

GIẢI BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC 2 – CHƯƠNG 3

Câu hỏi 1

Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng ma trận kề như sau

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
6	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
8	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
9	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0

- Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị Euler.
- Tìm một chu trình Euler của đồ thị G đã cho bắt đầu từ đỉnh $u=1$, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán.

Giải

G có $n=10$ đỉnh và $m=16$ cạnh

a) Chứng minh G là đồ thị Euler:

$Bfs(1) = \{1(0); 2(1), 5(1), 8(1), 10(1); 3(2), 4(2), 6(2); 7(5), 9(5)\} = V \Rightarrow G$ liên thông

Tính bậc các đỉnh:

$\deg(1)=4; \deg(2)=4; \deg(3)=2; \deg(4)=2; \deg(5)=6;$

$\deg(6)=2; \deg(7)=4; \deg(8)=4; \deg(9)=2; \deg(10)=4$

Kết luận: G là đồ thị Euler

- Tìm chu trình Euler bắt đầu tại $u=1$:

Lập bảng

Bước	Stack	Cạnh được duyệt	CE
1	1	\emptyset	\emptyset
2	1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 1, 8, 5, 7, 8, 10, 1	(1,2), (2,3), (3,4), (4,2), (2,6), (6,5), (5,1), (1,8), (8,5), (5,7), (7,8), (8,10), (10,1)	
3			1
4	1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 1, 8, 5, 7, 8, 10, 5, 9, 7, 10	(10,5), (5,9), (9,10)	
5	\emptyset		1, 10, 7, 9, 5, 10, 8, 7, 5, 8, 1, 5, 6, 2, 4, 3, 2, 1

Kết luận: Chu trình Euler tìm được: 1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 1, 8, 5, 7, 8, 10, 5, 9, 7, 10, 1

Câu hỏi 2

Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh và 12 cạnh dưới dạng danh sách cạnh như sau:

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối	Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
1	2	5	7
1	3	6	7
2	4	7	8
3	4	7	9
4	5	8	10
4	6	9	10

Lập bảng

Bước	Stack	Cạnh được duyệt	CE
1	7	\emptyset	\emptyset
2	7, 5, 4, 2, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 9, 7	(7,5), (5,4), (4,2), (2,1), (1,3), (3,4), (4,6), (6,7), (7,8), (8,10), (10,9), (9,7)	
3	\emptyset		7, 9, 10, 8, 7, 6, 4, 3, 1, 2, 4, 5, 7

Kết luận: Chu trình Euler tìm được: 7, 5, 4, 2, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 9, 7.

Câu hỏi 3

Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng danh sách kề như sau:

Ke(1) = {2, 4, 9, 10}	Ke(6) = {5, 7, 8, 10}
Ke(2) = {1, 3, 4, 9}	Ke(7) = {6, 8}
Ke(3) = {2, 4}	Ke(8) = {6, 7}
Ke(4) = {1, 2, 3, 5}	Ke(9) = {1, 2}
Ke(5) = {4, 6}	Ke(10) = {1, 6}

- Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị Euler.
- Tìm một chu trình Euler của đồ thị G đã cho bắt đầu từ đỉnh $u=10$, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán

Câu hỏi 4

Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như sau

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
6	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0

- Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị nửa Euler.
- Tìm một đường đi Euler của đồ thị G đã cho, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán

Câu hỏi 5

Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh và 14 cạnh dưới dạng danh sách cạnh như sau:

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối	Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
1	3	3	7
1	7	4	6
1	9	4	8
1	10	5	6
2	3	5	9
2	7	6	8
3	5	6	10

- Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị nửa Euler.
- Tìm một đường đi Euler của đồ thị G đã cho, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán.

Giải

G có $n = 10$ đỉnh và $m = 14$ cạnh

a) Chứng minh G là đồ thị nửa Euler:

$Dfs(1) = \{1(0); 3(1); 2(3); 7(2); 5(3); 6(5); 4(6); 8(4); 10(6); 9(5)\} = V \Rightarrow G$ liên thông

Tính bậc các đỉnh:

$deg(1) = 4; deg(2) = 2; deg(3) = 4; deg(4) = 2; deg(5) = 3;$

$deg(6) = 4; deg(7) = 3; deg(8) = 2; deg(9) = 2; deg(10) = 2 \Rightarrow$ Đồ thị có hai đỉnh bậc lẻ: 5 và 7

Kết luận: G là đồ thị nửa Euler

b) Tìm đường đi Euler bắt đầu tại $u = 5$:

Lập bảng

Bước	Stack	Cạnh được duyệt	CE
1	5	\emptyset	\emptyset
2	5, 3, 1, 7, 2, 3, 7	(3,3), (3,1), (1,7), (7,2), (2,3), (3,7)	
3			7, 3, 2, 7
4	5, 3, 1, 9, 5, 6, 4, 8, 6, 10, 1	(1,9), (9,5), (5,6), (6,4), (4,8), (8,6), (6,10), (10,1)	

5	\emptyset		7, 3, 2, 7, 1, 10, 6, 8, 4, 6, 5, 9, 1, 3, 5
---	-------------	--	---

Kết luận: Đường đi Euler tìm được: 5, 3, 1, 9, 5, 6, 4, 8, 6, 10, 1, 7, 2, 3, 7

Câu hỏi 6

Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng danh sách kề như sau:

Ke(1) = {2, 3, 10}	Ke(6) = {4, 7}
Ke(2) = {1, 4}	Ke (7) = {5, 6, 8, 9}
Ke(3) = {1, 4}	Ke (8) = {7, 10}
Ke(4) = {2, 3, 5, 6}	Ke (9) = {7, 10}
Ke (5) = {4, 7}	Ke (10)= {1, 8, 9}

b) Tìm đường đi Euler bắt đầu tại $u = 1$:

Lập bảng

Bước	Stack	Cạnh được duyệt	CE
1	1	\emptyset	\emptyset
2	1, 2, 4, 3, 1, 10, 8, 7, 5, 4, 6, 7, 9, 10	(1,2), (2,4), (4,3), (3,1), (1,10), (10,8), (8,7), (7,5), (5,4), (4,6), (6,7), (7,9), (9,10)	
3	\emptyset		10, 9, 7, 6, 4, 5, 7, 8, 10, 1, 3, 4, 2, 1

Kết luận: Đường đi Euler tìm được: 1, 2, 4, 3, 1, 10, 8, 7, 5, 4, 6, 7, 9, 10

Câu hỏi 7

Cho đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng ma trận kề như sau

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

- a) Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị Euler.
 b) Tìm một chu trình Euler của đồ thị G đã cho bắt đầu từ đỉnh $u=5$, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán.

Giải

G có $n=10$ đỉnh và $m=16$ cạnh

a) Chứng minh G là đồ thị Euler:

Xét đồ thị vô hướng nền của G :

$Bfs(1) = \{1(0); 2(1), 3(1), 8(1), 10(1); 4(2), 5(2); 9(3); 6(8), 7(8)\} = V \Rightarrow G$ liên thông yếu.

Tính bán bậc các đỉnh:

$\deg^-(1) = 2 = \deg^+(1)$; $\deg^-(2) = 3 = \deg^+(2)$; $\deg^-(3) = 2 = \deg^+(3)$; $\deg^-(4) = 2 = \deg^+(4)$;

$\deg^-(5) = 1 = \deg^+(5)$; $\deg^-(6) = 2 = \deg^+(6)$; $\deg^-(7) = 2 = \deg^+(7)$; $\deg^-(8) = 2 = \deg^+(8)$;

$\deg^-(9) = 1 = \deg^+(9)$; $\deg^-(10) = 2 = \deg^+(10)$

Kết luận: G là đồ thị Euler

- b) Tìm chu trình Euler bắt đầu tại $u=5$:

Lập bảng

Bước	Stack	Cạnh được duyệt	CE
1	5	\emptyset	\emptyset
2			
3			
4			
5	\emptyset		

Kết luận: Chu trình Euler tìm được:

Câu hỏi 8

Cho đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh và 14 cạnh dưới dạng danh sách cạnh như sau:

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối	Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
1	2	5	8
1	5	6	7
2	3	7	1
2	4	7	2
3	4	8	9
4	6	9	10

4	7	10	1
---	---	----	---

- a) Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị Euler.
- b) Tìm một chu trình Euler của đồ thị G đã cho bắt đầu từ đỉnh $u=7$, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán

Câu hỏi 9

Cho đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng danh sách kề như sau:

Ke(1) = {4, 10}	Ke (6) = {3, 9}
Ke(2) = {5, 6, 7}	Ke (7) = {8}
Ke(3) = {1}	Ke (8) = {9}
Ke(4) = {2}	Ke(9) = {2, 1}
Ke (5) = {6}	Ke(10) = {2}

- a) Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị Euler.
 b) Tìm một chu trình Euler của đồ thị G đã cho bắt đầu từ đỉnh $u=7$, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán

Giải

G có $n=10$ đỉnh và $m=15$ cạnh

a) Chứng minh G là đồ thị Euler:

Xét đồ thị vô hướng nền của G :

$Bfs(1) = \{1(0); 3(1), 4(1), 9(1), 10(1); 6(3); 2(4); 8(9); 5(6); 7(2)\} = V \Rightarrow G$ liên thông yếu

Tính bán bậc các đỉnh:

$deg-(1) = 2 = deg+(1); deg-(2) = 3 = deg+(2); deg-(3) = 1 = deg+(3); deg-(4) = 1 = deg+(4); deg-(5) = 1 = deg+(5); deg-(6) = 2 = deg+(6); deg-(7) = 1 = deg+(7); deg-(8) = 1 = deg+(8); deg-(9) = 1 = deg+(9); deg-(10) = 1 = deg+(10)$

Kết luận: G là đồ thị Euler

- b) Tìm chu trình Euler bắt đầu tại $u=7$:

Lập bảng

Bước	Stack	Cạnh được duyệt	CE
1	7	\emptyset	\emptyset
2	7, 8, 9, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 2, 6, 9, 1, 10, 2, 7	(7,8), (8,9), (9,2), (2,5), (5,6), (6,3), (3,1), (1,4), (4,2), (2,6), (6,9), (9,1), (1,10), (10,2), (2,7);	
3	\emptyset		7, 2, 10, 1, 9, 6, 2, 4, 1, 3, 6, 5, 2, 9, 8, 7

Kết luận: Chu trình Euler tìm được: 7, 8, 9, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 2, 6, 9, 1, 10, 2, 7

Câu hỏi 10

Cho đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng ma trận kề như sau

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị nửa Euler.
- Tìm một đường đi Euler của đồ thị G đã cho, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán.

Giải

G có $n = 10$ đỉnh và $m = 17$ cạnh

a) Chứng minh G là đồ thị nửa Euler:

Xét đồ thị vô hướng nền của G :

$Bfs(1) = \{1(0); 2(1), 5(1), 8(1), 10(1); 3(2), 4(2), 6(2), 9(2); 7(8)\} = V \Rightarrow G$ liên thông yếu

Tính bán bậc các đỉnh:

$\deg^-(1) = 2 = \deg^+(1)$; $\deg^-(2) = 2, \deg^+(2) = 3$; $\deg^-(3) = 1 = \deg^+(3)$; $\deg^-(4) = 2 = \deg^+(4)$; $\deg^-(5) = 2 = \deg^+(5)$; $\deg^-(6) = 2 = \deg^+(6)$; $\deg^-(7) = 2 = \deg^+(7)$; $\deg^-(8) = 2, \deg^+(8) = 1$; $\deg^-(9) = 1 = \deg^+(9)$; $\deg^-(10) = 1 = \deg^+(10) \Rightarrow$ Có hai đỉnh 2 và 7 có bán bậc vào và ra 1 đơn vị.

Kết luận: G là đồ thị Euler

- Tìm đường đi Euler bắt đầu tại $u = 2$:

Lập bảng

Bước	Stack	Cạnh được duyệt	CE
1	7	\emptyset	\emptyset
2	2, 3, 4, 6, 5, 8, 1, 2, 4, 7, 8	(2,3), (3,4), (4,6), (6,5), (5,8), (8,1), (1,2), (2,4), (4,7), (7,8)	
3			8
4	2, 3, 4, 6, 5, 8, 1, 2, 4, 7, 10, 1, 5, 9, 2, 6, 7	(7,10), (10,1), (1,5), (5,9), (9,2), (2,6), (6,7)	
3	\emptyset		8, 6, 2, 9, 5, 1, 10, 7, 4, 2, 1, 8, 5, 6, 4, 3, 2

Kết luận: Chu trình Euler tìm được: 2, 3, 4, 6, 5, 8, 1, 2, 4, 7, 10, 1, 5, 9, 2, 6, 7, 8

Câu hỏi 11

Cho đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh và 16 cạnh dưới dạng danh sách cạnh như sau:

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối	Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
1	2	5	9
1	10	6	7
2	3	6	8
2	4	7	2
3	4	7	8
3	6	8	5
4	6	9	10
4	7	10	1

- Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị nửa Euler.
- Tìm một đường đi Euler của đồ thị G đã cho, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán.

Câu hỏi 12

Cho đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng danh sách kề như sau:

Ke(1) = {4, 8}	Ke (6) = {4}
Ke(2) = {3, 5, 6}	Ke (7) = {8}
Ke(3) = {1}	Ke (8) = {2}
Ke(4) = {2, 10}	Ke(9) = {7}
Ke (5) = {1}	Ke(10) = {9}

- Chứng minh đồ thị G đã cho là đồ thị nửa Euler.
- Tìm một đường đi Euler của đồ thị G đã cho, chỉ rõ kết quả tại mỗi bước thực hiện theo thuật toán.

Câu hỏi 13

Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng ma trận kề như sau:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
4	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
7	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
8	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
9	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Sử dụng thuật toán quay lui tìm một chu trình Hamilton của đồ thị G đã cho bắt đầu từ đỉnh 1, khi có nhiều khả năng lựa chọn các đỉnh luôn ưu tiên chọn đỉnh có chỉ số nhỏ nhất và giải thích các bước thực hiện theo cây tìm kiếm.

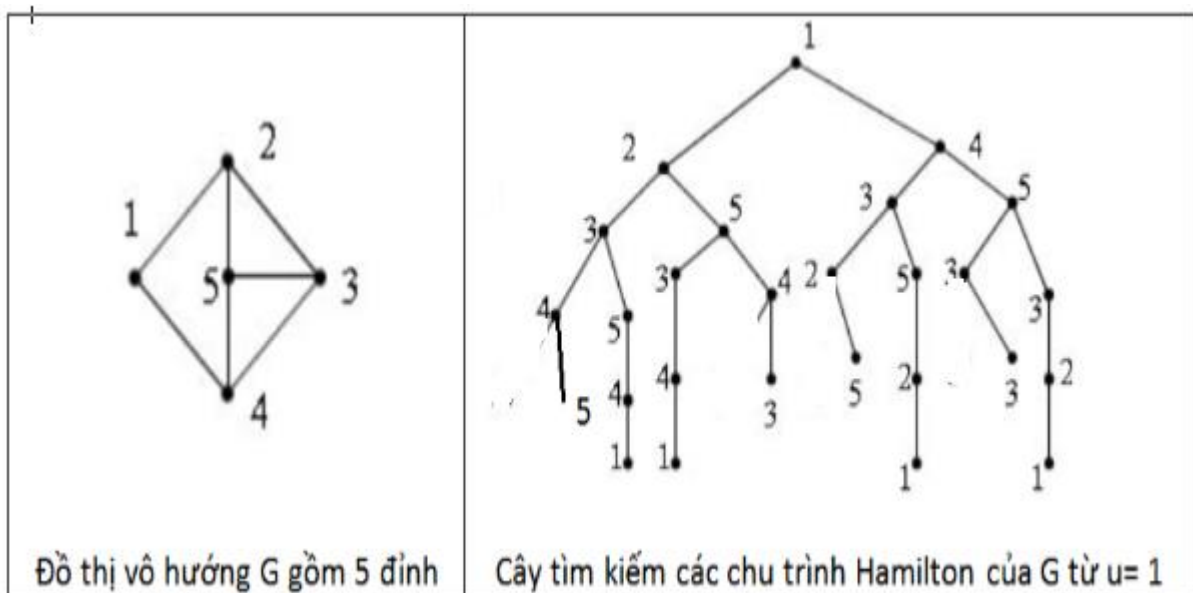
Giải

Số đỉnh của đồ thị $n = 10$.

Lập bảng:

Bước	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	x[8]	x[9]	x[10]	(x[10], x[1]) ∈ E?
1	1	2	3	4	5	6	7	9	8	10	No
2	1	2	3	4	5	6	7	9	10	8	No
3	1	2	3	4	5	6	10	8	9	7	Yes

Kết luận: Chu trình Hamilton tìm được: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 8, 9, 7, 1



Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 5 đỉnh dưới dạng ma trận kề như sau:

```
graph LR; 1 --- 2; 1 --- 5; 2 --- 3; 2 --- 5; 3 --- 4; 3 --- 5; 4 --- 5; 5 --- 1;
```

Đồ thị vô hướng G gồm 5 đỉnh

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	1	1	1	0

Lập bảng:

Bước	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	$(x[5], x[1]) \in E?$
1	1	2	3	4	5	No
2	1	2	3	5	4	Yes
3	1	2	5	3	4	Yes
4	1	2	5	4	3	No
5	1	4	3	2	5	No
6	1	4	3	5	2	Yes
7	1	4	5	2	3	No
8	1	4	5	3	2	Yes

Kết luận: Chu trình Hamilton tìm được: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 8, 9, 7, 1

Lập bảng:

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	1	1	1	0

Sử dụng thuật toán quay lui tìm một chu trình Hamilton của đồ thị G đã cho bắt đầu từ đỉnh 1, khi có nhiều khả năng lựa chọn các đỉnh luôn ưu tiên chọn đỉnh có chỉ số nhỏ nhất và giải thích các bước thực hiện theo cây tìm kiếm.

Câu hỏi 14

Cho đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ gồm 10 đỉnh dưới dạng ma trận kề như sau:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
5	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Sử dụng thuật toán quay lui tìm một chu trình Hamilton của đồ thị G đã cho bắt đầu từ đỉnh 1, khi có nhiều khả năng lựa chọn các đỉnh luôn ưu tiên chọn đỉnh có chỉ số nhỏ nhất và giải thích các bước thực hiện theo cây tìm kiếm.