TOÁN RỜI RẠC 2

CHƯƠNG 6

Giảng viên: Vũ Văn Thỏa

CHƯƠNG 6: BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

- Giới thiệu bài toán
- Định lý Ford-Fulkerson
- Thuật toán tìm luồng cực đại trong mạng
- Một số bài toán luồng tổng quát
- Ứng dụng

6.1 Giới thiệu bài toán

- Mạng
- Luồng trong mạng

Mạng

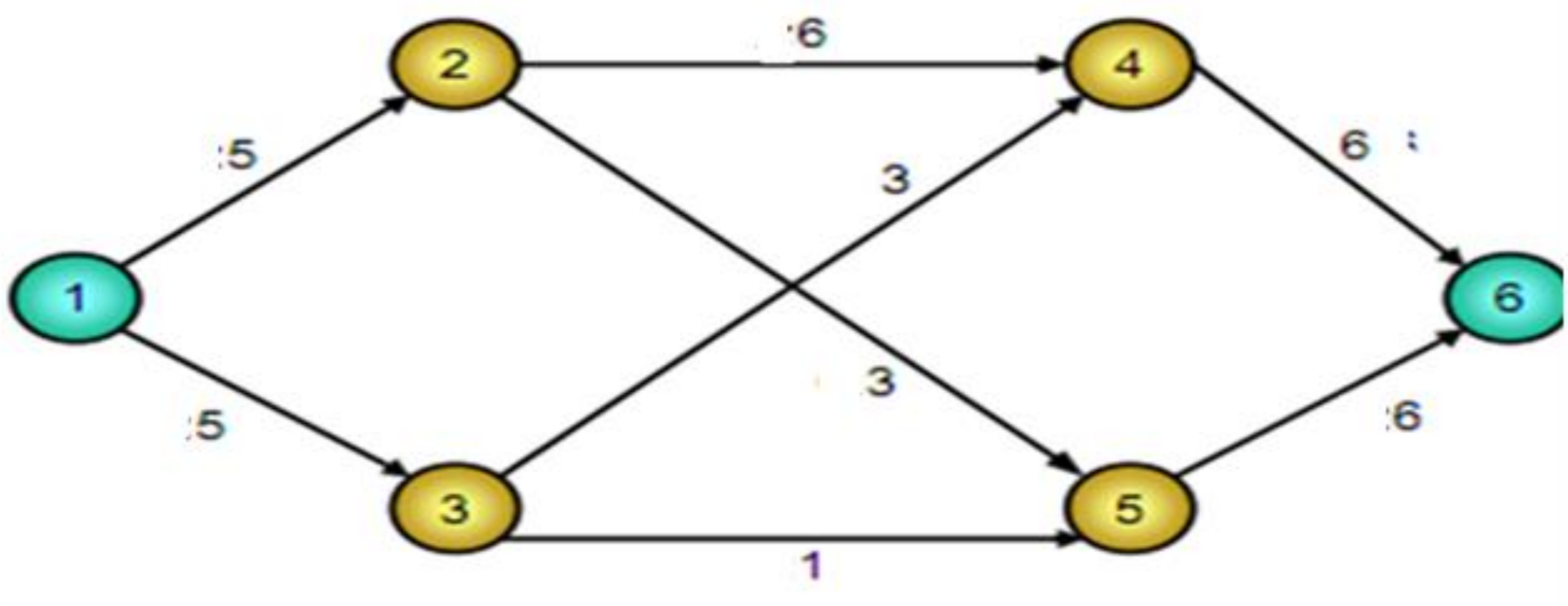
- Mạng là đồ thị có hướng G = (V, E) thỏa mãn:

(1) Có duy nhất đỉnh s không có cung đi vào gọi là điểm phát;

(2) Có duy nhất đỉnh t không có cung đi ra gọi là điểm thu;

(3) Mỗi cung $e = (u, v) \in E$ có trọng số không âm $c(e) = c(u, v)$ gọi là khả năng thông qua của cung e.

Ví dụ 1:



Mạng G gồm 6 đỉnh với đỉnh phát s = 1 và đỉnh thu t = 6

Mô hình mạng trong thực tế

- Hệ thống ống dẫn dầu bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa dầu là một mạng với đỉnh phát s là tàu chở dầu và đỉnh thu t là bể chứa dầu.

- Hệ thống các tuyến đường giao thông nối sân bay Nội Bài về Hồ Hoàn Kiếm là một mạng với đỉnh phát s là Nội Bài và đỉnh thu t là Hồ Hoàn Kiếm.

Luồng trong mạng

Luồng f trong mạng G = (V, E) là ánh xạ f: E $\rightarrow$ R gán mỗi cung e = (u, v) $\in$ E một số thực không âm f(e) = f(u, v) gọi là luồng trên cung e thỏa mãn các điều kiện:

(1) Luồng trên mỗi cung e $\in$ E không vượt quá khả năng thông qua: $0 \leq f(e) \leq c(e)$;

(2) Điều kiện cân bằng luồng tại mỗi đỉnh v $\in$ V, v ≠ s, t: Tổng luồng trên các cung đi vào v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi v.

Ký hiệu $\Gamma^-(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}$,

$\Gamma^+(v) = \{w \in V: (v, w) \in E\}$.

$\sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u, v) = \sum_{w \in \Gamma^+(v)} f(v, w)$.

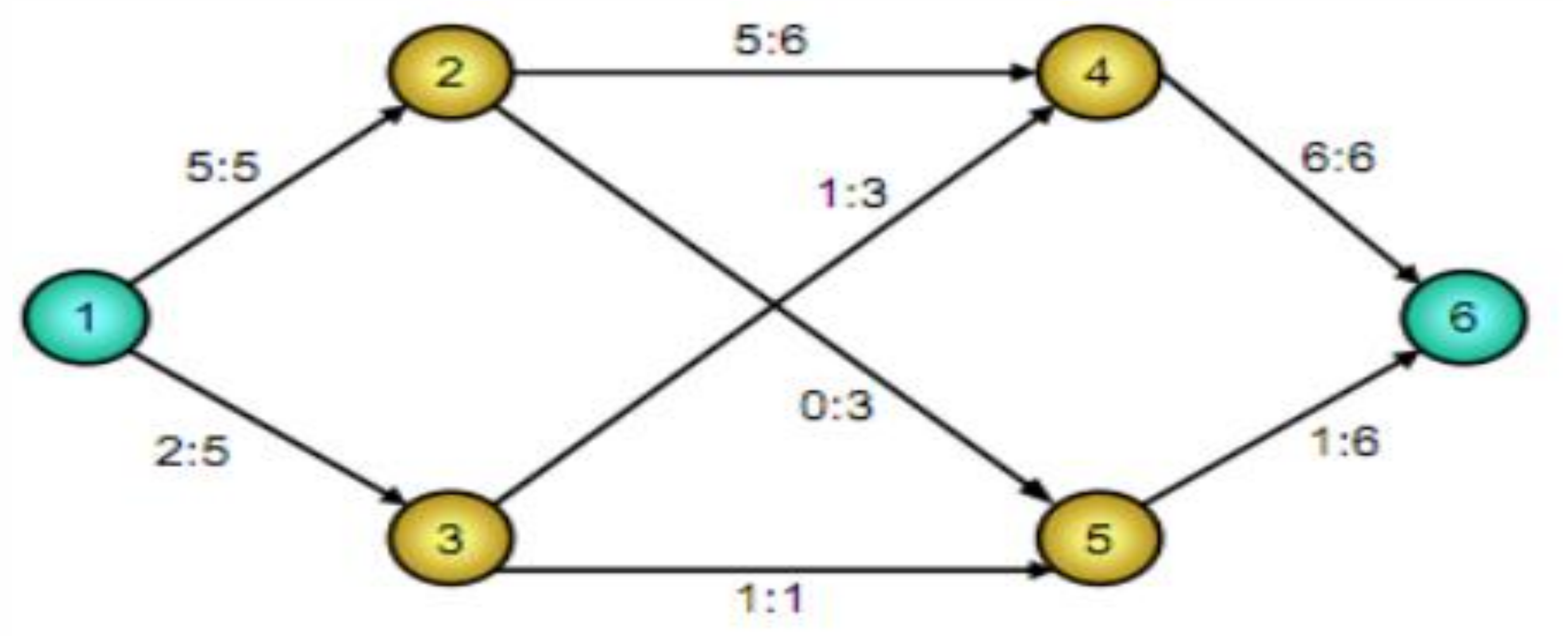
Nhận xét

- Cho mạng G= (V, E).
- Xét f(u, v) = 0 với mọi u, v $\in$ G.

Rõ ràng f là một luồng trên G.

Luồng f thường gọi là luồng 0.

Ví dụ 2: Luồng f trên mạng G



f(1,2)= 5; f(1,3)= 2; f(2,4) = 5; f(2,5)= 0; f(3,4)= 1;
f(3,5)= 1; f(4,6)= 6; f(5,6)= 1.

Giá trị luồng

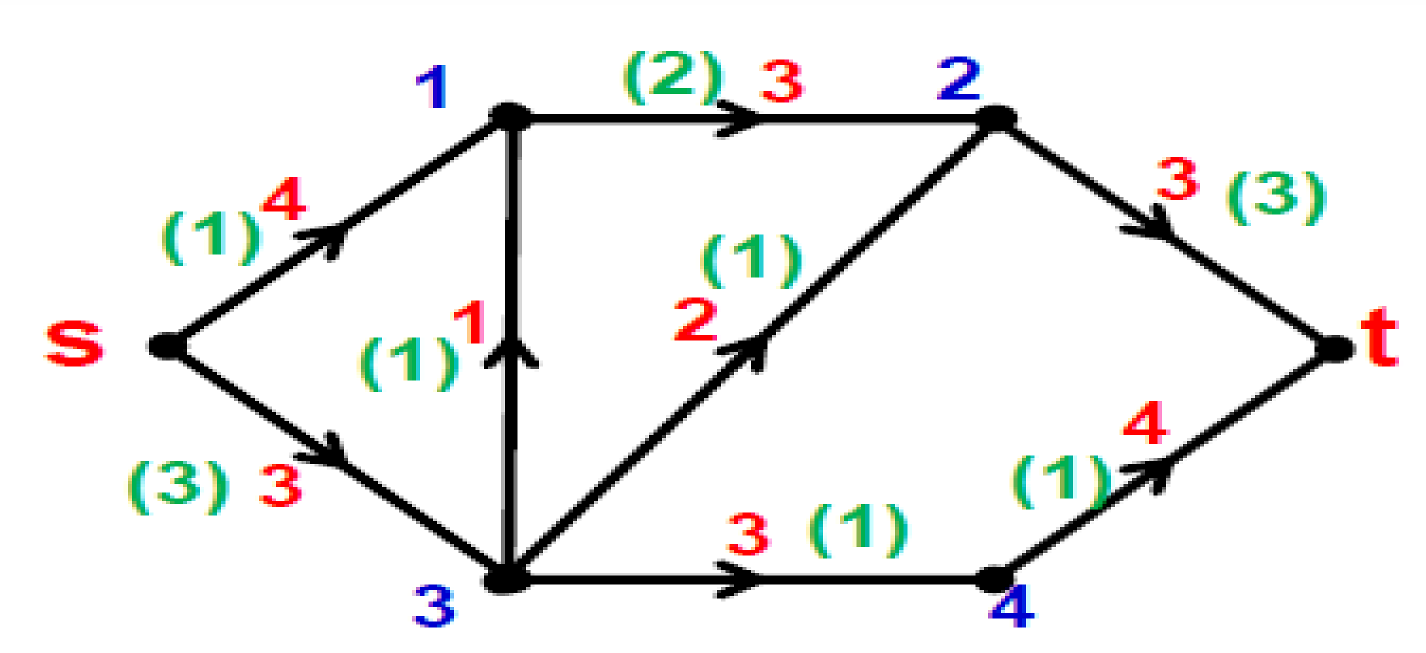
- Cho luồng f trên mạng G với đỉnh phát s và đỉnh thu t.

Giá trị của luồng f là tổng giá trị luồng trên các cung đi ra từ s hoặc bằng tổng giá trị luồng trên các cung đi vào t:

$$val(f) = \sum_{v \in \Gamma^{+}(s)} f(s, v) = \sum_{u \in \Gamma^{-}(t)} f(u, t).$$

- Luồng $f \equiv 0$ có val(f)= 0.

Ví dụ 3: Giá trị luồng



- Luồng f có giá trị val(f) = 1 + 3 = 4.

Bài toán luồng cực đại

- **Input:**

  Mạng G = (V, E);

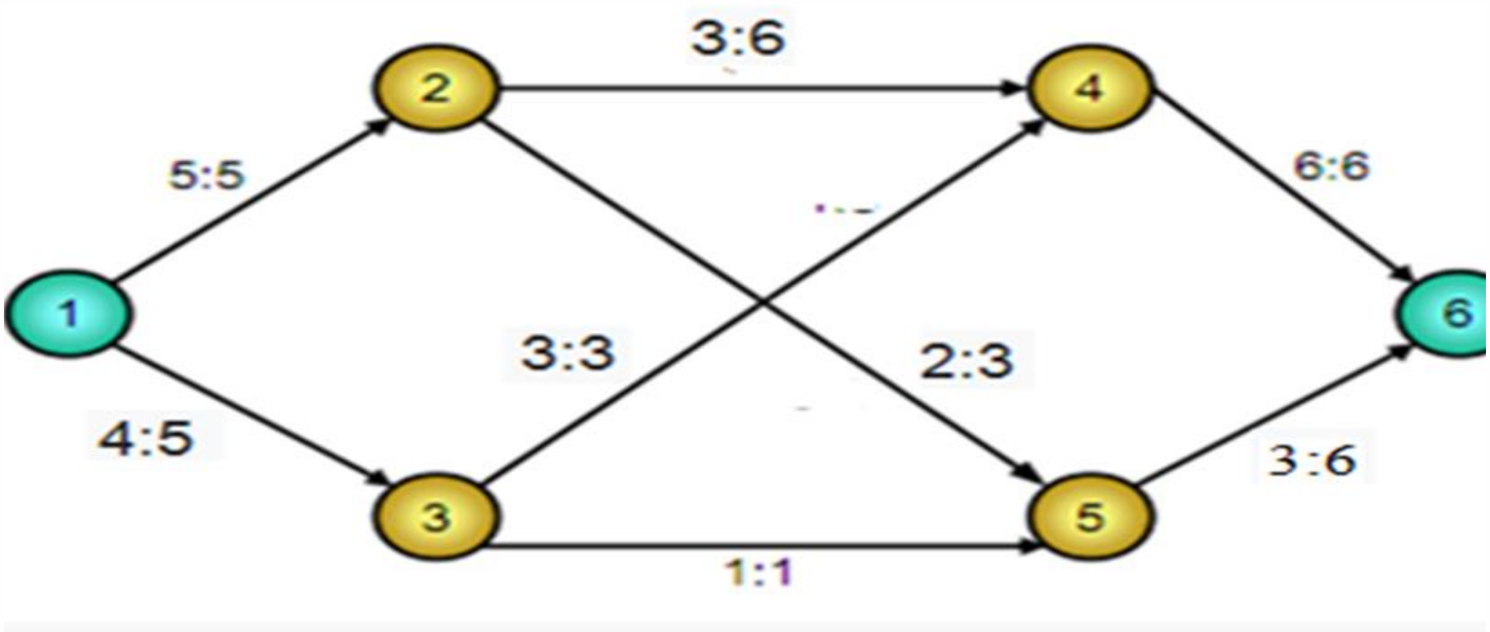
  Đỉnh phát s;

  Đỉnh thu t;

- **Output**:

  Luồng f^* có giá trị luồng $val(f^*)$ lớn nhất;

Ví dụ 4: Luồng cực đại f*



- Luồng cực đại f* trên mạng G với đỉnh phát s = 1 và đỉnh thu t = 6 có val(f*)= 4 + 5 = 6 + 3 = 9.

Ý tưởng tìm luồng cực đại

- Khởi tao: f$\equiv$ 0; val(f)= 0;
- Quá trình lặp:

(1) Tìm luồng f' sao cho val(f')= val(f) + δ, với δ> 0;

(2) Nếu tìm được f' thì tiếp tục quá trình lặp với f= f';

(3) Nếu không tìm được f' thì dừng quá trình lặp;

- Xuất f và val(f);

6.2 Định lý Ford-Fulkerson

Lát cắt:

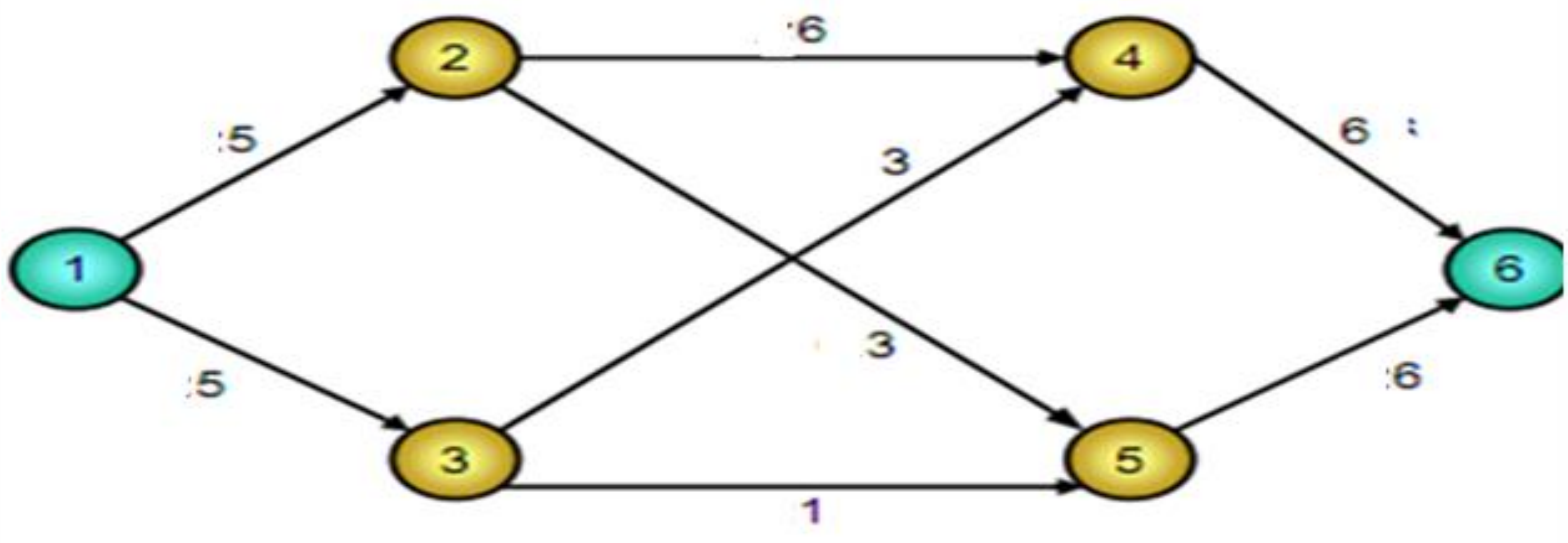
Cho G= (V, E) là một mạng, đỉnh phát s và đỉnh thu t.

- Cho X là tập các đỉnh và $X^* = V\backslash X$ với $s \in X$ và $t \in X^*$ $\Rightarrow$ (X, X^*) gọi là một lát cắt.
- Khả năng thông qua của lát cắt:

$$c(X, X^*) = \sum_{u \in X,\, v \in X^*} c(u, v).$$

- Lát cắt có khả năng thông qua nhỏ nhất gọi là lát cắt hẹp nhất.

Ví dụ 5: Lát cắt



Cho mạng G gồm 6 đỉnh với đỉnh phát s = 1 và đỉnh thu t = 6. Xét tập X= {1, 3} và X* = V\X= {2, 4, 5, 6}. Có (X, X*) là một lát cắt với khả năng thông qua là c(X, X*) = 5 + 3 + 1 = 9.

(X, X*) cũng là lát cắt hẹp nhất.

Bổ đề

- Giá trị của mọi luồng f không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt bất kỳ:

$$val(f) \leq c(X, X^*).$$

- $\Rightarrow$ Giá trị luồng cực đại không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất.

Đồ thị tăng luồng

- Cho luồng f trong mạng G = (V, E). Xét đồ thị có trọng số G_f với tập đỉnh V như sau:

(1) Nếu $e = (u, v) \in E$ với $f(u, v) = 0 \Rightarrow e = (u, v) \in E_f$ với trọng số $c(u, v)$;

(2) Nếu $e = (u, v) \in E$ với $f(u, v) = c(u, v) \Rightarrow e = (v, u) \in E_f$ với trọng số $f(u, v)$;

(3) Nếu $e = (u, v) \in E$ với $0 < f(u, v) < c(u, v)$

$\Rightarrow e = (u, v) \in E_f$ với trọng số $c(u, v) - f(u, v)$;

$e = (v, u) \in E_f$ với trọng số $f(u, v)$.

- G_f gọi là *đồ thị tăng luồng* tương ứng luồng f.

Cung thuận và cung nghịch

Xét G_f là đồ thị tăng luồng của f trên G.

- Các cung của G_f cũng là cung của G gọi là cung thuận.

- Các cung của G_f không là cung của G gọi là cung nghịch.

Đường tăng luồng

- Gọi $P = (s = v_0, v_1, ..., v_k = t)$ là một đường đi từ s đến t trên G_f và δ là giá trị nhỏ nhất của các trọng số trên các cung thuộc P. Đường đi P gọi là đường tăng luồng
- *Thủ tục tăng luồng dọc theo P* để xây dựng luồng f':

(1) Nếu $(u, v) \in P$ là cung thuận thì $f'(u, v) = f(u, v) + \delta$;

(2) Nếu $(u, v) \in P$ là cung nghịch thì $f'(v, u) = f(v, u) - \delta$;

(3) Nếu $(u, v) \notin P$ thì $f'(u, v) = f(u, v)$.

- Có $val(f') = val(f) + \delta$

Nhận xét:

- Mọi đường đi từ s đến t trên G_f là đường tăng luồng f.
- Trong thực tế cài đặt, thường sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng Bfs(s) để tìm đường đi ít cạnh nhất từ s đến t trên G_f.

Định lý Ford-Fullkerson

Các mệnh đề sau là tương đương:

(1) f là luồng cực đại trong mạng G;

(2) Không tìm được đường tăng luồng trên G_f;

(3) Giá trị luồng f bằng khả năng thông qua của một lát cắt nào đó: val(f) = c(X, X*).

6.3 Thuật toán tìm luồng cực đại trong mạng

- **Input:** Mạng G = (V, E) cho bởi ma trận trọng số c[i][j], trong đó c[i][j]= 0 nếu không có cung nối i với j;

  Đỉnh phát s;

  Đỉnh thu t;

- **Output**: *Luồng cực đại f;*

  Giá trị luồng val(f);

Thuật toán

Thuật toán Max_Flow {

for u $\in$V {

for v $\in$V f(u, v) = 0; }

Stop = 0;

while (!Stop) { <Xác định đồ thị tăng luồng G_f >;

if (Tìm được đường tăng luồng P bằng Bfs(s)) {

<Tìm δ là trọng số nhỏ nhất trên P>; <Tăng luồng f theo P>; }

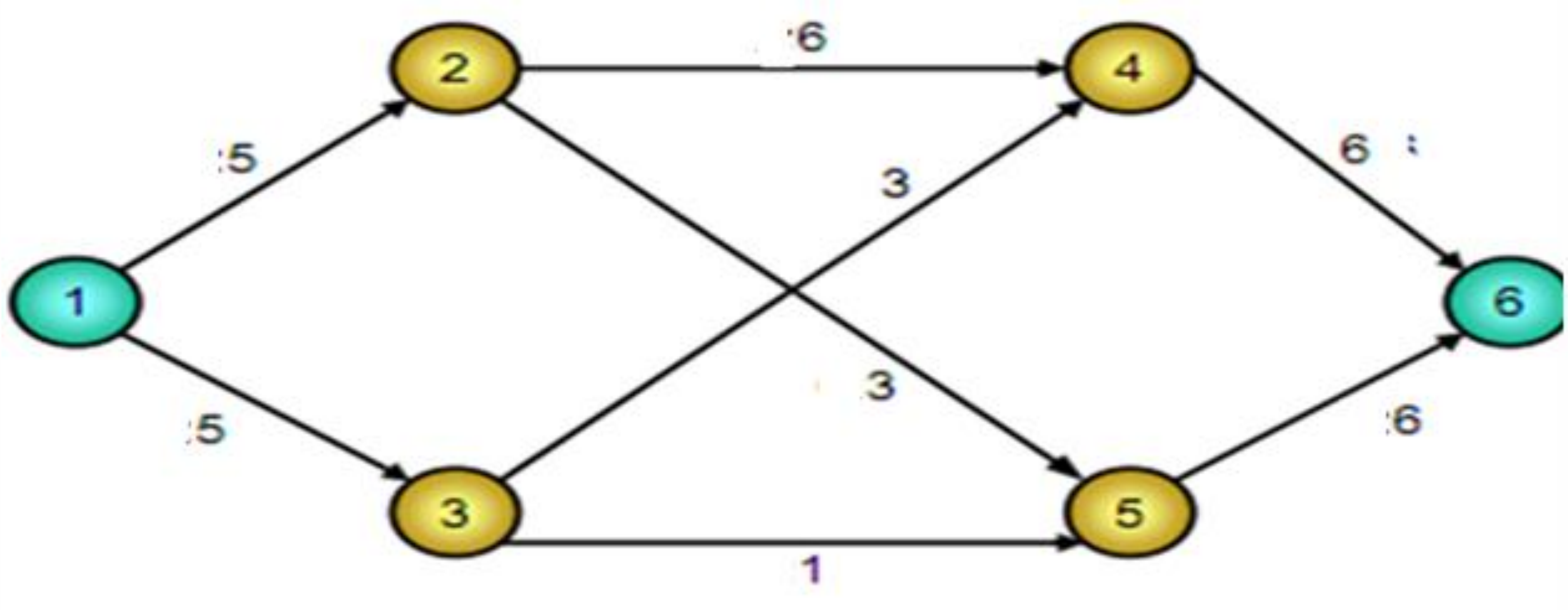
else Stop = 1;

}

return (f, val(f));

}

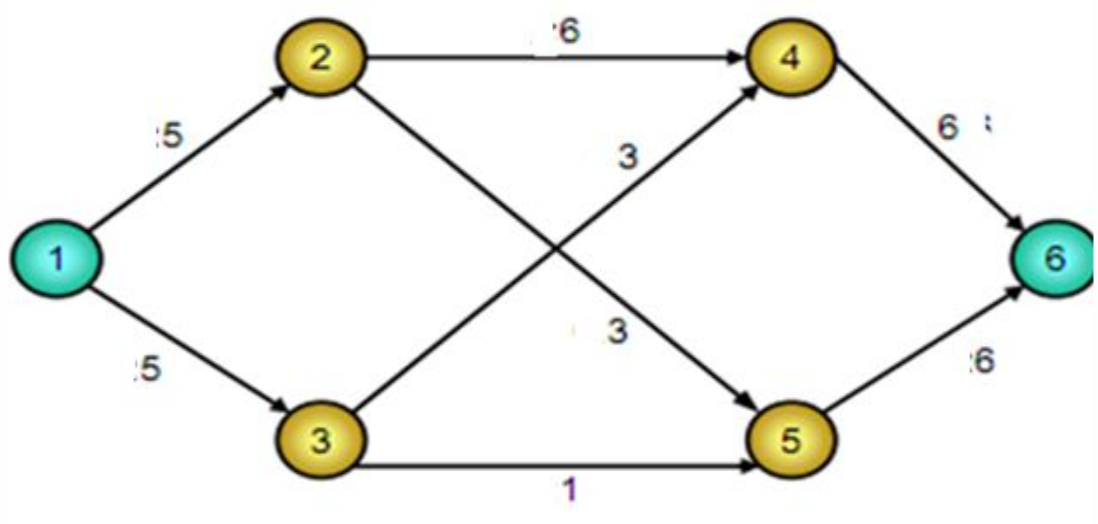
Ví dụ 6: Kiểm nghiệm thuật toán



Cho mạng G gồm 6 đỉnh với đỉnh phát s = 1 và đỉnh thu t = 6. Tìm luồng cực đại f trên G.

Khởi tạo $f \equiv 0$

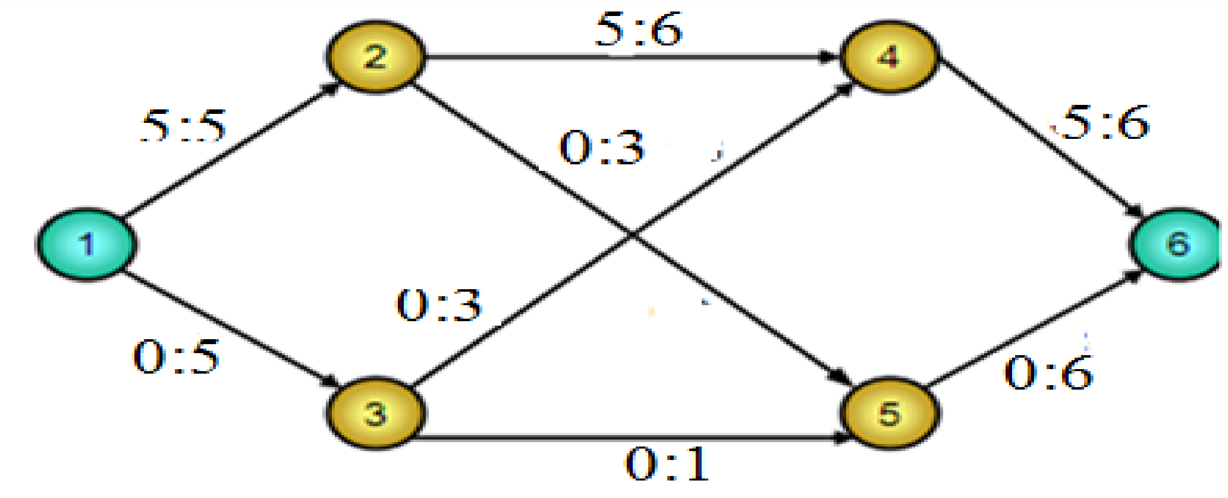
- Đồ thị G_f:



- Có Bfs(1)= {1(0); 2(1), 3(1); 4(2), 5(2); 6(4)}
- Đường tăng luồng P= $6 \leftarrow 4 \leftarrow 2 \leftarrow 1$

Tăng luồng f lên f’

- Đường tăng luồng P = 1→2 →4 →6; giá trị tăng luồng δ = 5



- Giá trị luồng mới val(f)= 0 + 5 = 5.

Khởi tạo:

Mạng G							Luồng f						
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	0	5	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	6	3	0	2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	3	1	0	3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	6	4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	6	5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0

Val(f) = 0

Bước 1:

Mạng G	1	2	3	4	5	6
1	0	5	5	0	0	0
2	0	0	0	6	3	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	6
6	0	0	0	0	0	0

Luồng f	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Đồ thị G_f	1	2	3	4	5	6
1	0	5	5	0	0	0
2	0	0	0	6	3	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	6
6	0	0	0	0	0	0

Tìm đường tăng luồng

Bfs(1) = {1(0); 2(1), 3(1); 4(2), 5(2); 6(4)}

Đường tăng luồng:

$6 \leftarrow 4 \leftarrow 2 \leftarrow 1$

Giá trị tăng luồng:

$\delta = 5$

Tăng luồng f

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	0	0	0	0
2	0	0	0	5	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	5
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Val(f) = 5

Bước 2:

Mạng G	1	2	3	4	5	6
1	0	5	5	0	0	0
2	0	0	0	6	3	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	6
6	0	0	0	0	0	0

Luồng f	1	2	3	4	5	6
1	0	5	0	0	0	0
2	0	0	0	5	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	5
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Đồ thị G_f	1	2	3	4	5	6
1	0	0	5	0	0	0
2	5-	0	0	1	3	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	5-	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	6
6	0	0	0	5-	0	0

Tìm đường tăng luồng

Bfs(1) = {1(0); 3(1); 4(3); 5(3); 2(4), 6(4)}

Đường tăng luồng:

$6 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 1$

Giá trị tăng luồng:

$\delta = 1$

Tăng luồng f	1	2	3	4	5	6
1	0	5	1	0	0	0
2	0	0	0	5	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Val(f) = 6

Bước 3:

Mạng G	1	2	3	4	5	6
1	0	5	5	0	0	0
2	0	0	0	6	3	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	6
6	0	0	0	0	0	0

Luồng f	1	2	3	4	5	6
1	0	5	1	0	0	0
2	0	0	0	5	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Đồ thị G_f	1	2	3	4	5	6
1	0	0	4	0	0	0
2	5-	0	0	1	3	0
3	1-	0	0	2	1	0
4	0	5-	1-	0	0	0
5	0	0	0	0	0	6
6	0	0	0	6-	0	0

Tìm đường tăng luồng

Bfs(1) = {1(0); 3(1); 4(3); 5(3); 2(4); 6(5)}

Đường tăng luồng:

$6 \leftarrow 5 \leftarrow 3 \leftarrow 1$

Giá trị tăng luồng:

$\delta = 1$

Tăng luồng f

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	2	0	0	0
2	0	0	0	5	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Val(f) = 7

Bước 4:

Mạng G

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	5	0	0	0
2	0	0	0	6	3	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	6
6	0	0	0	0	0	0

Luồng f

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	2	0	0	0
2	0	0	0	5	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Đồ thị G_f

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	3	0	0	0
2	5-	0	0	1	3	0
3	2-	0	0	2	0	0
4	0	5-	1-	0	0	0
5	0	0	1-	0	0	5
6	0	0	0	6-	1-	0

Tìm đường tăng luồng

Bfs(1) = {1(0); 3(1); 4(3); 2(4); 5(2); 6(5)}

Đường tăng luồng:

$6 \leftarrow 5 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 1$

Giá trị tăng luồng:

$\delta = 2$

Tăng luồng f

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	4	0	0	0
2	0	0	0	3	2	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	3
6	0	0	0	0	0	0

Val(f) = 9

Bước 5:

Mạng G	1	2	3	4	5	6
1	0	5	5	0	0	0
2	0	0	0	6	3	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	6
6	0	0	0	0	0	0

Luồng f	1	2	3	4	5	6
1	0	5	4	0	0	0
2	0	0	0	3	2	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	3
6	0	0	0	0	0	0

Đồ thị G_f	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	5-	0	0	3	1	0
3	4-	0	0	0	0	0
4	0	3-	3-	0	0	0
5	0	2-	1-	0	0	3
6	0	0	0	6-	3-	0

Tìm đường tăng luồng
Bfs(1) = {1(0); 3(1)}
Không tìm được đường tăng luồng.

Kết luận:

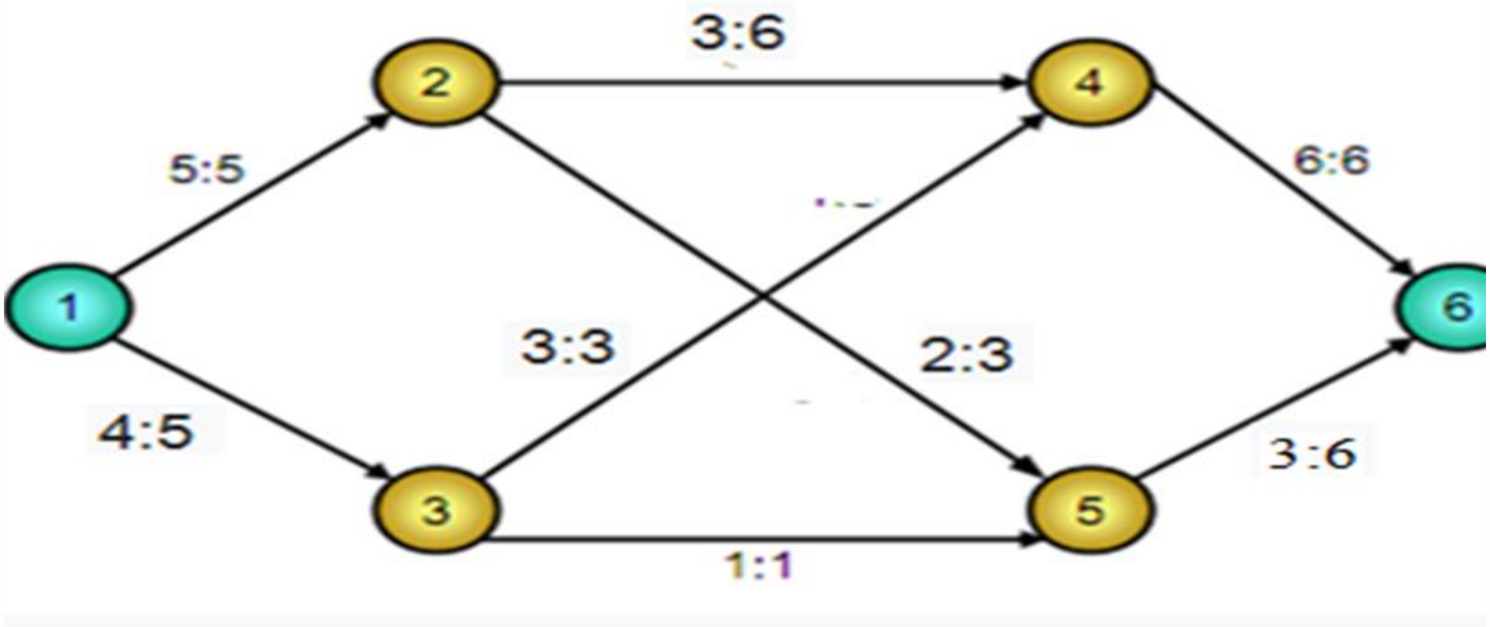
- Luồng cực đại f:

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	4	0	0	0
2	0	0	0	3	2	0
3	0	0	0	3	1	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	3
6	0	0	0	0	0	0

- Giá trị luồng cực đại: Val(f) = 9

Minh họa kết quả cuối cùng:

- Luồng cực đại f có val(f)= 6 + 3 = 9.



Cài đặt

```
int Stop = 0; int q[100]; int d[100]; int vs[100]; int e[100]; int fl[100][100];
void  FindPath(){ int cq, dq, u, v;
        for (u = 1; u <= n; u++) vs[u] = 0;
    cq = 1; dq = 1; q[cq] = s; vs[s] = 1;   e[s] = 0; d[s] = 10000;
  while (dq <= cq){  u = q[dq];  dq++;
       for  (v = 1; v <= n; v++)  if (vs[v]== 0) {
             if (c[u][v] > 0 && fl[u][v] < c[u][v]) {
       e[v] = u;   d[v] = (d[u]< c[u][v] - fl[u][v])?d[u]: c[u][v] - fl[u][v];
          cq++; q[cq] = v; vs[v] = 1;   if (v == t) return;   }
 if (c[v][u] > 0 && fl[v][u] > 0) {  e[v] = -u;  d[v] = (d[u]< fl[v][u])?d[u]: fl[v][u];
            cq++; q[cq] = v; vs[v] = 1;   if (v == t) return; }
           }          }
    Stop = 1;
   }
```

6.4 Một số bài toán luồng tổng quát

1. Mạng có nhiều điểm phát, nhiều điểm thu

- Xét mạng G có p điểm phát $s_1, \ldots, s_p$ và q điểm thu $t_1, \ldots, t_q$. Một luồng có thể xuất phát từ một đỉnh phát bất kỳ đến một trong các đỉnh thu và được định nghĩa tương tự như trên.
- Bài toán luồng cực đại trên G được đưa về bài toán trên bằng cách bổ sung 1 đỉnh phát giả s và 1 đỉnh thu giả t.

Mạng có nhiều điểm phát, nhiều điểm thu

- Từ đỉnh phát giả s có cạnh nối đến các đỉnh phát $s_1, \ldots, s_p$ với khả năng thông qua là vô cùng lớn.
- Từ các đỉnh thu $t_1, \ldots, t_q$ có cạnh nối đến đỉnh thu giả t với khả năng thông qua là vô cùng lớn.

Thuật toán tìm luồng cực đại:

- Tìm luồng cực đại f* trên mạng $G \cup \{s, t\}$ bằng thuật toán Max_Flow;
- Bỏ hai đỉnh giả s và t $\Rightarrow$ có luồng cực đại f* trên G với val(f*).

2. Bài toán với khả năng thông qua của đỉnh và cạnh

- Xét mạng G.

- Ngoài khả năng thông qua c[u][v] trên cạnh (u, v) $\in$ E, còn có khả năng thông qua của đỉnh v là số nguyên không âm d[v], v $\in$ V.

- Luồng f trên mạng G phải thỏa mãn thêm điều kiện: tổng luồng đi vào đỉnh v không vượt quá d[v].

- **Yêu cầu**: Tìm luồng cực đại giữa s và t.

Thuật toán

(1) Xây dựng mạng G'sao cho mỗi v $\in$ G tương ứng hai đỉnh v^+, v^- trong G' với khả năng thông qua:

$c[u^-][v^+] = c[u][v]$; $c[v^-][w^+] = c[v][w]$; $c[v^+][v^-] = d[v]$;

(2) Tìm luồng cực đại f* trên G';

(3) Xuất f* trên G và val(f*);

3. Mạng có khả năng thông qua bị chặn hai phía

- Xét mạng G.

Khả năng thông qua trên cạnh $(u, v) \in E$ có cận trên là c[u][v] và cận dưới là d[u][v].

Luồng f trên mạng G phải thỏa mãn thêm điều kiện:

$$d[u][v] \le f[u][v] \le c[u][v].$$

- **Yêu cầu**: Tìm luồng cực đại giữa s và t.

Thuật toán:

(1) Đưa vào hai đỉnh phát giả s_u và thu giả t_u;

Xây dựng mạng G_u sao cho mỗi cung (u, v) có d[u][v] ≠ 0 tương ứng hai cung (s_u, v) và (u, t_u) với khả năng thông qua d[u][v]; khả năng thông qua của (u, v) là c[u][v] – d[u][v];

(2) $d^* = \sum_{(u, v) \in E} d[u][v]$;

(3) Tìm luồng cực đại f* trên G_u;

(4) Nếu val(f*) = d* $\Rightarrow$ Xuất luồng f tương thích f* trên G và val(f);

6.5 Ứng dụng

1. Bộ ghép cực đại

- Cho đồ thị hai phía có trọng số G với tập đỉnh

$$V = X \cup Y,\ X \cap Y = \varnothing;$$

Bộ ghép M trên G là các cặp (x, f(x)) với đơn ánh

$$f: X \to Y.$$

- **<u>Yêu cầu</u>**: Tìm M có số lượng phần tử lớn nhất và tổng trọng số lớn nhất.

Một số bài toán cụ thể:

1) Bài toán phân việc:

Có n công nhân và n công việc. Biết mỗi công nhân thứ i có thể làm được một số công việc nào đó. Tìm cách phân việc để giải quyết được tất cả n công việc.

2) Bài toán đám cưới vùng quê:

Có n nam và n nữ. Biết mỗi nam thứ i có mức độ tình cảm với nữ thứ j là c[i][j]. Tìm cách mai mối để các cặp nam-nữ kết bạn có tổng mức độ tình cảm là lớn nhất.

Thuật toán giải bài toán phân việc:

Ký hiệu X là tập gồm n công nhân và Y là tập gồm n công việc. Với u $\in$X và v $\in$ Y có c[u][v]= 1 $\Leftrightarrow$ công nhân u làm được công việc v.

(1) Đưa vào hai đỉnh phát giả s_u và thu giả t_u;

Xây dựng mạng G_u gồm các cung (u, v) $\in$ E và thêm các cung (s_u, u) và (v, t_u), u $\in$X và v $\in$ Y với khả năng thông qua 1;

(2) Tìm luồng cực đại f * trên G_u;

(3) Xuất các cặp (u, v) nếu f*[u][v] > 0, u $\in$X và v $\in$ Y và val(f*);

Thuật toán giải bài toán đám cưới:

Ký hiệu X là tập gồm n nam và Y là tập gồm n nữ. Với i $\in$X và j $\in$ Y có c[i][j] là mức độ tình cảm giữa i và j.

(1) Đưa vào hai đỉnh phát giả s_u và thu giả t_u;

Xây dựng mạng G_u gồm các cung (u, v) $\in$ E và thêm các cung (s_u, u) và (v, t_u), u $\in$X và v $\in$ Y với khả năng thông qua vô cùng lớn;

(2) Tìm luồng cực đại f * trên G_u;

(3) Xuất các cặp (u, v) nếu f*[u][v] > 0, u $\in$X và v $\in$ Y và val(f*);

2. Hệ đại diện chung

- Cho $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ và hai dãy tập con của X: $<A_1, \ldots, A_n>$ và $<B_1, \ldots, B_n>$;

Dãy n phần tử khác nhau của X: $(a_1, \ldots, a_n)$ gọi là hệ đại diện chung của hai dãy trên $\Leftrightarrow$ tồn tại hoán vị của các số {1, .., n} là $(h_1, \ldots, h_n)$ thỏa mãn $a_i \in A_i \cap B_{hi}$, với $i = 1, \ldots, n$.

- **Yêu cầu**: Tìm hệ đại diện chung $(a_1, \ldots, a_n)$.

Thuật toán:

(1) Xây dựng mạng G = (V, E) với:

$V = \{s, t\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\} \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$; trong đó x_i tương ứng A_i, y_i tương ứng B_i, u_j, v_j tương ứng z_j;

$E = \{(s, x_i) | i = 1, \ldots, n\} \cup \{(x_i, u_j | z_j \in A_i\} \cup \{(u_i, v_j)\} \cup \{v_j, y_i)\} \cup \{(y_i, t)\}$; khả năng thông qua trên các cung là 1;

(2) Tìm luồng cực đại f* trên G;

(3) Nếu val(f*) = n $\Rightarrow$ Xuất $(a_1, \ldots, a_n)$, với a_j tương ứng z_j;

Tổng kết chương 6

- **Về lý thuyết**:

- Khái niệm mạng và luồng trên mạng; luồng cực đại;

- Định lý Ford- Fulkerson;

- Thuật toán tìm luồng cực đại

- **Về các dạng bài tập**

- Viết chương trình mô tả thuật toán.

- Kiểm nghiệm các thuật toán.

Thảo luận


THANK YOU