TOÁN RỜI RẠC 2

CHƯƠNG 1

Giảng viên: Vũ Văn Thỏa

- Định nghĩa đồ thị
- Những thuật ngữ cơ bản
- Biểu diễn đồ thị trên máy tính

1.1 Định nghĩa đồ thị

- **Khái niệm đồ thị**
- **Đồ thị vô hướng**
- **Đồ thị có hướng**

1.1.1 Khái niệm đồ thị

- Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó, ký hiệu G = (V, E), trong đó $V \neq \emptyset$ là tập hợp các đỉnh (Vertex), E là tập con của VxV là tập hợp các cạnh (Edge).
- Các đỉnh được biểu diễn bởi các điểm và đánh số từ 1 đến n.
- Các cạnh được biểu diễn bởi các đoạn thẳng hoặc cung nối các đỉnh và đánh số từ 1 đến m.

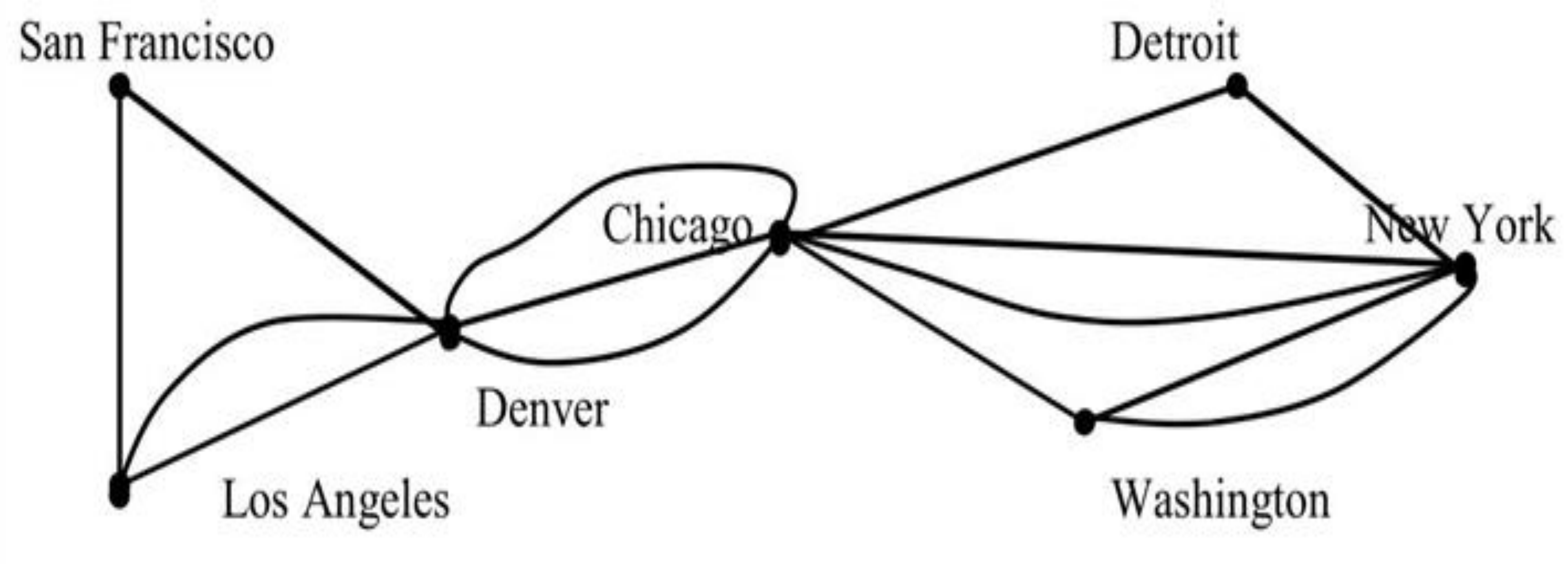
Đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng

- Nếu các cạnh không kể hướng $\Rightarrow$ đồ thị vô hướng.

- Nếu các cạnh có hướng $\Rightarrow$ đồ thị có hướng.

Mô hình đồ thị trong thực tế

- Mạng lưới giao thông đường bộ, mạng thông tin, …



Mô hình đồ thị trong thực tế

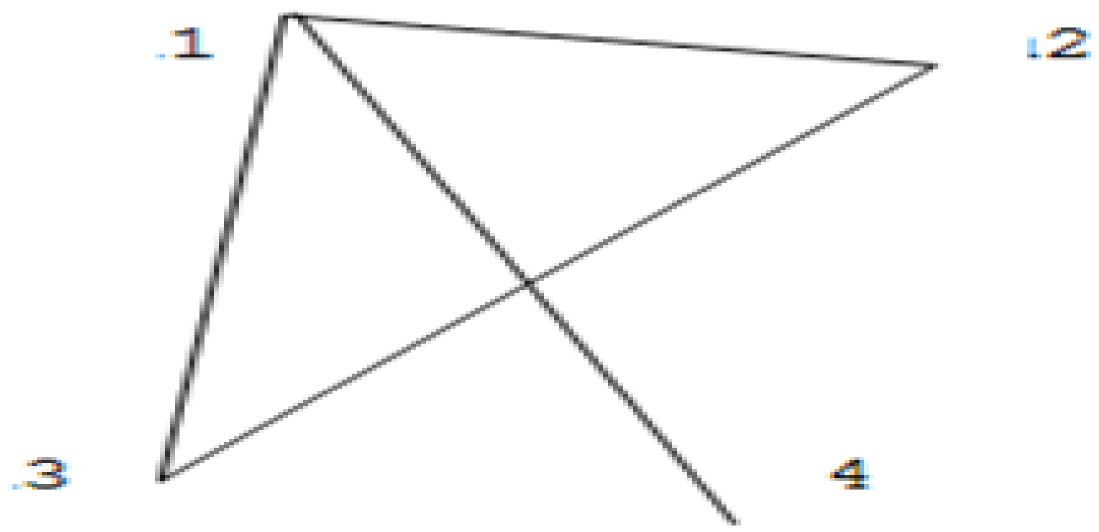
- Sơ đồ tổ chức của cơ quan, ….
- Trong công nghệ thông tin, đồ thị là một cấu trúc dữ liệu với:
- Tập đỉnh V là tập các dữ liệu D
- Tập cạnh E là tập các quan hệ giữa các dữ liệu.

1.1.2 Đồ thị vô hướng

- Đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ gồm $V \neq \varnothing$ các đỉnh và một tập E các cạnh là những cặp không thứ tự của các đỉnh phân biệt.
- Đơn đồ thị vô hướng là đồ thị có không quá 1 cạnh nối hai đỉnh khác nhau và không có cạnh nối một đỉnh đến chính nó.
- Đơn đồ thị vô hướng được gọi ngắn gọn là đồ thị vô hướng.

Ví dụ 1: *Đơn đồ thị vô hướng*

Đơn đồ thị vô hướng gồm 4 đỉnh V = {1, 2, 3, 4} và 4 cạnh E= {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3)}.

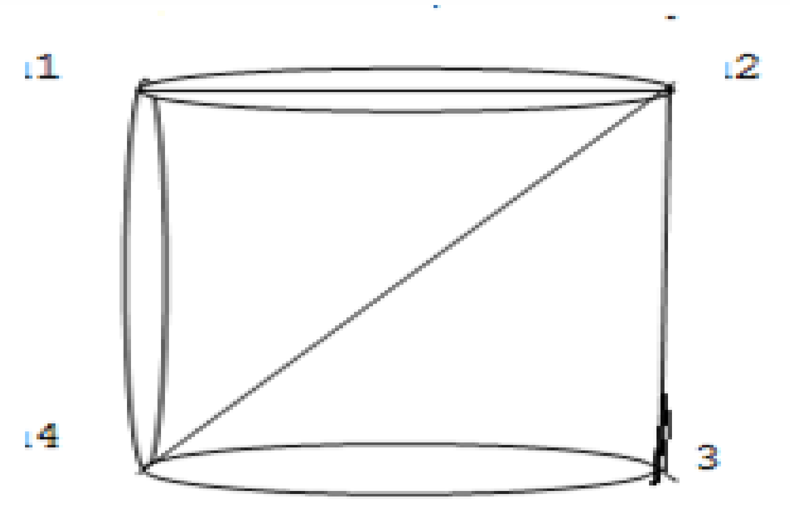


Đa đồ thị vô hướng

- Đa *đồ thị* vô hướng G = (V, E) gồm tập đỉnh $V \neq \emptyset$, tập cạnh E và hàm f từ E tới tập $\{(u,v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Hai cạnh e_1 và e_2 gọi là song song hay cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.
- Đa *đồ thị* vô hướng là đồ thị có quá 1 cạnh nối hai đỉnh khác nhau và không có cạnh nối một đỉnh với chính nó.

<u>Ví dụ 2</u>: *Đa đồ thị vô hướng*

Đa đồ thị vô hướng gồm 4 đỉnh V = {1, 2, 3, 4} và 9 cạnh E= {(1,2), (1,2), (1,2), (1,4), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (3,4)}.

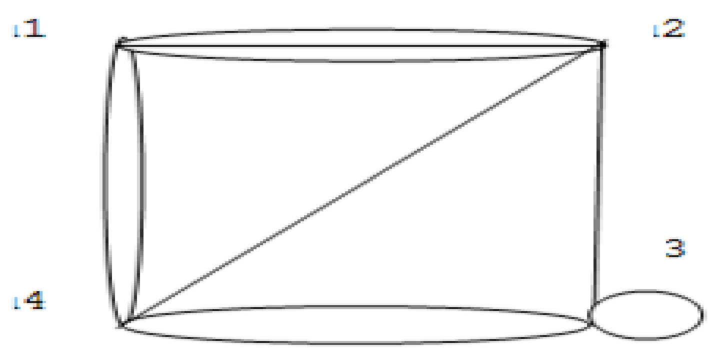


Giả đồ thị vô hướng

- G*iả đồ thị* vô hướng G = (V, E) gồm tập đỉnh $V \neq \emptyset$, tập cạnh E và hàm f từ E tới tập {(u, v) | u, v$\in$ V}. Một cạnh gọi là một khuyên nếu f(e) = (u, u).
- G*iả đồ thị* vô hướng là đồ thị có cạnh nối đỉnh đến chính nó hay có chứa khuyên.

Ví dụ 3: *Giả đồ thị vô hướng*

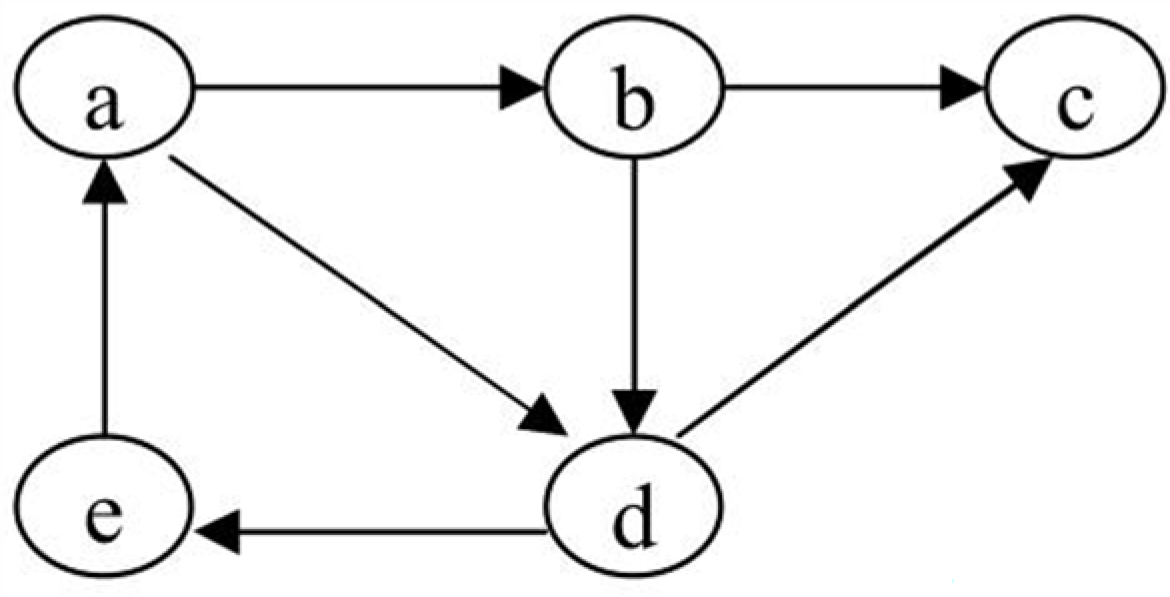
Giả đồ thị vô hướng gồm 4 đỉnh V = {1, 2, 3, 4} và 10 cạnh E= {(1,2), (1,2), (1,2), (1,4), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (3,4)}.



1.1.3 Đồ thị có hướng

- *Đơn đồ thị có hướng* G = (V, E) gồm V ≠ ∅ các đỉnh và một tập E các cung (cạnh) là các cặp có thứ tự của các đỉnh phân biệt.
- Đơn đồ thị có hướng được gọi ngắn gọn là đồ thị có hướng.

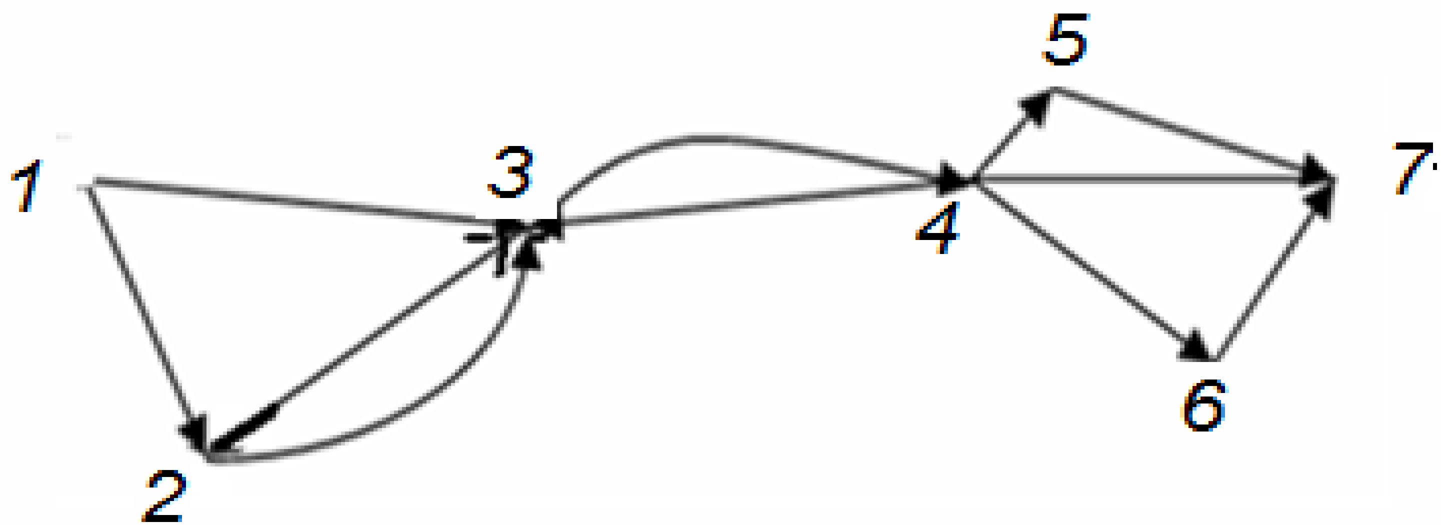
Ví dụ 4: *Đơn đồ thị có hướng*



Đa đồ thị có hướng

- *Đa đồ thị* có hướng G = (V, E) gồm tập đỉnh V $\neq \emptyset$, tập cung (cạnh) E và hàm f từ E tới $\{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$. e_1 và e_2 gọi là song song hay cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.

Ví dụ 5: *Đa đồ thị có hướng*



1.2 Những thuật ngữ cơ bản

- Hai đỉnh u và v $\in$ đồ thị vô hướng G gọi là *liền kề* (láng giềng) nếu (u, v) là một cạnh của G. Khi đó u và v còn gọi là kề nhau.
- Nếu cạnh e = (u, v) $\Rightarrow$ e gọi là *cạnh liên thuộc* với u và v; hay *cạnh nối* u và v. Các đỉnh u và v gọi là các *điểm đầu mút* của cạnh (u, v).

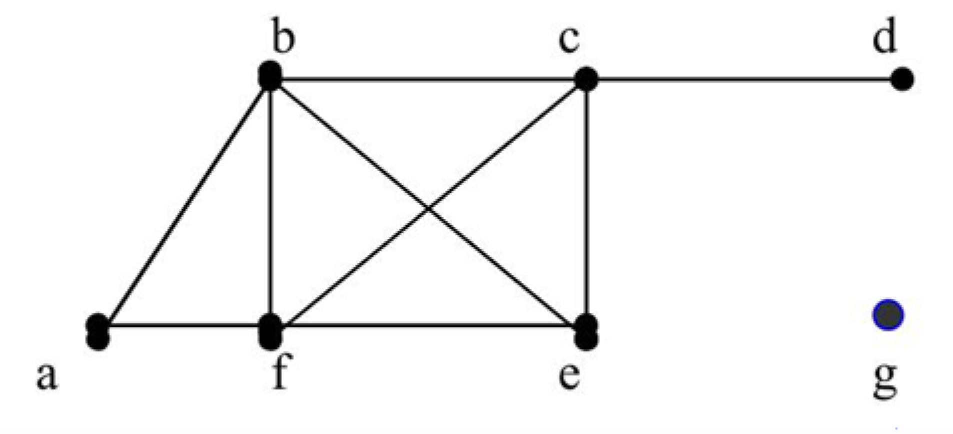
Bậc của đỉnh trong đồ thị vô hướng

- Bậc của đỉnh v $\in$ đồ thị G vô hướng là deg(v) = số các cạnh liên thuộc với v, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần.

- Nếu G có m cạnh $\Rightarrow 2m = \Sigma \deg(v)$.
- Trong đồ thị vô hướng G, số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.
- *Đỉnh cô lập* v là đỉnh không nối với bất kỳ đỉnh nào $\Leftrightarrow \deg(v) = 0$.
- *Đỉnh treo* là đỉnh có bậc bằng 1.

Ví dụ 6: Bậc của đỉnh trong đồ thị vô hướng

deg(a)= 2, deg(b)= 4, deg(c)= 4, deg(d)= 1, deg(e)= 3, Deg(f)= 4, deg(g)= 0 $\Rightarrow$ g là đỉnh cô lập, d là đỉnh treo.

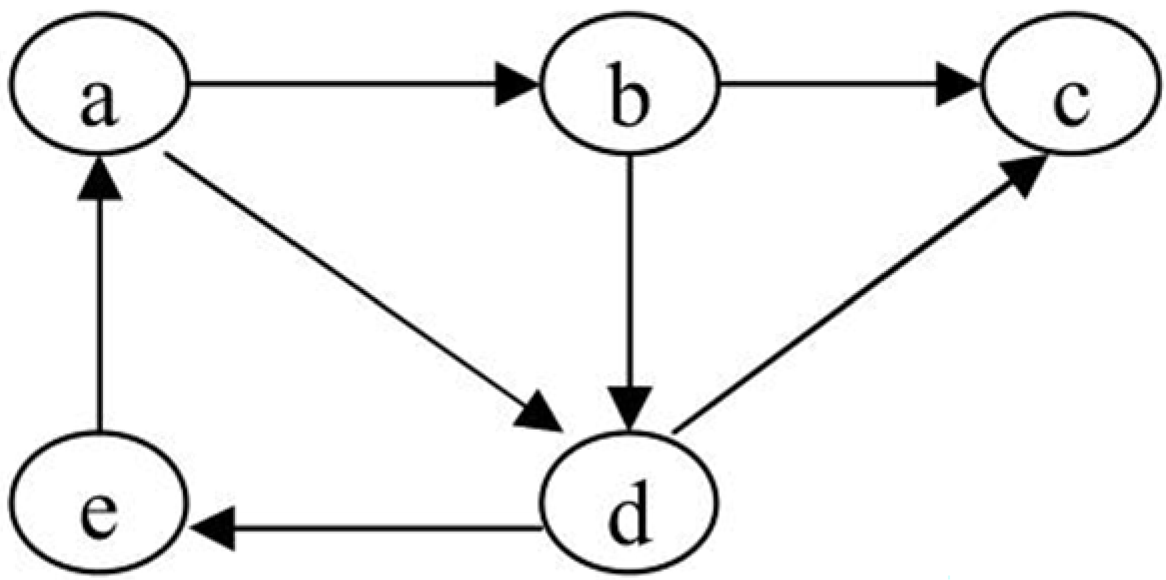


Bán bậc vào và bán bậc ra của đỉnh trong đồ thị có hướng

- G là đồ thị có hướng gồm m cạnh. Nếu cạnh e = (u,v) $\in$ G $\Rightarrow$ u gọi là nối tới v, v gọi là được nối từ u. Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, v là đỉnh cuối của cạnh e. Khi đó, đỉnh v gọi là kề với đỉnh u và e liên thuộc với u,v.
- Bán bậc vào của v $\in$ G có hướng là $deg^{-}(v)$ = số cạnh có đỉnh cuối là v.
- Bán bậc ra là $deg^{+}(v)$ = số các cạnh có đỉnh đầu là v.
- $\Sigma\, deg^{-}(v) = \Sigma\, deg+(v) = m$.

Ví dụ 7: Bán bậc của đỉnh trong đồ thị có hướng

deg-(a)= 1, deg+(a)= 2; deg-(b)= 1, deg+(b)= 2; deg-(c) = 2, deg+(c)= 0; deg-(d)= deg+(d)= 2, deg-(e)= deg+(e)= 1.

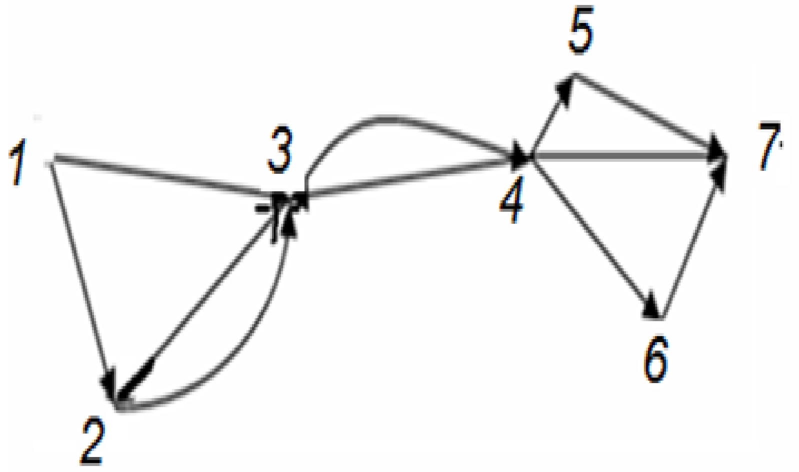


Đồ thị vô hướng nền

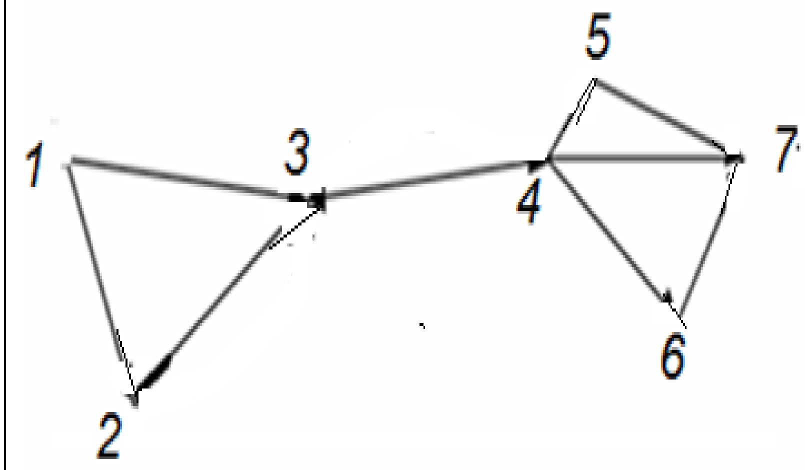
G là đồ thị có hướng.

- Nếu bỏ qua hướng trên cạnh $\Rightarrow$ nhận được đồ thị vô hướng nền của G.
- Đồ thị có hướng và đồ thị vô hướng nền của nó có cùng số đỉnh.

Ví dụ 8: Đồ thị vô hướng nền



Đồ thị có hướng G



Đồ thị vô hướng nền của G

Một số dạng đồ thị

Đồ thị đầy đủ:

- Đồ thị vô hướng G = (V, E) là *đồ thị đầy đủ*, nếu mỗi cặp đỉnh đều có cạnh nối giữa chúng.
- Đồ thị *có hướng* G = (V, E) gọi *là đồ thị đầy đủ*, nếu mỗi cặp đỉnh đều có cung nối giữa chúng (chiều của cung có thể tùy ý).

Một số dạng đồ thị

- Đồ thị G là đồ thị có trọng số $\Leftrightarrow$ mỗi cạnh được gán một con số (nguyên hoặc thực) gọi là trọng số ứng với cạnh đó.
- G là đồ thị phân đôi (hai phía) $\Leftrightarrow$ tập đỉnh V là hợp hai tập con $\neq$ rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh $\in V_1$ với một đỉnh $\in V_2$.
- $K_{m,n}$ gọi là đồ thị *phân đôi đầy đủ* $\Leftrightarrow$ tập đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 có m đỉnh và V_2 có n đỉnh sao cho có một cạnh giữa 2 đỉnh nếu và chỉ nếu một đỉnh thuộc V_1 và đỉnh thứ hai thuộc V_2.

Quan hệ giữa các đồ thị

- Đồ thị $H = (W, F)$ gọi là đồ thị con của đồ thị $G = (V, E)$ $\Leftrightarrow$ $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.
- Nếu bỏ bớt một số cạnh hoặc một số đỉnh và các cạnh liên thuộc với chúng nhận được đồ thị con H của G.
- Hợp của hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị đơn có tập các đỉnh là $V_1 \cup V_2$ và tập các cạnh là $E_1 \cup E_2$. Ký hiệu hợp của các đồ thị là $G_1 \cup G_2$.

Đường đi và chu trình trong đồ thị

- Đường đi độ dài n từ u tới $v \in G$ là dãy các đỉnh x_0, $x_1, \ldots, x_n$, $x_0 = u$, $x_n = v$ và $(x_{i-1}, x_i) \in E$
- Đường đi gọi là chu trình nếu bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, tức là u = v.
- Đường đi hoặc chu trình gọi là đơn nếu không chứa một cạnh quá một lần.
- Đường đi gọi là đường đi sơ cấp nếu đi qua các đỉnh không quá một lần, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối.
- Đường đi sơ cấp có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau được gọi là chu trình *sơ cấp*.

1.3 Biểu diễn đồ thị trên máy tính

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề
- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận trọng số
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề
- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc

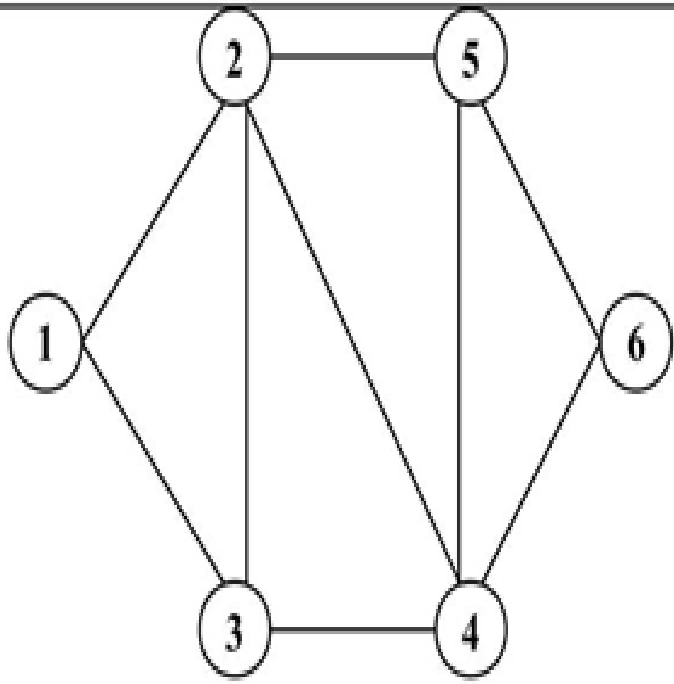
1.3.1 Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

- Đánh số các đỉnh của đồ thị G= <V, E> từ 1 đến n

- Ma trận kề của G là ma trận vuông A= $[a_{ij}]$ cấp n với:

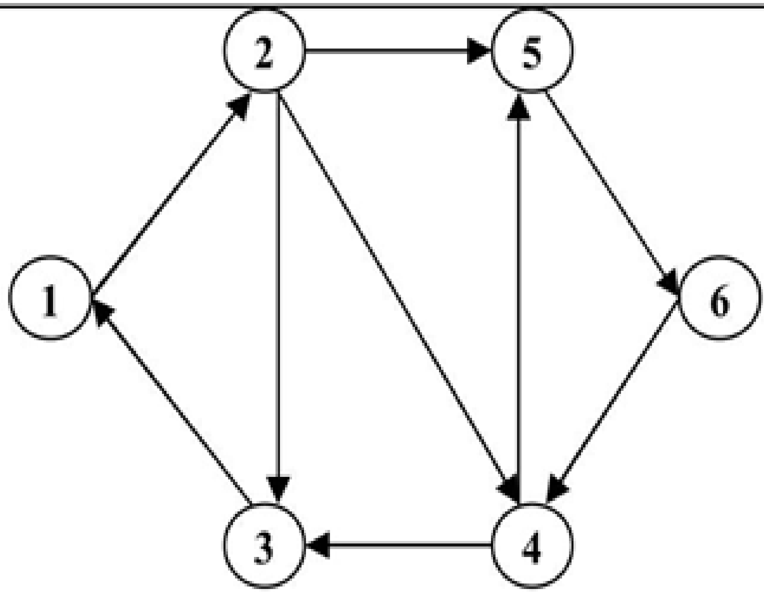
- **a_{ij}= 1 nếu có cạnh nối i với j, hay $(i,j) \in E$**
- **a_{ij}= 0 nếu không có cạnh nối i với j.**

Ví dụ 9: Ma trận kề của đồ thị vô hướng



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ví dụ 10: Ma trận kề của đồ thị có hướng



$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

Ghi chú

- Ma trận kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng.
- Đối với đa đồ thị, ma trận kề A với a_{ij} là số cạnh nối đỉnh i với đỉnh j.
- Tệp dữ liệu vào đối với ma trận kề thường có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa số n

- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số là các số 0 hoặc 1.

Tính bậc và bán bậc của đỉnh u

- Bậc của đỉnh u trong đồ thị vô hướng được biểu diễn ma trận kề bằng tổng số các phần tử trên hàng u (hoặc cột u).
- Đồ thị G có hướng được biểu diễn ma trận kề:

- Bán bậc vào (deg-(u)) là tổng số các phần tử trên cột u.

- Bán bậc ra (deg+(u)) là tổng số các phần tử trên hàng u.

1.3.2 Biểu diễn đồ thị có trọng số bằng ma trận trọng số

- Đánh số các đỉnh của đồ thị có trọng số từ 1 đến n

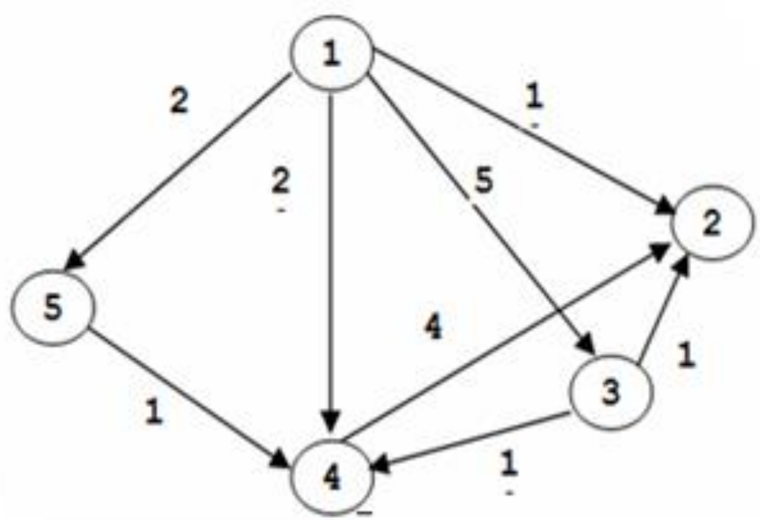
- Ma trận trọng số $A= [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n với:

- $a_{ij}= c_{ij}$ là trọng số của cạnh nối i với j, $1 \leq i, j \leq n$
- $a_{ij}=$ c đặc biệt (tùy chọn) nếu không có cạnh nối i với j. Thường chọn $c= \propto$ hoặc 0.

Ví dụ 11:

Ma trận trọng số của đồ thị có hướng với c = 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Ghi chú:

- Ma trận trọng số của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng.

- Tệp dữ liệu vào đối với ma trân trọng số thường có khuôn dạng:

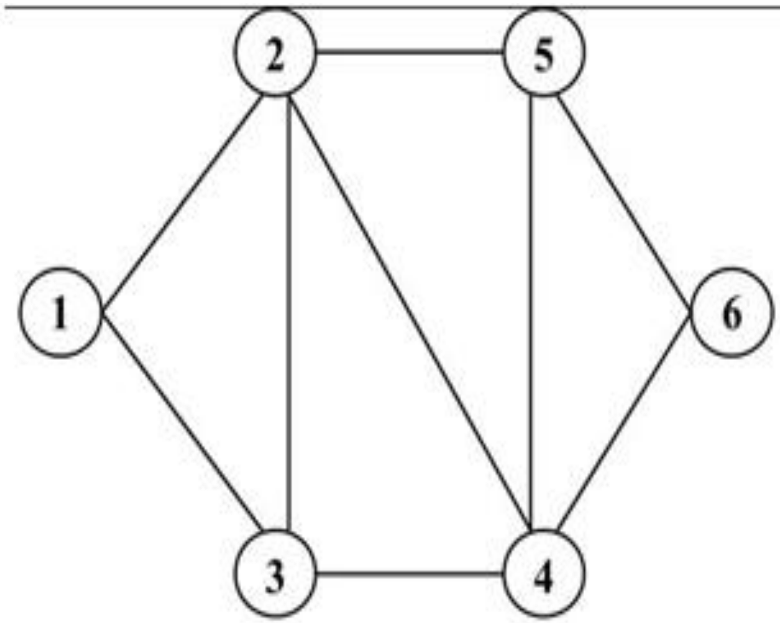
- Dòng đầu chứa số n
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số là các trọng số.

1.3.3 Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh

Đánh số các đỉnh của đồ thị từ 1 đến n, các cạnh từ 1 đến m.

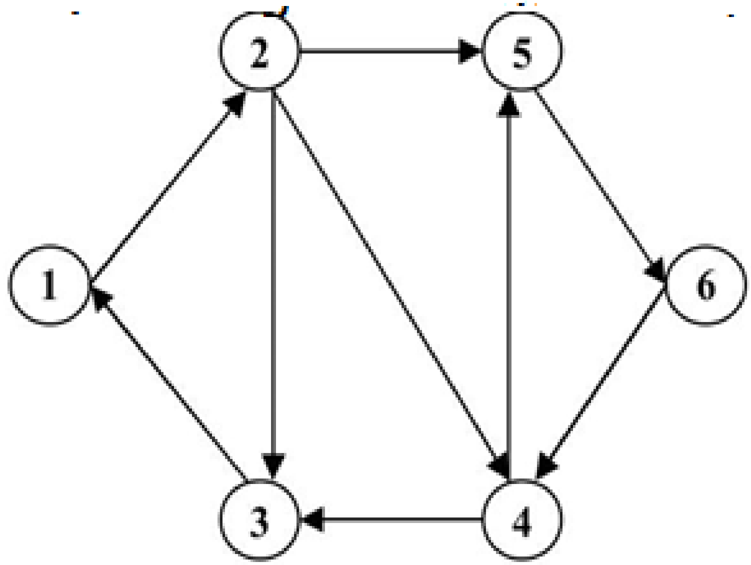
- Liệt kê m cạnh theo thứ tự từ điển, mỗi cạnh liệt kê đỉnh đầu i và đỉnh cuối j, $1 \leq i, j \leq n$.
- Đồ thị có trọng số, mỗi cạnh liệt kê đỉnh đầu i và đỉnh cuối j, $1 \leq i, j \leq n$ và trọng số c_{ij}

Ví dụ 12: Danh sách cạnh của đồ thị vô hướng



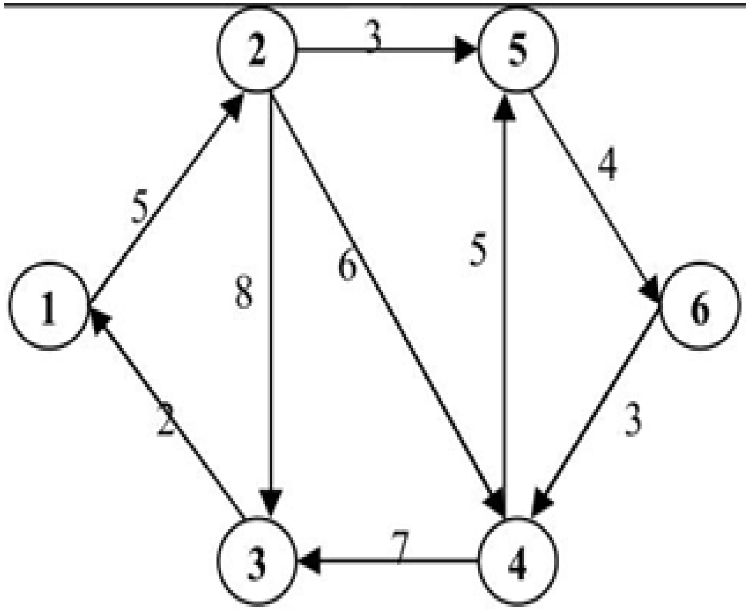
Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
1	2
1	3
2	3
2	4
2	5
3	4
4	5
4	6
5	6

Ví dụ 13: Danh sách cạnh của đồ thị có hướng



Đỉnh đầu	Đỉnh Cuối
1	2
2	3
2	4
2	5
3	1
4	3
4	5
5	6
6	4

Ví dụ 14: Danh sách cạnh của đồ thị có trọng số



Đỉnh đầu	Đỉnh Cuối	Trọng Số
1	2	5
2	3	8
2	4	6
2	5	3
3	1	2
4	3	7
4	5	5
5	6	4
6	4	3

Ghi chú:

- Danh sách cạnh của đồ thị vô hướng có số thứ tự đỉnh đầu nhỏ hơn đỉnh cuối.

- Tệp dữ liệu vào đối với danh sách cạnh thường có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa hai số n, m
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa 2 hoặc 3 số là đỉnh đầu đỉnh cuối và trọng số.

Tính bậc và bán bậc của đỉnh u

- Bậc của đỉnh u trong đồ thị vô hướng được biểu diễn danh sách cạnh bằng tổng số lần xuất hiện của u trên cả hai danh sách đỉnh đầu và đỉnh cuối.
- Đồ thị G có hướng được biểu diễn danh sách cạnh:

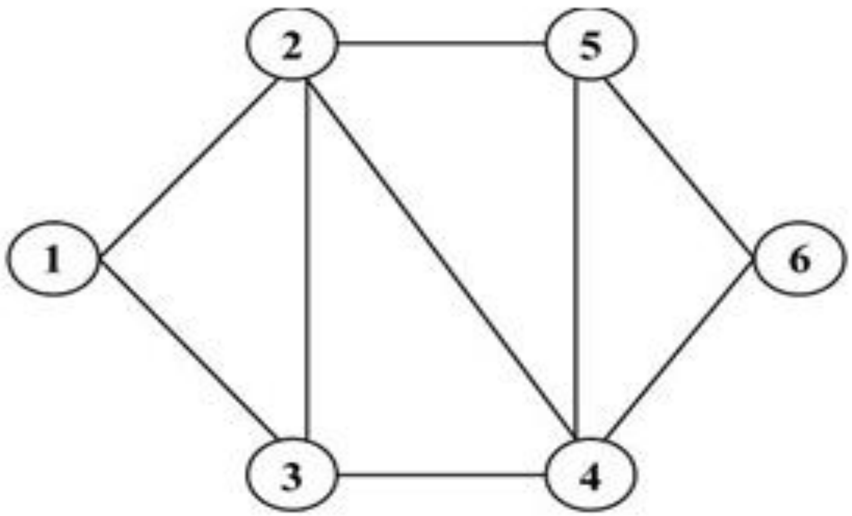
\- Bán bậc vào (deg-(u)) là tổng số lần xuất hiện của u trên danh sách đỉnh cuối.

\- Bán bậc ra (deg+(u)) là tổng số lần xuất hiện của u trên danh sách đỉnh đầu.

1.3.4 Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

- Đánh số các đỉnh của đồ thị từ 1 đến n.
- Liệt kê các đỉnh kề với mỗi đỉnh i, $1 \leq i \leq n$.

Ví dụ 15: Danh sách kề của đồ thị vô hướng



Ke(1) = { 2, 3).

Ke(2) = {1, 3, 4, 5}.

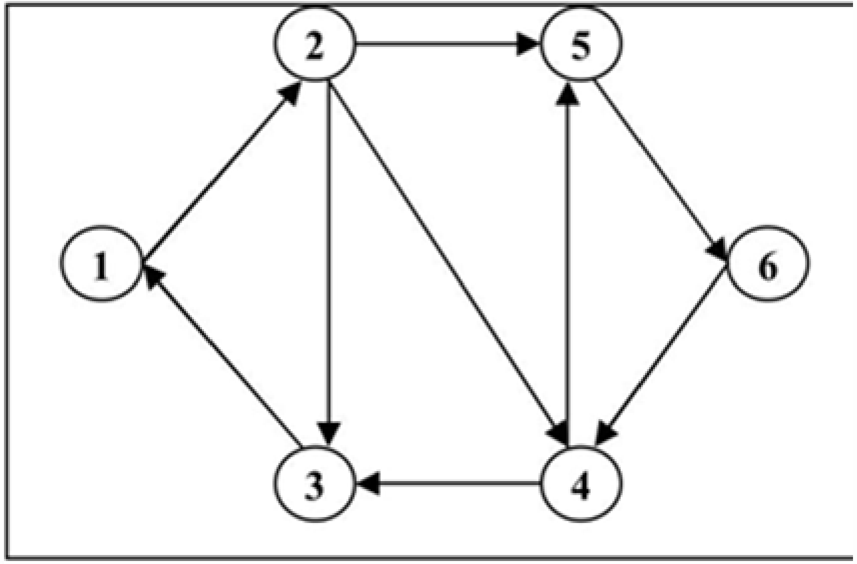
Ke(3) = {1, 2, 4}.

Ke(4) = {2, 3, 5, 6}.

Ke(5) = {2, 4, 6}.

Ke(6) = { 4, 5}.

Ví dụ 16: Danh sách kề của đồ thị có hướng



Ke(1)= {2}   Ke(2)= { 3, 4, 5}   Ke(3)= {1}

Ke(4)= {3, 5}   Ke(5)= {6}   Ke(6)= {4}

Ghi chú:

Tệp dữ liệu vào đối với danh sách kề thường có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa số n
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa các đỉnh kề với đỉnh i, $1 \leq i \leq n$

Tính bậc và bán bậc của đỉnh u

- Bậc của đỉnh u trong đồ thị vô hướng được biểu diễn danh sách kề bằng số lượng các đỉnh xuất hiện trong Ke(u).
- Đồ thị G có hướng được biểu diễn danh sách kề:

- Bán bậc vào (deg-(u)) là tổng số lần xuất hiện của u trong tất cả các Ke(v) với mọi v $\in$ G.

- Bán bậc ra (deg+(u)) là số lượng các đỉnh xuất hiện trong Ke(u).

1.3.5 Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc

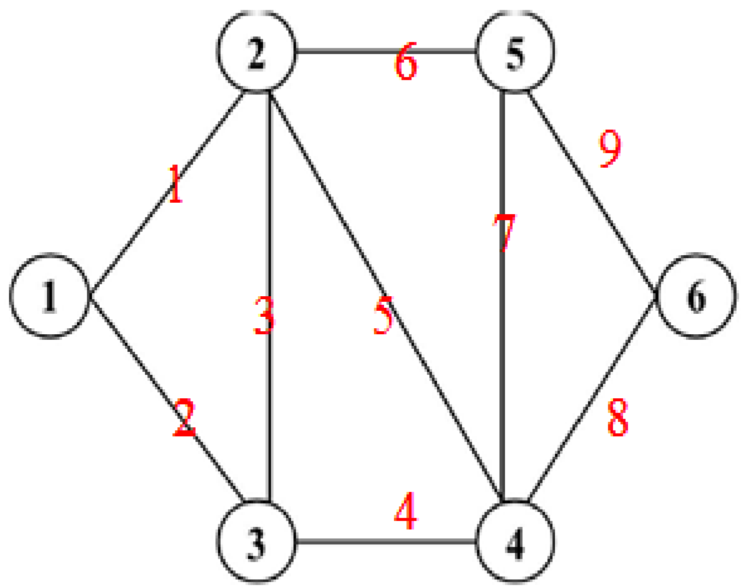
- Đánh số các đỉnh từ 1 đến n, đánh số các cạnh từ 1 đến m.
- **Ma trân liên thuộc của đồ thi vô hướng**

Ma trận liên thuộc của đồ thị vô hướng G là ma trận $M = [m_{ij}]$ cấp nxm, trong đó

- $m_{ij} = 1$ nếu cạnh j liên thuộc với đỉnh i

- $m_{ij} = 0$ nếu cạnh j không liên thuộc với đỉnh i.

Ví dụ 17: Ma trận liên thuộc biểu diễn đồ thị vô hướng



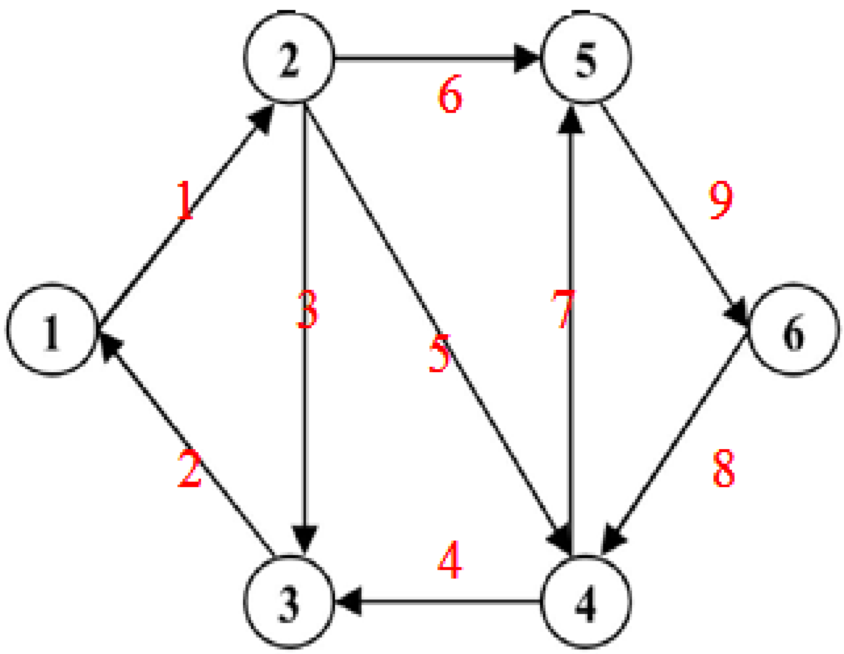
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Ma trận liên thuộc của đồ thị có hướng

Ma trận liên thuộc của đồ thị có hướng G là ma trận $M = [m_{ij}]$ cấp nxm, trong đó

- $m_{ij} = 1$ nếu đỉnh i là đỉnh đầu của cạnh j
- $m_{ij} = -1$ nếu đỉnh i là đỉnh cuối của cạnh j
- $m_{ij} = 0$ nếu cạnh j không liên thuộc với đỉnh i.

Ví dụ 18: Ma trận liên thuộc biểu diễn đồ thị có hướng



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0
5	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1	-1

Nhận xét về các cách biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề đơn giản, dễ cài đặt nhưng lãng phí bộ nhớ và tốn thời gian khi tìm kiếm (đặc biệt đối với đồ thị ít cạnh).

- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề có lợi khi thực hiện tìm kiếm.

Các mạng máy tính thường được biểu diễn dưới dạng danh sách kề.

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc thường sử dụng khi biểu diễn đa đồ thị hoặc giải quyết các vấn đề liên quan đến quan hệ đỉnh-cạnh.

Tổng kết chương 1

- **Về lý thuyết**:

- Khái niệm về đồ thị vô hướng, có hướng

- Các thuật ngữ kề, liền kề, bậc, bán bậc của đỉnh, …

- Các cách biểu diễn đồ thị

- **Về các dạng bài tập**

- Tính bậc và bán bậc của các đỉnh

- Biểu diễn đồ thị dưới các dạng khác nhau

Thảo luận


THANK YOU