TOÁN RỜI RẠC 2

CHƯƠNG 2

Giảng viên: Vũ Văn Thỏa

- Bài toán tìm kiếm
- Tìm kiếm theo chiều sâu
- Tìm kiếm theo chiều rộng
- Ứng dụng

Bài toán tìm kiếm

- **<u>Đặt bài toán</u>**:

Input: Đồ thị G = (V, E) gồm n đỉnh, m cạnh;

Một đỉnh u $\in$ G;

Output: Thứ tự tìm kiếm các đỉnh v $\in$ G bắt đầu từ đỉnh u và các cạnh sử dụng trong quá trình tìm kiếm;

- **<u>Yêu cầu:</u>**

Mỗi đỉnh v $\in$ G chỉ được tìm kiếm đúng 1 lần.

Phương pháp giải bài toán tìm kiếm

- Thuật toán DFS
- Thuật toán BFS

2.1 Thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (Depth-First Search)

- Giới thiệu thuật toán
- Mô tả thuật toán
- Cài đặt và kiểm nghiệm thuật toán

2.1.1 Giới thiệu thuật toán

Bước khởi tạo: Tất cả các đỉnh v $\in$ G chưa được xét (vs[v]= 0) và chưa sử dụng cạnh nào liên thuộc v (e[v]= 0);

Bước 1: Tìm kiếm theo chiều sâu bắt đầu từ u bằng cách thăm u và đánh dấu u được xét (vs[u] = 1);

Bước 2: Chọn một đỉnh v kề với u và chưa được xét;

Bước 3: Nếu chọn được v thì cập nhật e[v]= u (cạnh từ u đến v được sử dụng) và quay lại bước 1 với v đóng vai trò u;

Bước 4: Nếu không chọn được v thì quay lại bước 2 và đỉnh đóng vai trò u là đỉnh i có thứ tự duyệt ngay trước đỉnh đóng vai trò u hiện thời;

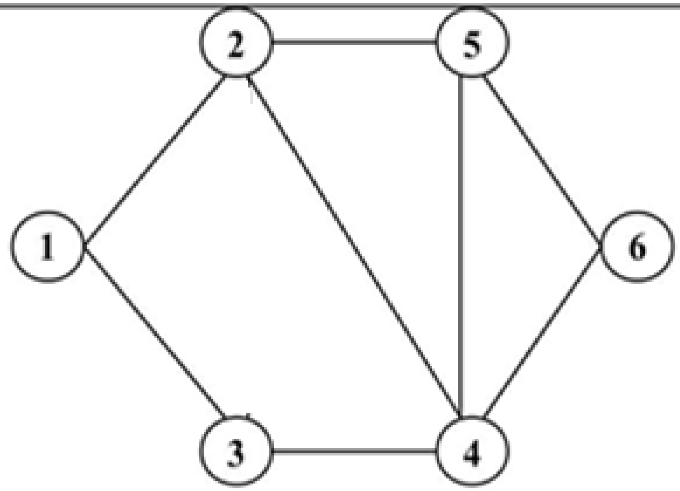
Bước 5: Nếu tất cả các đỉnh kề của u đều đã được xét thì dừng;

2.1.2 Mô tả thuật toán

Thuật toán: Dfs(u){

```
Thăm(u);
vs[u] = 1;
for v ∈ ke(u)  do
      if  (vs[v] = 0) {
        e[v]= u;  Dfs(v);
      }
}
```

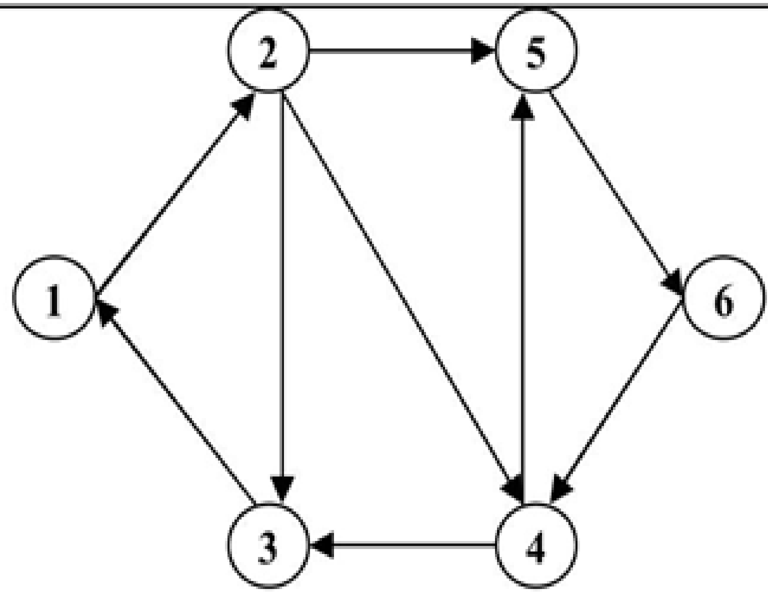
Ví dụ 1: Dfs(u) với u = 1, G vô hướng



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Dfs(1)= {1(0); 2(1); 4(2); 3(4); 5(4); 6(5)}

Ví dụ 2: Dfs(u) với u = 2, G có hướng



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dfs(2)= {2(0); 3(2); 1(3); 4(2); 5(4); 6(5)}

2.1.3 Cài đặt và kiểm nghiệm thuật toán

<u>Cài đặt 1:</u> (Đệ qui)

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int a[100][100], n, u, vs[100], e[100];
void DfsDequy(int u) { int v;
       cout << u << " ";
      vs[u]= 1;
      for (v= 1; v<=n; v++)
           if (vs[v]==0 && a[u][v]==1){ e[v]= u;
                          DfsDequy(v);
                 }
   }
```

Cài đặt 2: (Sử dụng ngăn xếp)

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int a[100][100], n, u, vs[100], e[100], s[100];
void DfsNx(int u){int top= 1; s[top]= u; vs[u] = 1;
      while (top > 0){ int v = s[top]; int ok = 1;
      for (int i= 1; i<=n; i++)
          if (vs[i]==0 && a[v][i]==1) { top++; s[top] = i;
                vs[i] = 1; e[i]= v; ok = 0; break;
                }
           if (ok==1) top--;
     }
}
```

Ví dụ 3: Dfs(u), u = 1, G vô hướng gồm 13 đỉnh biểu diễn bởi ma trận kề

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
12	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

Dfs(1)= {1(0); 2(1); 3(2); 4(3); 7(4); 5(7); 6(5); 12(6); 8(12); 10(12); 9(10); 11(9); 13(11)}

Ví dụ 4: Dfs(u), u = 1, G có hướng gồm 13 đỉnh biểu diễn bởi ma trận kề

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
10	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Dfs(1)= {1(0); 6(1); 10(6); 2(10); 3(2), 9(3); 5(9); 7(5); 11(7); 8(11); 4(8); 12(8); 13(7)}

Độ phức tạp của thuật toán DFS

Độ phức tạp của thuật toán DFS phụ thuộc vào phương pháp biểu diễn đồ thị:

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

  Độ phức tạp: $O(n^2)$, với n là số đỉnh;

- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh

  Độ phức tạp: O(nxm), với n là số đỉnh, m là số cạnh;

- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

  Độ phức tạp: O(n), với n là số đỉnh;

2.2 Thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (Breadth - first Search)

- **Giới thiệu thuật toán**
- **Mô tả thuật toán**
- **Cài đặt và kiểm nghiệm thuật toán**

2.2.1 Giới thiệu thuật toán

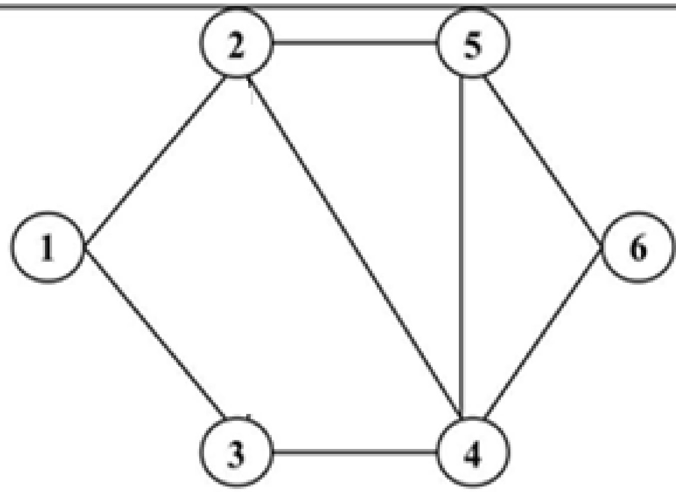
- **Bước khởi tạo**: Tất cả các đỉnh v $\in$ G chưa được xét (vs[v]= 0) và chưa sử dụng cạnh liên thuộc v (e[v]= 0);
- **Bước 1**: Xây dựng hàng đợi q bắt đầu từ u và đánh dấu u đã xét (vs[u] = 1);
- **Bước 2**: Nếu q rỗng thì kết thúc. Ngược lại, lấy v ra khỏi hàng đợi và thăm v;
- **Bước 3**: Đưa vào hàng đợi tất các đỉnh i kề với v và chưa được xét, đánh dấu i đã xét (vs[i]= 1), cập nhật e[i]= v (cạnh từ v đến i được sử dụng);
- **Bước 4**: Quay lại bước 2.

2.2.2 Mô tả thuật toán

Thuật toán:

```
Bfs(u){ q = ∅;
    <Đưa u vào q>;
     vs[u] = 1;
     while q ≠ ∅ { <Lấy v ra khỏi q>; Thăm(v);
          for i ∈ ke(v)  do
               if  (vs[i] = 0) { <Đưa i vào q>;
                    vs[i] = 1; e[i] = v;
               }
          }
}
```

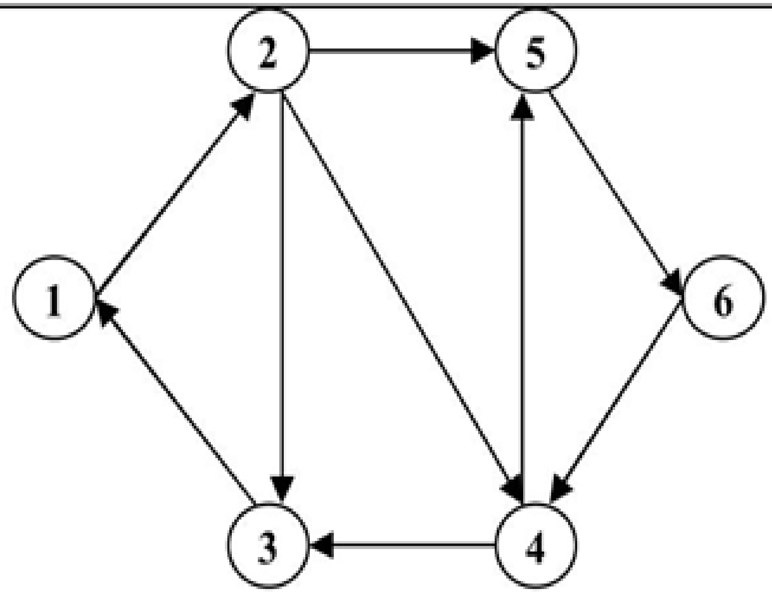
Ví dụ 5: Bfs(u), u = 1, G vô hướng



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1); 4(2), 5(2); 6(4)}

Ví dụ 6: Bfs(u), u = 2, G có hướng



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Bfs(2)= {2(0); 3(2), 4(2), 5(2); 1(3); 6(5)}

2.2.3 Cài đặt và kiểm nghiệm thuật toán

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int a[100][100], n, u, vs[100], e[100], q[100];
void Bfs(int u){ int v, dq = 1, cq = 0;
        cq++; q[cq] = u; vs[u] = 1;
        while (dq <= cq){ v = q[dq]; dq++;
              cout << v << " ";
              for (int i= 1; i<=n; i++)
                 if (vs[i]==0 && a[v][i]==1) {
                    cq++; q[cq] = i; vs[i] = 1; e[i]= v; }
           }
      }
```

Ví dụ 7: Bfs(u), u = 1, G vô hướng gồm 13 đỉnh biểu diễn bởi ma trận kề

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
12	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1), 4(1); 6(2); 5(3); 7(4); 12(6); 8(5); 10(12); 9(10), 11(10), 13(10)}

Ví dụ 8: Bfs(u), u = 1, G có hướng gồm 13 đỉnh biểu diễn bởi ma trận kề

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
10	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Bfs(1)= {1(0); 6(1); 10(6), 12(6); 2(10), 3(10); 4(12); 8(2); 9(3), 13(3); 5(9), 7(9); 11(13)}

Độ phức tạp thuật toán BFS

Độ phức tạp của thuật toán BFS phụ thuộc vào phương pháp biểu diễn đồ thị:

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

  Độ phức tạp: $O(n^2)$, với n là số đỉnh;

- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh

  Độ phức tạp: O(nxm), với n là số đỉnh, m là số cạnh;

- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

  Độ phức tạp: O(n), với n là số đỉnh;

Ghi chú

- Khi thực hiện Dfs(u)/Bfs(u) các đỉnh được duyệt đến là các đỉnh có đường đi tới xuất phát từ u.
- Đối với đồ thị vô hướng G, tập hợp các đỉnh thuộc Dfs(u)/Bfs(u) là một thành phần liên thông của G chứa đỉnh u.

2.3 Ứng dụng các thuật toán tìm kiếm trên đồ thị

- Duyệt tất cả các đỉnh của đồ thị
- Tìm đường đi giữa các đỉnh trên đồ thị
- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
- Đỉnh trụ và cạnh cầu trong đồ thị vô hướng
- Tính liên thông trong đồ thị có hướng

2.3.1 Duyệt tất cả các đỉnh của đồ thị

- **Input**: Đồ thị G = (V, E) gồm n đỉnh, m cạnh;
- **Output**: Thứ tự thăm tất cả các đỉnh $v \in G$ bắt đầu từ đỉnh 1;

Mô tả thuật toán

<u>Thuật toán</u>: ***Duyệt tất cả các đỉnh của đồ thị;***

- **Bước khởi tạo**: Tất cả các đỉnh $v \in G$ chưa được thăm (vs[v]= 0);

- **Bước 1**: Nếu tất cả các đỉnh đều được thăm thì kết thúc;

- **Bước 2**: Chọn $v \in G$ chưa được thăm (bắt đầu từ v = 1);

- **Bước 3**: Thực hiện DFS(v)/BFS(v);

- **Bước 4**: Quay lại bước 1;

Cài đặt

<u>Cài đặt 1</u> (Sử dụng DFS):

```
void  DuyetDfs(){int v;
    for (v = 1; v <= n; v++) {
        vs[v] = 0; e[v]= 0;}
    for (v = 1; v <= n; v++)
        if (vs[v] == 0) DfsDequy(v);
    }
```

Cài đặt

<u>Cài đặt 2</u> (Sử dụng BFS):

```
void  DuyetBfs(){int v;
    for (v = 1; v <= n; v++) {
                vs[v] = 0; e[v]= 0;}
    for (v = 1; v <= n; v++)
        if (vs[v] == 0) Bfs(v);
    }
```

Ví dụ 9: Duyệt các đỉnh của đồ thị vô hướng cho bởi danh sách kề

Ke(1) = { 6, 7}   Ke(2) = {8, 9, 10}   Ke(3) = {4}   Ke(4) = {3}   Ke(5) = {}

Ke(6) = {1, 7}   Ke(7) = {1, 6}   Ke(8) = {2, 10}   Ke(9) = {2, 10}   Ke(10) = {2, 8, 9}

- **Sử dụng DFS:**

Dfs(1)= {1(0); 6(1); 7(6)}; Dfs(2)= {2(0); 8(2); 10(8); 9(10)}

Dfs(3)= {3(0); 4(3)}; Dfs(5)= {5(0)}

$\Rightarrow$ Thứ tự duyệt: 1, 6, 7, 2, 8, 10, 9, 3, 4, 5

- **Sử dụng BFS:**

Bfs(1)= {1(0); 6(1), 7(1)}; Bfs(2)= {2(0); 8(2), 9(2), 10(2)}

Bfs(3)= {3(0); 4(3)} ; Bfs(5)= {5(0)}

$\Rightarrow$ Thứ tự duyệt: 1, 6, 7, 2, 8, 9, 10, 3, 4, 5

Ví dụ 10: Duyệt các đỉnh của đồ thị có hướng cho bởi danh sách kề

Ke(1) = { 6, 7} Ke(2) = {8, 9} Ke(3) = {4} Ke(4) = {5} Ke(5) = {3}

Ke(6) = {7} Ke(7) = {1} Ke(8) = {10} Ke(9) = {10} Ke(10) = {2}

- **Sử dụng DFS:**

Dfs(1)= {1(0); 6(1); 7(6)}; Dfs(2)= {2(0); 8(2); 10(8); 9(2)}

Dfs(3)= {3(0); 4(3); 5(4)}

⇒ Thứ tự duyệt: 1, 6, 7, 2, 8, 10, 9, 3, 4, 5

- **Sử dụng BFS**:

Bfs(1)= {1(0); 6(1), 7(1)}; Bfs(2)= {2(0); 8(2),9(2); 10(8)}

Bfs(3)= {3(0); 4(3); 5(4)

⇒ Thứ tự duyệt: 1, 6, 7, 2, 8, 9, 10, 3, 4, 5

2.3.2 Tìm đường đi giữa các đỉnh trên đồ thị

Khái niệm

- Đường đi độ dài k từ u tới $v \in G$ là dãy các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_k$, trong đó $x_0 = u$, $x_k = v$ và $(x_{i-1}, x_i) \in E$, $1 \le i \le k$.
- Đường đi là đơn nếu không chứa một cạnh quá một lần.

Định lý (Đếm số lượng đường đi giữa cặp đỉnh)

Cho G là đồ thị với ma trận kề A gồm n đỉnh đánh số 1, 2, …, n. Số các đường đi khác nhau độ dài r từ i đến j (r nguyên dương) bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận A^r.

Ví dụ 11: Tìm số lượng đường đi độ dài 4 từ đỉnh 1 đến 4 trên đồ thị vô hướng

Có ma trận kề của G:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{có 8 đường đi độ dài 4 từ 1 đến 4.}$$

Tìm đường đi trên đồ thị từ đỉnh u đến đỉnh v

Input: Đồ thị G = (V, E) gồm n đỉnh, m cạnh;

Hai đỉnh u, v $\in$ G;

Output: Đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v;

Mô tả thuật toán

Thuật toán: Tìm đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v;

Bước khởi tạo: Tất cả $x \in G$ chưa được thăm (vs[x]= 0) và chưa xác định cạnh (e[x] = 0);

Bước 1: Thực hiện DFS(u)/BFS(u);

Bước 2: (Trả lại kết quả)

Nếu vs[v] = 0 $\Rightarrow$ không có đường đi từ u đến v;

Nếu vs[v] = 1 $\Rightarrow$ xuất đường đi từ u đến v bằng cách sử dụng e[];

Cài đặt

Cài đặt 1 (Sử dụng DFS):

```
int a[100][100], n, u, v, vs[100], e[100];
void DuongDiDfs(int u, int v) {
        for (int x= 1; x<=n; x++){ vs[x]= 0; e[x]= 0;}
        DfsDequy(u);
        if (vs[v] == 1){ int t= v;
            while(t> 0){ cout << t << " <- ";
                t= e[t];  }
                }; else
            cout <<  " NO ";
      }
```

Cài đặt

<u>Cài đặt 2</u> (Sử dụng BFS):

```
int a[100][100], n, u, v, vs[100], e[100];
void DuongDiBfs(int u, int v) {
        for (int x= 1; x<=n; x++){ vs[x]= 0; e[x]= 0;}
        Bfs(u);
        if (vs[v] == 1){ int t= v;
            while(t> 0){ cout << t << " <- ";
                t= e[t];  }
                 }; else
             cout <<  " NO ";
      }
```

Ví dụ 12: Tìm đường đi từ u= 2 đến v= 13 trên G vô hướng gồm 13 đỉnh cho bởi ma trận kề

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
12	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

Dfs(2)= {2(0); 1(2); 3(1); 4(3); 7(4); 5(7); 6(5); 12(6); 8(12); 10(12); 9(10);11(9);13(11)}

⇒ Đường đi từ 2 đến 13: 13<-11<-9<-10<-12<-6<-5<-7<-4<-3<-1<-2

Bfs(2)= {2(0); 1(2),3(2),4(2),6(2); 5(3); 7(4); 12(6); 8(5); 10(12); 9(10),11((10),13(10)}

⇒ Đường đi từ 2 đến 13: 13<--10<-12<-6<-2

<u>Ví dụ 13</u>: Tìm đường đi từ u= 13 đến v= 1 trên G có hướng gồm 13 đỉnh cho bởi ma trận kề

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
10	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Dfs(13)= {13(0);9(13);5(9);7(5);11(7); 2(11); 3(2); 8(2); 4(8), 1(4); 6(1), 10(6); 12(6)}

$\Rightarrow$ Đường đi từ 13 đến 1: 1<-4<-8<-2<-11<-7<-5<-9<-13

Bfs(13)= {13(0); 9(13),11(13); 5(9), 7(9); 2(11), 8(11); 3(2); 4(8),12(8);1(4),6(4);10(12)}

$\Rightarrow$ Đường đi từ 13 đến 1: 1<-4<-8<-11<13

Ghi chú:

- Độ phức tạp tính toán của thuật toán tìm đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v thuộc G bằng độ phức tạp của DFS(u)/BFS(u) sử dụng cài đặt.
- Đường đi từ u đến v sử dụng BFS là đường đi có ít cạnh nhất.

2.3.3 Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

- **<u>Định nghĩa </u>**: Một đồ thị vô hướng *liên thông* $\Leftrightarrow$ có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ.
- Đồ thị vô hướng G không liên thông là hợp các đồ thị con liên thông, không có đỉnh chung gọi là các *thành phần liên thông* của G.
- Đồ thị vô hướng G *liên thông* $\Leftrightarrow$ số *thành phần liên thông* của G là 1.

Thuật toán kiểm tra tính liên thông của đồ thị vô hướng

- **Input**: Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm n đỉnh và m cạnh;
- **Output:** Giá trị 1 nếu G liên thông, giá trị 0 nếu G không liên thông;

Mô Tả thuật toán

<u>Thuật toán</u>: Kiểm tra tính liên thông của đồ thị vô hướng;

Bước 1: Thực hiện Dfs(1)/Bfs(1);.

Bước 2: Tính số lượng k các đỉnh được duyệt;

Bước 3: Nếu k= n xuất 1; nếu k < n xuất 0.

Cài đặt

<u>Cài đặt 1:</u> Sử dụng DFS

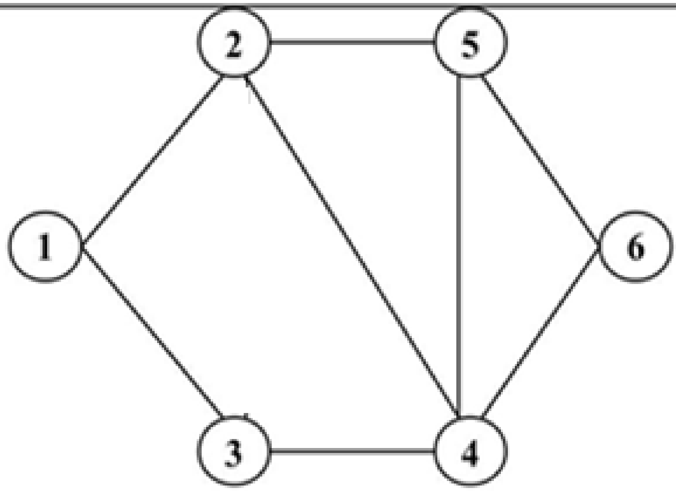
```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int a[100][100], vs[100], n;
int  ltDfs() {int v;
  for (v= 1; v<= n; v++) vs[v]= 0;
  DfsDequy(1);
      for (v= 1; v<= n; v++) if (vs[v]== 0) return(0);
        return(1);
}
```

Cài đặt

<u>Cài đặt 2:</u> Sử dụng BFS

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int a[100][100], vs[100], n;
int  ltBfs() {int v;
  for (v= 1; v<= n; v++) vs[v]= 0;
  Bfs(1);
      for (v= 1; v<= n; v++) if (vs[v]== 0) return(0);
    return(1);
}
```

Ví dụ 14: Tính liên thông của G vô hướng



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- **Cách 1**: Dfs(1)= {1(0); 2(1); 4(2); 3(4); 5(4); 6(5)} = V $\Rightarrow$ G liên thông
- **Cách 2**: Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1); 4(2), 5(2); 6(4)} = V $\Rightarrow$ G liên thông

Thành phần liên thông của đồ thị vô hướng

- **Input**: Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm n đỉnh và m cạnh;
- **Output:**

- Số k các thành phần liên thông của G;
- Số thứ tự của thành phần liên thông chứa u của mọi đỉnh u;

Mô tả thuật toán

Thuật toán: Tìm các thành phần liên thông của đồ thị vô hướng;

Bước khởi tạo: k= 0; lt[u]= 0 với mọi đỉnh u;

Bước 1: Nếu mọi đỉnh u đều có lt[u] > 0 thì chuyển bước 3, ngược lại chọn đỉnh u có lt[u] = 0;

Bước 2: k= k + 1, thực hiện Dfs(u)/Bfs(u) và gán cho các đỉnh i được duyệt tới lt[i]= k (thay vs[] bởi lt[]); quay lại bước 1;

Bước 3: Xuất k và lt[u] với mọi đỉnh u;

Cài đặt thuật toán

Cài đặt 1: Sử dụng DFS

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int a[100][100], lt[100], n;
int tpltDfs(){int u, int  k= 0;
   for (u= 1; u<= n; u++) lt[u]= 0;
   for (u= 1; u<= n; u++) if (lt[u] == 0) {
          k++; DfsDequy(u); }
  return(k);
   }
```

Cài đặt thuật toán

<u>Cài đặt 2:</u> Sử dụng BFS

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int a[100][100], lt[100], n, dq, cq, q[100];
int tpltBfs(){int u, int  k= 0;
   for (u= 1; u<= n; u++) lt[u]= 0;
   for (u= 1; u<= n; u++) if (lt[u] == 0) {
          k++; Bfs(u); }
  return(k);
   }
```

Ví dụ 15: Tìm số thành phần liên thông của G vô hướng cho bởi danh sách kề

Ke(1) = { 6, 7}   Ke(2) = {8, 9, 10}   Ke(3) = {4}   Ke(4) = {3}   Ke(5) = {}

Ke(6) = {1, 7}   Ke(7) = {1, 6}   Ke(8) = {2, 10}   Ke(9) = {2, 10}   Ke(10) = {2, 8, 9}

- **Sử dụng DFS:**

Dfs(1)= {1(0); 6(1); 7(6)}; Dfs(2)= {2(0); 8(2); 10(8); 9(10)}

Dfs(3)= {3(0); 4(3)}; Dfs(5)= {5(0)}

$\Rightarrow$ Số thành phần liên thông k= 4;

Thành phần liên thông 1= { 1, 6, 7};

Thành phần liên thông 2= {2, 8, 9, 10};

Thành phần liên thông 3= {3, 4};

Thành phần liên thông 4= {5};

Ví dụ 15: Sử dụng BFS

Ke(1) = { 6, 7} Ke(2) = {8, 9, 10} Ke(3) = {4} Ke(4) = {3} Ke(5) = {}

Ke(6) = {1, 7} Ke(7) = {1, 6} Ke(8) = {2, 10} Ke(9) = {2, 10} Ke(10) = {2, 8, 9}

- **Sử dụng BFS:**

Bfs(1)= {1(0); 6(1), 7(1)}; Bfs(2)= {2(0); 8(2), 9(2), 10(2)}

Bfs(3)= {3(0); 4(3)} ; Bfs(5)= {5(0)}

$\Rightarrow$ Số thành phần liên thông k= 4;

Thành phần liên thông 1 = { 1, 6, 7};

Thành phần liên thông 2 = {2, 8, 9, 10};

Thành phần liên thông 3 = {3, 4};

Thành phần liên thông 4 = {5};

2.3.4 Đỉnh trụ và cạnh cầu trong đồ thị vô hướng

- *Đỉnh u$\in$ G vô hướng là* *đỉnh trụ* *(đỉnh cắt* hay *đỉnh khớp)* $\Leftrightarrow$ xóa u và các cạnh liên thuộc sẽ tạo ra một đồ thị mới G\{u} có nhiều thành phần liên thông hơn G.
- *Cạnh e= (u,v) $\in$ G là* *cạnh cầu* *(hay cạnh cắt)* $\Leftrightarrow$ xóa e sẽ được đồ thị mới G\{e} có nhiều thành phần liên thông hơn G.

Tìm các đỉnh trụ của đồ thị vô hướng

- **Input**: Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm n đỉnh và m cạnh;
- **Output:** Các đỉnh trụ của G;

Mô tả thuật toán

Thuật toán: ***Tìm đỉnh trụ của đồ thị vô hướng G***;

Bước 1: Tìm số k thành phần liên thông của G;

Bước 2: Xét mọi đỉnh u $\in$ G:

2.1: Bỏ u và các cạnh liên thuộc u và tính số thành phần liên thông l của đồ thị G\{u};

2.2: Nếu l > k thì ghi nhận u là đỉnh trụ;

2.3: Trả lại u và các cạnh liên thuộc u;

Bước 3: Xuất danh sách các đỉnh trụ;

Cài đặt thuật toán

- Sinh viên tự cài đặt xem như bài tập

Ví dụ 16: Tìm đỉnh trụ của G vô hướng cho bởi danh sách kề

$Ke(1)=\{2,3,4\}\ Ke(2)=\{1,3\}\ Ke(3)=\{1,2\}\ Ke(4)=\{1,5,6\}\ Ke(5)=\{4,6\}\ Ke(6)=\{4,5\}$

- **Sử dụng DFS:**

Số đỉnh n = 6

Dfs(1)= {1(0); 2(1); 3(2); 4(1); 5(4); 6(5)}

⇒ Số thành phần liên thông của G: k = 1.

Ví dụ 16: Tìm đỉnh trụ với DFS

$$Ke(1)=\{2,3,4\}\ \ Ke(2)=\{1,3\}\ Ke(3)=\{1,2\}\ Ke(4)=\{1,5,6\}\ Ke(5)=\{4,6\}\ Ke(6)=\{4,5\}$$

Lập bảng:

Đỉnh u	Số thành phần liên thông của G\{u}	l> k?	Đỉnh trụ
1	Dfs(2)= {2(0);3(2)}, Dfs(4)= {4(0);5(4);6(5)} $\Rightarrow$ l = 2	Yes	1
2	Dfs(1)= {1(0);3(1);4(1);5(4);6(5)} $\Rightarrow$ l = 1	No	-
3	Dfs(1)= {1(0);2(1);4(1);5(4);6(5)} $\Rightarrow$ l = 1	No	-
4	Dfs(1)= {1(0);2(1);3(2}, Dfs(5)= {5(0);6(5)} $\Rightarrow$ l = 2	Yes	4
5	Dfs(1)= {1(0);2(1);3(2);4(1);6(4)} $\Rightarrow$ l = 1	No	-
6	Dfs(1)= {1(0);2(1);3(2);4(1);5(4)} $\Rightarrow$ l = 1	No	-

Kết luận: G có 2 đỉnh trụ là 1 và 4.

Tìm các cạnh cầu của đồ thị vô hướng

- **Input**: Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm n đỉnh và m cạnh;
- **Output:** Các cạnh cầu của G;

Mô tả thuật toán

<u>Thuật toán:</u> ***Tìm cạnh cầu của đồ thị vô hướng G;***

Bước 1: Tìm số k thành phần liên thông của G;

Bước 2: Xét mọi cạnh e $\in$ G:

2.1: Bỏ cạnh e = (u,v) (các đỉnh u và v vẫn giữ lại) và tính số thành phần liên thông l của đồ thị G\{e};

2.2: Nếu l > k thì ghi nhận e là cạnh cầu;

2.3: Trả lại e ;

Bước 3: Xuất danh sách các cạnh cầu;

Cài đặt thuật toán

- Sinh viên tự cài đặt xem như bài tập

Ví dụ 17: Tìm cạnh cầu của G vô hướng cho bởi danh sách kề

$Ke(1) = \{2, 3, 4\}$ $Ke(2) = \{1, 3\}$ $Ke(3) = \{1, 2\}$ $Ke(4) = \{1, 5, 6\}$ $Ke(5) = \{4, 6\}$ $Ke(6) = \{4, 5\}$

- **Sử dụng BFS:**

Số đỉnh n = 6

Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1), 4(1); 5(4), 6(4)}

$\Rightarrow$ Số thành phần liên thông của G: k = 1.

Ví dụ 17: Tìm cạnh cầu với BFS

$$Ke(1)=\{2,3,4\}\quad Ke(2)=\{1,3\}\quad Ke(3)=\{1,2\}\quad Ke(4)=\{1,5,6\}\quad Ke(5)=\{4,6\}\quad Ke(6)=\{4,5\}$$

Lập bảng:

cạnh e	Số thành phần liên thông của G\{e}	l> k?	Cạnh cầu
(1,2)	Bfs(1)= {1(0); 3(1), 4(1); 2(3); 5(4), 6(4)} ⇒ l= 1	No	
(1,3)	Bfs(1)= {1(0); 2(1), 4(1); 3(2); 5(4), 6(4)} ⇒ l= 1	No	
(1,4)	Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1)}, Bfs(4)= {4(0); 5(4), 6(4)} ⇒ l= 2	Yes	(1,4)
(2,3)	Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1), 4(1); 5(4), 6(4)} ⇒ l= 1	No	
(4,5)	Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1), 4(1); 6(4); 5(6)} ⇒ l= 1	No	
(4,6)	Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1), 4(1); 5(4); 6(5)} ⇒ l= 1	No	
(5,6)	Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1), 4(1); 5(4), 6(4)} ⇒ l= 1	No	

Kết luận: G có 1 cạnh cầu là (1,4).

Ghi chú

- Khi kiểm tra đỉnh u có phải là đỉnh trụ cần xét đồ thị G\{u} không chứa đỉnh u.
- Khi kiểm tra cạnh e= (u, v) có phải là cạnh cầu cần xét đồ thị G\{e} không chứa cạnh e những vẫn bao gồm cả hai đỉnh u và v.

2.3.5 Tính liên thông trong đồ thị có hướng

Định nghĩa.

- Đồ thị có hướng G là *liên thông mạnh* $\Leftrightarrow$ có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ u, v $\in$ G.

- Đồ thị có hướng G là *liên thông yếu* $\Leftrightarrow$ đồ thị vô hướng nền là liên thông

$\Rightarrow$ đồ thị liên thông mạnh thì cũng liên thông yếu.

- Đồ thị có hướng G không liên thông mạnh là hợp các đồ thị con có hướng liên thông mạnh, không có đỉnh chung gọi là các *thành phần liên thông mạnh* của G.

Kiểm tra tính liên thông của đồ thị có hướng

- **Input**: Đồ thị có hướng G = (V, E) gồm n đỉnh và m cạnh;
- **Output:** Giá trị 1 nếu G liên thông mạnh, giá trị 2 nếu G không liên thông mạnh nhưng liên thông yếu, giá trị 0 trong trường hợp còn lại;

Mô tả thuật toán

- Thuật toán: ***Kiểm tra tính liên thông của đồ thị có hướng***

Bước khởi tạo: i = 1;

Bước 1: Thực hiện Dfs(i)/Bfs(i) và Tính số k các đỉnh đã duyệt;

Bước 2: Nếu k < n chuyển bước 4; nếu k = n thì chuyển bước 3;

Bước 3: Nếu i=n xuất 1, nếu i< n thì i= i+1 và quay lại bước 1;

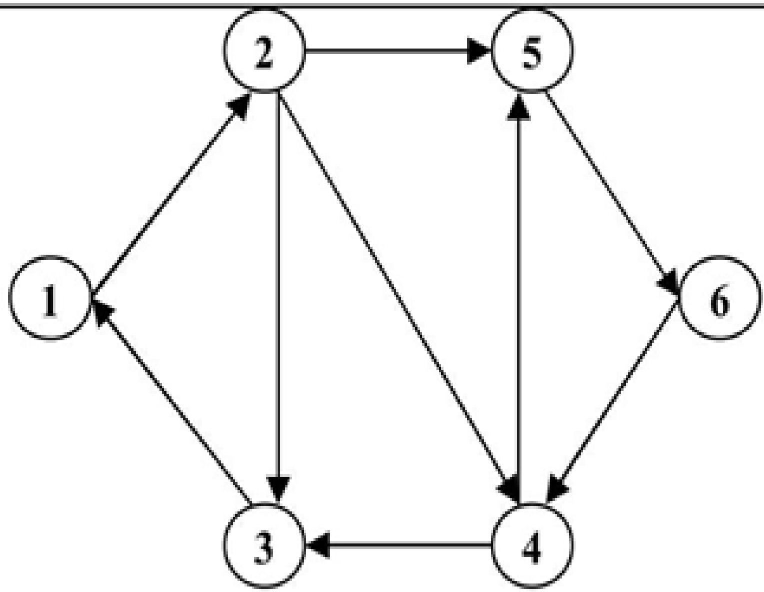
Bước 4: Thực hiện Dfs(1)/Bfs(1) khi coi các cạnh của đồ thị là vô hướng và Tính số k các đỉnh đã duyệt;

Bước 5: Nếu k < n xuất 0; nếu k = n thì xuất 2;

Cài đặt thuật toán

- Sinh viên tự cài đặt xem như bài tập

Ví dụ 18: Kiểm tra tính liên thông của đồ thị có hướng dạng ma trận kề



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Số đỉnh của G là n = 6.

Ví dụ 18: Sử dụng DFS

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dfs(1)= {1(0); 2(1); 3(2); 4(2); 5(4); 6(5)} = V

Dfs(2)= {2(0); 3(2); 1(3); 4(2); 5(4); 6(5)} = V

Dfs(3)= {3(0); 1(3); 2(1); 4(2); 5(4); 6(5)} = V

Dfs(4)= {4(0); 3(4); 1(3); 2(1); 5(2); 6(5)} = V

Dfs(5)= {5(0); 6(5); 4(6); 3(4); 1(3); 2(1)} = V

Dfs(6)= {6(0); 4(6); 3(4); 1(3); 2(1); 5(2)} = V

Kết luận: G là liên thông mạnh

Ví dụ 18: Sử dụng BFS

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Bfs(1)= {1(0); 2(1); 3(2), 4(2), 5(2); 6(5)} = V

Bfs(2)= {2(0); 3(2), 4(2), 5(2); 1(3); 6(5)} = V

Bfs(3)= {3(0); 1(3); 2(1); 4(2), 5(2); 6(5)} = V

Bfs(4)= {4(0); 3(4), 5(4); 1(3); 2(1); 6(5)} = V

Bfs(5)= {5(0); 6(5); 4(6); 3(4); 1(3); 2(1)} = V

Bfs(6)= {6(0); 4(6); 3(4), 5(4); 1(3); 2(1)} = V

Kết luận: G là liên thông mạnh

Ví dụ 19: Kiểm tra tính liên thông của đồ thị có hướng cho bởi danh sách kề

Ke(1) = { 6, 7}   Ke(2) = {8, 9}   Ke(3) = {4}   Ke(4) = {5}   Ke(5) = {3}
Ke(6) = {7}   Ke(7) = {1}   Ke(8) = {10}   Ke(9) = {10}   Ke(10) = {2}

- **Sử dụng DFS:**

Dfs(1)= {1(0); 6(1); 7(6)} ≠ V

Xét đồ thị vô hướng nền của G: Dfs(1)= {1(0); 6(1); 7(6)} ≠ V

Kết luận: G không liên thông mạnh, không liên thông yếu.

- **Sử dụng BFS:**

Bfs(1)= {1(0); 6(1), 7(1)} ≠ V

Xét đồ thị vô hướng nền của G: Bfs(1)= {1(0); 6(1), 7(1)} ≠ V

Kết luận: G không liên thông mạnh, không liên thông yếu.

Tìm các thành phần liên thông mạnh của đồ thị có hướng

- **Input**: Đồ thị có hướng G = (V, E) gồm n đỉnh và m cạnh;
- **Output:**

- Số k các thành phần liên thông mạnh của G;

- Số thứ tự của thành phần liên thông chứa u của mọi đỉnh u;

Mô tả thuật toán

Thuật toán: ***Tìm các thành phần liên thông mạnh của đồ thị có hướng***

Bước khởi tạo: k= 0; lt[u]= 0 với mọi đỉnh u;

Bước 1: Thực hiện DFS(u)/BFS(u) với mọi u $\in$ G và đánh dấu vs[u][v]=1 với mỗi v được duyệt đến;

Bước 2: Nếu mọi đỉnh u đều có lt[u] > 0 thì chuyển bước 4, ngược lại chọn đỉnh u có lt[u] = 0;

Bước 3: k= k + 1, lt[u]= k và xét tất cả các đỉnh v có vs[u][v] = 1, vs[v][u]= 1 và lt[v]= 0 thì lt[v]= k; quay lại bước 2;

Bước 4: Xuất k và lt[u] với mọi đỉnh u;

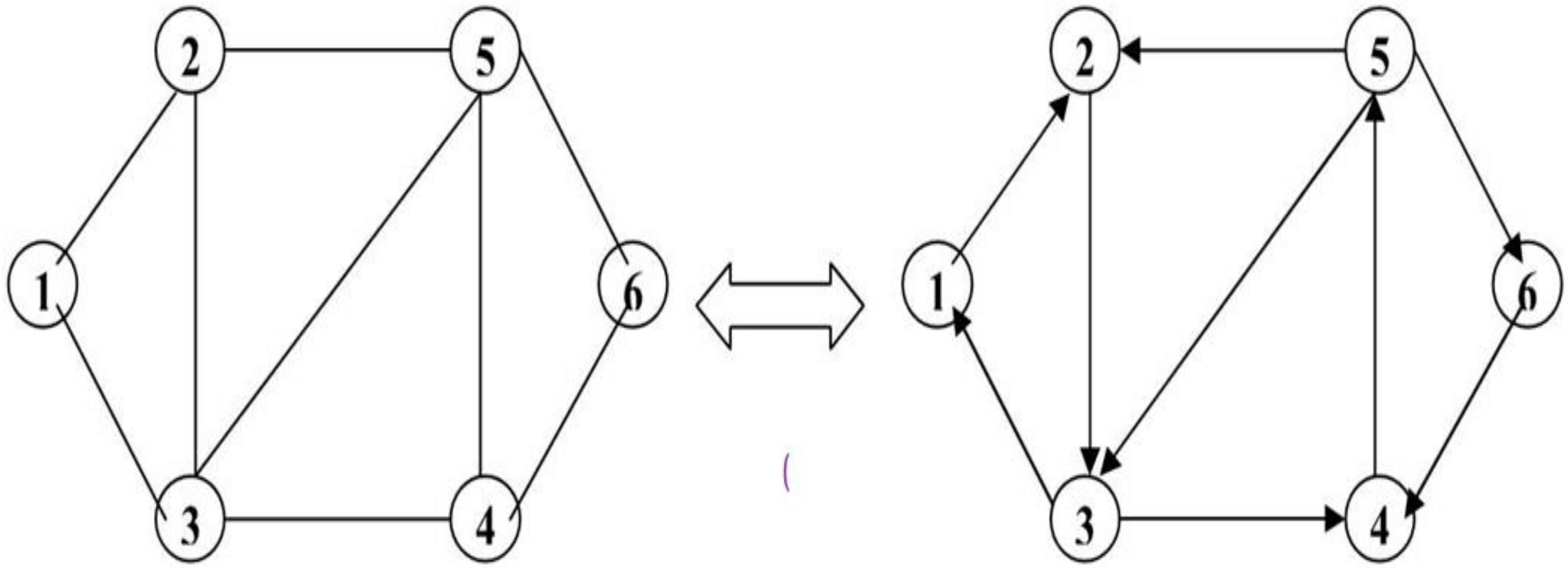
Bài toán định chiều đồ thị vô hướng

- **<u>Định nghĩa</u>**

Phép định chiều đồ thị vô hướng liên thông G là phép biến đổi G thành đồ thị có hướng liên thông mạnh bằng cách định chiều mỗi cạnh vô hướng thành một cung có hướng.

- Đồ thị vô hướng G = (V,E) được gọi là đồ thị định chiều được nếu có thể biến đổi thành đồ thị có hướng liên thông mạnh bằng một phép định chiều.

Ví dụ 20: Định chiều đồ thị vô hướng



Điều kiện để đồ thị vô hướng định chiều được

- **Định lý**

Đồ thị vô hướng G định chiều được $\Leftrightarrow$ G liên thông và không chứa cạnh cầu.

Ghi chú: Một số vấn đề nâng cao

Sinh viên tự tìm hiểu một số vấn đề nâng cao:

- Viết chương trình tìm thành phần liên thông mạnh của đồ thị có hướng G
- Chứng minh một đồ thị vô hướng G là định chiều được
- Viết chương trình kiểm tra định chiều được một đồ thị vô hướng
- Chỉ ra một phép định chiều trên một đồ thị vô hướng

Tổng kết chương 2

- **Về lý thuyết**:

- Hai thuật toán DFS và BFS

- Ứng dụng DFS/BFS giải quyết các bài toán cụ thể

- **Về các dạng bài tập**

- Cài đặt được các hàm mô tả các thuật toán

- Sử dụng DFS/BFS giải các bài toán theo mẫu

Thảo luận


THANK YOU