Тема. Вычисление собственных чисел и собственных векторов

Постановка задачи:

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

Квадратная матрица $n \times n$ имеет m различных собственных чисел λ_i и соответствующих им собственных векторов x_i кратности k_i,

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = n, \;\; i = 1, 2, ..., n, \;\; 1 \le m \le n$$

Вычисление собственных чисел и векторов

Идея:

$$Ax_i - \lambda_i x_i = 0$$

$$(A - \lambda_i E)x_i = 0$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda_i E) = 0$$

$$\det\left(A-\lambda_i E\right)=D\left(\lambda_i\right)=a_0+a_1\lambda_i+a_2\lambda_i^2+\ldots+\lambda_i^n=0,$$

или $D\left(\lambda_i\right)=\left(-1\right)^n\left[\lambda_i^n-\sigma_1\lambda_i^{n-1}+\sigma_2\lambda_i^{n-2}-\ldots+\left(-1\right)^n\sigma_n\right]$,

где σ_i – сумма всех диагональных миноров порядка i.

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

Матрица Фробениуса:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $D(\lambda_i) = \det(P - \lambda_i E) = (-1)^n[\lambda_i^n - p_1\lambda_i^{n-1} - p_2\lambda_i^{n-2} - \dots - p_n]$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

Преобразование подобия:

$$P = S^{-1} A S$$

$$\det\left(P - \lambda_i E\right) = \det\left(A - \lambda_i E\right)$$

$$S = M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_1, \;\; S^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{n-1}^{-1}$$

$$A^{(k)} = M_{n-k}^{-1} A^{(k-1)} M_{n-k}, \;\; k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$A^{(0)} = A, \;\; P = A^{(n-1)}$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$M_k: \begin{cases} m_{ij} = e_{ij}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \ \ i \neq k; \\ m_{kj} = -\dfrac{a_{k+1,j}^{(n-k-1)}}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \ \ j \neq k; \\ m_{kk} = \dfrac{1}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}. \end{cases}$$

$$M_k^{-1}: \begin{cases} m_{ij} = e_{ij}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \ \ i \neq k; \\ m_{kj} = a_{k+1,j}^{(n-k-1)}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$\tilde{A}^{(k)} = A^{(k-1)} M_{n-k}, \;\; A^{(k)} = M_{n-k}^{-1} \tilde{A}^{(k)}, \;\; k = 1, 2, ..., n-1$$

$$A^1, \tilde{A}^1 : \begin{pmatrix} a & a & ... & a & a & a \\ a & a & ... & a & a & a \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a & ... & a & a & a \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2, \tilde{A}^2 : \begin{pmatrix} a & a & ... & a & a & a \\ a & a & ... & a & a & a \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$\ldots, A^{n-1}, \tilde{A}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & a & \ldots & a & a & a \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = A^{n-1}$$

Вычисление собственных векторов

Имеем СЛАУ:

$$(A - \lambda_i E)x_i = 0,$$

$$\det(A - \lambda_i E) = 0$$

Вариант Данилевского:

$$(P - \lambda_i E)y_i = 0,$$

$$x_i = Sy_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Здесь y_i – собственный вектор матрицы *P*, x_i – собственный вектор матрицы *A*.

Вычисление собственных векторов

Собственный вектор матрицы *P*:

$$y_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^{n-1} \\ \lambda_i^{n-2} \\ \dots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$n = 3$$

$$\left|A - \lambda E\right| = \left|P - \lambda E\right| = (-1)^3 \left[\lambda^3 - p_{11}\lambda^2 - p_{12}\lambda - p_{13}\right] = 0$$

$$P = S^{-1}AS = M_1^{-1}M_2^{-1}AM_2M_1$$

$$A^0 = A;\ \ A^i = M_{3-i}^{-1}A^{i-1}M_{3-i},\ \ i = 1, 2$$

$$y = \left(\lambda^2, \lambda, 1\right)^{\mathrm{T}}$$

$$x = Sy = M_2M_1y$$

Пример

$$M_2:\begin{cases} m_i = e_i \\ m_{22} = \dfrac{1}{a_{32}^{(0)}},\ \ m_{2\,j} = -\dfrac{a_{3\,j}^{(0)}}{a_{32}^{(0)}} \end{cases} \qquad M_2^{-1}:\begin{cases} m_i = e_i \\ m_2 = a_3^{(0)} \end{cases}$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},\ \ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{6}{7} & -\dfrac{1}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^1 = A^0 M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^1 = M_2^{-1} \tilde{A}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$M_1:\begin{cases} m_i = e_i \\ m_{11} = \dfrac{1}{a_{21}^{(1)}},\ \ m_{1j} = -\dfrac{a_{2j}^{(1)}}{a_{21}^{(1)}} \end{cases} \quad M_1^{-1}:\begin{cases} m_i = e_i \\ m_1 = a_2^{(1)} \end{cases}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A^1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^2 = A^1 M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{32} & \frac{42}{32} & \frac{21}{32} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^2 = M_1^{-1}\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Пример

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(\lambda) = \left|P - \lambda E\right| = (-1)^3 \left[\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3\right] = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

$$p(x-a)(x-b)(x-c) = p\left(x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc\right)$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = -1$$

$$D(\lambda) = p(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)$$

Пример

$$
\begin{array}{rrrrl}
-\lambda^3 & +\lambda^2 & +5\lambda & +3 & \underline{|\lambda+1} \\
-\lambda^3 & -\lambda^2 & & & -\lambda^2+2\lambda+3 \\
 & 2\lambda^2 & +5\lambda & & \\
 & 2\lambda^2 & +2\lambda & & \\
 & & +3\lambda & +3 & \\
 & & +3\lambda & +3 & \\
 & & & +0 &
\end{array}
$$

$$-\lambda^2+2\lambda+3=0$$

$$\lambda_2=-1,\ \lambda_3=3$$

$$D(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

Пример

$$y = \left(\lambda^2, \lambda, 1\right)^{\mathrm{T}}$$

$$x = Sy = M_2 M_1 y$$

$$y_1 = y_2 = \left(\lambda_1^2, \lambda_1, 1\right) = \left(\lambda_2^2, \lambda_2, 1\right) = (1, -1, 1)$$

$$y_3 = \left(\lambda_3^2, \lambda_3, 1\right) = (9, 3, 1)$$

$$S = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ \frac{6}{32} & -\frac{20}{32} & \frac{38}{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$x_1 = x_2 = Sy_1 = Sy_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ \frac{6}{32} & -\frac{20}{32} & \frac{38}{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = Sy_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ \frac{6}{32} & -\frac{20}{32} & \frac{38}{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$