Técnicas de Conteo

§1. Definiciones y notaciones preliminares

Definición 1.

Un *conjunto* es una colección de elementos **distintos** cuyo orden no es importante.

Según esta definición los conjuntos $A = \{1, 3, 2, 4\}$ y $B = \{3, 3, 2, 1, 1, 1, 4, 4\}$ son iguales.

$\boxed{1}$ El *conjunto vacío* es aquel que no posee elementos y se denota como $\{\}$ o $\emptyset$.

$\boxed{2}$ Un *conjunto infinito* es aquel que tiene infinitos elementos, como el conjunto de los números enteros o de los números primos.

$\boxed{3}$ La notación $x \in A$ significa que el elemento x pertenece al conjunto A.

$\boxed{4}$ La notación $x \notin A$ significa que el elemento x **no** pertenece al conjunto A.

$\boxed{5}$ Un conjunto A es *subconjunto* de un conjunto B si todos los elementos de A pertenecen al conjunto B, y se denota por $A \subset B$.

$\boxed{6}$ Dos conjuntos A y B son iguales si contienen exactamente los mismos elementos.

$\boxed{7}$ La *unión* de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que están en A **o** en B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}$$

Si se tienen n conjuntos entonces la unión de todos se representa como:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : x \in A_i, \text{ para algún } i, \text{ con } 1 \leq i \leq n\}$$

$\boxed{8}$ La *intersección* de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$ es el conjunto de todos los elementos que están en A **y** en B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}$$

Si se tienen n conjuntos entonces la intersección de todos se representa como:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x : x \in A_i, \text{ para todo } i, \text{ con } 1 \leq i \leq n\}$$

$\boxed{9}$ Decimos que dos conjuntos A y B son *disjuntos* si no poseen elementos en común, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

$\boxed{10}$ La *diferencia* de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

$\boxed{11}$ El *cardinal* de un conjunto finito A es el número de elementos del conjunto A y se denota como $|A|$.

§2. Principio de la Suma y el Producto

Teorema 1: Principio de la suma

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos disjuntos dos a dos, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Nota: Se dice que los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son disjuntos dos a dos si para todo $1 \leq i \neq j \leq n$ se cumple que A_i y A_j son disjuntos.

Este teorema establece que para calcular el cardinal de la unión de varios conjuntos disjuntos dos a dos, basta con sumar los cardinales de cada conjunto que lo componen. Por ejemplo, dados los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{8, 7, 6\}, A_3 = \{4, 5\}$$

notamos que son disjuntos, además la unión de dichos conjuntos es:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 8, 7, 6, 4, 5\}$$

se verifica que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

Ejercicio 2.1. ¿Cuántos enteros positivos menores que 10000 cumplen que el producto de sus cifras es 7?

Teorema 2: Principio del producto

Dada una sucesión de n elecciones independientes entre sí, donde X_1 representa las posibilidades de la primera elección, X_2 de la segunda, y así sucesivamente, X_n para la $n-$ésima elección, entonces en total hay $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$ formas de hacer las elecciones.

Por ejemplo. Una persona tiene 3 caminos para ir de A a B, y tiene 4 caminos para ir de B a C. ¿Cuántos caminos hay de A a C pasando por B?

Notamos que los caminos de A a B y de B a C son independientes, entonces:

$$\begin{aligned}\{\text{N° de caminos de } A \text{ a } C\} &= \{\text{N° de caminos de } A \text{ a } B\} \cdot \{\text{N° de caminos de } B \text{ a } C\} \\ &= 3 \cdot 4 = 12\end{aligned}$$

Ejercicio 2.2. ¿Cuántos números de dos dígitos existen?

Ejercicio 2.3. ¿Cuántos números de tres dígitos existen?

Ejercicio 2.4. ¿Cuántos números de N dígitos existen?

Ejercicio 2.5. Cada una de las seis casillas de un tablero de 2x3 se debe pintar de rojo, azul, verde o amarillo. ¿Cuántas coloraciones distintas del tablero podemos obtener?

Ejercicio 2.6. Sea $n > 1$ un entero positivo cuya descomposición en factores primos es:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

Demostrar que la cantidad de divisores positivos de n es $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

§3. Problemas de Entrenamiento

$\boxed{1}$ ¿Cuántos números de 5 dígitos son múltiplos de 5?

$\boxed{2}$ ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?

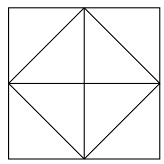
$\boxed{3}$ ¿Cuántos números pares de 5 dígitos son capicúas?

$\boxed{4}$ ¿Cuántos números de 5 dígitos cumplen que el producto de sus dígitos es impar?

$\boxed{5}$ ¿Cuántos números de 5 dígitos cumplen que la suma de sus dígitos es múltiplo de 5?

$\boxed{6}$ Probar que la cantidad de subconjuntos de un conjunto S de n elementos es 2^n.

$\boxed{7}$ (ONEM 2017, Fase 3, Nivel 3, P3) La figura está formada por 8 triángulos iguales. Cada triángulo se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cualesquiera dos triángulos que tienen un lado en común deben ser pintados de colores diferentes. ¿De cuántas formas se puede hacer eso?



$\boxed{8}$ Codeforces: Codeforces Round 913 (Div. 3). Problema E. **Good Triples**

Permutaciones y Combinaciones

§1. Permutación

Definición 1.

Una *permutación* es un arreglo o disposición de objetos de un conjunto en un orden determinado.

Entonces si el conjunto es $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, algunas posibles permutaciones son:

- $\{3, 1, 4, 2, 5\}$
- $\{2, 4, 3, 5, 1\}$
- $\{5, 4, 3, 1, 2\}$
- $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Ejercicio 1.1. Dado un conjunto S de n elementos, ¿cuántas permutaciones posee ese conjunto?

Sea $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ una permutación de S, entonces podemos notar que p_1 tiene n posibles valores, luego p_2 tiene $n - 1$ valores (todos excepto el valor de p_1), p_3 tiene $n - 2$ posibles valores y así sucesivamente, hasta p_n que tendrá únicamente 1 posible valor, por lo que por el principio de multiplicación, el total de permutaciones es:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Ejercicio 1.2. Dado un conjunto S de n elementos, ¿cuántas listas ordenadas de k elementos se pueden obtener usando los n elementos?

Aclaración: Aunque tengan los mismos elementos, dos listas ordenadas son diferentes si la disposición de los elementos varía.

§2. Combinación

Definición 2.

Una *combinación* es una forma de extraer un subconjunto a partir de un conjunto dado.

Esto implica que si una combinación es $\{3, 1, 2\}$, entonces $\{1, 3, 2\}$ representa la misma combinación, así como cualquier permutación de la misma combinación.

Ejercicio 2.1. Dado un conjunto de n elementos, ¿cuántas combinaciones de k elementos tiene?

Primero contaremos cuántas listas de k elementos hay de modo general (es decir considerando un orden). Si logró resolver el ejercicio 1.2 de este tema sabrá que esta cantidad es:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \tag{1}$$

Sin embargo, como se mencionó previamente, si tenemos una combinación $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ de k elementos, entonces estamos contando C varias veces en (1). En total, para cada combinación C la cantidad de veces que se está contando la misma combinación es exactamente el número de permutaciones de C. Entonces, la respuesta sería:

$$\begin{aligned}\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

Este número se suele representar usando **coeficientes binomiales**, por lo que ahora podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1: Coeficiente Binomial

Sean $k \leq n$ dos enteros no negativos, entonces el número de formas de escoger k elementos de un total de n sin importar el orden es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejercicio 2.2. Demostrar que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

§3. Binomio de Newton

El binomio de Newton consiste en la expresión $(a+b)^n$, donde n es un entero no negativo. Sin embargo la expansión de este binomio, puede no ser tan intuitivo. Esto se expande del siguiente modo:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Esta expansión tiene aplicaciones interesantes y tiene varias demostraciones, una de ellas se verá en el tema de Inducción. Además el binomio de Newton se relaciona estrechamente con el triángulo de Pascal.

Ejercicio 3.1. Demostrar que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Para esta sección demostraremos esta identidad usando el binomio de Newton, lo cual es una aplicación directa puesto que reemplazando $a = b = 1$ se obtiene la igualdad deseada.

§4. Problemas de Entrenamiento

$\boxed{1}$ Demuestra que:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$\boxed{2}$ Dado un conjunto de S de n elementos, demostrar que la cantidad de subconjuntos de S con una cantidad par de elementos coincide con la cantidad de subconjuntos de S con una cantidad impar de elementos.

$\boxed{3}$ Dada una matriz de N filas y M columnas. Una persona se encuentra en la casilla superior izquierda $(1, 1)$ y quiere ir a la casilla inferior derecha (N, M). En un movimiento puede moverse a la derecha o hacia abajo. ¿De cuántas formas puede lograr su objetivo?

$\boxed{4}$ Dado un entero positivo N, hallar cuántas $k-$tuplas de enteros positivos $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ hay tal que:

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k < N$$

$\boxed{5}$ Dado un entero no negativo N, hallar cuántas $k-$tuplas de enteros no negativos $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ hay tal que:

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k \leq N$$

$\boxed{6}$ Dado un entero no negativo N, hallar cuántas $k-$tuplas de enteros **positivos** $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ existen tal que:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = N$$

$\boxed{7}$ Dado un entero positivo N, hallar cuántas $k-$tuplas de enteros **no negativos** $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ existen tal que:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = N$$

$\boxed{8}$ Demostrar que:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$\boxed{9}$ Codeforces: Educational Codeforces Round 161. Problema B. **Forming Triangles**.

Coeficientes Binomiales en Programación

Requisitos: Programación Dinámica Básica

Usando la propiedad de la sección anterior:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Es posible construir todos los coeficientes binomiales $\binom{i}{j}$, con $0 \leq j \leq i \leq N$, para un determinado N con una complejidad $O(N^2)$. Como los coeficientes binomiales pueden ser muy grandes se considerará un $N \leq 50$.

```
const int MXN = 50;
vector<vector<long long>> C(MXN, vector<long long>(MXN));

void init(){
    C[0][0] = 1;
    for(int i = 1; i <= MXN; i++){
        for(int j = 0; j <= i; j++){
            C[i][j] = C[i - 1][j];
            if(j > 0) C[i][j] += C[i - 1][j - 1];
        }
    }
}
```

Se realiza programación dinámica tomando como base el caso $\binom{0}{0} = 1$, luego a partir de eso se calculan los demás coeficientes con la fórmula mencionada anteriormente, teniendo cuidado con el caso $j = 0$.

§1. Problemas de Entrenamiento

1. Codeforces: Codeforces Beta Round 95 (Div. 2). Problema C. **The World is a Theatre**
2. Leetcode: **Pascal's Triangle**

Coeficientes Binomiales en Módulo M

Requisitos: Exponenciación Binaria, Pequeño teorema de Fermat, Inverso Modular, Programación Dinámica

Los coeficientes binomiales para valores altos de n y k pueden llegar a tener valores enormes, por lo que es común en programación competitiva que se pida en un módulo determinado. Además este módulo debe cumplir algunas propiedades para facilitar el cálculo, por lo que se suele dar ún módulo que sea un número **primo**, los más comunes son: 1000000007 y 998244353. Llamaremos a este módulo M.

§1. Método 1

Para este enfoque expresaremos el coeficiente binomial del siguiente modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv n! \cdot k!^{-1} \cdot (n-k)!^{-1} \mod M \tag{1}$$

Como M es primo entonces $k!$ y $(n-k)!$ tienen inverso módulo M cuando $k < M$ y $n-k < M$. Como $\gcd(k, M) = \gcd(n-k, M) = 1$, usando el pequeño teorema de Fermat obtenemos que:

$$(k!)^{M-1} \equiv 1 \mod M \Rightarrow k! \cdot (k!)^{M-2} \equiv 1 \mod M$$

Por lo que podemos concluir que $(k!)^{M-2}$ es inverso modular de $k!$, de manera análoga $(n-k)!^{M-2}$ es inverso modular de $(n-k)!$. Entonces reemplazando en (1):

$$\binom{n}{k} \equiv n! \cdot k!^{M-2} \cdot (n-k)!^{M-2} \mod M \tag{2}$$

Una vez calculado los valores de $n!, k!$ y $(n-k)!$ solo basta calcular la expresión (2) usando exponenciación binaria para lograrlo en $O(\log M)$. Se recomienda hacer un precálculo de $x!$ hasta un valor suficientemente grande (10^6 por ejemplo), para obtener los valores factoriales en $O(1)$.

```cpp
const int MOD = 1000000007; // 998244353

vector<long long> fact;
void initFactorials(int LIMIT){
    fact.resize(LIMIT + 1);
    fact[0] = 1;
    for(int i = 1; i <= LIMIT; i++){
        fact[i] = fact[i - 1] * i % MOD;
    }
}

long long C(int n, int k){
    if(k > n) return 0LL;
    long long ans = fact[n];
    ans = ans * binpow(fact[k], M - 2) % MOD;
    ans = ans * binpow(fact[n - k], M - 2) % MOD;
    return ans;
}
```

§2. Método 2 (DP)

Como vimos en la sección anterior lo complicado mayormente es el cálculo del inverso modular de $x!$. Sin embargo hay que notar que:

$$(ab)^{-1} \equiv a^{-1} \cdot b^{-1} \mod M$$

Por lo que:

$$x!^{-1} \equiv 1^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1} \equiv \prod_{i=1}^{x} i^{-1} \mod M$$

Entonces basta calcular para calcular los inversos modulares de los factoriales basta con calcular los inversos de los enteros positivos del 1 hasta un límite dado. Para ello manipularemos matemáticamente algunas expresiones. Dado un entero x, por el algoritmo de la división obtenemos que:

$$M = \left\lfloor \frac{M}{x} \right\rfloor \cdot x + (M\,\%x)$$

Entonces:

$$M\,\%x \equiv -\left\lfloor \frac{M}{x} \right\rfloor \cdot x \mod M$$

$$(M\,\%x) \cdot x^{-1} \cdot (M\,\%x)^{-1} \equiv -\left\lfloor \frac{M}{x} \right\rfloor \cdot x \cdot x^{-1} \cdot (M\,\%x)^{-1} \mod M$$

$$x^{-1} \equiv -\left\lfloor \frac{M}{x} \right\rfloor \cdot (M\,\%x)^{-1} \mod M$$

$$x^{-1} \equiv M - \left\lfloor \frac{M}{x} \right\rfloor \cdot (M\,\%x)^{-1} \mod M$$

Notemos que si calculamos los inversos en orden creciente, entonces, como $M\,\%x < x$ es posible calcularlo en $O(1)$, es decir, sea $inverse(x) = x^{-1}$, entonces :

$$inverse(x) \equiv M - \left\lfloor \frac{M}{x} \right\rfloor \cdot inverse(M\,\%x) \mod M$$

Por lo que ahora podemos implementar el cálculo de los coeficientes en $O(LIMIT)$, y las consultas de los coeficientes binomiales en $O(1)$ al tener todo precalculado:

```
vector<long long> inverse, fact, inverse_fact;

void initFactorials(int LIMIT){
    fact.resize(LIMIT + 1);
    inverse.resize(LIMIT + 1);
    inverse_fact.resize(LIMIT + 1);

    inverse[1] = 1;
    for(int i = 2; i <= LIMIT; i++)
        inverse[i] = MOD - (MOD / i * inverse[MOD % i]) % MOD;

    fact[0] = inverse_fact[0] = 1;
    for(int i = 1; i <= LIMIT; i++){
        fact[i] = fact[i - 1] * i % MOD;
        inverse_fact[i] = inverse_fact[i - 1] * inverse[i] % MOD;
    }
};

long long C(int n, int k){
    if(k > n) return 0LL;
    return fact[n] * inv_fact[k] * inv_fact[n - k];
}
```

§3. Problemas de Entrenamiento

[*En proceso*]

Técnicas de Demostración

§1. Reducción al absurdo

La reducción al absurdo se basa en el hecho de que una proposición es verdadera o falsa, sin un término medio. La estrategia consiste en asumir que la proposición que se quiere demostrar es falsa y, mediante un razonamiento lógico, llegar a una contradicción, es decir, a un resultado evidentemente falso. Esta contradicción indica que nuestra suposición inicial debe ser incorrecta, lo que implica que la proposición original es verdadera.

Este método es especialmente útil cuando la demostración directa de una proposición es compleja o poco evidente. A continuación se presenta un ejemplo de esta técnica.

Ejercicio 1.1. Demostar que $\sqrt{2}$ es irracional.

Supongamos la negación de la premisa, es decir, supongamos que $\sqrt{2}$ es **racional**, entonces podemos escribir:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

con (a, b) coprimos, es decir *sin ningún factor en común* o que la fracción $\frac{a}{b}$ es **irreductible**. Elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Esto implica que a^2 es par, lo que significa que a también debe ser par (porque el cuadrado de un número impar es impar). Por lo tanto, podemos escribir $a = 2k$ para algún entero k. Sustituyendo $a = 2k$ en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= (2k)^2 \\ 2b^2 &= 4k^2 \\ b^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Esto implica que b^2 es par, lo que significa que b también debe ser par. Sin embargo, si a y b son ambos pares, tienen al menos el factor común 2, lo que contradice nuestra suposición de que $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible. Por lo tanto, nuestra suposición de que $\sqrt{2}$ es racional debe ser incorrecta. Concluimos que $\sqrt{2}$ es irracional.

§2. Principio de inducción

Este principio es útil cuando queremos probar proposiciones para infinitos valores enteros. De manera sencilla se puede enunciar del siguiente modo:

Sea $P(n)$ la proposición P para cierto entero n. Para demostrar que P es verdadera para todo entero positivo n basta con probar lo siguiente:

$\boxed{1}$ **Base inductiva (BI):** Probar que $P(1)$ es verdadero (caso base).

$\boxed{2}$ **Hipótesis inductiva (HI):** Suponer que $P(k)$ es válido.

$\boxed{3}$ **Paso inductivo (PI):** Probar que $P(k+1)$ es verdadero.

Si podemos completar todos estos pasos, podremos afirmar que P es verdadero para todo entero positivo n.

> **Observación.** La idea de inducción es similar a tirar una serie de fichas dominó, si cada ficha está suficientemente cerca de la anterior y tiramos la primera, entonces todas caerán. La *BI* sería el primer dominó que cae, la *HI* es suponer que cierto dominó cae y el *PI* es verificar que el siguiente dominó también caerá.

Consideraciones importantes:

a) En general, si queremos demostrar que la proposición P es verdadera a partir de un cierto n_0 (no necesariamente 1), entonces solo hay que cambiar la BI, es decir, probar que $P(n_0)$ es verdadero.

b) El paso inductivo más común es $k \to k+1$, sin embargo si es más sencillo realizar un paso inductivo de $k \to k+2$ entonces es necesario 2 bases inductivas (n_0 y n_0+1). En general si el paso inductivo será de $k \to k+d$ entonces se necesitan d bases inductivas $(n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n_0+d-1)$

c) A veces no basta suponer que la proposición $P(k)$ es cierta para demostrar que $P(k+1)$ también lo es, sino que es necesario suponer que para todo $n_0 \leq j \leq k$ se cumple que $P(j)$ es verdadero. A esta variante se le conoce como **Inducción Fuerte**.

Ejemplo. Demostrar la siguiente identidad para todo entero positivo n.

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solución:

Sea $P(n)$ la proposición anterior, seguiremos los 3 pasos de inducción.

- **Caso Base:** $P(1)$ es sencillo de verificar:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

- **Hipótesis Inductiva:** Asumamos que $P(k)$ es verdadero, es decir, lo siguiente es cierto:

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- **Paso Inductivo:** Tratemos de verificar que $P(k+1)$ es verdadero, es decir, queremos probar que:

$$1+2+3+\ldots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Por la hipótesis inductiva obtenemos que:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+k+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Entonces, demostramos que $P(k+1)$ también es verdadero a partir de $P(k)$. Aquí termina la inducción.

§3. Problemas de Entrenamiento

$\boxed{1}$ Demostrar que hay infinitos números primos.

$\boxed{2}$ Demostrar que no hay enteros **positivos** x, y tal que $x^2 - y^2 = 1$.

$\boxed{3}$ Demostrar que la suma de un racional con un irracional es un irracional.

$\boxed{4}$ Demostrar que para todo entero positivo n se cumple que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\boxed{5}$ Demostrar que para todo entero positivo n se cumple que:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$\boxed{6}$ Demostrar que para todo entero positivo $n \geq 4$ se cumple que $2^n < n!$.

$\boxed{7}$ Demostrar que para todo entero positivo $n \geq 1$ se cumple que:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$\boxed{8}$ Probar que para n y k enteros con $0 \leq k \leq n$ se cumple que :

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$\boxed{9}$ Definimos la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

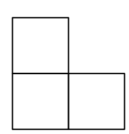
$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ \forall \ n \geq 2$$

Demostrar que:

a) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}, \ \forall \ n \geq 1$

b) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

$\boxed{10}$ Dado un tablero de $2^n \times 2^n$ al cual le falta una casilla. Demostrar que puede ser completamente llenado usando fichas $L-$triminós como las siguientes:



Aclaración: Las fichas pueden ser rotadas.

$\boxed{11}$ (ONEM 2019, Fase 3, Nivel 4, P1) Determine para qué números enteros $n \geq 3$ es posible encontrar números enteros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tales que $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = 1$ y $a_1 a_2 \cdots a_n$ es un cuadrado perfecto.