudigen.

Ten slotte nog wat over sortering van rijen. Een n-tal $(a_1, a_2, ..., a_n)$ noemen we

- niet-stijgend (gesorteerd) als $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$,
- niet-dalend (gesorteerd) als $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$,
- stijgend (gesorteerd) als $a_1 < a_2 < ... < a_n$,
- dalend (gesorteerd) als $a_1 > a_2 > ... > a_n$.

Merk op dat er dus een wereld van verschil is tussen 'niet-stijgend' en 'niet stijgend'!

Twee of meer n-tallen noemt men gelijk gesorteerd als je enkel door een permutatie van de indices kunt zorgen dat ze beiden niet-stijgend (of niet-dalend) gesorteerd staan.

Voorbeeld. *$(a_1, a_2, a_3) = (4, 19, 7)$ en $(b_1, b_2, b_3) = (10, 49, 38)$ zijn gelijk gesorteerd. Immers, permuteren we de indices $(1, 2, 3) \mapsto (2, 3, 1)$ dan krijgen we $(19, 7, 4)$ en $(49, 38, 10)$, beide niet-dalend.*

Twee n-tallen noemt men tegengesteld gesorteerd als je enkel door een permutatie van de indices kunt zorgen dat de ene niet-stijgend en de andere niet-dalend gesorteerd staat.

Voorbeeld. *$(a_1, a_2, a_3) = (3, 9, 3)$ en $(b_1, b_2, b_3) = (8, 4, 13)$ zijn tegengesteld gesorteerd. Immers, permuteren we de indices $(1, 2, 3) \mapsto (2, 1, 3)$ dan krijgen we $(9, 3, 3)$ en $(4, 8, 13)$, niet-dalend en niet-stijgend.*

Het is doorgaans nutteloos en onbegonnen werk dit volledig uit te schrijven als je met variabelen werkt. In principe zou je alle $n!$ gevallen kunnen nagaan, maar je ziet bijna altijd op het zicht of twee dingen al dan niet gelijk of tegengesteld gesorteerd staan.

Voorbeeld. *Zijn deze n-tallen gelijk, tegengesteld of niet onderling gesorteerd?*

- *Voor $a_i \in \mathbb{R}$: $(a_1, a_2, ..., a_n)$ en $(a_1, a_2, ..., a_n)$?*
- *Voor $a_i \in \mathbb{R}$: $(a_1, a_2, ..., a_n)$ en $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n})$?*
- *Voor $a_i > 0$: $(a_1, a_2, ..., a_n)$ en $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n})$?*
- *Voor $a_i > 0$: $(a_1, a_2, ..., a_n)$ en $(a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2)$?*

- *Voor* $a_i \in \mathbb{R}$*:* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $(a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2)$*?*
- *Voor* $a_i > 0$*:* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $(a_1^3, a_2^3, ..., a_n^3)$*?*
- *Voor* $a_i \in \mathbb{R}$*:* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $(a_1^3, a_2^3, ..., a_n^3)$*?*
- *Voor* $a_i \in \mathbb{R}$*,* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *gelijk gesorteerd:* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $(b_n, b_{n-1}, ..., b_1)$*?*
- *Voor* $k > 0, a_i \in \mathbb{R}$*:* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $k(a_1, a_2, ..., a_n)$*?*
- *Voor* $k < 0, a_i \in \mathbb{R}$*:* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $k(a_1, a_2, ..., a_n)$*?*
- *Voor* $a, b, c > 0$*:* (a, b, c) *en* $(b + c, c + a, a + b)$*?*
- *Voor* $a, b, c > 0$*:* (a, b, c) *en* $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b})$*?*
- *Voor* $a, b, c > 0$*:* (a, b, c) *en* (bc, ca, ab)*?*
- *Voor* $a, b, c, d > 0$*:* (a, b, c, d) *en* (d, c, b, a)*?*
- *Voor* $a, b, c, d > 0$*:* (a, b, c, d) *en* $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+d}, \frac{1}{d+a}, \frac{1}{a+b})$*?*
- *Voor* $a, b, c, d > 0$*:* (a, b, c, d) *en* $(\frac{1}{b+c+d}, \frac{1}{c+d+a}, \frac{1}{d+a+b}, \frac{1}{a+b+c})$*?*

Antwoord (afgekort tot g,t,n): g,n,t,g,n,g,g,n,g,t,t,g,t,n,n,g.

Voorbeeld. *En wat dacht je hiervan?*

- *Voor* $a_i \in I$*:* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $((f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$ *waar de functie* f *stijgend is op het interval* I*?*
- *Voor* $a_i \in I$*:* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *en* $((f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$ *waar de functie* f *dalend is op het interval* I*?*

Kun je de bovenstaande allemaal verklaren aan de hand van deze twee? Dat zou wat inzicht moeten geven in wat er écht aan de hand is.

Een hint voor de 7e en 8e (die je bij de rest nodig hebt): k *moet niet echt constant zijn, ze moet gewoon onafhankelijk zijn van de sortering van de* a_i*.*

2.2 Orde-ongelijkheid voor sommen

De orde-ongelijkheid vindt zijn oorsprong in het onderstaande, welgekende vraagstuk.

Voorbeeld. *Er zijn gouden, zilveren en bronzen muntstukken, goud* $\geq$ *zilver* $\geq$ *brons, en je mag er van een soort* 5*, van een andere soort* 2 *en van nog een andere soort* 1 *muntstukken kiezen. Hoe haal je hier de hoogste/laatste waarde uit?*

Oplossing. *De oplossing ligt voor de hand: zoveel mogelijk van de duurste soort, en afbouwen tot zo weinig mogelijk van de goedkoopste. Of als je zo weinig mogelijk wil: zoveel mogelijk van de goedkoopste en afbouwen tot zo weinig mogelijk van de duurste.*

Schrijven we dit even wiskundig neer.

Stelling. *(Orde-orgelijkheid, 2 rijen) Zij* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ *en* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ *dan geldt voor alle permutaties* σ*:*

$$\sum\prod\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \geq \sum\prod\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_\sigma(1) & b_\sigma(2) & \cdots & b_\sigma(n) \end{pmatrix}$$

en

$$\sum\prod\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_\sigma(1) & b_\sigma(2) & \cdots & b_\sigma(n) \end{pmatrix} \geq \sum\prod\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{pmatrix},$$

met $\sum\prod$ *de som over de kolommen van het product van de elementen binnen een kolom. Wanneer treedt gelijkheid op?*

Bewijs. *Ik ga enkel de eerste bewijzen, de rechtse is volledig analoog, kun je zelf proberen. Wat we hier gaan toepassen is een techniek die 'sequentieel bewijs' heet: we gaan stap voor stap het rechterlid aanpassen, zodanig dat het bij iedere aanpassing stijgt (of toch niet daalt), en uiteindelijk komen we bij het linkerlid uit. Een halfvariant dus, voor degene die dat kennen.*

Noem q *het unieke getal waarvoor* $\sigma(q) = 1$*. Dan hebben we*

$$a_1 b_r + a_q b_{\sigma(q)} = a_1 b_r + a_q b_1 \leq a_1 b_1 + a_q b_r$$

aangezien $a_1 \geq a_q$ *en* $b_1 \geq b_r$*. Dus door die koppels om te wisselen groeit ons rechterlid. Nu staat* a_1 *al bij* b_1 *op zijn plaats, en zitten opnieuw met gewoon 'een permutatie', maar nu met de indices* $2, 3, ..., n$*.*

We herhalen dit dus voor $2, 3, ..., n$ *en staat uiteindelijk* a_i *bij* b_i*, het linkerlid dus. Gelijkheid hier als en slechts als* $(a_1, ..., a_n)$ *en* $(b_{\sigma(1)}, ..., b_{\sigma(n)})$ *gelijk gesorteerd zijn (ga dit na!).* □

Merk op: aangezien de optelling commutatief is, mag de voorwaarde $a_1 \geq ... \geq a_n$ en $b_1 \geq ... \geq b_n$ vervangen worden door het gegeven dat $(a_1, ..., a_n)$ en $(b_1, ..., b_n)$ gelijk gesorteerd zijn. De tweede ongelijkheid is dan voor tegengesteld gesorteerde rijen. Dit zal bijzonder handig blijken in de praktische toepassing.

Herbekijken we eens ons vraagstuk van daarnet.

Voorbeeld. *Er zijn gouden, zilveren en bronzen muntstukken, goud* $\geq$ *zilver* $\geq$ *brons, en je mag er van een soort* 5*, van een andere soort* 2 *en van nog een andere soort* 1 *muntstukken kiezen. Hoe haal je hier de hoogste/laatste waarde uit?*

Oplossing.

$$\sum\prod\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ goud & zilver & brons \end{pmatrix} = 5\ goud + 2\ zilver + 1\ brons$$

is de maximale keuze, want $(5, 2, 1)$ *en* $(goud, zilver, brons)$ *zijn gelijk gesorteerd, en*

$$\sum\prod\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ goud & zilver & brons \end{pmatrix} = 1\ goud + 2\ zilver + 5\ brons$$

is de minimale keuze, want $(1, 2, 5)$ *en* $(goud, zilver, brons)$ *zijn tegengesteld gesorteerd.* □

Deze stelling heeft grote gevolgen voor de algebraïsche ongelijkheden, moeilijke problemen worden hiermee soms meteen triviaal.

<u>**Voorbeeld.**</u> *Zij $a, b, c > 0$. Bewijs dat $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Oplossing. *We kunnen dit herschrijven als*

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c}$$

De drietallen $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ en $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ zijn gelijk gesorteerd, dus hebben we:

$$\sum \prod \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \geq \sum \prod \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{pmatrix},$$

wat precies het te bewijzen is. □

Probleem opgelost, geen tijd aan spenderen. Het handig en snel kunnen werken met deze orde-ongelijkheid biedt vaak grote voordelen op wiskundewedstrijden zoals de IMO.

En op IMO durven ze wel degelijk zoiets vragen:

<u>**Voorbeeld.**</u> *(IMO 1975) Zij $x_1 \leq ... \leq x_n$ en $y_1 \leq ... \leq y_n$. Bewijs dat voor elke permutatie σ geldt dat*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_{\sigma(i)})^2.$$

Oplossing. *De sommatie van een som is de som van de sommaties, dus schrijven we dit als:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} + \sum_{i=1}^{n} y_{\sigma(i)}^2$$

We schrappen $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ in beide leden, en uiteraard is ook $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_{\sigma(i)}^2$ aangezien de optelling commutatief is. Delen we wat overblijft door -2, dan keert het teken om, en staat daar letterlijk onze orde-ongelijkheid. □

Dit was toen een zeer moeilijke vraag... blijkbaar was de orde-ongelijkheid nog niet gekend bij de studenten indertijd. Nog eentje:

<u>**Voorbeeld.**</u> *(folklore) Zij $a, b, c > 0$. Bewijs dat $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$.*

Oplossing. *De drietallen (a^2, b^2, c^2) en (bc, ca, ab) zijn steeds tegengesteld gesorteerd, zodat de tweede ongelijkheid zegt dat*

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ ab & bc & ac \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{pmatrix},$$

en dat is precies het te bewijzen. □

Voorbeeld. *(IMO 1978) Zij $a_k > 0 \in \mathbb{N}$ met alle a_k verschillend. Bewijs dat*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Oplossing. *We bewijzen eerst dat er een permutatie σ is waarvoor*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}.$$

Stel dat $\exists k : a_k \neq \{1, 2, ..., n\}$, dan is $a_k > n$ en bestaat er ook minstens 1 element $m \in \{1, 2, ..., n\}$ met $m \notin \{a_k\}$. Door a_k door m te vervangen, verlaag je het linkerlid, daar $m \leq n < a_k$. Herhaal tot $\{a_1, ..., a_n\} = \{1, ..., n\}$, je bent hier steeds na hoogstens n stappen.

Daar de n-tallen $(1, 2, ..., n)$ en $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n^2}\right)$ tegengesteld gesorteerd zijn, is

$$\sum\prod\begin{pmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\\ \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n^2}\end{pmatrix} \geq \sum\prod\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n^2}\end{pmatrix},$$

dus

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

samen geeft dit het te bewijzen. □

Geen minuut werk, en je krijgt anderhalf uur per vraag op IMO. Blijven oefenen, je kan hier echt leuke dingen mee doen!

We gaan nu de orde-ongelijkheid gedeeltelijk uitbreiden voor meer dan 2 rijen. Ik ga de stelling geven voor 3 rijen, kwestie van de overzichtelijkheid te bewaren, maar je kunt er net zogoed rijen $d_i, e_i, ...$ aan toevoegen met een volledig analoog bewijs. Pas op: zorg dat je eerst het geval van 2 rijen goed snapt voor je hieraan begint, we gebruiken dezelfde redeneringen, maar iets moeilijker.

Stelling. *(Orde-ongelijkheid, k rijen) Zij $a_1 \geq ... \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq ... \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$, dan geldt voor alle permutaties σ, τ:*

$$\sum\prod\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix} \geq \sum\prod\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_{\sigma(1)} & b_{\sigma(2)} & \cdots & b_{\sigma(n)}\\ c_{\tau(1)} & c_{\tau(2)} & \cdots & c_{\tau(n)}\end{pmatrix}.$$

Bewijs. *Noem q het unieke getal waarvoor $\sigma(q) = 1$, beschouw dan $a_1 b_{\sigma(1)} c_{\tau(1)} + a_q b_1 c_{\tau(q)}$. Zonder verlies van algemeenheid stellen we $c_{\tau(1)} \geq c_{\tau(q)}$ (bij k rijen: $c_{\tau(1)} d_{\phi(1)...} \geq c_{\tau(q) d_{\phi(1)}} ...$). Dan is wegens de orde-ongelijkheid voor $k = 2$ nu*

$$\sum\prod\begin{pmatrix}a_1 c_{\tau(1)} & a_q c_{\tau(q)}\\ b_1 & b_{\sigma(1)}\end{pmatrix} \geq \sum\prod\begin{pmatrix}a_1 c_{\tau(1)} & a_q c_{\tau(q)}\\ b_{\sigma(1)} & b_1\end{pmatrix}.$$

Op deze manier hebben we a_1 en b_1 samengebracht en daar alles niet-negatief is opnieuw het totaal enkel verhoogd (of toch niet verlaagd). Op analoge wijze zetten we nu ook c_1 bij a_1, b_1, tot alles met index 1 tesamen staat. Nog steeds hebben we niet verlaagd, en we zitten weer met het oorspronkelijke probleem op de indices $2, 3, ..., n$. We herhalen dit dus voor $2, 3, ..., n$ en komen uit op het linkerlid, dus is het bewezen. $\square$

Gelijkheid opnieuw als en slechts als alle rijen gelijk gesorteerd zijn.

Voorbeeld. *Zij $a, b, c > 0$ met $abc = 1$. Bewijs dat $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2$.*

Oplossing. *Daar $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c})$, $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c})$ en $(\sqrt[3]{a^7}, \sqrt[3]{b^7}, \sqrt[3]{c^7})$ gelijk gesorteerd zijn, is*

$$\sum \prod \begin{pmatrix} \sqrt[3]{a} & \sqrt[3]{b} & \sqrt[3]{c} \\ \sqrt[3]{a} & \sqrt[3]{b} & \sqrt[3]{c} \\ \sqrt[3]{a^7} & \sqrt[3]{b^7} & \sqrt[3]{c^7} \end{pmatrix} \geq \sum \prod \begin{pmatrix} \sqrt[3]{b} & \sqrt[3]{c} & \sqrt[3]{a} \\ \sqrt[3]{c} & \sqrt[3]{a} & \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{a^7} & \sqrt[3]{b^7} & \sqrt[3]{c^7} \end{pmatrix},$$

is $a^3 + b^3 + c^3 \geq \sqrt[3]{abc}(a^2 + b^2 + c^2)$. Daar $abc = 1$ is $\sqrt[3]{abc} = 1$, dus staat daar het te bewijzen.
$\square$

2.3 Orde-ongelijkheid voor producten

Een iets minder schijnend broertje, maar toch best het vermelden waard, is de volgende:

Stelling. *(Orde-ongelijkheid II, 2 rijen) Zij* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ *en* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ *getallen zodat* $\min\limits_{i=1..n} a_i + \min\limits_{i=1..n} b_i \geq 0$*. Dan geldt voor alle permutaties* σ*:*

$$\prod\sum\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \geq \prod\sum\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_\sigma(1) & b_\sigma(2) & \cdots & b_\sigma(n) \end{pmatrix}$$

en

$$\prod\sum\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_\sigma(1) & b_\sigma(2) & \cdots & b_\sigma(n) \end{pmatrix} \geq \prod\sum\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{pmatrix},$$

waarbij $\prod\sum$ *het product is over de kolommen van de som van alle elementen binnen een kolom.*

Bewijs. *Analoog aan somversie.* □

Opnieuw, wegens de commutativiteit van de vermenigvuldiging, is het voldoende dat ze gelijk of tegengesteld gesorteerd zijn. Deze tweede orde-ongelijkheid ga je slechts in weinig cursussen vinden, maar ze is vaak onze enige uitweg voor moeilijke producten van sommen.

Voorbeeld. *Zij* $a, b, c, d > 0$*. Bewijs dat*

$$\left(a + \frac{1}{2^a}\right)\left(b + \frac{1}{2^b}\right)\left(c + \frac{1}{2^c}\right)\left(d + \frac{1}{2^d}\right) \geq \left(a + \frac{1}{2^b}\right)\left(b + \frac{1}{2^c}\right)\left(c + \frac{1}{2^d}\right)\left(d + \frac{1}{2^a}\right).$$

Oplossing. *Daar* (a, b, c, d) *en* $(\frac{1}{2^a}, \frac{1}{2^b}, \frac{1}{2^c}, \frac{1}{2^d})$ *tegengesteld gesorteerd zijn, is linkerlid is groter dan eender welke permutatie, dus ook groter dan het rechterlid.* □

Probeer zoiets maar eens zonder orde-ongelijkheid! Of al meer in IMO-stijl:

Voorbeeld. *(creatie van het huis) Zij* $a, b, c > 0$*. Bewijs dat*

$$\left(\frac{bc + a}{1 + a}\right)\left(\frac{ca + b}{1 + b}\right)\left(\frac{ab + c}{1 + c}\right) \geq abc.$$

Oplossing. *De koppels* (a, b, c) *en* (bc, ac, ab) *zijn altijd tegengesteld gesorteerd, waardoor*

$$\prod\sum\begin{pmatrix} a & b & c \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \geq \prod\sum\begin{pmatrix} a & b & c \\ ab & bc & ca \end{pmatrix},$$

dus

$$(ab + c)(ac + b)(bc + a) \geq (a + ab)(b + bc)(c + ca) = abc(1 + a)(1 + b)(1 + c),$$

waarna deling door $(1 + a)(1 + b)(1 + c)$ *het gevraagde geeft.* □

2.4 Oefeningen

CAVEAT! Het is een veelgemaakte fout om uit achteloosheid te veronderstellen dat koppels 'wel gelijk/tegengesteld gesorteerd zullen zijn', zonder dit expliciet na tegaan. Zo'n fout is van hetzelfde type als het omdraaien van tekens. Een bewijs met zo'n fout in is dus bijna altijd 0 punten waard.

1. Zij $a, b, c > 0$. Bewijs dat
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$
2. Noteer $S = a_1 + \cdots + a_n$ en zij $a_i > 0$. Bewijs dat
$$\frac{a_1}{S-a_1} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$
3. Bewijs dat voor elke scherpe hoek x geldt:
$$\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x} \geq 1.$$
4. Zij $x, y > 0$ en $m, n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $x^m y^n + y^m x^n \leq x^{m+n} + y^{m+n}$.
5. Zij $a, b, c > 0$. Bewijs dat
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$
6. Zij $a, b, c > 0$ met $a + b + c = 1$. Bewijs dat
$$\frac{a+b^2}{c} + \frac{b+c^2}{a} + \frac{c+a^2}{b} \geq 4.$$
7. Zij $x, y, z > 0$ met $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bewijs dat $x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}$.
8. n knikkers starten in een horizontale wrijvingloze knikkerbaan, elk met een bepaalde snelheid naar links of naar rechts. Als 2 knikkers botsen, worden hun snelheden omgewisseld. Hoeveel keer kunnen de knikkers maximaal botsen?
9. Zij $a_i > 0$ met $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Toon aan dat
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$
10. Zij $a_i > 0$. Bewijs dat
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i.$$
11. (IMO 1964) Zij $a, b, c > 0$. Bewijs dat
$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

12. (IMO 1997) Zij $(x_1, .., x_n)$ een n-tal reële getallen met $x_1 + ... + x_n = 1, |x_i| \leq \frac{n+1}{2}$. Je mag de elementen x_i in een willekeurige volgorde zetten, zodat je een nieuwe rij bekomt en deze noem je $(y_1, ..., y_n)$. Toon aan dat je steeds zo'n rij kan vinden zodanig dat $|y_1 + 2y_2 + ... + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$.

13. Zij $a, b, c > 0$ en $n \geq 1 \in \mathbb{N}$. Bewijs dat

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n.$$

14. Zij $a_i \in \mathbb{R}$ met $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Vind de minimale waarde van

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2.$$

15. Zij $a_i \in \mathbb{R}$ met $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Vind de maximale waarde van

$$x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1.$$

16. (USAMO 1997) Zij $a, b, c > 0$. Bewijs dat

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

17. Zij $a, b, c > 0$ met $abc = 1$. Bewijs dat

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

18. Zij $x, y, z > 0$. Bewijs dat

$$\frac{yz}{x(x+y+z)+1} + \frac{xz}{y(x+y+z)+1} + \frac{xy}{z(x+y+z)+1}$$
$$\geq \frac{x^2}{x(x+y+z)+1} + \frac{y^2}{y(x+y+z)+1} + \frac{z^2}{z(x+y+z)+1}.$$

Hoofdstuk 3

Basistechnieken

3.1 Gemiddelden

Een functie f van verschillende getallen $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ noemen we *een gemiddelde* als voldaan is aan volgende eigenschappen:

- $\max(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq \min(a_1, a_2, ..., a_n)$
  (max *en* min *zijn het grootste en het kleinste element uit* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$),
- f is 'symmetrisch': de onderlinge volgorde van de variabelen speelt geen rol,
- Voor $k > 0$ is $f(k, k, ..., k) = k$.

Je kent wellicht al één gemiddelde: het rekenkundig gemiddelde. Er bestaan er echter oneindig veel. Degene die wij hier gaan nodig hebben zijn de volgende:

- AM: Rekenkundig Gemiddelde: $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$,
- GM: Meetkundig Gemiddelde: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$,
- HM: Harmonisch Gemiddelde: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$,
- QM: Kwadratisch Gemiddelde: $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$,
- en uiteraard $\max(a_1, a_2, ..., a_n)$ en $\min(a_1, a_2, ..., a_n)$ zelf.

3.2 AM-GM en haar vriendjes

Wat doen die gemiddelden nu in een cursus ongelijkheden? Wel, het leuke aan die gemiddelden is dat er vrij krachtige ongelijkheden gelden tussen die gemiddelden. Ongetwijfeld een van de belangrijkste ongelijkheden die er zijn is de volgende:

Stelling. *(AM-GM) Voor $a_1, ..., a_n > 0$ geldt:*

$$AM(a_1, ..., a_n) \geq GM(a_1, ..., a_n)$$

met gelijkheid als en slechts als $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bewijs. *De n-tallen $(\sqrt[n]{a_1}, \sqrt[n]{a_2}, ..., \sqrt[n]{a_n})$ en $(\sqrt[n]{a_1}, \sqrt[n]{a_2}, ..., \sqrt[n]{a_n})$ zijn gelijk, en dus ook gelijk gesorteerd. De orde-ongelijkheid zegt ons dus dat:*

$$\sum\prod\begin{pmatrix} \sqrt[n]{a_1} & \sqrt[n]{a_2} & \cdots & \sqrt[n]{a_n} \\ \sqrt[n]{a_1} & \sqrt[n]{a_2} & \cdots & \sqrt[n]{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt[n]{a_1} & \sqrt[n]{a_2} & \cdots & \sqrt[n]{a_n} \end{pmatrix} \geq \sum\prod\begin{pmatrix} \sqrt[n]{a_1} & \sqrt[n]{a_2} & \cdots & \sqrt[n]{a_n} \\ \sqrt[n]{a_n} & \sqrt[n]{a_1} & \cdots & \sqrt[n]{a_{n-1}} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \sqrt[n]{a_2} & \sqrt[n]{a_3} & \cdots & \sqrt[n]{a_1} \end{pmatrix},$$

met gelijkheid als en slechts als alle a_i gelijk zijn.

Daar $(\sqrt[n]{a_i})^n = a_i$ en $\sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}...\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ staat daar dus precies

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

delen door n geeft ons te bewijzen:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

□

Voorbeeld. *Zij $a > 0$. Toon aan dat $\frac{a^2+2}{2} \geq \sqrt{a^3+1}$.*

Oplossing. *We hebben:*

$$\frac{a^2+2}{2} = \frac{(a^2-a+1)+(a+1)}{2} \geq \sqrt{(a^2-a+1)(a+1)} = \sqrt{a^3+1}.$$

□

Dat lijkt misschien wat vergezocht, maar als je goed de gelijkheidsvoorwaarde in het oog houdt zul je zien dat het eigenlijk vrij logisch is.

Voorbeeld. *Zij $a_1, ..., a_n > 0$ met $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Bewijs dat $(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1) \geq 2^n$.*

Oplossing. *Daar $(a_i + 1) \geq 2\sqrt{a_i}$ hebben we $\prod_{i=1}^{n}(a_i+1) \geq 2^n\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = 2^n$.* □

Voorbeeld. *Zij $x, y, z > 0$. Toon aan dat $xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x+y+z)$.*

Oplossing. *Je kunt dit natuurlijk met de orde-ongelijkheid oplossen, maar ook AM-GM kan hier mooi toegepast worden, op 7 variabelen dan nog wel!*

$$2xy^3 + yz^3 + 4zx^3 \geq 7\sqrt[7]{x^{14}y^7z^7} = 7x^2yz,$$
$$4xy^3 + 2yz^3 + zx^3 \geq 7\sqrt[7]{x^7y^{14}z^7} = 7y^2zx,$$
$$xy^3 + 4yz^3 + 2zx^3 \geq 7\sqrt[7]{x^7y^7z^{14}} = 7z^2xy,$$

samentellen geeft het gevraagde.

Natuurlijk had het ook met de orde-ongelijkheid gekund, maar dit is een mooi voorbeeldje hoe je AM-GM kunt toepassen op een ongelijkheid die er helemaal niet AM-GM-baar uitziet. Dit soort toepassingen (toch varianten die niet simpel op een andere manier kunnen) zijn topfavoriet in de meeste grote wiskundecompetities. Wat sleutelen met de machten en coëfficiënten is de boodschap!

Naast AM-GM bestaan er natuurlijk nog ongelijkheden tussen gemiddelden.

Stelling. *(GM-HM) Voor $a_1, ..., a_n > 0$ geldt:*

$$GM(a_1, ..., a_n) \geq HM(a_1, ..., a_n)$$

met gelijkheid als en slechts als $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bewijs. *Equivalent met $AM\left(\frac{1}{a_1}, ..., \frac{1}{a_n}\right) \geq GM\left(\frac{1}{a_1}, ..., \frac{1}{a_n}\right)$ en volgt dus uit AM-GM.*

Vaak worden ongelijkheden tussen gemiddelden in serie geschakeld: we hebben dat $AM \geq GM \geq HM$, dus $AM \geq HM$, en noemen dit AM-HM. Deze laatste komt op zich vaker voor dan GM-HM.

Voorbeeld. *(IMO 1975) Zij $a_1, ..., a_n > 0$. Toon aan dat*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Oplossing. *Dit is vrij letterlijk $AM(a_1, ..., a_n) \geq HM(a_1, ..., a_n)$, vaak is het een handige equivalente vorm.* □

Voorbeeld. *(folklore) Zij $x, y > 0$. Toon aan dat $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.*

Oplossing. *Volgt triviaal uit het voorgaande.* □

Voorbeeld. *(Nesbitt) Zij $a, b, c > 0$. Toon aan dat $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.*

Oplossing. *Daar $AM(a+b, b+c, c+a) \geq HM(a+b, b+c, c+a)$ hebben we dat*

$$((a+b) + (b+c) + (c+a))\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 9,$$

dus

$$\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} \geq \frac{9}{2},$$

van elke term in het linkerlid 1 aftrekken (en dus ook 3 van het rechterlid) geeft het gevraagde. □

Stelling. *(QM-AM) Voor $a_1, ..., a_n > 0$ geldt:*

$$QM(a_1, ..., a_n) \geq AM(a_1, ..., a_n)$$

met gelijkheid als en slechts als $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bewijs. *Kwadrateren we beide leden dan komt er te bewijzen:*

$$n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \geq (a_1 + ... + a_n)^2.$$

Dit gaan we net als vorig hoofdstuk eens als een matrix schrijven:

$$\sum\sum \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1^2 & \cdots & a_1^2 \\ a_2^2 & a_2^2 & \cdots & a_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^2 & a_n^2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \geq \sum\sum \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

waarbij $\sum\sum$ *(conform de notaties in voorgaand hoofdstuk) gewoon de som van alle getallen in de matrix is. Noemen we de linkermatrix* B *en de rechtermatrix* C*, dan hebben we dat*

$$b_{ij} + b_{ji} = a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_ia_j = c_{ij} + c_{ji}.$$

Deze ongelijkheid optellen voor alle koppels (i, j) *(en delen door 2) geeft precies de gevraagde ongelijkheid. Gelijkheid treedt op als en slechts als bij alle opgetelde ongelijkheden gelijkheid geldt, dus als* $a_1 = a_2 = ... = a_n$*.* □

Voorbeeld. *Vind alle* $a, b, c > 0$ *die voldoen aan* $a + b + c = 3$ *en* $a^8 + b^8 + c^8 = 3$*.*

Oplossing. *Wegens QM-AM op respectievelijk* (a^4, b^4, c^4)*,* (a^2, b^2, c^2) *en* (a, b, c) *geldt:*

$$1 = \sqrt[8]{\frac{a^8 + b^8 + c^8}{3}} \geq \sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} = 1,$$

gelijkheid treedt op, dus moet $a = b = c$ *en bijgevolg hebben we enkel* $a = b = c = 1$*.* □

3.3 Cauchy-Schwarz

Eerst een definitie. We noemen $\rho(A) \in \mathbb{Z}$ de rang van de matrix A, waarvan we voorlopig alleen definiëren:

- $\rho(A) = 0$ als en slechts als A enkel nullen bevat,
- $\rho(A) = 1$ als alle rijen een reëel veelvoud zijn van één bepaalde rij (of alle kolommen een veelvoud van één kolom, ga na dat dit hetzelfde is!),
- $\rho(A) > 1$ in alle andere gevallen.

De reden dat AM-GM veel sterker is en meer gebruikt is dan QM-AM en AM-HM, is dat beide makkelijk samengevat (en veralgemeend) worden in de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. In volle ornaat heet de ongelijkheid Cauchy-Bunjakowski-Schwarz (of CBS), maar alle normale mensen zeggen Cauchy-Schwarz, of zelfs gewoon Cauchy.

Stelling. *(Cauchy-Schwarz) Voor $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ geldt:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + ... + a_n b_n)^2.$$

Gelijkheid treedt op als en slechts als $\rho \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \leq 1$.

Bewijs. *Het is een veralgemening van QM-AM, en een uitbreiding in het bewijs doet zijn werk hier:*

$$\sum\sum \begin{pmatrix} a_1^2 b_1^2 & a_1^2 b_2^2 & \cdots & a_1^2 b_n^2 \\ a_2^2 b_1^2 & a_2^2 b_2^2 & \cdots & a_2^2 b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^2 b_1 & a_n^2 b_2^2 & \cdots & a_n^2 b_2^2 \end{pmatrix} \geq \sum\sum \begin{pmatrix} a_1^2 b_1^2 & a_1 a_2 b_1 b_2 & \cdots & a_1 a_n b_1 b_n \\ a_1 a_2 b_1 b_2 & a_2^2 b_2^2 & \cdots & a_2 a_n b_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 a_n b_1 b_n & a_2 a_n b_2 b_n & \cdots & a_n^2 b_n^2 \end{pmatrix},$$

en daar staat precies de uitwerking van beide leden. Gelijkheid als bij elk van de stappen gelijkheid optreedt, dus als $a_i^2 b_j^2 + b_j^2 a_i^2 = 2a_i a_j b_i b_j$ ofte $(a_i b_j - a_j b_i)^2 = 0$. □

Kijk nu es terug hoe je Cauchy-Schwarz voor $n = 2$ en $n = 3$ bewezen hebt in het eerste hoofdstuk. Gaat er geen lichtje branden? Uiteindelijk is het allemaal één pot nat...

Voorbeeld. *Zij $a, b, c > 0$ met $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Vind de maximale waarde van $3a + 4b + 12c$.*

Oplossing. *Wegens Cauchy-Schwarz geldt: $(a^2 + b^2 + c^2)(3^2 + 4^2 + 12^2) \geq (3a + 4b + 12c)^2$ dus dat $3a + 4b + 12c \leq 13$ met gelijkheid als $a = \frac{3}{13}, b = \frac{4}{13}, c = \frac{12}{13}$. Het maximum is dus 13.*
□

Voorbeeld. *(IMO 2005) Zij $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ met $xyz \geq 1$. Toon aan dat*

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

Oplossing. *We herschrijven dit als*

$$3 + \left(\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - 1\right) + \left(\frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} - 1\right) + \left(\frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} - 1\right) \geq 0$$

uitwerken, $(x^2 + y^2 + z^2)$ afzonderen en hier door delen geeft

$$\frac{3}{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^5}.$$

Uit de Stelling van Cauchy-Schwarz en de gegeven voorwaarde volgt nu dat

$$\left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(yz + y^2 + z^2\right) \geq \left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(\frac{1}{x} + y^2 + z^2\right) \geq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2,$$

dus we hebben

$$\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{yz + y^2 + z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} \leq \frac{\frac{y^2+z^2}{2} + y^2 + z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}(y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Optellen voor x, y, z geeft de gevraagde ongelijkheid. □

Een speciale vorm van Cauchy-Schwarz die vaak terug komt is de volgende.

Stelling. *(Cauchy-Schwarz in Engelvorm) Voor $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ en $b_1, ..., b_n > 0$ geldt:*

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

Bewijs. *Dit is de gewone Cauchy-Schwarz, toegepast op de reële n-tallen $\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, ..., \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$ en $\left(\sqrt{b_1}, ..., \sqrt{b_n}\right)$.* □

Voorbeeld. *Zij $a_1, ..., a_n > 0$ met $a_1 + ... + a_n = 1$. Bewijs dat*

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Oplossing. *Merk op dat $(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + ... + (a_n + a_1) = 2$. Dus zegt Cauchy-Schwarz in Engelvorm dat*

$$\left(\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + a_1}\right) \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

wat te bewijzen was. □

Je kunt Cauchy-Schwarz voor $a_i, b_i > 0$ ook schrijven als

$$\sqrt{(a_1 + ... + a_n)(b_1 + ... + b_n)} \geq \sqrt{a_1 b_1} + ... + \sqrt{a_n b_n},$$

om nog een handige equivalente schrijfwijze te geven.

Voorbeeld. *(Iran 1998) Zij $x, y, z > 0$ met $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Toon aan dat*

$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}.$$

Oplossing. *Dit is een verraderlijke oefening. Je bent vlug geneigd om te zeggen dat*

$$\sqrt{3(x + y + z - 3)} = \sqrt{((x - 1) + (y - 1) + (z - 1))(1 + 1 + 1)} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}$$

en van daaruit proberen te bewijzen dat $x + y + z \geq \sqrt{3(x + y + z - 3)}$. Dit gaat echter niet lukken (toch niet op een correcte manier) want die bewering is vals (ze geldt zelfs in de omgekeerde zin).

De goeie aanpak is tóch Cauchy-Schwarz, maar subtieler: we hebben

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1} = \sqrt{x}\sqrt{\frac{x - 1}{x}} + \sqrt{y}\sqrt{\frac{y - 1}{y}} + \sqrt{z}\sqrt{\frac{z - 1}{z}},$$

Cauchy-Schwarz zegt nu

$$\sqrt{x}\sqrt{\frac{x - 1}{x}} + \sqrt{y}\sqrt{\frac{y - 1}{y}} + \sqrt{z}\sqrt{\frac{z - 1}{z}} \leq \sqrt{(x + y + z)\left(\frac{x - 1}{x} + \frac{y - 1}{y} + \frac{z - 1}{z}\right)},$$

en daar

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)}=\sqrt{(x+y+z)(3-2)}=\sqrt{x+y+z},$$

wat te bewijzen was. $\square$

Nog eentje om het af te leren.

<u>Voorbeeld</u>. *Zij $a_1,...,a_n>0$. Toon aan dat $a_0,a_2,...,a_n$ een meetkundige rij vormt als en slechts als $(a_1^2+...+a_n^2)(a_0^2+...+a_{n-1}^2)=(a_0a_1+...+a_{n-1}a_n)^2$.*

Oplossing. *We herkennen duidelijk Cauchy-Schwarz, en er treedt gelijkheid op, dus*

$$\rho\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\in\{0,1\},$$

dus als en slechts als $a_i=k\cdot a_{i-1}$ voor $i=1,2,...,n$; en dat is precies de definitie van een meetkundige rij. $\square$

3.4 Oefeningen

CAVEAT! Het is een gevaarlijke fout om stellingen toe te passen zonder dat hun voorwaarden voldaan zijn. Zo kan ik het ook: $-1=\frac{(-1)+(-1)}{2}\geq\sqrt{(-1)(-1)}=1$. Opnieuw een zware fout die je bewijs doorgaans waardeloos maakt...

1. Zij $a_1,...,a_n>0$. Toon aan dat $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_1}\geq n$.
2. (VWO 1986) Zij $n\in\mathbb{N}$. Toon aan dat $n!\leq\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.
3. Zij $a,b,c,d,e,f>0$. Toon aan dat (a,b,c) en (d,e,f) de zijdelengtes van twee gelijkvormige driehoeken zijn als en slechts als
$$\sqrt{ad}+\sqrt{be}+\sqrt{cf}=\sqrt{(a+b+c)(d+e+f)}.$$
4. Zij $a,b,m,n>0$ met m,n natuurlijke getallen. Toon aan dat
$$\sqrt[m+n]{a^mb^n}\leq\frac{am+bn}{m+n}.$$
5. Zij $a,b,c>0$. Bewijs dat $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$.
6. (NWO 1991, Ierland 1998) Zij $a,b,c>0$. Toon aan dat
$$\frac{9}{a+b+c}\leq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\leq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

7. Zij $a, b, c, m, n > 0$, m, n natuurlijke getallen. Toon aan dat

$$\frac{a}{mb+nc} + \frac{b}{mc+na} + \frac{c}{ma+nb} \geq \frac{3}{m+n}.$$

8. Zij $x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

9. Zij $a, b > 0$. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is $f(x) = \dfrac{a+bx^4}{x^2}$ minimaal?

10. (IMC 2006 longlist) Zij $a_1, ..., a_n > 0$. Bewijs dat

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n}}\right)^2 \leq \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{\sqrt{k}}\right)^2.$$

en vind wanneer gelijkheid optreedt.

11. Zij $a, b, c, d > 0$. Toon aan dat

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

12. (Rusland) Zij p een veelterm met positieve reële coëfficiënten. Toon aan dat

$$p(x^2)p(y^2) \geq p^2(xy).$$

13. (IMO 1979) Bepaal alle $a > 0$ waarvoor $\exists x_1, ..., x_5 \geq 0$ zodat:

$$\sum_{i=1}^{5} i x_i = a, \sum_{i=1}^{5} i^3 x_i = a^2, \sum_{i=1}^{5} i^5 x_i = a^3.$$

14. Zij$a, b > 0$ en m een natuurlijk getal. Toon aan dat

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

15. (IMO 1992) Zij V een eindige verzameling punten in de driedimensionale ruimte. Noem V_x, V_y, V_z de loodrechte projecties van V op de coördinaatvlakken $x = 0, y = 0, z = 0$ respectievelijk. Bewijs dat

$$|V|^2 \leq |V_x| \cdot |V_y| \cdot |V_z|,$$

met $|A|$ het aantal elementen in de verzameling A.

16. Zij $a, b, c > 0$ met $a + b + c = 1$. Toon aan dat

$$\sqrt{\frac{ab}{c}+1} + \sqrt{\frac{bc}{a}+1} + \sqrt{\frac{ca}{b}+1} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

17. Zij $a, b, c > 2$. Toon aan dat $(a^3+b)(b^3+c)(c^3+a) \geq 125abc$.

18. Beschouw een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a, b en schuine zijde c. Bewijs dat $a + b + 2(c + \sqrt{2}) \geq 4\sqrt{a + b + c}$.

19. (Sint-Petersburg 2001) Zij $x_1, ..., x_{10} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ met $\sin^2(x_1) + ... + \sin^2(x_{10}) = 1$. Toon aan dat

$$\frac{\cos(x_1) + ... + \cos(x_{10})}{\sin(x_1) + ... + \sin(x_{10})} \geq 3.$$

20. (IMO 2003) Zij $n > 0$ een natuurlijk getal en zij $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \in \mathbb{R}$. Bewijs dat

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2,$$

en bewijs dat gelijkheid optreedt als en slechts als $x_1, ..., x_n$ een rekenkundige rij is.

Hoofdstuk 4

De trukendoos: technieken

4.1 Cycliciteit en symmetrie

Keren we nog eens terug op onze passen naar onze ongelijkheid van daarnet:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Je hebt misschien gemerkt dat er iets speciaals is aan die ongelijkheid. Als je 2 variabelen omwisselt, verandert de ongelijkheid niet, of verandert ze toch naar iets dat er volledig equivalent mee is. Zo'n ongelijkheid noemen we symmetrisch.

Symmetrie in ongelijkheden is een redelijk sterke eigenschap, zo kun je bijvoorbeeld de variabelen (hier (a, b, c)) voortdurend switchen om ze in stijgende volgorde te zetten, en toch dezelfde ongelijkheid behouden. Dat wil dus zeggen dat je bij zo'n ongelijkheden gewoon uit het niets mag 'veronderstellen' dat $a \geq b \geq c$, aangezien alle andere gevallen hier vanzelf uit volgen. Dat kan soms heel handig zijn, zoals bijvoorbeeld verderop bij het bewijs van de ongelijkheid van Schur.

Een ander analoog concept is het cyclisch zijn van ongelijkheden. Als je dezelfde (of een volledig equivalente) ongelijkheid krijgt als je de variabelen eentje doorschuift, bv. $(a, b, c, d) \mapsto (b, c, d, a)$ dan noemen we de ongelijkheid cyclisch. Analoog aan de redenering hierboven mag je de elementen doorschuiven totdat a de grootste is, en mag je dus opnieuw zomaar veronderstellen dat a de grootste variabele is. Of de kleinste, naargelang wat je best kan gebruiken in het probleem uiteraard. Maar uiteraard niet tegelijk een de grootste en een andere de kleinste, cycliciteit volgt uit symmetrie, maar niet omgekeerd.

Alle besluiten die je trekt omtrent cycliciteit of symmetrie moet je tot permutaties herleiden. Maar natuurlijk doe je deze bepaling meestal op het zicht, op een competitie is het voldoende te vermelden dat de ongelijkheid cyclisch of symmetrisch is.

Beide eigenschappen steunen onderliggend op permutaties, namelijk bij de symmetrische mogen we alle permutaties uitvoeren om een equivalente ongelijkheid te verkrijgen, bij cyclische een specifiek deel ervan. Goed inzicht hierin kan veel problemen al meteen uit de weg ruimen.

==

==

We voeren weer enkele nieuwe symbolen in, om de notaties te vereenvoudigen en aldus het rekenwerk drastisch in te perken. Je hebt al kennis gemaakt met de notatie $f(x)$, die eender welke functie van x aangeeft, bijvoorbeeld x^2, $\sqrt{x}-1$, enzovoort. Dit kunnen we makkelijk uitbreiden naar meerdere variabelen: we noemen bijvoorbeeld $f(a,b,c)=a+b-1$, als we daar iets mee moeten bewijzen. Merk op dat niet noodzakelijk alle variabelen moeten voorkomen, zelfs iets als $f(a,b,c)=\pi$ is een goeie functie.

Helemaal leuk wordt het natuurlijk als we over verschillende permutaties gaan sommeren of product nemen. Sommeren we de functie van daarnet, iets handiger neergeschreven als $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2^2-1$, over de permutaties $(1,3,2),(3,1,2),(3,2,1)$, dan komt er dus $(x_1+x_3^2-1)+(x_3+x_1^2-1)+(x_3+x_2^2-1)$. Je ziet, we hadden hier x_1 en x_2, en gebruiken dus iedere keer het eerste en het tweede element uit de permutatie.

Nu de korte notaties. We noteren enerzijds $\sum\limits_{cyc}^{n} f(x_1,...,x_n)$ de cyclische som van f, verkregen door f te sommeren over de n permutaties $(1,2,...,n),(2,3,...,n,1),...,(n,1,...,n-1)$. Anderzijds noteren we $\sum\limits_{sym}^{n} f(x_1,...,x_n)$ de symmetrische som, verkregen door f over alle $n!$ permutaties te sommeren. Beiden analoog voor producten.

<u>Voorbeeld</u>. $\sum\limits_{cyc}^{3} x^2y = x^2y+y^2z+z^2x.$

<u>Voorbeeld</u>. $\prod\limits_{cyc}^{4}(a^3+bc)=(a^3+bc)(b^3+cd)(c^3+da)(d^3+ab).$

<u>Voorbeeld</u>. $\sum\limits_{sym}^{3} x = x+x+y+y+z+z=2x+2y+2z.$ *Vergeet die 2 niet!*

<u>Voorbeeld</u>. $\prod\limits_{sym}^{4} x = x.x.x.x.x.x.y.y.y.y.y.y.z.z.z.z.z.z.w.w.w.w.w.w = x^6y^6z^6w^6.$ *Je ziet, symmetrische uitdrukkingen worden al snel groot als het aantal elementen toeneemt. Probeer zo'n dingen in je hoofd te tellen, zodat je geen uur moet schrijven bij een opgave als hieronder.*

<u>Voorbeeld</u>. *Ga zelf na:* $\sum\limits_{sym}^{2006} f(x_1) = 2005!\left(\sum\limits_{i=1}^{2006} f(x_i)\right) = 2005!\left(\sum\limits_{cyc}^{2006} f(x_1)\right).$

Het is natuurlijk niet moeilijk om iedere uitdrukking in pakweg a,b,c te schrijven als $f(a,b,c)$. Echter, iedere cyclische uitdrukking kan je schrijven als een cyclische som. Meer nog, iedere symmetrische uitdrukking kan je schrijven als een symmetrische som! En omgekeerd, als we een cyclische som uitschrijven krijgen we een cyclische uitdrukking, en als we een symmetrische som uitschrijven krijgen we een symmetrische uitdrukking.

4.2 Homogeniseren en dehomogeniseren

Geen stelling opnieuw, wel een heel nuttige en interessante techniek om ingewikkelde dingen een stuk eenvoudiger te maken. Veel ongelijkheden, zoals deze:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

hebben de interessante eigenschap dat de totale graad van alle termen in beide leden gelijk is, hier bijvoorbeeld 0. We zeggen dat de ongelijkheid *homogeen* is. En als ze dat niet is, inhomogeen. Een interessante eigenschap van homogene functies: als je elk van de variabelen met een strikt positieve constante k vermenigvuldigt, kan de ongelijkheid niet in waarheid wijzigen. Dat is logisch, aangezien je alle k's voorop kunt zetten en wegdelen. We mogen dit dus naar hartelust doen.

Stel nu dat $a + b + c = S$. Als we alle variabelen vermenigvuldigen met $\frac{1}{S}$, krijgen we $a+b+c = 1$. Als we hiermee de waarheid kunnen bewijzen, hebben we ook waarheid van het oorspronkelijke probleem. Dat wil dus zeggen dat we bij zo'n homogeen problemen gewoon mogen beginnen met zelf te definiëren: "Stel zonder verlies van algemeenheid $a + b + c = 1$." Of beginnen: "Stel zonder verlies van algemeenheid $a = 1$." Of eender welke andere vooropstelling, die toelaat daaruit het oorspronkelijke probleem te bewijzen. Merk op dat we uiteraard slechts 1 dergelijke vooropstelling mogen maken, en dat je ze wel degelijk moet kunnen verkrijgen door de truc met S (je mag dus niet $a = 0$ stellen of zo).

Analoog kun je ook voorwaarden elimineren, door de (inhomogene) voorwaarde te gebruiken om te zorgen dat de graad in beide leden van de ongelijkheid in alle termen gelijk wordt. Eens je dat gedaan hebt mag je de voorwaarde gewoon vergeten, want een inhomogene voorwaarde op een homogene ongelijkheid heeft geen enkele betekenis. Pas wel op dat je je hiermee geen hoop rekenwerk op de hals haalt!

Voorbeeld. *(Iran 1998) Zij x_1, x_2, x_3, x_4 positieve reële getallen met $x_1x_2x_3x_4 = 1$, bewijs dan dat*

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Oplossing. *Homogeniseren we deze ongelijkheid, dan wordt ons te bewijzen:*

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Wegens AM-GM weten we dat

$$\frac{x_1^3 + x_1^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3}{6} \geq (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{2}} x_1$$

Doen we nu hetzelfde voor x_2, x_3, x_4 en tellen we dit op, dan staat daar het gevraagde. □

4.3 Substituties

4.3.1 Algemeen gezever & klassieker $a, b, c \mapsto \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$

Nu moet je je altijd de vraag stellen: bewijs ik door de gesubstitueerde vorm te bewijzen ook het originele probleem? Ja, deze substitutie behoudt de ongelijkheid aangezien $\frac{1}{x}$ heel $\mathbb{R}_0^+$ doorloopt als x heel $\mathbb{R}_0^+$ doorloopt, dus dit is wel degelijk een juist bewijs. Vergeet niet dit steeds na te gaan voor je een nieuwe substitutie bedenkt! Je kunt bijvoorbeeld in de fout gaan als je iets moet bewijzen $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, en als je de substitutie $a = x^2$ doet en dan de bekomen ongelijkheid bewijst, dan heb je dit enkel bewezen voor positieve waarden van a, want x^2 doorloopt enkel de positieve waarden.

4.3.2 Voorwaarden en substituties: driehoekszijden

Wellicht de bekendste substitutie, al van in de tijd van de Oude Grieken, is die in verband met driehoekszijden. Veel competities geven hun ongelijkheden een extra smaakje door het gebruik van zijden van een driehoek. Als a, b, c zijden van een driehoek zijn, wil dat niets anders zeggen dan:

$$a < b + c$$
$$b < c + a$$
$$c < a + b$$

Teken nu zo'n driehoek. We weten uit de meetkunde dat het centrum van de ingeschreven cirkel het snijpunt van de bissectrices is. Tekenen we ook de 3 raakpunten van deze cirkel, dan krijgen we 3 paar congruente driehoeken, en lezen we dus af (zijden hebben positieve lengte) dat er positieve getallen x, y, z bestaan, namelijk de afstanden van een hoekpunt tot het dichtstbijzijnde raakpunt, waarvoor geldt:

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x.$$

Als je ooit ergens driehoekszijden ziet, heb je veel kans dat je dit gaat nodig hebben. Een kort eenvoudig voorbeeldje:

Voorbeeld. $\forall a, b, c$ *driehoekszijden*: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$

Oplossing. *Dit kan zonder de substitutie: na wat sleutelen met de formuletjes zien we dat dit equivalent is met*

$$(a - b + c)(-a + b + c) + (-a + b + c)(a + b - c) + (a + b - c)(a - b + c) > 0,$$

een trivialiteit daar elk haakje afzonderlijk positief is. Uitwerken en vereenvoudigen geeft ons $2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 > 0.$ □

Dat is prima, maar heel moeilijk te vinden. Wie het zichzelf liever makkelijk maakt, kan ook gewoon de substitutie toepassen en uitrekenen, dat geeft dat het rechterlid gelijk is aan het linkerlid plus $4(xy + yz + zx)$, en dat laatste is positief. Zoals altijd met substituties: ze zijn niet strikt noodzakelijk, zoals hierboven geïllustreerd, maar ze kunnen het leven er wel stukken simpeler op maken.

4.3.3 Voorwaarden en substituties: $abc = 1$

Nog een heel leuke substitutie is deze: als de voorwaarde $abc = 1$ gegeven is, met $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$, dan kun je de volgende substitutie doorvoeren: $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Als (x, y, z) alle waarden in $\mathbb{R}_0^+$ doorlopen, doorlopen ook (a, b, c) alle waarden die voldoen aan $abc = 1$, en geen enkel punt waarvoor $abc \neq 1$. Dus deze substitutie behoudt de ongelijkheid én elimineert hierbij de voorwaarde! Deze handige substitutie mag je in de meeste gevallen blindelings toepassen als je die voorwaarde ziet. Maar pas op: ook niet altijd. Ze heeft namelijk het nadeel dat ongelijkheden die eerst symmetrisch zijn, hierdoor de symmetrie kunnen verliezen. Een andere substitutie, die ook de voorwaarde kwijt raakt en de symmetrie bewaart (maar dan wel weer zwaarder rekenwerk oplevert) is $a = \frac{x^2}{yz}, b = \frac{y^2}{zx}, c = \frac{z^2}{xy}$.

Voorbeeld. *Als $abc = 1$, vind de minimumwaarde van*

$$\left(\frac{1}{a + \frac{1}{b} + 1}\right)^{2006} + \left(\frac{1}{b + \frac{1}{c} + 1}\right)^{2006} + \left(\frac{1}{c + \frac{1}{a} + 1}\right)^{2006}.$$

Oplossing. *Wegens Chebychev is dit groter of gelijk aan*

$$\frac{1}{3^{2005}}\left(\left(\frac{1}{a + \frac{1}{b} + 1}\right) + \left(\frac{1}{b + \frac{1}{c} + 1}\right) + \left(\frac{1}{c + \frac{1}{a} + 1}\right)\right),$$

voeren we hierop de eerder genoemde substitutie uit, komt er:

$$\left(\frac{1}{a + \frac{1}{b} + 1}\right) + \left(\frac{1}{b + \frac{1}{c} + 1}\right) + \left(\frac{1}{c + \frac{1}{a} + 1}\right) = \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + z} + \frac{z}{x + y + z} = 1,$$

en gelijkheid treedt op bij $a = b = c = 1$, dus de minimumwaarde is $\frac{1}{3^{2005}}$. □

Vermelden dat $x + y + z = 1$ braaf is en geen substitutie nodig heeft.

4.3.4 Voorwaarden en substituties: $x+y+z+2 = xyz$ en $xy+yz+zx+2xyz = 1$

Harazi rules.

4.3.5 Voorwaarden en substituties: $xy + yz + zx = 1$ en $x + y + z = xyz$

4.4 Chebyshev

Stelling. *(Chebychev) Zij x_k en y_k 2 gelijk gesorteerde rijen, $k = 1, .., n$. Dan is*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n} \leq \frac{x_1y_1 + x_2y_2 ... + x_ny_n}{n}$$

Bewijs. *Vermenigvuldigen we beide leden met n^2 en werken we uit, dan komt er weer: (vierkantnotatie)*

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_1 & \cdots & x_1y_1 \\ x_2y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_n & x_ny_n & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

Wat opnieuw gewoon neerkomt op een paar keer orde-ongelijkheid voor $n = 2$, namelijk $x_iy_i + x_jy_j \geq x_iy_j + x_jy_i$.

Deze stelling heeft de grote kracht dat ze een som van breuken kan opsplitsen in een product van de som van de tellers met de som van de noemers.

Voorbeeld. *(deel van IMO 1995)* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

Oplossing. *De koppels (x, y, z) en $\left(\frac{1}{y+z}, \frac{1}{x+z}, \frac{1}{x+y}\right)$ zijn altijd gelijk gesorteerd, dus leert Chebychev ons dat:*

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq 3 \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right)$$

Via QM-AM weten we dat

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

en via AM-HM weten we dat

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{3}{2(x+y+z)}$$

Soms kunnen ongelijkheden er op zich erg moeilijk uitzien, maar met een klein beetje manipulatie sterk vereenvoudigd worden.

Voorbeeld. *(IMO 1995)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, abc = 1 : \dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}$

Oplossing. *Niet meteen eenvoudig om hier iets mee aan te vangen. Doen we nu echter even de eenvoudige substitutie* $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$*, dan komt er na uitwerking het te bewijzen*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+, xyz = 1 : \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

We hadden daarnet al dat dit minstens $\frac{x+y+z}{2}$ *was. AM-GM zegt ons bovendien dat*

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$$

wat te bewijzen was. □

==

==

==

==

4.5 Inductie

Stelling. *Zij $A(n)$ een bepaalde (gegeven) bewering over een geheel getal n. Als $A(0)$ waar is, en als uit het waar zijn van $A(k)$ volgt dat $A(k+1)$ waar is, dan is $A(n)$ waar voor alle $n \in \{0, 1, 2, ...\}$.*

Bewijs. *We hebben de waarheden $A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow ...$ zodat de bewering volgt voor elke $n \in \{0, 1, 2, ...\}$.*

Merk op dat het uiteraard geen noodzaak is om bij 0 te beginnen, je kunt net zo goed beginnen bij eenderwelk ander getal kleiner dan de n waarvoor je de bewering $A(n)$ wil bewijzen.

Stelling. *(Bernouilli) Voor alle $x_i > -1$ en alle x_i hetzelfde teken, geldt:*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Bewijs. *Inductie: triviaal voor $n = 1$, en er een variabele bijvoegen geeft:*

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1 + x_i) \geq (1 + x_{n+1})(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

en wegens alle x_i hetzelfde teken, is dat laatste niet negatief, dus bewezen. □

Niet zo belangrijk. Vooral handig voor dingen als $(1.01)^{40} > 1.40$ in numerieke problemen.

–) zouden we bernouilli niet als oef geven, deeltje (a), en dan (b) $\forall a, b, c \geq 0$ met $a^2+b^2+c^2 = 1$ geldt $(2 - 3ab)(2 - 3bc)(2 - 3ca) \geq 1$.

$\prod_{cyc}(1 + (1 - 3ab)) \geq 1 + \sum_{cyc}(1 - 3ab) = 4 - 3(ab + bc + ca) \geq 4 - 3(a^2 + b^2 + c^2) = 1$.

4.6 Grote en kleine duiven

kkk

4.7 Oefeningen

Je hebt nu voldoende bagage om aan de eerste reeks 'echte' oefeningen te beginnen.

No one has said it was easy.

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ zijn ook driehoekzijden
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a + b + c \leq 3 : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{3}$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+, \frac{1}{3} \leq xy + yz + zx \leq 3$: bepaal maximum en minimum voor xyz en $x + y + z$.
4. (deel van IMO 1991) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{1}{4} < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$
6. (IMO 1964) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden:
$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$$
[hoewel de ongelijkheid evengoed geldt voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$...]
7. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$
8. (IMO 2004) $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+ (1 \leq i \leq n)$: als voor elke drietal a_i, a_j, a_k met $1 \leq i < j < k \leq n$ geldt dat het de zijden van een driehoek zijn, bewijs dan dat
$$n^2 + 1 > (\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}).$$

9. (Hojoo Lee) $\forall a, b, c$ driehoekszijden van een scherphoekige driehoek: $\sqrt{a^2+b^2-c^2} + \sqrt{b^2+c^2-a^2} + \sqrt{c^2+a^2-b^2} \leq a+b+c$

10. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} > 2 + \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$

11. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right| < 1$ en bewijs dat 1 niet door een kleinere constante vervangen kan worden.

12. (Korea 1998) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a+b+c = abc : \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$

Hoofdstuk 5

De trukendoos: stellingen

Niet alle ongelijkheden zijn met voorgekookte formules en stellingen op te lossen, maar vaak kunnen deze wel een enorme hulp zijn. Hier overlopen we de meest gebruikte ongelijkheden. Eens je deze onder de knie hebt, kun je al een groot deel van alle ongelijkheden oplossen.

5.1 Algemeen machtsgemiddelde

We breiden de kennis over gemiddelden van het vorige hoofdstuk wat uit. We zien nu een overkoepelende theorie voor alle machtsgemiddelden. (Engels: Power-Mean)

We definiëren

$$f_j(a_1, \cdots, a_n) = \left(\frac{a_1^j + \cdots + a_n^j}{n}\right)^{1/j} = \sqrt[j]{\frac{a_1^j + \cdots + a_n^j}{n}}.$$

Ga na dat dit een gemiddelde is. In principe bestaat deze functie niet voor $f_0(), f_{+\infty}(), f_{-\infty}()$. Echter, via limietberekeningen kan men aantonen dat deze 'in de limiet' naderen naar iets dat we wel kennen, en wij zullen dus voor het gemak deze functies apart definiëren:

$$f_0(a_1, \cdots, a_n) = GM(a_1, \cdots, a_n),$$

$$f_{+\infty}(a_1, \cdots, a_n) = \max(a_1, \cdots, a_n),$$

$$f_{-\infty}(a_1, \cdots, a_n) = \min(a_1, \cdots, a_n).$$

Hierbij accepteren we $+\infty, -\infty$ dus eigenlijk als gewone getallen, dit is slechts een notatie, en we spreken daarbij dan logischerwijs af dat $+\infty > x > -\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

En nu een grote stelling:

Stelling. *(Power-Mean ongelijkheid) Zij $i > j$, dan is*

$$f_i(a_1, \cdots, a_n) \geq f_j(a_1, \cdots, a_n)$$

met gelijkheid als en slechts als alle a_i gelijk zijn. Merk hierbij op dat de gekende gemiddelden speciale gevallen hiervan zijn:

$$\max = f_{+\infty}() \geq QM = f_2() \geq AM = f_1() \geq GM = f_0() \geq HM = f_{-1}() \geq \min = f_{-\infty}().$$

Bewijs. *Wordt gegeven in hoofdstuk over convexiteit, aangezien het hier toch maar uit de lucht zou komen vallen - terwijl het eigenlijk niet zo moeilijk is.*

Een voorbeeldje.

Voorbeeld. *Vind alle koppels (a, b, c) waarvoor $a + b + c = 3$ en $a^{2005} + b^{2005} + c^{2005} = 3$.*

Oplossing. *Power-Mean zegt dat*

$$\sqrt[2005]{\frac{a^{2005} + b^{2005} + c^{2005}}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

met gelijkheid als en slechts als $a = b = c$. Hier hebben we $1 \geq 1$, dus gelijkheid, dus alle variabelen gelijk: $a = b = c = 1$. □

5.2 Twee veralgemeningen

De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz is een krachtig middel voor ongelijkheden met sommen van wortels, en dergelijk. Als we echter met derde wortels gaan werken, of met n-de machtswortels, zitten we vast. Gelukkig voor ons is er ook een kant en klare ongelijkheid die hiermee overweg kan: de (veralgemeende) ongelijkheid van Hölder.

Stelling. *(Veralgemeende Hölder) Zij $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}_0^+$, en nemen we k rijen van n getallen $\in \mathbb{R}_0^+$, met a_{ij} het j-de element van de i-de rij, en noteren we kort $s = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_k}\right)}$, dan geldt er:*

$$\prod_{i=1}^{k} \sqrt[p_i]{a_{i1}^{p_i} + ... + a_{in}^{p_i}} \geq \sqrt[s]{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^s a_{2j}^s ... a_{kj}^s}.$$

Bewijs. *Het bewijs ga ik weglaten, aangezien de gebruikte technieken niet echt in het kader van de cursus passen, en het bewijs van deze veralgemeende versie ook vrij ingewikkeld en omvangrijk is. Gelijkheidsvoorwaarde is net als bij Cauchy-Schwarz: als en slechts als alle rijen een veelvoud van elkaar zijn.*

Dat is vrij algemeen, maar de stelling komt meestal gewoon voor met $p_1 = p_2 = ... = p_k = k$, vaak zelfs met $k = 3$.

Voorbeeld. $\forall n \in \mathbb{N}, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}_0^+$:

$$(a_1^3 + ... + a_n^3)(b_1^3 + ... + b_n^3)(c_1^3 + ... + c_n^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + ... + a_n b_n c_n)^3$$

Oplossing. *Volgt onmiddellijk uit Hölder. Dit lijkt al wat meer op Cauchy-Schwarz.* □

Voorbeeld. *(IMO Shortlist 2004) Zij $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ met $ab + bc + ca = 1$. Bewijs dat*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

Oplossing. *Hölder op 3 variabelen geeft ons dat*

$$(\textit{linkerlid})^3 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left((6ab+1) + (6bc+1) + (6ca+1)\right)(1+1+1).$$

Daar $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$ onder deze condities, is dat laatste gelijk aan $\frac{27}{abc}$, en rest ons dus te bewijzen dat $\sqrt[3]{\frac{27}{abc}} \leq \frac{1}{abc}$, wat je ondertussen wel zou moeten kunnen. □

Hölder is zeer handig als je wil bewijzen dat iets groter is dan een som van wortels. Voor kleiner dan een som van wortels kan de volgende stelling dan weer handig zijn.

Stelling. *(Veralgemeende Minkowski) Zij $p > r$, en nemen we k rijen van n getallen $\in \mathbb{R}_0^+$, met a_{ij} het j-de element van de i-de rij, dan geldt er:*

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^p\right)^{r/p}\right)^{1/r} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^r\right)^{p/r}\right)^{1/p}.$$

Bewijs. *Ook hier is het bewijs lang en niet echt relevant, ik ga het dus opnieuw weglaten. Gelijkheidsvoorwaarde ook hier dezelfde: als en slechts als alle rijen een veelvoud van elkaar zijn.*

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a + b + c = 1 : \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{82}$

Oplossing. *Als je bij het zien van deze opgave spontaan probeert AM-GM toe te passen, en verwonderd bent dat maar $\geq \sqrt{18}$ garandeerd is, dan moet je hoofdstuk 2.3 nog eens opnieuw bekijken. Minkowski doet beter: passen we de stelling toe voor $p = 2, r = 1, n = 2, k = 3$, (en die waarden komen niet uit de lucht te vallen, je moet wat sleutelen om je uitdrukking daar in te doen 'passen') dan komt er hier:*

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}.$$

AM-HM zegt ons dat $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$, dus is

$$\sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2} = \sqrt{82},$$

wat te bewijzen was. □

Vrij handig dus. Veel boeken geven minder krachtige varianten van deze stelling, die hun theoretisch belang hebben in de studie van genormeerde ruimten enzo in de analyse. Voor olympiades zijn deze echter niet voldoende, zeker wat betreft Hölder. Ik vermeld ze toch even ter volledigheid, je kunt zelf nagaan dat ze weldegelijk speciale gevallen zijn van de eerder vernoemde veralgemeningen.

Stelling. *(Hölder) Zij $p, q > 0$ met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan geldt:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q},$$

Stelling. *(Minkowski) Zij $p > 1 \in \mathbb{R}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, dan geldt:*

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p} \geq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} b_k^p}.$$

5.3 Schur

Stelling. *(Schur)* $\forall a, b, c, r > 0 : a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$

Bewijs. *De ongelijkheid is symmetrisch, dus we mogen veronderstellen dat $a \geq b \geq c$. Schrijven we dit als*

$$(a-b)\left(a^r(a-c) - b^r(b-c)\right) + c^r(a-c)(b-c) \geq 0$$

dan zijn alle factoren en termen positief wegens de onderstelling $a \geq b \geq c$. □

Meer algemeen noemen we een functie $f(x)$ een Schur-functie, als en slechts als geldt:

$$\forall a, b, c > 0 : f(a)(a-b)(a-c) + f(b)(b-c)(b-a) + f(c)(c-a)(c-b) \geq 0$$

Uiteraard kun je $f(x) = x^r$ vervangen door eender welke positieve stijgende functie. Pas op: Schur is een krachtige stelling eens je ermee kunt werken, maar vergt wel wat rekenwerk en vooral reken-inzicht! Merk op dat hier wederom de orde-ongelijkheid opduikt. De onderstelling $a \geq b \geq c$ en de stijgendheid van f is gewoon een camouflage om te zeggen dat (a, b, c) en $(f(a), f(b), f(c))$ gelijk gesorteerd moeten zijn...

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$

Oplossing. *Dit is equivalent met Schur voor $f(x) = x$. Merk op dat we dit kunnen herschrijven als $abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$, wat nog eens de link tussen Schur en de orde-ongelijkheid toont.* □

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)$

Oplossing. *Werk uit en je ziet dat dit equivalent is met Schur voor $f(x) = x^2$.* □

Voorbeeld. *(IMO 1984)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c=1 : 0 \leq ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$

Oplossing. *Het linkerdeel is vrij triviaal en ga ik niet op ingaan. Het rechterdeel gaan we homogeniseren, zodat we de vervelende voorwaarde $a+b+c=1$ kwijt zijn. Alles maal 27 om ook breuken weg te krijgen geeft ons dus te bewijzen:*

$$7(a+b+c)^3 + 54abc \geq 27(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Stellen we nu $A = a^3+b^3+c^3, B = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b, C = abc$ en werken we gans dat boeltje uit (dat uitwerken moet je in je hoofd doen... dat is niet zo moeilijk als het er uitziet!), dan komt er $7A+21B+42C+54C \geq 27B+81C$ ofte $7A+15C \geq 6B$. Schur *zei ons daarnet dat $A+3C \geq B$, en uit de orde-ongelijkheid weten we dat $2A \geq B$. Vijfmaal de $A+3C \geq B$ en eenmaal $2A \geq B$ optellen geeft de te bewijzen ongelijkheid.* $\square$

Je ziet, met wat slim rekenwerk kan je de kracht van Schur aanwenden om vanalles te kraken met relatief weinig rekenwerk. Je handen durven vuilmaken, dat moet je zeker wel kunnen. Onthoud ook best die korte notatie met A, B, C, die komt wel vaker van pas. Uiteraard bestaan er 'nettere' bewijzen, maar die zijn dan weer moeilijker om zelf te vinden. Juist is juist op een competitie, de methode die je het makkelijkst zelf vindt is dus per definitie de beste methode!

5.4 Exponentiële en logaritmische functies

Het merkwaardige aan de substitutie bij de voorwaarde $a+b+c=abc$ is dat het een link geeft tussen product en som, die eigenlijk totaal uit de lucht komt vallen. Onder normale omstandigheden is er welgeteld 1 werkmiddel dat machten, producten en sommen onderling linkt, namelijk de exponentiële en logaritmische functies. Ik ga hier vrij kort overgaan, omdat het eigenlijk heel simpel is, dat ga je wel zien.

Neem de functie $f(x) = 2^x$. Die beeldt iedere $x \in \mathbb{R}$ af op een $y \in \mathbb{R}_0^+$. Bovendien is $f(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a)f(b)$. Dit is een merkwaardige eigenschap: de functiewaarde van een som is het product van de functiewaarden. Merk op dat $f(x) = 2^x$ heel $\mathbb{R}_0^+$ doorloopt terwijl x $\mathbb{R}$ doorloopt, en dat $f(x)$ ook strikt stijgend is. We noemen $f(x) = 2^x$ een *exponentiële functie*. Het getal 2 is daarbij niet specifiek, eender welk getal groter dan 1 heeft dezelfde eigenschappen.

De meest bekende exponentiële functie, die we in het vervolg 'de' exponentiële functie gaan noemen, is $\exp(x) = e^x$, waarbij $e \approx 2.7182$, een vreemd getal dat overal in de natuur voorkomt. Die heeft uiteraard ook alle eigenschappen van de functie hierboven. Waarom nu precies die e? Je moet hier niet veel achter zoeken. Voor alles wat wij er in deze cursus gaan mee doen, mag je zelfs redeneren op 2^x in de plaats, het zal geen verschil maken. Of op 10^x, zoals je wil.

Een klasse functies die nauw met de exponentiële functies verbonden zijn, zijn de logaritmische functies. Feitelijk doen die net het omgekeerde: de 2-logaritme van $x > 0$ is het unieke getal y waarvoor $2^y = x$. De 10-logaritme is dan weer het unieke getal y waarvoor $10^y = x$, en de 'gewone' logaritme, de e-logaritme het getal y waarvoor $e^y = x$. Die e-log noteren we ook $\ln(x)$. Analoog aan de exponentiële hebben we hier nu dus dat $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Twee andere eigenschappen die hieruit volgen: $\exp(rx) = \exp(x)^r$ en $r\ln(x) = \ln(x^r)$, en dit voor alle x waar de functie gedefinieerd is. Merk ook op dat beide functies strikt stijgend zijn. Dat wil zeggen: een ongelijkheid $A > B$ is volledig equivalent met $e^A > e^B$ of, voor $A, B > 0$, met $\ln(A) > \ln(B)$. En dat wordt natuurlijk interessant!

Een laatste eigenschap, die eigenlijk wel vrij logisch is: $e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$, met andere woorden: deze 2 functies heffen mekaar op.

<u>**Voorbeeld.**</u> *(Canada 1995)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

Oplossing. *Nemen we de* ln *van beide zijden. Dan komt er te bewijzen:*

$$\ln(a^a b^b c^c) = a\ln(a) + b\ln(b) + c\ln(c) \geq \frac{a+b+c}{3}(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)) = \ln\left((abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\right).$$

Merk op dat door de stijgendheid van ln, *de rijen* (a, b, c) *en* $(\ln(a), \ln(b), \ln(c))$ *gelijk gesorteerd zijn. Chebychev toepassen geeft het gevraagde.* □

5.5 restafval

Naast cyclisch en symmetrisch sommeren zijn er nog een paar andere handige notatie-afspraken. Zo kun je bijvoorbeeld $x_1 + x_5 + x_7$ schrijven als $\sum_{i \in \{1,5,7\}} x_i$. Of, iets compacter:

$$\sum_{i \in K} x_i \text{ met } K = \{1, 5, 7\}.$$

Dat is een veralgemening van de gewone sommatie:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{i \in K} x_i \text{ met } K = \{m, m+1, ..., n-1, n\}.$$

Deze notatie zal je hier niet veel tegenkomen, maar kan algemeen wel enorm handig zijn. Iets wat je hier meer zult zien is de volgende - eerder vergezochte, maar vaak voorkomende - notatie. We definiëren

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j = (x_1 + ... + x_n)^2 - (x_1^2 + ... + x_n^2) = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{sym} x_i x_j.$$

Formeel zou je dit dus kunnen neerschrijven als

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in K} x_i x_j \right), \text{ met } K = \{1, 2, ..., n\} \backslash \{i\}.$$

En analoog noteert men

$$\sum_{i<j}^{n} x_i x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} x_i x_j.$$

5.6 Opwarmertjes

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a + b + c = 1 : \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \geq \sqrt{21}$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, abc = 1 : a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$
3. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+0 : (ac^2 + bd^2)^3 \leq (a^3 + b^3)(c^3 + d^3)^2$

5.7 Oefeningen

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c < 1 : \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} > \sqrt{82}$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+, x+y+z = 1 : \frac{1}{\sqrt{1+xy}} + \frac{1}{\sqrt{1+yz}} + \frac{1}{\sqrt{1+zx}} \geq \frac{9}{\sqrt{10}}$
4. (IMO 1983) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden : $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \frac{a^n + b^n + c^n}{2}$

Hoofdstuk 6

Symmetrische Polynomen

6.1 Muirhead

Eerst een nieuw begrip definiëren. We zeggen dat een niet-stijgend gesorteerd n-tal reële getallen $(a_1, a_2, ..., a_n)$ een ander niet-stijgend gesorteerd n-tal reële getallen $(b_1, b_2, ..., b_n)$ majoriseert, en noteren dit $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$ als en slechts als:

$$a_1 \geq b_1, a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2, ..., a_1 + a_2 + .. + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + .. + b_{n-1},$$

$$a_1 + ... + a_n = b_1 + ... + b_n.$$

Bijvoorbeeld $(6, 3, 1) \succ (4, 4, 2)$, of bijvoorbeeld $(4, 0, 0, -1) \succ (\frac{5}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2})$.

Stelling. *(Muirhead) Als $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \succ (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, en $x_i > 0$, dan geldt:*

$$\forall x_i \in \mathbb{R}^+ : \sum_{sym} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

Bewijs. *Wordt weggelaten wegens te lang en niet relevant in het kader van de cursus.*

Deze stelling lost doorgaans geen problemen op die de orde-ongelijkheid niet aankan. Toch is ze soms nuttig aangezien dit voor ingewikkeldere opgaven immens veel tijd kan besparen. Pas wel op dat je ze enkel toepast op symmetrische sommen, met Muirhead missen is meestal direct 0, want Muirhead is niet meteen een ongelijkheid die getuigt van grote kunde en creativiteit. Muirhead is sterk maar vraagt veel rekenwerk, en is daardoor vooral handig als laatste uitweg bij symmetrische ongelijkheden: als je het echt niet vindt op een andere manier, werk dan gewoon uit (compact genoteerd met de symmetrische sommen en producten) en hoop dat je ergens Muirhead/Schur/... kunt toepassen. Zo kon je bijvoorbeeld IMO2005/3 relatief eenvoudig oplossen door Muirhead 7 keer toe te passen als je het Cauchy-idee niet vond.

Dat heeft de IMO-jury ook wel een beetje verrast, en het lijkt vrij onwaarschijnlijk dat Muirhead nog echt van enig nut zal zijn de komende jaren. Ik zal mij dan ook beperken tot wat voorbeeldjes, zonder echte oefeningen. Er zijn nuttiger dingen te doen met je tijd.

__Voorbeeld__. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+ : x^3y^3z + x^3yz^3 + xy^3z^3 \geq x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3$

Oplossing. *Zij* $(a_i) = (3,3,1), (b_i) = (3,2,2), (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, *dan geeft de stelling van Muirhead direct het resultaat, met een factor 2 voor (symmetrische som). Deel beide leden door 2 en je hebt wat je wil.* $\square$

__Voorbeeld__. *(AM-GM)* $\forall x_1, .., x_n \in \mathbb{R}_0^+ : x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$

Oplossing. *Muirhead op* $(1, 0, ..., 0) \succ (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$. *Opnieuw factor* $(n-1)!$ *wegdelen.* $\square$

__Voorbeeld__. *Bewijs dat voor* $a, b, c > 0 : (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Oplossing. $(3, 1, 0) \succ (2, 2, 0)$ *en* $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^4 + b^4 + c^4$ *optellen.* $\square$

Hoofdstuk 7

Convexe functies

7.1 Convexiteit

In dit hoofdstuk gaan we verder het pad op van de studie van ongelijkheden via functies. Dit hoofdstuk draait rond convexiteit, we definiëren dus eerst dit begrip. De volgende 4 beweringen zijn (althans voor deze cursus) equivalent:

- f is convex op [a,b]
- $\forall x, y, z \in [a, b]$ met $x \leq y \leq z$ geldt: $f(y)$ ligt nergens boven het lijnstuk tussen $(x, f(x))$ en $(z, f(z))$.
- $\forall x \in [a, b] : f''(x) \geq 0$
- $\forall w, x, y, z \in [a, b]$ met $w \leq x \leq y \leq z$ en $w + z = x + y$: $f(x) + f(y) \leq f(w) + f(z)$

Deze eigenschap met het ongelijkheidsteken omgekeerd definieert dan een concave functie. Opnieuw gelijkwaardig:

- f is concaaf op [a,b]
- $\forall x, y, z \in [a, b]$ met $x \leq y \leq z$ geldt: $f(y)$ ligt nergens onder het lijnstuk tussen $(x, f(x))$ en $(z, f(z))$.
- $\forall x \in [a, b] : f''(x) \leq 0$
- $\forall w, x, y, z \in [a, b]$ met $w \leq x \leq y \leq z$ en $w + z = x + y$: $f(x) + f(y) \geq f(w) + f(z)$

Het bewijs is lang en niet interessant. De intervallen mogen ook open/halfopen zijn.

Voorbeeld. *Vind alle functies die zowel convex als concaaf zijn.*

7.2 Stelling van Jensen

Voor wie nog geen afgeleiden kent, dit zal in praktisch alle gevallen voldoende zijn:

- In $\mathbb{R}_0^+$ geldt: $f(x) = x^k$ is convex voor $k \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$, en concaaf voor $k \in [0,1]$.
- Voor negatieve x is x^k convex voor k even en concaaf voor k oneven.
- Zij f, g convex (resp. concaaf), dan is $f + g$ convex (resp. concaaf).
- Bovenstaande geldt *niet* voor product. Denk maar aan $f(x) = x, g(x) = x^{-1/2}$.
- $\sin(x)$ en $\cos(x)$ zijn convex waar ze ≤ 0 zijn, concaaf waar ze ≥ 0 zijn.
- $\tan(x)$ is convex waar ie ≥ 0 is, concaaf waar ie ≤ 0 is.
- De exponentiële functie is convex, de logaritmische is concaaf.
- Zij f convex (resp. concaaf) en $c \in \mathbb{R}^+$, dan is cf convex (resp. concaaf).
- Zij f convex (resp. concaaf) dan is $-f$ concaaf (resp. convex).
- Vaak kan je convexiteit of concaviteit zien door een schets van de functie te maken, of door ze via een kleine substitutie terug te brengen tot een gekende functie. Bijvoorbeeld $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ is convex op $]-1, +\infty[$ (en dus ook op $\mathbb{R}^+$), omdat $\dfrac{1}{x}$ convex is op $]0, +\infty[$.
- Je mag spiegelen tegenover de verticale as door het midden van je convexiteitsgebied: $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ is convex op $[0,1]$ omdat $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$ dat is. Idem voor concaviteit.
- Dan nog twee 'speciale' gevallen die je niet direct uit de definitie ziet: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ is convex voor $x > 0$ en $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$ voor $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Stelling. *(Gewogen Jensen) Zij I een interval, $a_i \in I$, $k_i \in \mathbb{R}_0^+$, f convex op I. Dan is:*

$$\frac{k_1 \cdot f(a_1) + \cdots + k_n \cdot f(a_n)}{k_1 + \cdots + k_n} \geq f\left(\frac{k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right)$$

Gelijkheid als en slechts als ofwel alle a_i gelijk zijn, ofwel de functie een rechte is. Ongelijkheidsteken in de omgekeerde zin als f concaaf is op I.

Bewijs. *Opnieuw is het bewijs van de gewogen versie lang en niet interessant.*

Ga steeds expliciet na dat je functie convex is, anders mis je gegarandeerd. Doorgaans zal $k_1 = ... = k_n = 1$. Probeer eventueel dit speciaal geval zelf via inductie te bewijzen.
Voor de volledigheid vermeld ik nog even - zonder bewijs - dat alle positieve convexe functies ook Schurfuncties zijn.

Veel van de vorige ongelijkheden zijn haast triviaal te bewijzen met behulp van deze stelling, zo is QM-AM bijvoorbeeld niets anders dan Jensen voor $f(x) = x^2$. Bovendien laat de gewogen versie van Jensen ons toe de ongelijkheden tussen de gemiddelden te veralgemenen, tot gewogen gemiddelden. Dit houdt in dat de waarden elk een gewicht krijgen, zoals men bijvoorbeeld op je rapport doet naargelang het aantal uur les van een vak. Het interessante is wel dat dit niet enkel geldt voor gehele en rationale coëfficiënten, maar voor alle reële.

Het enige addertje onder het gras - en ook de reden waarom deze stelling pas in dit hoofdstuk komt - is dat een probleem nooit duidelijk zal maken dat het met Jensen op te lossen is. Het komt er op aan zelf een geniale keuze van f te nemen waardoor Jensen het probleem eenvoudiger maakt. Alle hersencellen aan het werk dus! Enkele voorbeeldjes.

Voorbeeld. $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, a + b = 1 : \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Oplossing. *De functie* $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ *is convex in* $[0, 1]$*, we krijgen dus:*

$$f(a) + f(b) \geq 2 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}.$$

□

Of wat serieuzer:

Voorbeeld. *(IMO 2001)*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

Oplossing. *Graad is in alle termen van beide leden 0, we mogen dus zonder verlies van algemeenheid stellen dat* $a + b + c = 1$*. Stel* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$*, deze functie is convex en dalend in* $\mathbb{R}^+$*. Jensen zegt ons dus:*

$$a \cdot f(a^2 + 8bc) + b \cdot f(b^2 + 8ca) + c \cdot f(c^2 + 8ab) \geq f(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)$$

Nu hebben we ook, wegens AM-GM en f *dalend:*

$$f(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \geq f(a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc).$$

Maar dat laatste is gelijk aan $= f((a + b + c)^3) = f(1) = 1$*, wat te bewijzen was.* □

Een bijna triviale oplossing voor een toch vrij recente IMO-vraag. De kracht van Jensen is groot, maar het vraagt enorm veel oefening om de juiste functie te leren ‘zien’.

7.3 Trigonometrische ongelijkheden

Het vervelende aan trigonometrische problemen is dat het soms gebeurt dat de ongelijkheid zich afspeelt op een interval waar de functie op een stuk convex en op een ander stuk concaaf is. Een voorbeeldje.

Voorbeeld. *In elke driehoek met hoeken A, B, C geldt dat* $\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq \frac{3}{2}$.

Oplossing. *We weten dus niet of de driehoek scherphoekig of stomphoekig is en zitten dus schijnbaar vast met de convexiteit. Toch kan een kleine gevalstudie hier merkwaardige zaken verrichten. Noem C de grootste hoek.*

Als $C \leq 90°$, dan is cos *concaaf en is wegens Jensen*

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq 3\cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

Als $C > 90°$, dan zijn $A, B < 90°$, dus krijgen we opnieuw via Jensen, maar nu op 2 variabelen, dat $\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos(C)$. *Daar* $A + B = 2\left(\frac{A+B}{2}\right) < 90°$, *krijgen we dat*

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos(C) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right),$$

wat op zijn beurt gelijk is aan

$$-\left(\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - 1\right)^2 + 1 + \sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

De meeste meetkundigen zullen wel even gniffelen bij het zien van dit omslachtig bewijs, want er zijn veel eenvoudigere meetkundige oplossingen, maar die vallen buiten het bestek van deze cursus. We zullen hier dan ook niet dieper ingaan op de trigonometrische ongelijkheden in hun meetkundige betekenis.

Voorbeeld.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a + b + c = abc : \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Oplossing. *Doe de in hoofdstuk 4 vernoemde substitutie voor die voorwaarde. Daar* $\sqrt{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$, *is de ongelijkheid equivalent met*

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_0^+, \alpha + \beta + \gamma = \pi : \cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leq \frac{3}{2},$$

en dat hebben we daarnet al bewezen. $\square$

7.4 Gewogen gemiddelden

Zoals beloofd herzien we nog even onze kennis over gemiddelden, en bewijzen enkele interessante veralgemeningen van de gekende stellingen hierover.

Stelling. *(gewogen AM-GM) Voor* $a_i, k_i \in \mathbb{R}_0^+$ *geldt:*

$$\frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \geq \sqrt[k_1+\ldots+k_n]{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}}$$

Bewijs. *Beschouw de concave functie* $\ln(x)$. *Gewogen Jensen zegt nu dat*

$$\frac{k_1\ln(a_1) + \cdots + k_n\ln(a_n)}{k_1 + \cdots + k_n} \leq \ln\left(\frac{k_1a_1 + \cdots + k_na_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right),$$

wat kan herschreven worden (zie rekenregels voor $\ln()$*) als:*

$$\ln\left(\sqrt[k_1+\ldots+k_n]{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}}\right) \leq \ln\left(\frac{k_1a_1 + \cdots + k_na_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right).$$

Exp() van beide leden nemen geeft het gevraagde. □

Stelling. *(gewogen QM-AM) Voor* $a_i, k_i \in \mathbb{R}_0^+$ *geldt:*

$$\sqrt{\frac{k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + \cdots + k_na_n^2}{k_1 + \cdots + k_n}} \geq \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$

Bewijs. *Gewogen Jensen op* $f(x) = x^2$ *geeft dat*

$$\frac{k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + \cdots + k_na_n^2}{k_1 + \cdots + k_n} \geq \left(\frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}\right)^2,$$

hieruit de vierkantswortel trekken geeft het gevraagde. □

Stelling. *(gewogen GM-HM) Voor* $a_i, k_i \in \mathbb{R}_0^+$ *geldt:*

$$\sqrt[k_1+\ldots+k_n]{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}} \geq \frac{k_1 + \cdots + k_n}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} + \cdots + \frac{k_n}{a_n}}$$

Bewijs. *Gewogen AM-GM op* $\frac{1}{a_i}$ *in plaats van* a_i. □

Je ziet, dit kost ons al heel wat minder moeite dan voorheen, en dat voor een meer algemene en krachtigere versie.

Hernemen we eventjes een oefening uit de oude doos, met de veralgemening dat m, n nu reëel mogen zijn:

Voorbeeld. $\forall a, b, m, n \in \mathbb{R}_0^+ : a^{\frac{m}{m+n}} \cdot b^{\frac{n}{m+n}} \leq \dfrac{am+bn}{m+n}$

Oplossing. *Bewijs zelf. (voor zover dit niet trivaal is ondertussen)*

Ook de veel algemenere Power-Mean kan zo verder veralgemeend worden, en je zult zien: altijd op dezelfde manier, je moet gewoon leren de goede functie te zien, en een beetje handigheid krijgen om stijgendheid/dalendheid van een functie erbij te betrekken.

Definiëren we opnieuw functies

$$f_j = \sqrt[j]{\frac{k_1 a_1^j + \cdots + k_n a_n^j}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}}$$

met nu f_0 het gewogen GM, en $f_{\pm\infty}$ gewoon minimum en maximum als voorheen.

Stelling. *(Gewogen Power-Mean Ongelijkheid) Als $i > j$ dan is:*

$$f_i(k_m, a_m) \geq f_j(k_m, a_m),$$

gelijkheid als en slechts als alle a_m gelijk zijn.

Bewijs. *Beschouw de functie $f(x) = x^{i/j}$. Deze is dus convex als $\frac{i}{j} > 1$, wat door $i > j$ equivalent is met $i > 0$. En concaaf als $i < 0$.*

Stel dat $i > 0$. Voeren we dan gewogen Jensen uit met wegingsfactoren k_m en argumenten $(a_m)^j$, dan komt er dat

$$\frac{k_1 a_1^i + k_2 a_2^i + \cdots + k_n a_n^i}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \geq \left(\frac{k_1 a_1^j + k_2 a_2^j + \cdots + k_n a_n^j}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}\right)^{i/j},$$

uit beide leden de i-de wortel nemen behoudt de ongelijkheid voor $i > 0$, en geeft het gevraagde.

Als $i < 0$, volledig analoog, convexiteit keert het teken om, en i-de wortel nemen voor $i < 0$ keert het teken nogmaals om.

Als ten slotte $i = 0$ of $j = 0$, passen we gewoon GM-HM of AM-GM toe op (k_m, a_m^j) of op (k_m, a_m^i) respectievelijk. □

Deze gewogen gemiddelden zijn slechts enkele van de vele dingen die heel makkelijk op te lossen zijn via Jensen. Kwestie van de kneepjes van het vak te leren: een dubbele portie oefeningen!

7.5 Oefeningen

Sommige oefeningen heb je al eens gemaakt zonder Jensen. Doe ze nu eens met, en beoordeel zelf het verschil.

1. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+, abc = 1 : \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{3}{2}$

2. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c = 1 : \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b+c}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$

3. $\forall x,y \in \mathbb{R}, |x|,|y| \leq 1 : \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

4. $\forall n \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}} \leq 2\sqrt[n]{n}$

5. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c \leq \frac{3}{2} : \sum_{cyc} \sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}} > 9$

6. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+, m,n \in \mathbb{N}_0 : \frac{a}{mb+nc} + \frac{b}{mc+na} + \frac{c}{ma+nb} \geq \frac{3}{m+n}$

7. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+, ab+bc+ca = 1 : \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \geq \frac{3}{2}$

8. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+, a_1+...+a_n = 1 : \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} > \frac{\sqrt{a_1}+...+\sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}}$

9. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{cyc} \frac{a}{a+2b+c} \geq \frac{3}{4}$

10. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+, a_1+...+a_n = 1 : \sum_{cyc} \frac{a_1^2}{a_1+a_2} \geq \frac{1}{2}$

11. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt[3]{b^3+c^3+6abc}} \geq \frac{3}{2}$

12. $\forall a,b,x,y \in \mathbb{R}_0^+, b > a : (x^a+y^a)^b \geq (x^b+y^b)^a$

13. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+, a,b,c \leq \frac{1}{2} : (\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1) \geq (\frac{3}{a+b+c}-1)^3$

14. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}_0^+, x+y+z = 1 : \frac{1}{\sqrt{1+xy}} + \frac{1}{\sqrt{1+yz}} + \frac{1}{\sqrt{1+zx}} \geq \frac{9}{\sqrt{10}}$

15. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{cyc} \frac{a}{b+2c+3d} \geq \frac{2}{3}$

16. (IMO Shortlist 1990) $\forall w,x,y,z \in \mathbb{R}_0^+, wx+xy+yz+zw = 1 : \sum_{cyc} \frac{w^3}{x+y+z} \geq \frac{1}{3}$

17. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \geq \sqrt{6(a+b+c)}$

18. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a,b,c \geq \frac{1}{4}, a+b+c = 1 : \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$

19. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$

20. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 : (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$

21. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + (b+c)^2}} \geq 1$

22. (Iran 1999) $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+; a_i < a_{i+1} : a_1 a_2^4 + \cdots + a_{n-1} a_n^4 + a_n a_1^4 \geq a_1^4 a_2 + \cdots + a_{n-1} a_n^4 + a_n a_1^4$

23. $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_1 \geq 1 : \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geq \frac{2^n}{n+1} \cdot (1 + \sum_{i=1}^{n} a_i)$

24. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \prod_{cyc} (a^2 + 2ab)^a \leq (a^2 + b^2 + c^2)^{a+b+c}$

25. $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i + 1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n} + 1}$

26. In een driehoek met hoeken A, B, C en (overstaande) zijden a, b, c geldt:

$$\sin(\frac{A}{2}). \sin(\frac{B}{2}). \sin(\frac{C}{2}) \leq \frac{abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

27. $\forall x \neq y \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{xy} < \frac{x - y}{\ln x - \ln y} < \frac{x+y}{2}$

⋆ ⋆ ⋆

Typfouten en andere inhoudsopmerkingen zijn altijd welkom per mail.