Тема. Интерполирование и численное дифференцирование функций

Приближение функций – замена на интервале $[a, b]$ исходной функции $f(x)$ некоторой другой функцией $P(x)$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

Например: $\varphi_i(x) = \sin^i(x)$, $\varphi_i(x) = x^i$, и т.д.
Исходные данные: $x_\mathrm{i} \in [a, b]$, $y_\mathrm{i} = f(x_\mathrm{i})$, $i = 0, 1, \ldots, p$, $x_0 = a$, $x_p = b$.

Приближение функций

Тогда

$$f(x) = P(x) + R(x),$$

где $R(x)$ – остаточный член.

Применение: возможность вычислить $f(x) \approx P(x)$ при $x \neq x_i$, если:

1. аналитический вид $f(x)$ неизвестен;
2. функция $f(x)$ имеет сложный вид.

Приближение функций

Классификация:

- Интерполяция. Критерий для определения c_i выглядит как $P(x_i) = y_i$ ($p \geq n$, обычно $p = n$);
- Аппроксимация ($p < n$). Критерий для определения c_i выглядит как

$$\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\left(y_i - P\left(x_i\right)\right)^2} \xrightarrow[c_i]{} \min$$

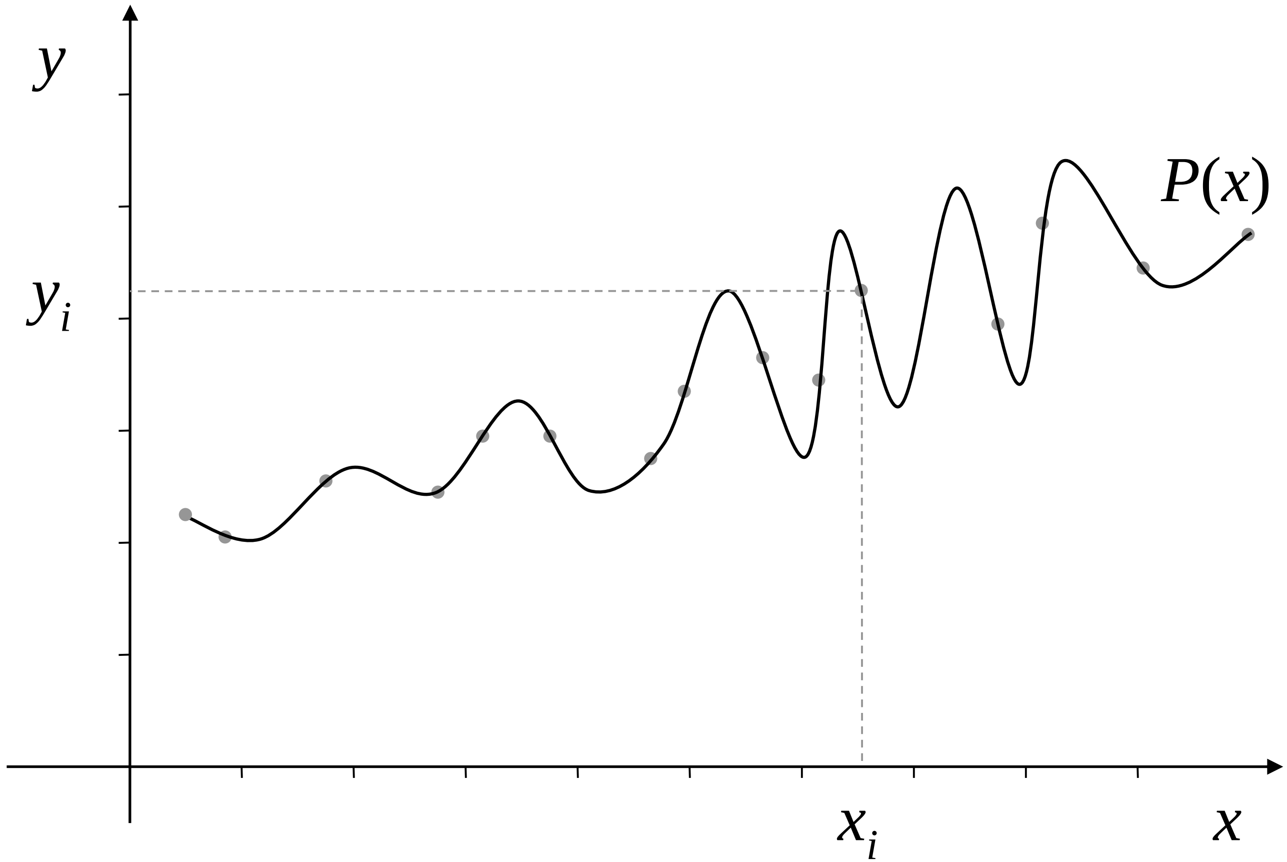
Приближение функций

Классификация:

- Экстраполяция – возможность вычислить $f(x) \approx P(x)$ при $x \notin [a, b]$.

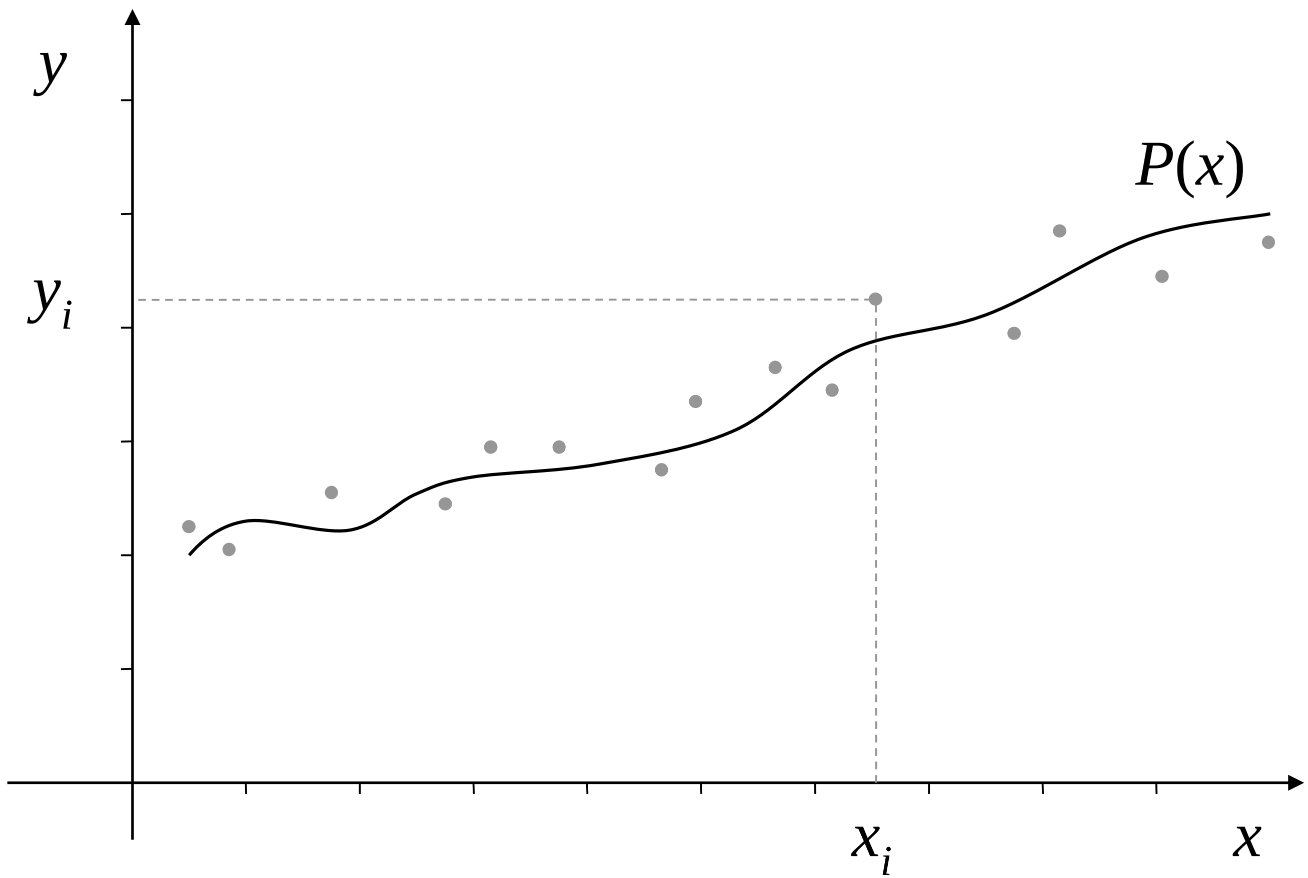
Приближение функций

Интерполяция:



Приближение функций

Аппроксимация:



Интерполирование функций

Постановка задачи:

$$p = n$$

Сетка (табличные значения функции):

$$\{x_i\}: x_i \in [a, b], i = 0, 1, \ldots, n$$

$$x_0 = a, x_n = b$$

$$\{y_i\}: y_i = f(x_i)$$

Количество узлов – $n + 1$.

Интерполирование функций

Постановка задачи:

Равномерная сетка:

$$\{x_i\}: x_i = x_0 + i \cdot h,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

$$x_0 = a,\ x_n = b$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{b-a}{n}.$$

Система линейно-независимых функций:

$$\varphi_i(x)$$

Интерполирование функций

Постановка задачи:

Требуется определить коэффициенты

$$c_i,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

таким образом, чтобы

$$P_n(x_i) = y_i$$

Для решения будем использовать степенные полиномы:

$$\varphi_i\left(x\right) = x^i,\ \ P_n\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i.$$

Интерполирование функций

Постановка задачи:

Для равномерной сетки

$$q = \frac{x - x_0}{h},$$

поэтому

$$\varphi_i(q) = q^i, \; P_n(q) = \sum_{i=0}^{n} c_i q^i.$$

Полином Ньютона

$$c_i = [x_0, ..., x_i], \ \varphi_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j),$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left([x_0, ..., x_i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)\right)$$

Здесь $\left[x_i, ..., x_j\right] = \dfrac{\left[x_{i+1}, ..., x_j\right] - \left[x_i, ..., x_{j-1}\right]}{x_j - x_i}$ – разделенные разности *j*-*i*-го порядка,

$$[x_i] = y_i$$

Полином Ньютона

Для равномерной сетки

$$c_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!},\ \ \varphi_i(q) = \prod_{j=0}^{i-1}(q-j),$$

$$\Rightarrow P_n(q) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^i y_0}{i!}\cdot\prod_{j=0}^{i-1}(q-j)\right)$$

Здесь $\Delta^i y_j = \Delta^{i-1} y_{j+1} - \Delta^{i-1} y_j,\ \ \Delta^0 y_j = y_j$ – конечные разности *j*-*i*-го порядка.

Полином Лагранжа

$$c_i = \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(x_i - x_j\right)}, \;\; \varphi_i\left(x\right) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(x - x_j\right),$$

$$\Rightarrow L_n\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(x_i - x_j\right)} \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(x - x_j\right) \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Полином Лагранжа

Для равномерной сетки

$$c_i = (-1)^{n-i} \frac{y_i}{i!(n-i)!}, \;\; \varphi_i(q) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (q - j),$$

$$\Rightarrow L_n(q) = \sum_{i=0}^{n} \left((-1)^{n-i} \frac{y_i}{i!(n-i)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (q - j) \right)$$

Численное дифференцирование функций

Постановка задачи:

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

Определить:

$$f^{(k)}(x) = (P(x) + R(x))^{(k)} = P^{(k)}(x) + R^{(k)}(x)$$

$$P^{(k)}(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x) \right)^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i^{(k)}(x)$$

Полином Ньютона

Первая производная для неравномерной сетки:

$$P_n'(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\left[x_0,\ldots,x_i\right]\cdot\left(\prod_{j=0}^{i-1}\left(x-x_j\right)\right)'\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[x_0,\ldots,x_i\right]\cdot\sum_{j=0}^{i-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{i-1}\left(x-x_k\right)\right)$$

Полином Ньютона

Первая производная для равномерной сетки:

$$P_n'(q) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \left(\prod_{j=0}^{i-1} (q-j) \right)' \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{i-1} (q-k) \right)$$

Полином Ньютона

Вторая производная для неравномерной сетки:

$$P_n''(x) = \sum_{i=0}^{n} \left([x_0, \ldots, x_i] \cdot \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)'' \right) =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \left([x_0, \ldots, x_i] \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{i-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k \\ l \neq j}}^{i-1} (x - x_l) \right)$$

Полином Ньютона

Вторая производная для равномерной сетки:

$$P_n''(q) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^i y_0}{i!}\cdot\left(\prod_{j=0}^{i-1}(q-j)\right)''\right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\Delta^i y_0}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{i-1}\prod_{\substack{l=0\\l\neq k\\l\neq j}}^{i-1}(q-l)\right)$$

Полином Лагранжа

Первая производная для неравномерной сетки:

$$L_n'(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(x_i-x_j\right)}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(x-x_j\right)\right)'\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(x_i-x_j\right)}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\prod_{\substack{k=0\\ k\neq i\\ k\neq j}}^{n}\left(x-x_k\right)\right)$$

Полином Лагранжа

Первая производная для равномерной сетки:

$$L_n'(q)=\sum_{i=0}^{n}\left(\left(-1\right)^{n-i}\frac{y_i}{i!\left(n-i\right)!}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(q-j)\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n}\left(\left(-1\right)^{n-i}\frac{y_i}{i!\left(n-i\right)!}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\prod_{\substack{k=0\\ k\neq i\\ k\neq j}}^{n}(q-k)\right)$$

Полином Лагранжа

Вторая производная для неравномерной сетки:

$$L_n''(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(x_i - x_j\right)} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(x - x_j\right) \right)'' \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(x_i - x_j\right)} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i \\ k\neq j}}^{n} \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq i \\ l\neq j \\ l\neq k}}^{n} \left(x - x_l\right) \right)$$

Примеры

Полином Ньютона.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

i	0	1	2	3
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Результирующая сетка: $\{1/4,\ 9/4,\ 25/4\}$

Далее строим полином $P_3(x)$.

Примеры

Полином Ньютона.

Разделенные разности:

i	X	y	$[x_i,x_{i+1}]$	$[x_i,..,x_{i+2}]$	$[x_i,..,x_{i+3}]$
0	0	0	1	–1/6	1/60
1	1	1	1/3	–1/60	
2	4	2	1/5		
3	9	3			

$$\left[x_i,\ldots,x_j\right]=\frac{\left[x_{i+1},\ldots,x_j\right]-\left[x_i,\ldots,x_{j-1}\right]}{x_j-x_i}$$

Примеры

Полином Ньютона.

i	x	y	$[x_i,x_{i+1}]$	$[x_i,..,x_{i+2}]$	$[x_i,..,x_{i+3}]$
0	0	0	1	–1/6	1/60
1	1	1	1/3	–1/60	
2	4	2	1/5		
3	9	3			

Результат:

$$P_3(x) = 0 + 1\cdot(x-0) - \frac{1}{6}(x-0)(x-1) + \frac{1}{60}(x-0)(x-1)(x-4) =$$

$$= x - \frac{1}{6}x(x-1) + \frac{1}{60}x(x-1)(x-4)$$

Примеры

Полином Ньютона.

$$P_3(x) = x - \frac{1}{6}x(x-1) + \frac{1}{60}x(x-1)(x-4)$$

Проверка:

$$P_3(0) = 0;\ \ P_3(1) = 1;\ \ P_3(4) = 4 - \frac{1}{6}\cdot 4\cdot 3 = 4 - 2 = 2;$$

$$P_3(9) = 9 - \frac{1}{6}\cdot 9\cdot 8 + \frac{1}{60}\cdot 9\cdot 8\cdot 5 = 9 - 12 + 6 = 3$$

Примеры

Полином Ньютона.

$$P_3(x) = x - \frac{1}{6}x(x-1) + \frac{1}{60}x(x-1)(x-4)$$

Значения в узлах результирующей сетки:

$$P_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right) + \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-4\right) = \frac{75}{256} \approx 0.293$$

$$P_3\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{9}{4}-1\right) + \frac{1}{60}\cdot\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{9}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{9}{4}-4\right) = \frac{435}{256} \approx 1.699$$

$$P_3\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{4}\cdot\left(\frac{25}{4}-1\right) + \frac{1}{60}\cdot\frac{25}{4}\cdot\left(\frac{25}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{25}{4}-4\right) = \frac{515}{256} \approx 2.012$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

i	0	1	2	3
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Результирующая сетка: $\{1/4, 9/4, 25/4\}$

Далее строим полином $L_3(x)$.

Примеры

Полином Лагранжа.

i	0	1	2	3
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

$$c_i = \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(x_i - x_j\right)}$$

$$c_0 = \frac{0}{(0-1)(0-4)(0-9)} = 0; \quad c_1 = \frac{1}{(1-0)(1-4)(1-9)} = \frac{1}{24};$$

$$c_2 = \frac{2}{(4-0)(4-1)(4-9)} = -\frac{1}{30}; \quad c_3 = \frac{3}{(9-0)(9-1)(9-4)} = \frac{1}{120}$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$c_0 = 0;\ c_1 = \frac{1}{24};\ c_2 = -\frac{1}{30};\ c_3 = \frac{1}{120}$$

Результат:

$$L_3(x) = 0(x-1)(x-4)(x-9) + \frac{1}{24}(x-0)(x-4)(x-9) -$$

$$-\frac{1}{30}(x-0)(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}(x-0)(x-1)(x-4) =$$

$$= \frac{1}{24}x(x-4)(x-9) - \frac{1}{30}x(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}x(x-1)(x-4)$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$L_3(x) = \frac{1}{24}x(x-4)(x-9) - \frac{1}{30}x(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}x(x-1)(x-4)$$

Проверка:

$$L_3(0) = \frac{1}{24}0(0-4)(0-9) - \frac{1}{30}0(0-1)(0-9) + \frac{1}{120}0(0-1)(0-4) = 0$$

$$L_3(1) = \frac{1}{24}1(1-4)(1-9) - \frac{1}{30}1(1-1)(1-9) + \frac{1}{120}1(1-1)(1-4) = 1$$

$$L_3(4) = \frac{1}{24}4(4-4)(4-9) - \frac{1}{30}4(4-1)(4-9) + \frac{1}{120}4(4-1)(4-4) = 2$$

$$L_3(9) = \frac{1}{24}9(9-4)(9-9) - \frac{1}{30}9(9-1)(9-9) + \frac{1}{120}9(9-1)(9-4) = 3$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$L_3(x)=\frac{1}{24}x(x-4)(x-9)-\frac{1}{30}x(x-1)(x-9)+\frac{1}{120}x(x-1)(x-4)$$

Значения в узлах результирующей сетки:

$$L_3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-4\right)\left(\frac{1}{4}-9\right)-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-9\right)+$$

$$+\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-4\right)=\frac{75}{256};\quad L_3\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{24}\cdot\frac{9}{4}\left(\frac{9}{4}-4\right)\left(\frac{9}{4}-9\right)-$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{9}{4}\left(\frac{9}{4}-1\right)\left(\frac{9}{4}-9\right)+\frac{1}{120}\cdot\frac{9}{4}\left(\frac{9}{4}-1\right)\left(\frac{9}{4}-4\right)=\frac{435}{256}$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$L_3(x)=\frac{1}{24}x(x-4)(x-9)-\frac{1}{30}x(x-1)(x-9)+\frac{1}{120}x(x-1)(x-4)$$

Значения в узлах результирующей сетки:

$$L_3\left(\frac{25}{4}\right)=\frac{1}{24}\cdot\frac{25}{4}\left(\frac{25}{4}-4\right)\left(\frac{25}{4}-9\right)-\frac{1}{30}\cdot\frac{25}{4}\left(\frac{25}{4}-1\right)\left(\frac{25}{4}-9\right)+$$

$$+\frac{1}{120}\cdot\frac{25}{4}\left(\frac{25}{4}-1\right)\left(\frac{25}{4}-4\right)=\frac{515}{256}$$

Примеры

Точность интерполяции:

x	$P(x)$	$L(x)$	$f(x)$	δ
1/4	0.293	0.293	0.5	41.4%
9/4	1.699	1.699	1.5	13.3%
25/4	2.012	2.012	2.5	19.5%