Тема. Решение задач линейной алгебры

- Решение СЛАУ
- Вычисление определителей матриц
- Поиск обратных матриц
- Определение собственных чисел и векторов матриц

Методы решения СЛАУ

- Прямые (точные), $n \le 10^3$
  - Метод Гаусса
  - Метод декомпозиции (Халецкого)
  - Метод ортогонализации
- Итерационные, $n \le 10^7$
  - Метод простой итерации
  - Метод Зейделя
- Вероятностные, $n > 10^7$

Методы решения СЛАУ

Постановка задачи:

$$Ax = b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Прямой ход (преобразование матрицы к треугольному виду):

$$a_{kk}^{(k)} = 1,\ \ a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\ \ b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};$$

$$a_{ik}^{(k)} = 0,\ \ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)},$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k)}.$$

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij},\ \ b_i^{(0)} = b_i$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, $i = k + 1, k + 2, \ldots, n$, $j = k + 1, k + 2, \ldots, n$

Метод Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Обратный ход:

$$x_i = b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j, \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Метод Гаусса

Поиск определителя матрицы:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i-1)} = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}.$$

Метод декомпозиции

$$A = BC$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$i = j, j+1, \dots, n;$$

$$c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$j = i+1, i+2, \dots, n.$$

Метод декомпозиции

$$y_i = \frac{1}{b_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k\right), \ \ i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k, \ \ i = n, n-1, \ldots, 1.$$

Поиск определителя:

$$\det A = \det BC = \det B \cdot \det C = \prod_{i=1}^{n} b_{ii}.$$

Метод ортогонализации

Расширенная матрица A' $(n+1)\times(n+1)$:

$$a'_{ij} = a_{ij}, \;\; a'_{i,n+1} = -b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \;\;\; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$a'_{n+1,j} = e_{n+1,j}, \;\;\; j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Расширенный вектор x' $(n+1)$:

$$x'_j = x_j, \;\; x'_{n+1} = 1, \;\;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$A'\, x' = 0$$

Метод ортогонализации

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & -b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & -b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Вспомогательные матрицы матриц U и Z $(n+1)\times(n+1)$:

$$u_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_i, z_j\right) z_j, \quad z_i = \frac{u_i}{\left\| u_i \right\|},$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Метод ортогонализации

Вектор решения:

$$x_i = \frac{z_{n+1,i}}{z_{n+1,n+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Метод ортогонализации определитель найти не позволяет.

Погрешность решения СЛАУ

$$Ax = b$$

Вектор невязки:

$$\varepsilon = Ax^* - b$$

Норма вектора невязки:

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}$$

Вычисление обратных матриц

$$AX = E$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax_i = e_i,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

где x_i, e_i – i-й столбец обратной и единичной матрицы соответственно. Тогда

$$X = A^{-1}$$

Вычисление обратных матриц

Матрица невязки:

$$\varepsilon = AX - E$$

Норма матрицы невязки:

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}^{2}}$$

Примеры решения СЛАУ

Метод Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$n = 3$$

$$A^0 = A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; b^0 = b = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Примеры решения СЛАУ

$$k=1:\ a_{11}^{(1)}=1,\ a_{1j}^{(1)}=\frac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}},\ b_1^{(1)}=\frac{b_1^{(0)}}{a_{11}^{(0)}},\ \ j=2..3;$$

$$a_{i1}^{(1)}=0,\ a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(0)}-a_{i1}^{(0)}a_{1j}^{(1)},$$

$$b_i^{(1)}=b_i^{(0)}-a_{i1}^{(0)}b_1^{(1)},\ i=2..3,\ \ j=2..3$$

$$A^1=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{37}{2} \end{pmatrix},\ b^1=\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Примеры решения СЛАУ

$$k = 2:\ a_{22}^{(2)} = 1,\ a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ \ j = 3..3;$$

$$a_{i2}^{(2)} = 0,\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} a_{1j}^{(1)},$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_2^{(2)},\ i = 3..3,\ \ j = 3..3$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ b^2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Примеры решения СЛАУ

$$k=3:\ a_{33}^{(3)}=1,\ b_3^{(3)}=\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b^3=\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A=a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot a_{33}^{(2)}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2=-2$$

Примеры решения СЛАУ

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = b_3^{(3)} = -1$$

$$x_2 = b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3 = 4 - (-3) \cdot (-1) = 1$$

$$x_1 = b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3 = 8 - \frac{3}{2} \cdot 1 - \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot (-1) = 3$$

Примеры решения СЛАУ

Погрешность решения: $\varepsilon = Ax^* - b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix},\ x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = Ax^* - b = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + (-7)\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) \\ 5\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\varepsilon\| = 0$$

Примеры решения СЛАУ

Метод декомпозиции:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$n = 3$$

$$A = BC, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры решения СЛАУ

$$b_{i1} = a_{i1}, \ \ i = 1..3$$

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \ \ \ j = 2..3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & b_{22} & 0 \\ 5 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

Примеры решения СЛАУ

$$b_{i2} = a_{i2} - b_{i1}c_{12}, \ \ i = 2..3$$

$$b_{22} = 1 - 1 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}; \ \ b_{32} = 2 - 5 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{11}{2}$$

$$c_{2j} = \frac{1}{b_{22}}\left(a_{2j} - b_{21}c_{1j}\right), \ \ j = 3..3; \ \ c_{23} = -2 \cdot \left(-2 - 1 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)\right) = -3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{11}{2} & b_{33} \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры решения СЛАУ

$$b_{i3} = a_{i3} - b_{i1}c_{1j} - b_{i2}c_{2j}, \ \ i = 3..3$$

$$b_{33} = 1 - 5 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - \left(-\frac{11}{2}\right) \cdot (-3) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{11}{2} & 2 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры решения СЛАУ

$$By = b$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{11}{2} & 2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{b_{11}} b_1 = \frac{16}{2} = 8; \ y_2 = \frac{1}{b_{22}} \left(b_2 - b_{21} y_1 \right) = -2 \cdot \left(6 - 1 \cdot 8 \right) = 4;$$

$$y_3 = \frac{1}{b_{33}} \left(b_3 - b_{31} y_1 - b_{32} y_2 \right) = \frac{1}{2} \left(16 - 5 \cdot 8 - \left(-\frac{11}{2} \right) \cdot 4 \right) = -1$$

Примеры решения СЛАУ

$$Cx = y$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Далее аналогично методу Гаусса, т.к.

$$C = A^{(3)}, y = b^{(3)}$$

Примеры решения СЛАУ

Метод ортогонализации:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & -7 & -16 \\ 5 & 2 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_i, z_j\right) z_j, \; z_i = \frac{u_i}{\sqrt{\left(u_i, u_i\right)}}, \; i = 1, 2, ..., n+1$$

Примеры решения СЛАУ

$$u_1 = a_1 = (1,1,-2,-6);\;\; z_1 = \frac{u_1}{\sqrt{(u_1,u_1)}} = \frac{u_1}{\sqrt{42}} = \left(\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, -\frac{2}{\sqrt{42}}, -\frac{6}{\sqrt{42}}\right)$$

$$u_2 = a_2 - (a_2, z_1)\, z_1 = a_2 - \frac{115}{\sqrt{42}} z_1 =$$

$$= \left(2 - \frac{115}{42}, 3 - \frac{115}{42}, -7 + \frac{2 \cdot 115}{42}, -16 + \frac{6 \cdot 115}{42}\right) = \left(-\frac{31}{42}, \frac{11}{42}, -\frac{64}{42}, \frac{18}{42}\right)$$

$$z_2 = \frac{u_2}{\sqrt{(u_2,u_2)}} = \frac{u_2}{\sqrt{\frac{5502}{42^2}}} = u_2 \sqrt{\frac{42}{131}} =$$

$$= \left(-\frac{31}{\sqrt{42 \cdot 131}}, \frac{11}{\sqrt{42 \cdot 131}}, -\frac{64}{\sqrt{42 \cdot 131}}, \frac{18}{\sqrt{42 \cdot 131}}\right)$$

Примеры решения СЛАУ

$$u_3 = a_3 - (a_3, z_1) z_1 - (a_3, z_2) z_2 = a_3 - \frac{101}{\sqrt{42}} z_1 + \frac{485}{\sqrt{42 \cdot 131}} z_2 =$$

$$= \left(5 - \frac{101}{42} - \frac{485 \cdot 31}{42 \cdot 131}, 2 - \frac{101}{42} + \frac{485 \cdot 11}{42 \cdot 131}, 1 + \frac{202}{42} - \frac{485 \cdot 64}{42 \cdot 131}, -16 + \frac{606}{42} + \frac{485 \cdot 18}{42 \cdot 131} \right) =$$

$$= \left(-\frac{18}{131}, \frac{74}{131}, \frac{22}{131}, \frac{2}{131} \right)$$

$$z_3 = \frac{u_3}{\sqrt{(u_3, u_3)}} = \frac{u_3}{\sqrt{\frac{6288}{131^2}}} = u_3 \sqrt{\frac{131}{48}} =$$

$$= \left(-\frac{18}{\sqrt{131 \cdot 48}}, \frac{74}{\sqrt{131 \cdot 48}}, \frac{22}{\sqrt{131 \cdot 48}}, \frac{2}{\sqrt{131 \cdot 48}} \right)$$

Примеры решения СЛАУ

$$u_4 = a_4 - (a_4, z_1) z_1 - (a_4, z_2) z_2 - (a_4, z_3) z_3 =$$

$$= a_4 + \frac{6}{\sqrt{42}} z_1 - \frac{18}{\sqrt{42 \cdot 131}} z_2 - \frac{2}{\sqrt{131 \cdot 48}} z_3 =$$

$$= \left(0 + \frac{6}{42} + \frac{18 \cdot 31}{42 \cdot 131} + \frac{2 \cdot 18}{131 \cdot 48}, 0 + \frac{6}{42} - \frac{18 \cdot 11}{42 \cdot 131} - \frac{2 \cdot 74}{131 \cdot 48}, \right.$$

$$\left. 0 - \frac{12}{42} + \frac{18 \cdot 64}{42 \cdot 131} - \frac{2 \cdot 22}{131 \cdot 48}, 1 - \frac{36}{42} - \frac{18 \cdot 18}{42 \cdot 131} - \frac{2 \cdot 2}{131 \cdot 48} \right) = \left(\frac{3}{12}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{12} \right)$$

$$z_4 = \frac{u_4}{\sqrt{(u_4, u_4)}} = \frac{u_4}{\sqrt{\frac{12}{12^2}}} = u_3 \sqrt{12} = \left(\frac{3}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}} \right)$$

$$x = \frac{z_4}{z_{44}} = (3, 1, -1, 1)$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = E$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax_j = e_j, \quad j = 1..3$$

Пример вычисления обратной матрицы

Метод декомпозиции:

$$BCX = E \Rightarrow BY = E,\ CX = Y$$

$$BCx_j = e_j$$

$$\Rightarrow By_j = e_j,\ Cx_j = y_j,\ j = 1..3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{11}{2} & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$By_1 = e_1$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{11}{2} & 2 \end{pmatrix}, \; b = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_{11} = \frac{1}{b_{11}} b_1 = \frac{1}{2}; \; y_{21} = \frac{1}{b_{22}} \left(b_2 - b_{21} y_{11} \right) = -2 \cdot \left(0 - 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = 1;$$

$$y_{31} = \frac{1}{b_{33}} \left(b_3 - b_{31} y_{11} - b_{32} y_{21} \right) = \frac{1}{2} \left(0 - 5 \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{11}{2} \right) \cdot 1 \right) = \frac{3}{2}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$By_2 = e_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{11}{2} & 2 \end{pmatrix}, \ b = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_{12} = \frac{1}{b_{11}} b_1 = 0; \ y_{22} = \frac{1}{b_{22}}\left(b_2 - b_{21} y_{12}\right) = -2 \cdot \left(1 - 1 \cdot 0\right) = -2;$$

$$y_{32} = \frac{1}{b_{33}}\left(b_3 - b_{31} y_{12} - b_{32} y_{22}\right) = \frac{1}{2}\left(0 - 5 \cdot 0 - \left(-\frac{11}{2}\right) \cdot (-2)\right) = -\frac{11}{2}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$By_3 = e_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{11}{2} & 2 \end{pmatrix}, \; b = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_{13} = \frac{1}{b_{11}} b_1 = 0; \; y_{23} = \frac{1}{b_{22}}\left(b_2 - b_{21} y_{13}\right) = -2 \cdot \left(0 - 1 \cdot 0\right) = 0;$$

$$y_{33} = \frac{1}{b_{33}}\left(b_3 - b_{31} y_{13} - b_{32} y_{23}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 5 \cdot 0 - \left(-\frac{11}{2}\right) \cdot 0\right) = \frac{1}{2}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{11}{2} & 2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$BY = E$$

$$\Rightarrow Y = B^{-1}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$Cx_1 = y_1$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_{31} = y_{31} = \frac{3}{2}; \quad x_{21} = y_{21} - c_{23}x_{31} = 1 - (-3) \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{2};$$

$$x_{11} = y_{11} - c_{12}x_{21} - c_{13}x_{31} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$Cx_2 = y_2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_{32} = y_{32} = -\frac{11}{2}; \quad x_{22} = y_{22} - c_{23}x_{32} = -2 - (-3)\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) = -\frac{37}{2};$$

$$x_{12} = y_{12} - c_{12}x_{22} - c_{13}x_{32} = 0 - \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{37}{2}\right) - \left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{17}{2}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$Cx_3 = y_3$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_{33} = y_{33} = \frac{1}{2}; \quad x_{23} = y_{23} - c_{23}x_{33} = 0 - (-3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$x_{13} = y_{13} - c_{12}x_{23} - c_{13}x_{33} = 0 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{37}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$AX = E$$

Пример вычисления обратной матрицы

Матрица невязки:

$$\varepsilon = AX - E$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{37}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\varepsilon\| = 0$$