Kapitel 1

Einführung

Die nichtlineare Optimierung ist ein bedeutendes Gebiet der Mathematik. Sie findet immer wieder Anwendungen in den schwierigen Problemen der Technik und der Wirtschaft. Es wurden viele Verfahren entwickelt, um nichtlineare Optimierungsprobleme zu lösen. In dieser Arbeit werden zwei Verfahren, das halbglatte Newton-Verfahren und das SQP-Verfahren, betrachtet und verglichen.

Das SQP-Verfahren gehört zu den bekanntesten Verfahren der nichtlinearen Optimierung. Es wurde schon seit den 60er Jahren entwickelt und wurde in vielen Optimierungsproblemen als Standardwerkzeug angewendet sowie weiterentwickelt. Das halbglatte Newton-Verfahren ist weniger bekannt als das SQP-Verfahren. Es basiert aber auf das bekannte Newton-Verfahren.

1.1 Optimierungsprobleme

Definition 1.1 *Allgemein ist die Aufgabenstellung der nichtlinearen Optimierung wie folgt definiert:*

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x) \tag{1.1}$$

Die Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die sogennante Zielfunktion. D sei der Definitionsbereich von f. $\mathcal{F}$ sei eine Teilmenge von D, die man als Lösungsmenge bezeichnet. Alle Elemente von $\mathcal{F}$ werden als zulässige Punkte bezeichnet. $\mathcal{F}$ wird durch Nebenbedingungen definiert.

Man kann hierbei den Unterschied zwischen der linearen Optimierung und der nichtlinearen Optimierung erkennen. Bei der linearen Optimierung muss die Zielfunktion linear sein (d.h. die Zielfunktion besitzt die Form $f(x) = c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$) und die Nebenbedingungen sind durch lineare Gleichungssysteme oder Ungleichungssyteme definiert. Bei der nichtlinearen Optimierung gibt es dagegen keine Einschränkung, wie die Zielfunktion und die Nebenbedingungen aussehen sollen. Für die lineare Optimierung ist ein in der Praxis sehr effizientes Verfahren bekannt. Aber die Verfahren der nichtlinearen Optimierung sind auch für die linearen Optimierungsprobleme anwendbar. Umgekehrt ist es jedoch nicht möglich.

Ein einfaches Beispiel nichtlinearer Optimierung ist das Problem

$$\min_{x\in\mathbb{R}}(x-1)^2.$$

Falls $\mathcal{F} = D$ gilt, dann bezeichnet man das Optimierungsproblem als unrestringiert. Es besitzt also keine Nebenbedingungen. Ansonsten heißt es ein restingiertes Optimierungsproblem.

Definition 1.2 (Globale und lokale Lösung)
Ein Punkt $x^* \in \mathcal{F}$ heißt globale Lösung des Problems (1.1), wenn

$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{F} \tag{1.2}$$

gilt. Ein Punkt $x^* \in \mathcal{F}$ heißt strikte globale Lösung des Problems (1.1), wenn

$$f(x^*) < f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{F}\backslash\{x^*\} \tag{1.3}$$

gilt. Ein Punkt $x^* \in \mathcal{F}$ heißt lokale Lösung des Problems (1.1), wenn für eine Umgebung $U(x^*)$ von x^*

$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall x \in U(x^*) \cap \mathcal{F} \tag{1.4}$$

gilt. Ein Punkt $x^* \in \mathcal{F}$ heißt strikte lokale Lösung des Problems (1.1), wenn für eine Umgebung $U(x^*)$ von x^*

$$f(x^*) < f(x) \qquad \forall x \in U(x^*) \cap \mathcal{F}\backslash\{x^*\} \tag{1.5}$$

gilt. Eine Umgebung von x^* ist einfach eine offene Menge, die x^* beinhaltet.

Wegen dieser Definitionen kommt die Unterscheidung zwischen der globalen und der lokalen Optimierung. Globale Optimierung versucht, globale Lösungen zu finden. Lokale Optimierung versucht dagegen, lokale Lösungen zu finden. Viele Verfahren finden lokale Lösungen, die jedoch nicht unbedingt globale Lösungen sind.

Wir betrachten nun das unrestringierte Optimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x). \tag{1.6}$$

Wir nehmen hier an, dass der Definitionsbereich D gleich $\mathbb{R}^n$ sei.

Satz 1.1 (Notwendige Bedingung erster Ordnung)
Seien x^* eine lokale Lösung des Problems (1.6) und f einmal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x^*, dann gilt

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{1.7}$$

Definition 1.3 (Stationärer Punkt)
f sei in x^* differenzierbar. x^* heißt ein stationärer Punkt von f, wenn x^* die notwendige Bedingung (1.7) erfüllt.

Satz 1.2 (Notwendige Bedingung zweiter Ordnung)
Seien x^* eine lokale Lösung des Problems (1.6) und f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x^*, dann gilt (1.7) und

$$x^T f''(x^*)x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

$f''(x^*)$ ist also positiv semidefinit.

Satz 1.3 (Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)
Sei f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x^*. Die notwendige Bedingung (1.7) sei erfüllt und $f''(x^*)$ sei positiv definit, d.h.

$$x^T f''(x^*)x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Dann ist x^* eine strikte Lösung des Problems (1.6).