Matematická Analýza

1. **Limita reálnej funkcie jednej reálnej premennej** (definícia vlastnej a nevlastnej limity, vety o výpočte limít, číslo e, Cauchy-Bolzanovo kritérium konvergencie postupnosti)

$\forall\varepsilon > 0$	$\exists\delta > 0$	$\forall x \in D(f), x \neq a$:	$\lvert x-a\rvert < \delta$	$\Rightarrow$	$\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$	$\lim_{x\to a} f(x) = L$
						$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
$\forall K \in \mathbb{R}$	$\exists\delta > 0$	$\forall x \in D(f), x \neq a$	$\lvert x-a\rvert < \delta$	$\Rightarrow$	$f(x) < K$	$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\forall\varepsilon > 0$	$\exists M \in \mathbb{R}$	$\forall x \in D(f), x \neq a$:	$x > M$	$\Rightarrow$	$\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$	$\lim_{x\to \infty} f(x) = L$
$\forall K \in \mathbb{R}$	$\exists M \in \mathbb{R}$	$\forall x \in D(f), x \neq a$:	$x > M$	$\Rightarrow$	$f(x) > K$	$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$
						$\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$
						$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$
$\forall K \in \mathbb{R}$	$\exists M \in \mathbb{R}$	$\forall x \in D(f), x \neq a$:	$x < M$	$\Rightarrow$	$f(x) > K$	$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$
						$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

okolie bodu

DEFINÍCIA.

okolie bodu	$a \in \mathbb{R}$	je každý interval tvaru	$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$,	kde ε je kladné číslo
	$+\infty$		$(K;\infty)$,	kde K je reálne číslo
	$-\infty$		$(-\infty; K)$,	

Okolie bodu $a \in \mathbb{R}^*$ značíme $O(a)$.

prstencové okolie bodu

DEFINÍCIA. Prstencové okolie bodu a je množina $P(a)$, pre ktorú platí $P(a) \coloneqq O(a) \setminus \{a\}$.

Jednotný zápis limity pre všetkých 9 prípadov:

$\forall O(l)$	$\exists P(A)$	$\forall x \in D(f)$:	$x \in P(A)$	$\Rightarrow$	$f(x) \in O(l)$	$\lim_{x\to A} f(x) = l$

hromadný bod množiny

DEFINÍCIA. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva **hromadný bod množiny** $M \subset \mathbb{R}$, ak (*pozor, toto je „definitorické ak“*) v každom jeho prstencovom okolí leží aspoň jeden prvok množiny M.

limita funkcie

DEFINÍCIA. Nech $A \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. Hovoríme, že bod $l \in \mathbb{R}^*$ je limita funkcie f v bode A (resp. pre x idúce k A). Inak povedané f má v bode A limitu l, zapisujeme $\lim_{x\to A} f(x) = l$), ak

$$\forall O(l)\ \exists P(A)\ \underbrace{\forall x \in D(f):\ x \in P(A)}_{\forall x \in D(f)\cap P(A):}\ \Rightarrow f(x) \in O(l)$$

$L \in \mathbb{R}$	vlastná limita, konečná limita
$L = \infty$ alebo $L = -\infty$	nevlastná limita
$a \in \mathbb{R}$	(limita vo vlastnom bode)
$a = \infty$ alebo $a = -\infty$	(limita v nevlastnom bode)

Vety o vypocte limit:

limita konštatného násobku

TVRDENIE (Limita konštantného násobku na konkrétnom príklade).
Ak $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, tak $\lim_{x\to a}(2 \cdot f(x)) =$ ...2L... *(doplňte)*

tvrdenie (veta) „$0 \cdot$ ohraničená → 0“

Pomocné TVRDENIE. Ak funkcie f, g sú definované na množine M, pričom $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená, tak $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) =$ ....0..... *(doplňte)*.

veta „$0 \cdot$ ohraničená → 0“

VETA. Ak funkcie f, g sú definované na množine M, pričom $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a

funkcia g je ohraničená na niektorom prstencovom okolí $P^*(a)$,	(*t.j.* $\exists K > 0\ \exists P^*(a)\ \forall x \in M \cap P^*(a)\colon |g(x)| < K$)

tak $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = 0$.

veta o limite súčinu

VETA (o limite súčinu).
Ak f, g sú definované na množine M, pričom $\lim_{x\to a} f(x) = r$ a $\lim_{x\to a} g(x) = s$, tak

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = rs$$

vety o výpočte limít: Limita funkcií $f \pm g, fg, \frac{f}{g}, g \circ f$

.15 **Veta.** *Nech funkcie f a g sú definované na množine M, nech* $\lim_{x\to a} f(x) = r \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = s \in \mathbf{R}$. *Potom*

(a) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = r + s$, tj.

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\ ;$$

(b) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = r - s$, tj.

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\ ;$$

(c) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = r \cdot s$, tj.

$$\lim(f(x)g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)\ ;$$

Ostatny cez prstencové okolia

(c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $\quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Cauchy-Bolzanovo kritérium konvergencie postupnosti:

C-B kritérium konvergencie číselných postupností

fundamentálne (cauchyovské) postupnosti

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie číselných postupností).

Ak pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, k \geq n_0\colon \ \lvert a_n - a_k \rvert < \varepsilon, \quad (*)$	*postupnosti spĺňajúce túto podmienku sa nazývajú fundamentálne alebo cauchyovské*

tak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnú limitu.

(*Stručná formulácia: každá fundamentálna postupnosť je konvergentná.*)

Cislo e:

2. Spojité funkcie a ich základné vlastnosti (definícia spojitej funkcie, Darbouxova vlastnosť, vlastnosti spojitých funkcií na uzavretých ohraničených intervaloch)

funkcia spojitá v bode a

DEFINÍCIA. Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$, $\boxed{\text{ak}}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f): |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (*)$$

spojitosť funkcií $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$

VETA. Ak sú funkcie f, g spojité v bode a, tak sú tam spojité aj funkcie $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$.

spojitosť zloženej funkcie

VETA (o spojitosti zloženej funkcie). Ak funkcia f je spojitá v bode a a funkcia g je spojitá v bode $f(a)$, tak zložená funkcia $z(x) = g(f(x))$ je spojitá v bode a.

spojitá funkcia, funkcia spojitá na množine

DEFINÍCIA. Funkcia sa nazýva spojitá, $\boxed{\text{ak}}$ je spojitá v každom bode svojho definičného oboru. Funkcia sa nazýva spojitá na množine $M \subset D(f)$, $\boxed{\text{ak}}$ je spojitá funkcia $f|M$ (teda zúženie funkcie f na množinu M).

„veta o prechode rieky“

VETA. Nech f je spojitá funkcia definovaná na intervale I, nech $a, b \in I$, $a < b$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom

$\exists c \in (a; b): f(c) = 0.$	*pre niektoré c medzi a a b platí $f(c) = 0$.*

prvá veta o spojitosti na intervale

VETA. Nech f je spojitá funkcia definovaná na intervale I, nech $a, b \in I$, $a < b$, pričom $A = f(a) \neq f(b) = B$. Potom funkcia f nadobudne na intervale $(a; b)$

každú hodnotu „medzi A a B“.	*precíznejšie formulácie:* • *ako funkčnú hodnotu každé číslo ležiace v otvorenom intervale s krajnými bodmi A a B,* • *všetky hodnoty z intervalu* $(\min\{A; B\}; \max\{A; B\})$.

druhá veta o spojitosti na intervale

VETA. Ak f je spojitá funkcia definovaná na intervale I, tak pre každý interval $J \subset I$ platí: množina $f(J) := \{ f(x) ; x \in J \}$ je interval alebo jednoprvková množina.

darbouxovská funkcia

DEFINÍCIA. Hovoríme, že funkcia f definovaná na na intervale I je darbouxovská (*vyslov darbuovská*) (má Darbouxovu vlastnosť), ak pre každý interval $J \subset I$ platí: množina $f(J) := \{f(x); x \in J\}$ je interval alebo jednoprvková množina.

veta o obore hodnôt monotónnej, na intervale spojitej funkcie

VETA. Monotónna funkcia f definovaná na intervale I je spojitá práve vtedy, keď jej obor hodnôt je jednoprvková množina alebo interval.

3. **Derivácia funkcie a jej využitie na vyšetrovanie priebehu funkcie** (definícia derivácie, vety o výpočte derivácií, vety o strednej hodnote, derivácie vyšších rádov, vyšetrovanie monotónnosti, extrémov a konvexnosti pomocou derivácií).

derivácia funkcie

DEFINÍCIA. Ak $a \in D(f)$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f a existuje (vlastná alebo nevlastná) limita

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	čo je to isté ako	$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

tak túto hodnotu označujeme $f'(a)$ alebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Ak $f'(a)$ je reálne číslo, hovoríme, že f má v bode a deriváciu (f je diferencovateľná v bode a).

nevlastná derivácia

Ak $f'(a) = \pm\infty$, hovoríme, že f má v bode a nevlastnú deriváciu.

veta o spojitosti diferencovateľnej funkcie v bode a

VETA. Ak f je v bode a diferencovateľná, tak je tam aj spojitá.

derivácia zloženej funkcie

VETA. (o derivácii zloženej funkcie). Nech $a \in D(g \circ f)$ je hromadný bod definičného oboru funkcie $g \circ f$, nech f je diferencovateľná v bode a a g je diferencovateľná v bode $f(a)$. Potom zložená funkcia $y = g(f(x))$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

derivácia inverznej funkcie

VETA. (o derivácii inverznej funkcie). Nech f je prostá spojitá funkcia definovaná na intervale I, ktorá je diferencovateľná v bode $f^{-1}(a)$. Potom inverzná funkcia f^{-1} má v bode a vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, pričom platí:

(i) ak $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$, tak $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$,

(ii) ak $f'(f^{-1}(a)) = 0$ a f rastie, tak $(f^{-1})'(a) = \infty$,

(iii) ak $f'(f^{-1}(a)) = 0$ a f klesá, tak $(f^{-1})'(a) = -\infty$.

Derivácia ako funkcia, derivácie vyšších rádov

Zatiaľ sme definovali deriváciu ako číslo – daná bola funkcia f, bod $a \in D(f)$, hľadali sme číslo $f'(a)$ (ktoré môže, ale nemusí existovať).

derivácia funkcie

Ak tento postup uplatníme na *každý* bod definičného oboru funkcie f, dostaneme funkciu: jej definičný obor bude množina všetkých tých bodov $a \in D(f)$, v ktorých má funkcia f vlastnú deriváciu, funkčnou hodnotou bude hodnota $f'(a)$ (teda každé mu bodu $a \in D(f)$, v ktorom je f diferencovateľná, priradíme hodnotu jej derivácie v tomto bode). Takto definovaná funkcia sa nazýva *derivácia funkcie* f a označuje sa f'.

Teda napr. $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

druhá derivácia funkcie

Všimnime si ešte raz predchádzajúcu dvojicu zápisov: $-\sin = \cos' = (\sin')'$, teda funkciu $-\sin$ dostaneme, ak funkciu sin derivujeme a výsledok tohto derivovania – čo je zasa funkcia – derivujeme ešte raz. Celkovo sme teda derivovali funkciu sin dvakrát, preto sa $-\sin$ nazýva *druhá derivácia* funkcie sin.

derivácie vyšších rádov

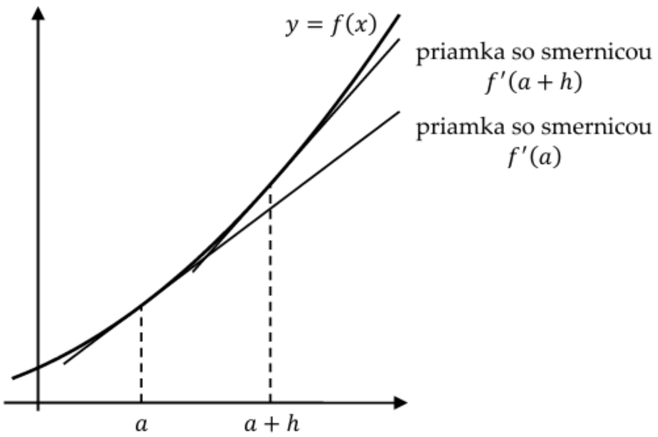
Takto môžeme definovať druhú, tretiu, ... deriváciu:

$$f'' \coloneqq (f')', \quad f''' \coloneqq (f'')', \quad \ldots, \quad f^{\mathrm{IV}} \coloneqq (f''')', \ \ldots$$

(*už je asi zrejmé, že tie čiarky sú rímske čísla* ☺)

Iné dohodnuté označenie pre n-tú deriváciu: $f^{(n)}$, symbol $f^{(0)}$ označuje funkciu f.

Grafická interpetácia druhej derivácie



Čo znamená, že $f''(a) = 2$. Číslo $f''(a)$ je derivácia funkcie $y = f'(x)$, teda vyjadruje rýchlosť zmeny funkcie $y = f'(x)$ v bode a. Ak sa z hodnoty a posunieme o h, tak funkčná hodnota skúmanej funkcie (teda hodnota $f'(x)$) sa zmení približne o $2h$, t. j. $f'(a+h) \approx f'(a) + 2h$. Vieme, že číslo $f'(t)$ je smernica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[t; f(t)]$.

Zhrnuté: ak sa z hodnoty a posunieme o h, tak sa smernica dotyčnice ku grafu funkcie f zmení približne o $2h = f''(a)h$.

Leibnitzov vzorec

VETA (Leibnitzov vzorec). Ak funkcie f a g sú n-krát diferencovateľné na intervale I (teda funkcie $f, f', \ldots, f^{(n)}$ sú všetky definované v každom bode intervalu I), tak

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

nutná podmienka existencie lokálneho extrému

VETA (Eulerova nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrému). Nech f nadobúda lokálny extrém vo vnútornom bode a svojho definičného oboru. Ak f má v bode a vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, tak

$$f'(a) = 0.$$

Rolleho veta o strednej hodnote

VETA. (Rolleho veta o strednej hodnote).

Ak $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ je

všeobecnejšia verzia		*menej všeobecná, ľahšie zapamätateľná verzia*
spojitá funkcia, ktorá má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom bode $x \in (a; b)$,	$\Leftarrow$	diferencovateľná funkcia,

pričom $f(a) = f(b)$, tak

$\exists c \in (a; b): f'(c) = 0$	t. j. v niektorom vnútornom bode intervalu $[a; b]$ má funkcia f nulovú deriváciu.

Lagrangeova veta o strednej hodnote

VETA. (Lagrangeova veta o strednej hodnote). Ak $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, ktorá má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom bode $x \in (a; b)$, tak

$$\exists c \in (a; b): f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Veta (Cauchyho veta o strednej hodnote) Nech funkcie $f, g: [a; b] \to \mathbb{R}$ spĺňajú nasledujúce podmienky:

(i) sú spojité na intervale $[a; b]$,
(ii) sú diferencovateľné v každom vnútornom bode intervalu $[a; b]$,
(iii) $g(b) \neq g(a)$,
(iv) $\forall x \in (a; b): (f')^2(x) + (g')^2(x) > 0$ (*t. j. v žiadnom bode $x \in (a; b)$ nemajú funkcie f, g súčasne nulovú deriváciu*).

Potom

$$\exists c \in (a; b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (*)$$

Prvý návrh dôkazu: Funkcie f, g spĺňajú predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote, podľa nej pre niektoré $c \in (a; b)$ platí

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$
$$g(b) - g(a) = g'(c) \cdot (b - a)$$

Z týchto dvoch rovností vyplýva

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c) \cdot (b - a)}{g'(c) \cdot (b - a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

čo sme chceli dokázať.

veta o súvise monotónnosti a derivácie

VETA. Nech $f: I \to \mathbb{R}$ je

<table>
<tr><td>všeobecnejšia verzia</td><td></td><td>menej všeobecná,
ľahšie zapamätateľná verzia</td></tr>
<tr><td>spojitá funkcia, ktorá má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom vnútornom bode intervalu I.</td><td>$\Leftarrow$</td><td>diferencovateľná funkcia.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Potom
a) f je neklesajúca práve vtedy, keď</td></tr>
<tr><td>v každom vnútornom bode x intervalu I platí $f'(x) \geqslant 0$;</td><td></td><td>v každom vnútornom bode x intervalu I platí $f'(x) \geq 0$;</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) f je rastúca práve vtedy, keď</td></tr>
<tr><td>v každom vnútornom bode x intervalu I platí $f'(x) \geqslant 0$</td><td></td><td>v každom vnútornom bode x intervalu I platí $f'(x) \geq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">a množina $\mathcal{N}_{f'} = \{x \in I; f'(x) = 0\}$ neobsahuje žiadny interval.</td></tr>
</table>

veta o lokálnych extrémoch

VETA. Nech funkcia f spolu s deriváciami f', f'', …, $f^{(n)}$ $(n \geq 2)$ je definovaná na niektorom okolí bodu a, pričom

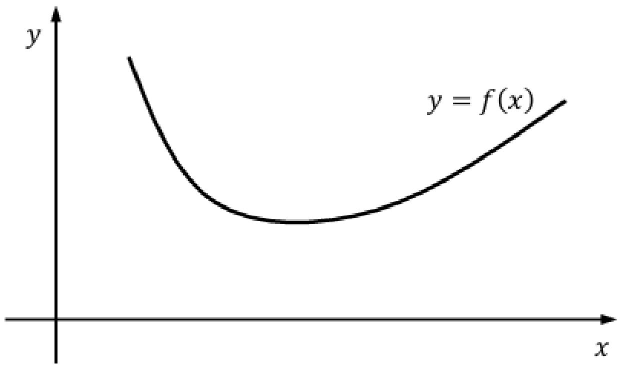
$$f'(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Potom

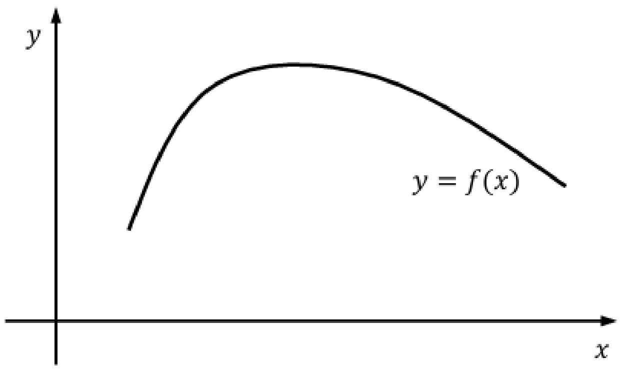
a) ak n je párne a $f^{(n)}(a) > 0$, tak f má v bode a ostré lokálne minimum,
b) ak n je párne a $f^{(n)}(a) < 0$, tak f má v bode a ostré lokálne maximum,
c) ak n je nepárne, tak f <u>ne</u>má v bode a lokálny extrém.

Konvexné a konkávne funkcie

Najprv intuitívne: funkcia je konvexná (presnejšie: rýdzo konvexná), ak jej graf vyzerá takto:



a rýdzo konkávna, ak vyzerá takto:



Najst poznamky

4. **Primitívna funkcia a neurčitý integrál** (definícia neurčitého integrálu, metóda per partes a substitúcie, univerzálna trigonometrická substitúcia).

Definícia. Funkcia F definovaná na intervale I sa nazýva *primitívna funkcia k funkcii* $f: I \to \mathbb{R}$, ak

$$\forall x \in I: F'(x) = f(x).$$

Veta. Nech $F: I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia k funkcii $f: I \to \mathbb{R}$. Potom funkcia $G: I \to \mathbb{R}$ je primitívna k funkcii f práve vtedy, keď

$$\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in I: G(x) = F(x) + C.$$

Dôkaz prenechávame ako cvičenie čitateľovi. Pri dôkaze implikácie $\Rightarrow$ treba dokázať tvrdenie: ak $h'(x) = 0$ pre všetky $x \in I$, tak h je konštantná funkcia. To možno urobiť viacerými spôsobmi, napr. pomocou Lagrangeovej vety (prečo nie Rolleho?), alebo úvahou: ak je funkcia neklesajúca a súčasne nerastúca na intervale, tak … (kde v tejto úvahe využívame, že je to *na intervale*?) ∎

Z toho vyplýva, že množina všetkých primitívnych funkcií k danej funkcii $f: I \to \mathbb{R}$ má tvar $\{F(x) + C; C \in \mathbb{R}\}$. Táto množina sa nazýva *neurčitý integrál funkcie* $f: I \to \mathbb{R}$ a označuje sa $\int f(x)\mathrm{d}x$.

	$\int$	f	(x)	$\mathrm{d}x$	
	znak integrálu		*integračná premenná*		
		integrand			

Namiesto precízneho množinového zápisu

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F(x) + C; C \in \mathbb{R}\}$$

sa používa zápis

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

číslo C sa nazýva *integračná konštanta*.

Základné metódy integrovania

Integrácia rozkladom

„v reči" derivácií	*„v reči" integrálov*
ak	
$F_1'(x) = f_1(x),\ \ldots,\ F_n'(x) = f_n(x)$	$\int f_1(x)\mathrm{d}x = F_1(x) + C,\ \ldots,\ \int f_n(x)\mathrm{d}x = F_n(x) + C$
a $k_1, \ldots, k_n$ sú reálne konštanty, tak	
$\left(k_1F_1(x) + \cdots + k_nF_n(x)\right)' = = k_1f_1(x) + \cdots + k_nf_n(x)$	$\int \left(k_1f_1(x) + \cdots + k_nf_n(x)\right)\mathrm{d}x = = k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x + \cdots + k_n\int f_n(x)\mathrm{d}x = = k_1F_1(x) + \cdots + k_nF_n(x)$

Integrácia per partes

Integrácia rozkladom bola *de facto* len veta o derivácii súčtu a konštantného násobku (t. j. lineárnej kombinácie funkcií) prepísaná do podoby integrálu. Podobne teraz prepíšeme vetu o derivácii súčinu:

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) + C = \int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) \mathrm{d}x$$

Ak existuje jeden z integrálov $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$, tak existuje aj druhý a platí (*toto si dobre rozmyslite*)

$$f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

odtiaľ

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

tento vzťah – ktorým sa výpočet $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ prevedie na výpočet „párového integrálu“ $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ – sa označuje ako metóda per partes (= po častiach).

Substitúcia

Teraz budeme do integrálnej podoby „prepisovať“ vetu o derivácii zloženej funkcie:

ak $$F'(t) = f(t),$$

tak $$\left(F\left(\varphi(x)\right)\right)' = F'\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x) = f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)$$

Teda:

aby sme našli $\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x$,		stačí nájsť $F(t) + C = \int f(t)\,\mathrm{d}t$		a do výsledku dosadiť $t = \varphi(x)$
$\int f\left(\boxed{\varphi(x)}\right)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x$	$= \left\lvert \begin{matrix} \boxed{\varphi(x)} = \boxed{t} \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right\rvert =$	$\int f(\boxed{t})\mathrm{d}t = F(t) + C$	$=$	$F\left(\varphi(x)\right) + C$

Druhá veta o substitúcii

Začneme príkladom: hľadáme $\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}$.

$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$	$= \left\lvert \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right\rvert$	$= \int f(t)\mathrm{d}t$
$\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^3}$	$= \left\lvert \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right\rvert =$	$= \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}$

na intervale $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nadobúda $\sin x$ všetky hodnoty z intervalu $(-1;1)$ (to je definičný obor funkcie $\frac{1}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}$, ktorej integrál hľadáme), pre x z tohto intervalu platí $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$, teda pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^3} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^3 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

5. Riemannov určitý integrál (definícia riemannovsky integrovateľnej funkcie, integrovateľnosť monotónnych a spojitých funkcií, Newtonov-Leibnizov vzorec, integrál ako funkcia hranice).

Hovoríme, že ohraničená funkcia $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ je *riemannovsky integrovateľná (na intervale* $[a; b]$*)*, ak

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x,$$

zapisujeme $f \in \mathcal{R}(a; b)$. Spoločná hodnota $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x$ sa nazýva *Riemannov integrál funkcie* f *(na intervale* $[a; b]$*)* a označuje sa $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

Kritériá riemannovskej integrovateľnosti

Veta. Ohraničená funkcia $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovateľná práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje delenie D intervalu $[a; b]$ také, že

Veta. Každá monotónna funkcia $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovateľná.

Veta. Každá spojitá funkcia $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovateľná.

Veta (Newtonov – Leibnizov vzorec) Ak $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovateľná a existuje funkcia $F: [a; b] \to \mathbb{R}$, ktorá je diferencovateľná, pričom platí $F'(x) = f(x)$, tak

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

Per partes a substitúcia pre Riemannov určitý integrál

Veta. Ak funkcie $f, g: [a; b] \to \mathbb{R}$ sú diferencovateľné a ich derivácie f', g' sú R-integrovateľné, tak

$$\int_{a}^{b} f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_{a}^{b} f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Veta. Nech $f\colon [A;B] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, nech $\varphi\colon [a;b] \to [A;B]$ je diferencovateľná funkcia, ktorej derivácia je R-integrovateľná. Potom

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

integrál ako funkcia hranice:

2.3 Integrál ako funkcia hornej (dolnej) hranice

Veta 14. *Nech* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $c \in [a,b]$ *a nech funkcia* $F\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *je daná predpisom*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad {}^{12}.$$

od nejakého pevného bodu

Potom

a) F *je spojitá funkcia;*

b) *ak funkcia* f *je spojitá v bode* $x_0 \in [a,b]$, *tak funkcia* F *má v bode* x_0 *vlastnú deriváciu (v prípade* $x_0 = a$ *alebo* $x_0 = b$ *príslušnú jednostrannú deriváciu) rovnú* $f(x_0)$.

6. **Číselné rady** (definícia číselného radu, Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie radu, kritériá pre konvergenciu radov s nezápornými členmi, Leibnizovo kritérium, relatívne a absolútne konvergentné rady, prerovnanie radov).

Definícia. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, definujme novú postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ predpisom

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva *číselný rad* a označuje sa symbolom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (*suma n rovná sa 1 až nekonečno* a_n; ešte presnejšie by bolo definovať číselný rad ako dvojicu postupností $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$, alebo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \ .$$

Číslo S_n sa nazýva *n-tý čiastočný súčet radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, číslo a_n je *n-tý člen radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

označenie radu

n-tý člen radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{n\text{-tý čiastočný súčet}} + \cdots \ .$$

Keďže rad je špeciálny prípad postupnosti, vzťahuje sa naň terminológia postupností (konvergentný, divergentý rad).

			$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$
rady	konvergentné		je konečná
	divergentné	divergentné k $+\infty$	je $+\infty$
		divergentné k $-\infty$	je $-\infty$
		oscilujúce	neexistuje

Ak je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný, tak číslo $S := \lim_{n\to\infty} S_n$ sa nazýva *súčet radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a označuje sa rovnakým symbolom ako rad:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Vieme, že postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, keď

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall r, s \in \mathbb{N}: r, s \geq N \Rightarrow |S_r - S_s| < \varepsilon$$

Veta (*Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie číselných radov*). Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \ \forall k \in \mathbb{N}: |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Rady s nezapornymi clenmi:

Veta (*1. porovnávacie kritérium*) Nech pre postupnosti nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$0 \leq a_n \leq b_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Potom
(i) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
(ii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Veta (*Cauchyho odmocninové kritérium*) Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi. Potom
(i) ak

$$\exists q \in [0;1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
(ii) ak

$$\text{pre nekonečne veľa } n \in \mathbb{N} \text{ platí } \sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(*Všimnite si, ako je kritérium „zostavené“:* $\sqrt[n]{a_n}$: *má úlohu „testovacieho výrazu“, ku ktorému sa vzťahuje pozitívna možnosť* (i) *aj negatívna možnosť* (ii).)

Veta (*limitná podoba Cauchyho odmocninového kritéria*). Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných čísel, pre ktorú existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} := L \in \mathbb{R}^*$. Potom platí
(i) ak $L < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
(ii) ak $L > 1$ (*znak* $>$ *je tam kvôli možnosti* $L = \infty$), tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Veta (*2. porovnávacie kritérium*). Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú rady s kladnými členmi, nech

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Potom platí
(i) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
(ii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Veta (*d´Alembertovo podielové kritérium*) Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom platí
(i) ak

$$\exists q \in [0;1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

Absolútne a relatívne konvergentné rady

Veta. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definícia Konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva

absolútne konvergentný,	ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	konverguje,
relatívne konvergentný		diverguje.

(o existencii relatívne konvergentných radov sa presvedčíme po dôkaze Leibnizovho kritéria).

Veta (Leibnizovo kritérium). Ak

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť s limitou 0,	*t. j.* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je buď nerastúca postupnosť .... kladných čísel alebo ....*

tak rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

konverguje a platí

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \right| \leq |a_{k+1}| \qquad (*)$$

(*teda rozdiel medzi súčtom radu a jeho k-tym čiastočným súčtom je menší ako* $|a_{k+1}|$).

Prerovnanie radov

Vieme, že pre konečné súčtu platí komutatívny zákon: v akomkoľvek poradí sčítame konečný počet sčítancov, výsledok je vždy rovnaký. Zaujíma nás, či to platí aj v prípade nekonečných súčtov – teda číselných radov.

Definícia. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je *prerovnanie* radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak existuje bijekcia $n \mapsto k(n)$ množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{N}$ tak, že

$$b_n = a_{k(n)}.$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$k(n)$	37	2	18	516	29 584	1	997	998	12	8 542 147	37 116	8	1 147	26 514	...

Veta (Riemannova veta o prerovnaní). Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad a A je ľubovoľné reálne číslo, tak existuje prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ktorého súčet je A. Rovnako existujú prerovnania radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ktoré divergujú k $+\infty$, divergujú k $-\infty$, resp. oscilujú.

Veta (o prerovnaní absolútne konvergentného radu) Ľubovoľné prerovnanie absolútne konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentné a má ten istý súčet ako pôvodný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. **Mocninové a Taylorove rady** (definícia mocninového radu, polomer a interval konvergencie, derivovanie a integrovanie mocninových radov, definícia Taylorovho radu, pojem analytickej funkcie).

Definícia. Ak $a \in \mathbb{R}$ je dané číslo a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ daná postupnosť čísel, tak postupnosť polynómov

$$S_0(x) \equiv a_0, \quad S_1(x) = a_0 + a_1(x-a), \quad S_2(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2, \ldots,$$
$$S_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n, \ldots$$

sa nazýva mocninový rad so stredom (v bode) a a označuje sa symbolom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

Definícia. Hovoríme, že mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konverguje / relatívne konverguje / absolútne konverguje / diverguje v bode x_0, ak číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-a)^n$ konverguje / relatívne konverguje / absolútne konverguje / diverguje.

- Mocninový rad iste konverguje v svojom strede.
- Všetky úvahy o rade $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ možno substitúciou $x-a=t$ previesť na úvahy o rade $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Veta. Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bode $x_0 \neq 0$, tak konverguje absolútne v každom bode $x \in (-|x_0|;|x_0|)$.

obor konvergencie	*polomer konvergencie R* (vzdialenosť medzi stredom radu a krajným bodom oboru konvergencie)	*interval konvergencie* (množina všetkých vnútorných bodov oboru konvergencie)
$\{0\}$	$R=0$	nedefinuje sa
$(-a;a)$	$R=a$	$(-a;a)$
$(-a;a]$		
$[-a;a)$		
$[-a;a]$		
$\mathbb{R}$	$R=\infty$	$\mathbb{R}$

Veta. Mocninové rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ (*druhý vznikne derivovaním členov prvého, tretí ich integrovaním*) majú rovnaký polomer konvergencie.

Taylorove a Maclaurinove rady, analytické funkcie

Veta. Ak funkcia f je súčet mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s nenulovým polomerom konvergencie, tak

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definícia. Funkcia f sa nazýva analytická v bode 0, ak je definovaná na niektorom okolí bodu 0, má v tomto bode derivácie všetkých rádov a pre všetky x z niektorého okolia bodu 0 platí rovnosť

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n .$$