Вычислительная математика / Численные методы

Романенко Владимир Васильевич

- Лекции: 34 часа
- Практические занятия: 34 часа
  - №1 «Решение уравнений с одной переменной» (8+3)
  - №2 «Решение задач линейной алгебры» (14+4)
  - №3 «Вычисление собственных чисел и собственных векторов» (17)
  - №4 «Решение систем нелинейных уравнений» (9)
  - №5 «Интерполирование и численное дифференцирование функций» (14)
  - №6 «Приближение сплайнами» (17)
  - №7 «Численное интегрирование функций» (10+4)
  - №8 «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений» (10)
  - №9 «Решение линейных интегральных уравнений» (10)

Вычислительная математика / Численные методы

Литература:

- Мицель А.А. Вычислительные методы. Учебное пособие. – Томск: В-Спектр, 2010. – 264 с.
- Мицель А.А. Практикум по численным методам. Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2004. – 196 с.
- Мицель А.А. Вычислительная математика. Учебное пособие. – Томск: ТМЦ ДО, 2000. – 206 с.
- Романенко В.В. Вычислительная математика. Лабораторные работы. – Учебное методическое пособие по выполнению лабораторных работ. – Томск: изд-во ТУСУР, 2007. – 113 с.

Тема. Приближенное решение нелинейных уравнений с одной переменной

Локализация корней

$$f(x) = 0$$

$$a \le x \le b$$

$$\xi \qquad\qquad f(\xi) = 0$$

$$f(\xi) = f'(\xi) = \ldots = f^{k-1}(\xi) = 0$$

- Этап1. Локализация (отделение) корней $\left[a_i, b_i\right]$
- Этап 2. Итерационное уточнение корней, то есть доведение их до заданной точности
- **Теорема 1.** *Если непрерывная функция* $f(x)$ *принимает значения разных знаков на концах отрезка* $[a,b]$ *, то есть* $f(a)\cdot f(b)<0$*, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения* $f(x)=0$ *, то есть найдется хотя бы одно число* $\xi\in(a,b)$*, такое, что* $f(\xi)=0$ *.*
- *Корень заведомо единственный, если* $f'(x)$ *существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала* $[a,b]$

$$x_i = a + i \cdot h,\ \ i = 1, \ldots, n;\ \ h = (b - a)/n$$

$$f(x_i)\, f(x_{i+1}) < 0 \qquad \qquad (x_i, x_{i+1})$$

Пример

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-	-	+	+	+	-	-	+	+

Определение 1. *Говорят, что итерационный метод сходится с линейной скоростью, если в области сходимости справедлива оценка*

$$\frac{\left|\xi - x_{k+1}\right|}{\left|\xi - x_k\right|} \le \alpha < 1$$

Определение 2. *Число* $r \ge 1$ *порядком сходимости метода, если в области сходимости имеет место оценка*

$$\frac{\left|\xi - x_{k+1}\right|}{\left|\xi - x_k\right|^r} \le c, \quad c > 0$$

- *Если* $r = 1$ *и* $c < 1$ *, то метод обладает линейной сходимостью, при* $r = 2$ *— квадратичной,* $r = 3$ *— кубической и т.д*.

Метод деления отрезка пополам (метод дихотомии)

$[a,b]$ ε

$f\left(a\right)f\left(b\right)\leq 0$

$c=\frac{1}{2}\left(a+b\right)$ $f\left(c\right)$

1. $\left|f\left(c\right)\right|<\varepsilon$

2. $f\left(c\right)f\left(a\right)\leq 0$ $[a,c]$

3. $[c,b]$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \qquad a_n \le \xi \le b_n$$

$$|\xi - a_n| \le \frac{1}{2^n}(b-a) \qquad |\xi - b_n| \le \frac{1}{2^n}(b-a)$$

$$\xi = \frac{1}{2}(b_n + a_n) \qquad (b_n - a_n)/2$$

$$(b_n - a_n)/2 < \varepsilon$$

Теорема 2. *Итерационный процесс половинного деления сходится к искомому корню* ξ *с любой наперед заданной точностью* ε

Метод Ньютона (метод касательных)

ξ $f(x)=0$ $[a,b]$ x_{n-1}

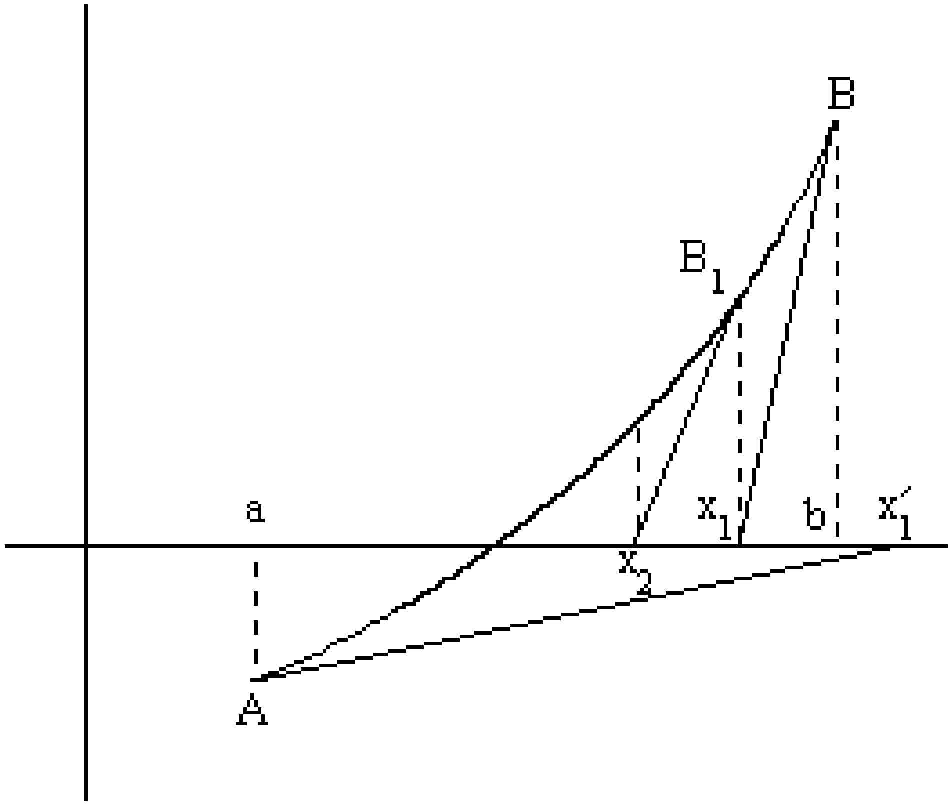
$$x_n = x_{n-1} + h_{n-1}$$

$f(x_n)$ x_{n-1}

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + h_{n-1}) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}) \cdot h_{n-1} = 0$$

$$h_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f'_{n-1}}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})};\ \ n = 1,2,\ldots \qquad |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$



$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \qquad\qquad x_0 = b$$

$x_0 = a$ $\qquad$ $f(x_0) f''(x_0) < 0$

Теорема 3. *Если* $f(a) f(b) < 0$ *, причем* $f'(x)$ *и* $f''(x)$ *отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при* $a \le x \le b$ *, то исходя из начального приближения* $x_0 \in [a, b]$ *, удовлетворяющего неравенству*

$$f(x_0) f''(x_0) > 0$$

можно вычислить методом Ньютона единственный корень ξ *уравнения* $f(x) = 0$ *с любой степенью точности.*

Модификации метода Ньютона

Упрощенный метод Ньютона

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f\left(x_{n-1}\right)}{f'\left(x_{n-1}\right)} \qquad f'\left(x_{n-1}\right) \approx f'\left(x_0\right)$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f\left(x_{n-1}\right)}{f'\left(x_0\right)} \qquad n = 0,1,\ldots$$

.

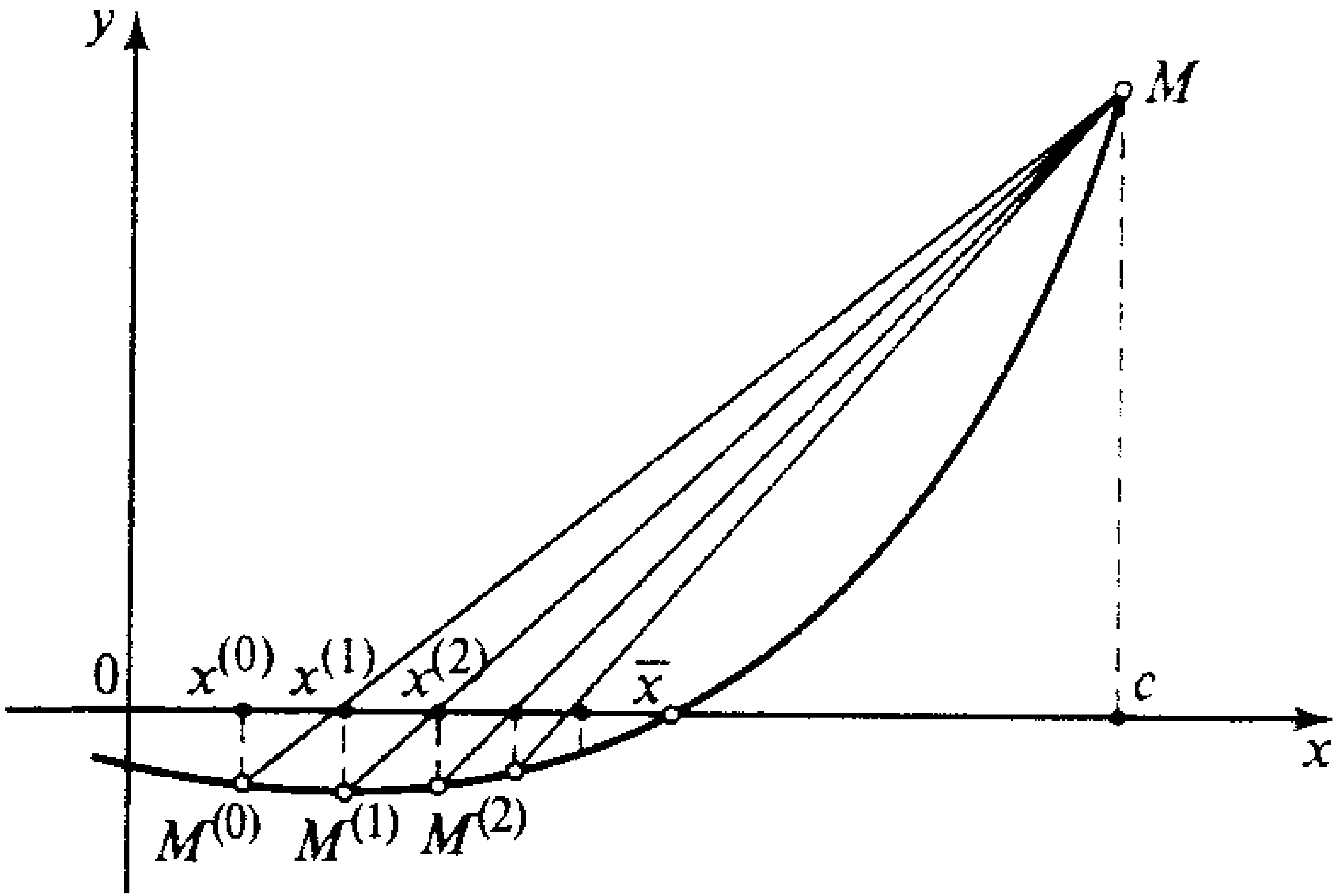
Метод хорд (секущих)

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(c) - f(x_{n-1})}{c - x_{n-1}}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{c - x_{n-1}}{f(c) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$$

$$c_n = a_n - \frac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n)$$

$$x_n = c_n \qquad |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$



y
M
0
$x^{(0)}$
$x^{(1)}$
$x^{(2)}$
$\bar{x}$
c
x
$M^{(0)}$
$M^{(1)}$
$M^{(2)}$