Úvod do kombinatoriky a teórie grafov

1 Prirodzené čísla a matematická indukcia, Dirichletov princíp (definícia prirodzených čísiel, vlastnosti dobrého usporiadania, dôkaz matematickou indukciou)

Prirodzené čísla:

množina N = {0, 1, 2, . . .} všetkých prirodzených čísel. O tejto množine už vieme, že je lineárne usporiadaná bežnou reláciou ≤ podľa veľkosti. Toto usporiadanie má jednu veľmi dôležitú vlastnosť (vlastnosť dobrého usporiadania): Každá neprázdna podmnožina množiny N má najmenší prvok. (To, že prirodzené čísla majú túto vlastnosť sa nahliadne ľahko sporom: keby existovala v N neprázdna podmnožina M bez najmenšieho prvku, tak by sme ľahko skonštruovali ostro klesajúcu nekonečnú postupnosť n0 > n1 > n2 > . . . prvkov množiny M. Lenže taká postupnosť v N očividne neexistuje.)

Ďalšia dôležitá vlastnosť množiny $\mathbb{N}$ je základom metódy matematickej indukcie, ktorá je v kombinatorike prakticky všadeprítomná. Znie takto:

Nech $M \subseteq \mathbb{N}$ je podmnožina spĺňajúca dve podmienky:

(I1) $0 \in M$;

(I2) ak $x \in M$, tak potom aj $(x+1) \in M$.

Potom $M = \mathbb{N}$.

Princíp matematickej indukcie môžeme teraz sformulovať takto.

Matematická indukcia:

Teoréma 3.1. *Nech $(V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť výrokov. Predpokladajme, že*

(i) platí výrok $V(0)$;

(ii) pre každé prirodzené číslo n, ak platí $V(n)$, tak potom platí $V(n+1)$,

Potom výrok $V(n)$ platí pre každé prirodzené číslo.

Poznámka. Bod (i) sa nazýva *báza indukcie* a bod (ii) sa nazýva *indukčný krok*. □

Dôkaz. Definujme množinu $A = \{n \in \mathbb{N};\ \text{platí výrok } V(n)\}$. Podmienka (i) našej teorémy znamená, že $0 \in A$. Podmienka (ii) hovorí, že platí implikácia "ak $n \in A$, tak aj $(n+1) \in A$." To znamená, že sú splnené vyššie spomenuté podmienky (I1) a (I2), a preto $A = \mathbb{N}$. □

Bežne sa využíva niekoľko modifikácií teorémy 3.1. Stáva sa, že vlastnosť $V(n)$ platí iba pre prirodzené čísla $n \geq n_0$ pre nejaké číslo n_0. V tom prípade najprv overíme pravdivosť výroku $V(n_0)$ a potom dokážeme pravdivosť implikácie – pre každé $n \geq n_0$, ak platí $V(n)$, tak platí aj $V(n+1)$. Tým je potom dokázaná pravdivosť výroku $V(n)$ pre každé $n \geq n_0$. Niekedy je výhodné použiť ďalší variant matematickej indukcie – *úplnú matematickú indukciu.*

Teoréma 3.2. *Predpokladajme, že z platnosti výroku $V(k)$ pre každé $k < n$ vyplýva aj platnosť výroku $V(n)$. Ak platí výrok $V(0)$, tak výrok $V(n)$ platí pre každé prirodzené číslo n.*

Poznamenajme, že overenie platnosti $V(0)$ nemožno vynechať.

Dirichletov princíp:

Ak $n+1$ predmetov ukladáme do n priečinkov, tak aspoň jeden priečinok bude obsahovať dva alebo viac predmety.

Exaktnejšie môžeme tento princíp sformulovať takto:

Neexistuje injektívne zobrazenie $(n+1)$-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny.

Dokážeme všeobecnejšie tvrdenie

Teoréma 3.3. *Nech A a B sú konečné množiny, pričom $|A| = n$, $|B| = m$ a $n > m$ Potom neexistuje žiadne injektívne zobrazenie $f : A \to B$.*

Dôkaz. Nech S je množina všetkých prirodzených čísel s takých, že existuje s-prvková množina, ktorá sa dá injektívne zobraziť na t - prvkovú, kde $t < s$. Naším cieľom je ukázať, že $S = \emptyset$. Predpokladajme, sporom, že $S \neq \emptyset$. Potom (na základe princípu dobrého usporiadania) S má najmenší prvok – nech n je najmenší prvok množiny S a nech $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = A \to B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ je injekcia, kde $m < n$. Zrejme $m \geq 2$, lebo inak by boli všetky zobrazenia $A \to B$ konštantné, a teda nie injektívne. Predpokladajme, že $f(a_n) = b_r$ pre nejaké $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Keby každý z prvkov $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{n-1})$ bol rôzny od b_m, tak zúženie zobrazenia f na množinu $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ by bolo injektívnym zobrazením $A - \{a_n\} \to B - \{b_m\}$. To by však bol spor s voľbou čísla n. Preto musí existovať $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, že $f(a_j) = b_m$. Keďže f je injekcia, $f(a_n) \neq b_m$, takže $r \leq m - 1$. No potom zobrazenie $g : A - \{a_n\} \to B - \{b_m\}$ definované predpisom

$$\begin{aligned} g(a_j) &= b_r, \\ g(a_i) &= f(a_i) \quad \text{pre } i \neq j,\ i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

je opät injektívne. Znova sme dostali spor s definíciou čísla n, a teda množina S je prázdna. $\square$

Teoréma 3.4. *Ak $f\colon A \to B$ je zobrazenie konečných množín také, že $|A| = n$, $|B| = m$ a $n/m > r$ pre nejaké prirodzené číslo r, tak existuje prvok množiny B, na ktorý sa zobrazí aspoň r prvkov množiny A.*

Dôkaz. Nech $B = \{1, 2, \ldots, m\}$ a nech n_i je počet prvkov množiny A, ktoré sa zobrazia na prvok $i \in B$. Keby pre každé z čísel n_i platilo $n_i \leq r$, tak by sme dostali

$$r < \frac{n}{m} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}{m} \leq \frac{mr}{m} = r.$$

Tento spor dokazuje teorému. $\square$

2 Základné pravidlá kombinatorického počítania (pravidlo súčtu, súčinu, mocneia, počítanie prvkov množiny dvoma spôsobmi)

Teoréma 3.5 (Pravidlo súčtu). *Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ sú navzájom disjunktné podmnožiny konečnej množiny X, pričom $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$. Potom*

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|.$$

Dôkaz. Nech najprv $n = 2$. nech $X_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ and $X_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ Keďže $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, platí $X_1 \cup X_2 = \{c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_{r+s}\}$, kde $c_i = a_i$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ a $c_j = b_{j-r}$ pre $j \in \{r+1, \ldots, r+s\}$. Z tohto už ľahko vidno, že $|X| = |X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2|$. Pre $n \geq 3$ sa dôkaz ľahko dokončí matematickou indukciou. □

Teoréma 3.6 (Pravidlo súčinu). *Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$, sú ľubovoľné konečné množiny. Potom $|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_n|$.*

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na n, pričom v indukčnom kroku použijeme pravidlo súčtu. Tvrdenie teorémy platí aj pre $n = 1$ (ale nič nehovorí) a to využijeme ako bázu indukcie. Nech teraz tvrdenie teorémy platí aj pre nejaké $n \geq 1$. Ukážeme, že platí aj pre $n+1$. Chcem určiť počet prvkov množiny $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1}$. Ak $X_{n+1} = \emptyset$, tak $|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times$ $\times X_{n+1}| = 0 = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_{n+1}|$. V tomto prípade teda tvrdenie platí. Nech preto $|X_{n+1}| = s \geq 1$, pričom $X_{n+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$. Položme pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$Y_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \{a_i\}.$$

Je zrejmé, že $|Y_i| = |X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n|$ a podľa indukčného predpokladu teda platí

$$|Y_i| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_n|.$$

Pretože

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times X_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{s} Y_i$$

a množiny $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ sú navzájom disjunktné, z pravidla súčtu dostávame

$$|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n+1}| = \sum_{k=1}^{s} |Y_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_n| \cdot |X_{n+1}|.$$

□

variácie sú usporiadané štruktúry, kombinácie sú neusporiadané

Teoréma 3.7. *Ak A a B sú konečné množiny, pričom $|A| = n$ a $|B| = m$, tak*

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|} = m^n.$$

Dôkaz. Teorému dokážeme indukciou vzhľadom na n. Pre $n = 0$ (a každé prirodzené císlo $m = |B|$) teoréma platí, lebo $B^\emptyset = \{\emptyset\}$. Predpokladajme teraz, že teoréma platí pre nejaké $n \geq 0$ a všetky prirodzené čísla m. Nech $|A| = n+1$, pričom $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Ak $B = \emptyset$, tak $\emptyset^A = \emptyset$ a tvrdenie platí. Ak $m \geq 1$ a $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, pre $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ položíme

$$Y_k = \{f \in B^A; f(a_{n+1}) = b_k\}.$$

Množiny Y_k sú navzájom disjunktné a $B^A = \cup_{k=1}^m Y_k$. Okrem toho zúženia zobrazení $f \in Y_k$ na množinu $A - \{a_{n+1}\}$ sú po dvoch rôzne a dávajú všetky zobrazenia $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to B$, z indukčného predpokladu dostávame $|Y_k| = m^n$. Napokon

$$\left|B^A\right| = \sum_{k=1}^{m} |Y_k| = m \cdot m^n = m^{n+1} = |B|^{|A|}.$$

$\square$

Počítanie prvkov množiny dvoma spôsobmi:

???

3 Variácie a enumerácia zobrazení (variácie s a bez opakovania, permutácie, určenie ich počtu)

Variácie spolu s kombináciami patria medzi najjednoduchšie a najbežnejšie kombinatorické konfigurácie.Zatiaľ čo variácie sú usporiadané štruktúry, kombinácie sú neusporiadané. Ukazuje sa, že jednoduchšie je začat štúdium usporiadaných konfigurácií a na neusporiadané sa dívať ako na triedy ekvivalencie usporiadaných štruktúr.

Ako prvý odvodíme výsledok o počte zobrazení medzi konečnými množinami. Pripomeňme označenie z predchádzajúcej kapitoly: pre lubovolné množiny $\boldsymbol{A}$ a B označujeme symbolom B^A množinu všetkých zobrazení $A \to B$.

Teoréma 3.7. *Ak A a B sú konečné množiny, pričom $|A| = n$ a $|B| = m$, tak*

$$|B^A| = |B|^{|A|} = m^n.$$

Dôkaz. Teorému dokážeme indukciou vzhľadom na n. Pre $n = 0$ (a každé prirodzené číslo $m = |B|$) teoréma platí, lebo $B^\emptyset = \{\emptyset\}$. Predpokladajme teraz, že teoréma platí pre nejaké $n \geq 0$ a všetky prirodzené čísla m. Nech $|A| = n+1$, pričom $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Ak $B = \emptyset$, tak $\emptyset^A = \emptyset$ a tvrdenie platí. Ak $m \geq 1$ a $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, pre $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ položíme

$$Y_k = \{f \in B^A; f(a_{n+1}) = b_k\}.$$

Množiny Y_k sú navzájom disjunktné a $B^A = \cup_{k=1}^m Y_k$. Okrem toho zúženia zobrazení $f \in Y_k$ na množinu $A - \{a_{n+1}\}$ sú po dvoch rôzne a dávajú všetky zobrazenia $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to B$, z indukčného predpokladu dostávame $|Y_k| = m^n$. Napokon

$$|B^A| = \sum_{k=1}^{m} |Y_k| = m \cdot m^n = m^{n+1} = |B|^{|A|}.$$

□

Pre $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $|B| = m$ sa prvky množiny B^A nazývajú *variácie s opakovaním* n-tej triedy z m prvkov (množiny B). V súhlase s označením zavedením v článku 2.4 namiesto šípkového označenia pre tieto zobrazenia používame označenie sekvenciálne $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to B$ označujeme

$(f(1), f(2), \ldots, f(n)) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Z tohto vyjadrenia je zrejmé, že existuje bijekcia $B^{\{1,2,\ldots,n\}} \to B \times B \times \cdots \times B$ (n-krát) a teda Teoréma 3.7 vyplýva aj priamo z pravidla súčinu.

Napríklad ak $B = \{a, b\}$, tak všetky variácie tretej triedy z množiny B sú (usporiadané lexikograficky):

$$(a, a, a),\ (a, a, b),\ (a, b, a),\ (a, b, b),\ (b, a, a),\ (b, a, b),\ (b, b, a),\ (b, b, b).$$

Teoréma 2.7,5 *Nech **A** je konečná množina, $|A| = n$. Potom počet všetkých podmnožín množiny A je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.*

Teraz určíme počet všetkých injektívnych zobrazení medzi dvoma množinami.

Teoréma 3.8. *Nech **A** a B sú konečné množiny, pričom $|A| = n$ a $|B| = m$. Potom počet všetkých injektívnych zobrazení z A do B je*

$$m \cdot (m-1) \dots (m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1} (m-i)\,.$$

Teoréma 3.9. *Existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi permutáciami ľubovolnej množiny B a lineárnymi usporiadaniami množiny B. Preto počet lineárnych usporiadaní n-prvkovej množiny je $n!$*

4 Kombinácie a enumerácie podmnožín (kombinácie bez opakovania a s opakovaním a určenie ich počtu, príklady kombinácii s opakovaniami)

Kombinácie bez opakovania sú neusporiadané súbory neopakujúcich sa prvkov – inými slovami podmnožiny nejakej základnej množiny. Presnejšie povedané, *kombinácie (bez opakovania) k-tej triedy z n prvkov* množiny A sú k-prvkové podmnožiny množiny A, ktorej mohutnosť je $|A| = n$. Kombinácie k-tej triedy prvkov množiny A skátene nazývame tiež *k-kombináciami.*

Množina všetkých k-prvkových podmnožín množiny A sa označuje $\mathcal{P}_k(A)$ alebo $\binom{A}{k}$ a ich počet $\binom{n}{k}$. Symbol $\binom{n}{k}$ sa nazýva *kombinačným číslom* alebo *binomickým koeficientom* (dôvody pochopíme neskôr).

Bezprostredne z definície symbolu $\binom{n}{k}$ vyplývajú tieto jeho vlastnosti:

- Pre každé $n \geq 0$ platí $\binom{n}{0} = 1$, lebo každá množina má práve jednu prázdnu množinu.
- Pre každé $n \geq 0$ platí $\binom{n}{n} = 1$, lebo každá n-prvková množina má práve jednu n-prvkovú podmnožinu, totiž samú seba.
- Pre každé $n \geq 0$ platí $\binom{n}{1} = n$, lebo každá n-prvková množina má práve n rôznych 1-prvkových podmnožín.
- Pre každé $k \leq n$ platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Počet k-prvkových podmnožín ľubovoľnej n prvkovej množiny A je ten istý ako počet $(n-k)$-prvkových podmnožín množiny A, lebo zobrazenie $\binom{A}{k} \to \binom{A}{n-k}$, $x \mapsto A - x$ je bijekcia.
- Pre každé $k > n$ platí $\binom{n}{k} = 0$, lebo n-prvková množina nemá podmnožiny s viac ako n prvkami.

Určíme teraz hodnotu symbolu $\binom{n}{k}$.

Teoréma 3.11. *Nech A je konečná množina, pričom $|A| = n$. Potom počet k-kombinácií z množiny A je*

$$|\mathcal{P}_k(A)| = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Dôkaz. Nech $K = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Budeme skúmať injekcie $K \to A$, čiže na množine I_A^K. Na I_A^K zavedieme binárnu reláciu R takto:

$$f\ R\ g \text{ práve vtedy, keď } f(\{0, 1, \dots, k-1\}) = g(\{0, 1, \dots, k-1\})$$

Potom R je relácia ekvivalencie. Každá trieda ekvivalencie C na množine I_A^K je jednoznačne určená jednou k-prvkovou podmnožinou M, na ktorú zobrazenia z množiny C zobrazia množinu $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Ak v týchto zobrazeniach zameníme koobor A za M, dostaneme práve všetky permutácie množiny M. Preto $|C| = k!$. Každá trieda ekvivalencie na I_A^K má $k!$ prvkov. Preto $k!\binom{n}{k} = n^{\underline{k}} = I_A^K$. Počet k-prvkových podmnožín množiny A je teda, podľa teorémy 3.8, $\binom{n}{k} = |I_A^K|/k! = n^{\underline{k}}/k!$. □

Teoréma 3.12. *Pre ľubovoľné prirodzené čísla n a k platí:*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dôkaz. Tvrdenie je možné ľahko dokázať pomocou vyjadrenia $\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}/k!$ tak, že úpravou vzťahu na ľavej strane dostaneme kombinačné číslo na pravej strane. My však dokážeme túto rovnosť pomocou množinovej interpretácie. Nech A je množina, ktorá má $|A| = n+1$ a nech $b \in A$ je pevný prvok. Množinu $\binom{A}{k+1}$ rozložíme na dve časti B_0 a B_1: B_0 bude združovať $(k+1)$-podmnožiny, ktoré neobsahujú prvok b, naproti tomu B_1 bude združovať všetky tie, ktoré prvok b obsahujú. Keďže každá množina v B_0 je podmnožinou množiny $A - \{b\}$, dostávame $|B_0| = \binom{n}{k+1}$. Každá množina v B_1 zas určuje k-prvkovú podmnožinu množiny $A - \{b\}$. Preto $|B_1| = \binom{n}{k}$. Odtiaľ

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{A}{k+1} = |B_0| + |B_1| = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

□

Teoréma 3.13 (Binomická veta)**.** *Pre každé reálne číslo x a prirodzené číslo n platí*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Dôkaz. Tvrdenie zrejme platí pre $n = 0$. Ďalej budeme postupovať indukciou vzhľadom na n. Ak predpokladáme platnosť tvrdenia pre nejaké $n \geq 0$, tak použitím tvrdenia 3.12 dostávame:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right)(1+x) \\
&= 1 + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)x + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)x^2 + \dots \\
&\quad + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right)x^n + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k
\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Teoréma 3.15 (Cauchyho sčítací vzorec). *Pre všetky prirodzené čísla m a n platí*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Dôkaz. Nech A_1 a A_2 sú disjunktné množiny, pričom $|A_1| = m$ a $|A_2| = n$. Položme $A = A_1 \cup A_2$. Nech $X \subseteq A$. Potom $X \cap A = X \cap (A_1 \cup A_2) = (X \cap A_1) \cup (X \cap A_2)$. Označme $X_i = X \cap A_i, i = 1, 2, \ldots$. Potom X_1 a X_2 sú disjunktné podmnožiny A_1 resp. A_2 a $X = X_1 \cup X_2$.

Skúmajme zobrazenie

$$f : \mathcal{P}_k(A) \to \cup_{i=0}^{k} (\mathcal{P}_i(A_1) \times \mathcal{P}_{k-i}(A_2)),$$
$$x \mapsto (x_1, x_2).$$

Keďže každú podmnožinu X možeme vyjadriť ako zjednotenie množiny $X_1 == X \cap A_1$ s množinou $X_2 = X \cap A_2$, vidíme, že zobrazenie f je bijektívne. Z teorémy 3.11 a pravidla súčinu vieme, že $|\mathcal{P}_i(A_1) \times \mathcal{P}_{k-i}(A_2)| = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$.

Požitím pravidla súčtu napokon dostávame

$$\binom{m+n}{k} = |\mathcal{P}_k(A)| = |\cup_{i=0}^{k} \mathcal{P}_i(A_1) \times \mathcal{P}_{k-1}(A_2)| = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

Tým je dôkaz skončený. □

Kombinácie s opakovaním, permutácie:

Teoréma 3.17. *Nech* $\boldsymbol{A}$ *je n-prvková množina a k prirodzené číslo. Potom počet všetkých kombinácií s opakovaním k-tej triedy v množine* $\boldsymbol{A}$ *je*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Tvrdenie 3.18. *Nech A a B sú konečné množiny, kde $|A| = n$ a $|B| = k$. Nech $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Potom počet zobrazení $f : A \to B$ takých, že pre každý prvok b_i platí $|f^{-1}(\{b_i\})| = n_i$, kde n_i sú zadané nezáporné celé čísla so súčtom $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, sa rovná*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

5 Binomická a polynomická veta (znenie a dôkaz, dôsledky)

Teoréma 3.13 (Binomická veta). *Pre každé reálne číslo x a prirodzené číslo n platí*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Dôkaz. Tvrdenie zrejme platí pre $n = 0$. Ďalej budeme postupovať indukciou vzhľadom na n. Ak predpokladáme platnosť tvrdenia pre nejaké $n \geq 0$, tak použitím tvrdenia 3.12 dostávame:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right)(1+x) \\
&= 1 + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)x + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)x^2 + \dots \\
&\quad + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right)x^n + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k
\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Poznámka. Definíciu binomického koeficientu $\binom{n}{k}$ môžeme rozšíriť z prirodzeného čísla n na ľubovoľné reálne číslo z, ak na základ jeho rozšírenia zoberieme teorému 3.11.

Položme

$$\binom{z}{k} := \frac{z^{\underline{k}}}{k!} = \frac{z(z-1)\dots(z-k+1)}{k!}.$$

Pre takéto binomické koeficienty je možné dokázať analóg binomickej teorémy, ktorý v tomto prípade vyzerá takto:

Pre ľubovoľné $z \in \mathbb{R}$ a pre každé reálne číslo z také, že $|x| < 1$ platí

$$(1+x)^z = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} x^k.$$

Ak $z \in \mathbb{N}$, tak všetky binomické koeficienty pre $k > z$ sú nulové a dostávame opäť tvrdenie teorémy 3.13 (pre $|x| < 1$, čo nie je až také podstatné). Takáto rozšírená binomická teoréma je užitočná pri dokazovaní rozličných vlastností kombinačných čísel. Dôkaz zovšeobecnenej binomickej teorémy presahuje rámec tohto textu. □

Dôsledok 3.14. *Platia tieto identity* ($n \geq 1$)

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0,$

(c) $\displaystyle\sum_{\substack{0\le k\le n,\\ k \text{ párne}}}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\le k\le n,\\ k \text{ nepárne}}}\binom{n}{k} = 2^{n-1}.$

Dôkaz. Tvrdenie (a) dostaneme priamo z binomickej teorémy, ak položíme $x = 1$ a (b) dostaneme, ak položíme $x = -1$.

Jednu z rovností v (c) dostaneme, ak sčítame identity (a) a (b) a vydelíme dvoma, druhú rovnosť získame podobne odčítaním.

Identitu (a) môžeme ľahko dokázať aj kombinatorickou úvahou: na pravej strane máme 2^n, čo je $|\mathcal{P}(A)|$, kde $|A| = n$. To isté číslo môžeme vyjadriť aj v tvare súčtu

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=0}^{n}|\mathcal{P}_k(A)|.$$

$\square$

Teoréma 3.19 (Polynomická veta)**.** *Nech n a k sú kladné prirodzené čísla. Potom*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}, \quad n_i \ge 0$$

pričom sčítame cez všetky usporiadané n-tice prirodzených čísel $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, pre ktoré $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Dôkaz. Vynásobme n činiteľov $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$ a združme rovnaké monómy. Koeficient pri $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ je pritom počet spôsobov, ktorými sa tento monóm pri vynásobení získa. Zrejme $\boldsymbol{M} = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ vznikne vždy, keď x_1 vyberieme z n_1činiteľov, x_2 z n_2 činiteľov atď. Inými slovami, výraz $\boldsymbol{M}$ zodpovedá zobrazeniu z množiny n činiteľov do množiny $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pričom n_1 činiteľov je zobrazených na x_1, n_2 činiteľov na x_2 atď. Počet takýchto zobrazení je podľa tvrdenia 2.18

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

$\square$

Poznámka. Ľahko sa nahliadne,že

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k}.$$

Táto rovnosť zodpovedá skutočnosti, že počet spôsobov, ktorými vznikne monóm $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$, sa dá popísať aj takto: najprv vyberieme x_1 z n_1 členov $(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, čo môžeme urobiť $\binom{n}{n_1}$ spôsobmi. Potom vyberieme x_2 z n_2 spomedzi zvyšných $n-n_1$ členov, čo môžeme urobiť $\binom{n-n_1}{n_2}$ spôsobmi,

atď. kým nevyberieme aj x_k z n_k spomedzi ostávajúcich $n-n_1-n_2\ldots-n_{k-1}$ členov, čo môžeme urobiť $\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$ spôsobmi. Toto vyjadrenie nie je jednoznačné, keďže poradie čísel $n_1, n_2\ldots n_k$ môžeme ľubovoľne meniť. $\square$

6. Rovnosti a nerovnosti s kombinačnými číslami (identity zahŕňajúce kombinačné čísla, metódy dokazovania identít)

??? asi to čo v predošlej otázke dôsledok 3.14

Nič som nenašiel

7. Princíp zapojenia vypojenia (formulácia, dôkaz a aplikácie: enumerácia surjektívnych zobrazení, počet permutácii bez pevných bodov)

3.7 Princíp zapojenia a vypojenia

Začneme jednoduchou otázkou. Ak sú dané dve konečné množiny A a B, ako vypočítame počet prvkov ich zjednotenia? Odpoveď je očividná: od súčtu mohutností množín A a B musíme odrátať mohutnosť ich prieniku. Inými slovami,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Pre tri množiny je odpoveď podobná:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

To znamená, že najprv „zapojíme" prvky jednotlivých množín, potom „vypojíme" prvky prienikov dvojíc množín a napokon opäť „zapojíme" prvky prieniku všetkých troch množín. (Čitateľovi odporúčame presvedčiť sa o platnosti tohto vzťahu s pomocou Vennovho diagramu pre tri prenikajúce sa množiny.)

Princíp *zapojenia a vypojenia* (alebo *inklúzie a exklúzie*) je ďalekosiahlym zavšeobecnením vyššie uvedených vzťahov pre dve a tri množiny.

Nech $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú konečné množiny. Pre ľubovoľné prirodzené číslo k také, že $0 \le k \le n$ položme

$$S_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}|,$$

pričom súčet prebieha cez všetky kombinácie $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ z indexov $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pre $k = 0$ dostávame prienik množín M_i z prázdnej množiny indexov, čo podľa dohody z prvej kapitoly je univerzum – základná množina X, v ktorej vedieme všetky úvahy o množinách $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Preto

$$S_0 = |X|.$$

Teoréma 3.20 (Princíp zapojenia a vypojenia)**.** *Nech $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú konečné množiny. Potom*

$$\begin{aligned}|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}| = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} S_k\end{aligned}$$

Dôkaz. Nech x je ľubovoľný prvok z množiny $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$. Zaveďme označenie

$$J_x = \{i;\ x \in M_i\}.$$

Aby sme ukázali, že pravá a ľavá strana rovnosti predstavujú to isté číslo, všimnime si, že prvok x je na ľavej strane zarátaný iba raz. Ak totiž preberáme prvky množiny $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$, na x naďabíme len raz. Koľkokrát je započítaný na pravej strane?

Predpokladajme, že prvok x patrí do p množín M_i; to znamená, že $J_x = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Z toho vyplýva, že v S_1 je prvok x zarátaný $p = \binom{p}{1}$-krát, totiž raz v každom sčítanci $|M_{j_1}|, |M_{j_2}|, \ldots, |M_{j_p}|$. V S_2 je x zarátaný $\binom{p}{2}$-krát, raz za každý sčítanec tvaru $|M_{j_i} \cap M_{j_2}|$. Všeobecne – prvok x je zarátaný v S_i $\binom{p}{i}$-krát. Celkove je teda prvok x na pravej strane započítaný toľkokrát:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{p}{k} &= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{p}{k} = \binom{p}{0} - \binom{p}{0} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{p}{k} = \\ &= \binom{p}{0} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{p}{k} = \binom{n}{0} - \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}.\end{aligned}$$

Podľa dôsledku 2.14(b) dostávame

$$\binom{p}{0} - \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k} = 1 - 0 = 1,$$

čiže prvok x je aj na pravej strane zarátaný práve raz. To dokazuje našu teorému. $\square$

Enumerácia surjektívnych zobrazení:

Príklad 3. Skupina N pánov sa má zúčastniť večierka. Hostiteľ vyžaduje od účastníkov formálny odev – frak a tvrdý čierny klobúk. Pred vstupom do sály páni odovzdajú svoje klobúky v šatni. Večierok prebehne veľmi úspešne a páni pri svojom odchode nie sú schopní rozoznať svoje klobúky. Aká je pravdepobodnosť toho, že žiaden pán si nezoberie vlastný klobúk?

Ak pánov aj ich klobúky očíslujeme $1, 2, \ldots, N$, tak rozmiestnenie klobúkov na hlave predstavuje permutáciu množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$. Naším cieľom je najprv určiť počet D_N permutácií, ktoré nenechávajú žiaden prvok na mieste. Počet permutácií, ktoré nechávajú na mieste k-prvkovú podmnožinu $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ je $(N-k)!$. S použitím vyššie zavedených označení dostaneme

$$S_k = \binom{N}{k}(N-k)!,$$

odkiaľ zisťujme, že hľadaný počet permutácií je

$$D_N = N(0) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k S_k = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \binom{N}{k}(N-k)! =$$
$$= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{N!}{k!(N-k)!}(N-k)! = N! \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Keďže všetkých permutácií N prvkov je $N!$, pravdepodobnosť toho, že žiaden pán nemá na hlave svoj klobúk je

$$\frac{N! \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Z matematickej analýzy poznáme Taylorov rozvoj funkcie e^x, ktorý dáva vzťah

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

Pre $x = -1$ dostávame rovnosť

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!},$$

z čoho vidno, že nami určená pravdepodobnosť je N-ty čiastočný súčet tohto rozvoja čísla e^{-1}. Ak je číslo N dostatočne veľké, tak hľadaná pravdepodobnosť je približne $1/e$ – o čosi viac ako $1/3$.

Na záver uvedieme ešte dve aplikácie princípu zapojenia a vypojenia. Ich dôkaz ponecháme na čitateľovi. □

Dôsledok 3.23. *Počet surjektívnych zobrazení $f\colon A \to B$, kde $|A| = n$ a $|B| == m$, je*

$$S_B^A = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}(m-k)^n. \qquad \square$$

8. Hierarchia rastu funkcií, odhady čísla n! (O-symbolika, rádová rovnosť, asymptotická, odhady)

Nie sú skriptá, pozrieť zošit

9. Stromy, lesy, kostry, súvislé grafy, meranie vzdialeností v grafe (definície, vlastnosti, rozličné charakterizácie stromov)

Definície:

- vrchol v je *incidentný* s hranou e ak $v \in e$
- dva vrcholy, ktoré sú incidentné s hranou e voláme *koncové* vrcholy hrany e
- dva koncové vrcholy tej istej hrany voláme *susedné*
- hranu s koncovými vrcholmi u a v označujeme uv (čiže množinové zátvorky vynechávame)
- dve hrany, ktoré zdieľajú vrchol voláme *susedné*
- ak všetky dvojice vrcholov sú navzájom susedné, graf nazývame *kompletný*; kompletný graf na n vrcholoch označujeme K_n
- *kružnica* na n vrcholoch, označovaná C_n, je graf (V, E), kde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a $E = \{v_n v_1, v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\}$
- graf nazveme *triviálny*, ak obsahuje jeden vrchol (a žiadne hrany)
- graf nazveme *regulárny* ak majú všetky jeho vrcholy rovnaký stupeň. Ak tento spoločný stupeň je k, graf nazveme k-*regulárny*.

- dva grafy $G(V, E)$ a $G'(V', E')$ sú *izomorfné*, označenie $G \simeq G'$ ak existuje bijekcia $\varphi : V \to V'$ taká že $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ pre všetky dvojice vrcholov x a y.
  - zobrazenie φ sa volá *izomorfizmus*
  - ak $G = G'$, φ sa volá *automorfizmus*

- graf $G(V, E)$ je *podgrafom* grafu $G'(V', E')$ ak $V \subseteq V'$ a $E \subseteq E'$; označenie $G \subseteq G'$
- *faktor* grafu G je podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy
- Nech G je graf a nech $U \subseteq V(G)$. Podgraf grafu G s množinou vrcholov U a hranovou množinou, ktorá obsahuje všetky hrany z G s oboma koncovými vrcholmi v U nazveme *indukovaný* podgraf.
- $N(v)$ je množina susedov vrchola v
- *stupeň vrchola* v – počet hrán incidentných s v; označenie $d_G(v)$, alebo $d(v)$
- *minimálny stupeň* $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$
- *maximálny stupeň* $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$

- graf je *súvislý* ak medzi každou dvojicou vrcholov existuje cesta, inak je *nesúvislý*
- *komponent* grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G vzhľadom na inklúziu
- graf nazveme *acyklický,* ak neobsahuje kružnicu
- *strom* je súvislý acyklický graf
- *les* je acyklický graf
- *list* je vrchol stupňa 1 v strome

Veta 1.3. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné pre graf T*
(a) *T je strom*
(b) *každá dvojica vrcholov v T je spojená práve jednou cestou v T*
(c) *T je minimálny súvislý, t.j. T je súvislý, ale pre každú hranu $e \in T$, graf $T - e$ je nesúvislý (odoberáme len hranu e bez jej koncových vrcholov)*
(d) *T je maximálny acyklický, t.j. T neobsahuje kružnicu, ale $T + xy$ obsahuje kružnicu pre každú dvojicu nesusedných vrcholov x a y z T*

Dôkaz. Dokážeme iba ekvivalenciu (a)⇔(c), ostatné sa dokazujú podobne.

(a)⇒(c) Nech T je strom. Podľa definície je T súvislý graf. Sporom predpokladajme, že T nie je minimálny súvislý, t.j. že obsahuje hranu e takú, že $T - e$ je súvislý. Nech u a v sú koncové vrcholy hrany e. V $T - e$ existuje u-v-cesta, nazvime ju P. Potom $P \cup \{e\}$ je kružnica v T, čo je nemožné, keďže T je strom.

(c)⇒(a) Nech T je minimálny súvislý graf. Jedna z podmienok definície stromu je teda zjavne splnená (súvislosť). Dokážme, že T je acyklický. Ak by obsahoval kružnicu, tak pre ľubovoľnú hranu e z tejto kružnice by platilo, že $G - e$ je súvislý, čo by bolo v spore s tým, že G je minimálny súvislý. □

- *kostra* grafu G je podgraf grafu G, ktorý je strom a obsahuje všetky vrcholy grafu G

Tvrdenie 1.4. *Každý súvislý graf obsahuje kostru.*

10. Euklidovské a bipartitné grafy (charakteristika, alg na eulerovský ťah)

2 Bipartitné grafy

- graf G je *bipartitný* ak $V(G)$ sa dá rozložiť do dvoch množín A a B tak, že každá hrana má jeden koncový vrchol v A a druhý v B.

- *vzdialenosť vrcholov u a v* v grafe G, označenie $dist(u, v)$, je dĺžka najkratšej u-v cesty

Veta 2.2. *Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

3 Eulerovské grafy

- *eulerovský ťah* v grafe G je uzavretý ťah v G, ktorý obsahuje každú hranu. Graf je *eulerovský* ak obsahuje eulerovský ťah.

- *hranový rez* S v súvislom grafe grafe G je množina hrán taká, že $G - S$ je nesúvislý graf

Lema 3.1. *Nech G je graf, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň 2. Potom G obsahuje kružnicu.*

Dôkaz. Nech $P = v_1 v_2 \dots v_n$ je najdlhšia cesta v G. Vrchol v_1 musí mať okrem v_2 ešte aspoň jedného suseda, keďže v_1 je stupňa aspoň 2. Nech x je sused vrchola v_1 a $x \neq v_1$. Vzhľadom na to, že P je najdlhšia cesta, musí x patriť P, čiže $x = v_i$ pre nejaké $i > 2$. Potom $v_1 v_2 \dots v_i v_1$ je kružnica v grafe G. $\square$

Veta 3.2. *Nasledujúce tvrdenia sú v súvislom netriviálnom grafe G ekvivalentné.*
(a) *G je eulerovský*
(b) *stupeň každého vrchola grafu G párny*
(c) *každý hranový rez grafu G má párny počet hrán*
(d) *hranová množina grafu G sa dá rozložiť na množinu kružníc*

11. Meranie vrcholovej a hranovej súvislosti grafu (def, vzájomný vzťah, artikulácie, mosty, 2-súvislé grafy)

4 Súvislosť

- Už vieme, čo znamená, že graf je *súvislý* a čo je to *komponent* grafu.
- *artikulácia* je vrchol, odobratím ktorého vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf; podobne *most* je hrana, odobratím ktorej vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf
- *blok* – maximálny súvislý podgraf bez artikulácií
- ak z grafu odoberáme vrchol, tak s ním musíme odobrať aj všetky hrany s ním incidentné. Ak z grafu odoberáme hranu, koncové vrcholy ponechávame. Ak W je množina vrcholov alebo graf a z je vrchol, tak $W - \{z\}$ zapisujeme aj $W - z$. Obdobné platí, ak ide o hranu.
- G sa nazýva *k-súvislým* ak $|V(G)| > k$ a pre každú množinu vrcholov $X \subseteq V$ takú, že $|X| < k$ platí, že graf $G - X$ je súvislý. Najväčšie celé číslo k také, že G je k-súvislý sa nazýva *súvislosť* $\kappa(G)$ grafu G.
- čiže $\kappa(K_1) = 0$, $\kappa(G) = 0$ pre nesúvislý graf G, $\kappa(K_n) = n - 1$ pre všetky $n \geq 1$
- graf G sa nazýva *hranovo l-súvislý* ak $|V(G)| > 1$ a pre každú množinu hrán F grafu G takú, že $|F| < k$ je graf $G - F$ súvislý. Najväčšie celé číslo l také, že G je hranovo l-súvislý sa volá *hranová súvislosť* $\lambda(G)$ grafu G.
- $\lambda(G) = 0$ ak G je nesúvislý

Tvrdenie 4.1. *Ak G je netriviálny, tak $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Tvrdenie 4.2. *Graf je 2-súvislý, práve vtedy, ak sa dá skonštruovať z kružnice postupným pridávaním H-ciest k už skonštruovanému grafu H.*

Dôsledok 4.3. *V 2-súvislom grafe leží každý vrchol na kružnici.*

Tvrdenie 4.4. *Každé dva vrcholy v 2-súvislom grafe ležia na spoločnej kružnici.*

Možno pridať dôkazy???

12. Hamiltonovské grafy (def, postačujúce podmienky, zložitosť problému)

Nikde nie je v skriptach

Internet/ wikipedia:

Definícia Hamiltonovskej kružnice

Hamiltonovská kružnica grafu je taká cesta, ktorá prejde práve raz všetky vrcholy grafu a skončí v počiatočnom vrchole.

Postačujúce podmienky:

1. Nech G je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak pre každú dvojicu vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou je súčet ich stupňov aspoň n, tak G je hamiltonovský.
2. Nech G je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak má každý vrchol stupeň aspoň $n/2$, tak graf je hamiltonovský.
3. Nech G je graf, $|V| = n$ a predpokladajme, že $n \geq 3$. Ak pre každé prirodzené číslo $k < n/2$ je počet vrcholov, ktorých stupeň neprevyšuje k, menší ako k, tak je graf hamiltonovský.

Zložitosť problému:

Tento problém patrí do skupiny takzvaných NP-úplných problémov.