Problema 1 - Teorema del Límite Central

Carlos Sierra Guzman, Camilo Vega Rámirez

${\bf Contenido}$

Introducción	. 2
Problema 1	. 2
Punto A	. 2
Metodología Punto A	. 2
Resultado A	. 2
Punto B	. 2
Metodología Punto B	. 3
Resultado B	. 3
Punto C	. 3
Metodología Punto C	. 3
Resultado C	. 3
Punto D	. 4
Metodología Punto D	. 4
Resultado D	. 4
Punto E	. 5
Metodología Punto E (10%)	. 5
Resultado E (10%)	. 6
Metodología Punto E (90%)	. 8
Resultado E (90%)	. 8
Conclusión	. 10
Anexos	. 10
Código Librerias	. 10
Código Punto A	. 10
Código Punto B	. 11
Código Punto C	. 11
Código Punto D	. 12
Código Punto E (10%)	
Código Punto E (90%)	

Introducción

Este documento tiene como propósito ofrecer la solución al problema 1 de la Unidad 2 del curso Métodos y Simulación Estadística. Cada sección aborda un punto específico que se debe resolver, y se presenta la metodología utilizada y los resultados obtenidos.

Adicionalmente, al final del documento se incluyen anexos con los códigos utilizados en la elaboración de las metodologías para cada sección. Esto permitirá al lector revisar con detalle cada paso del proceso seguido para llegar a las conclusiones presentadas en el documento. Para facilitar la navegación, el documento cuenta con enlaces que permiten acceder a cada uno de los códigos desde la correspondiente sección.

Problema 1

Teorema del Límite Central

El Teorema del Límite Central es uno de los más importantes en la inferencia estadística y habla sobre la convergencia de los estimadores como la proporción muestral a la distribución normal. Algunos autores afirman que esta aproximación es bastante buena a partir del umbral n>30.

A continuación se describen los siguientes pasos para su verificación:

Punto A

a. Realice una simulación en la cual genere una población de N=1000 (Lote), donde el porcentaje de individuos (supongamos plantas) enfermas sea del 50%.

Metodología Punto A

Se crea la función sim_plantas_enfermas para simular la una proporción de plantas enfermas dada una población.

Se genera la simulación de N=1000 con 50% de plantas enfermas y se genera tabla para comprobar que las cantidades sean las correctas.

Ir a código sección a

Resultado A

plantas_enfermas_50	n
FALSE	500
TRUE	500

Punto B

b. Genere una función que permita: Obtener una muestra aleatoria de la población y Calcule el estimador de la proporción muestral \hat{p} para un tamaño de muestra dado n.

Metodología Punto B

Se crea la función $sample_prop$ para extraer n muestras de un vector x y calcular el estimador de la proporción muestral.

Se verifica el funcionamiento de la función para un n=500 sobre la población simulada.

Ir a código sección b

Resultado B

[1] "Estimador de prueba = 0.482"

Punto C

c. Repita el escenario anterior (b) n=500 veces y analice los resultados en cuanto al comportamiento de los 500 resultados del estimador \hat{p} . ¿Qué tan simétricos o sesgados son los resultados obtenidos? y ¿qué se puede observar en cuanto a la variabilidad?. Realice en su informe un comentario sobre los resultados obtenidos.

Metodología Punto C

Se crea la función rep_sample_prop que nos permite repetir la función sample_prop un numero rep de veces.

Se realiza la simulación de 500 veces el cálculo del estimador \hat{p} con una muestra de $\mathtt{n} = 500$ sobre la población simulada.

Se crea la función gg rain cloud, que toma un vector y genera un gráfico de rain cloud.

Se crea la función medidas_resumen, que toma un vector y muestra en forma de tabla medidas de resumen respecto a simetría, sesgo y variabilidad.

Se usan gg_rain_cloud y medidas_resumen sobre las 500 simulaciones para su análisis.

Ir a código sección c

Resultado C

Distribución estimador para 500 repeticiones con n = 500

0.450 0.475 0.500 0.525 0.550

mean	median	sd	min	max	skewness	kurtosis
0.5007	0.501	0.0162	0.448	0.552	0.0028	-0.1586

Con un tamaño de muestra de n=500 y 500 repeticiones, los estimadores presentan indicadores de skewness y kurtosis bajos, lo que sugiere que los datos son simétricos. Además, tanto la mediana como el promedio del estimador se acercan al valor real de la proporción de la población que es del 50%, lo que indica que la distribución de los estimadores es insesgada. Finalmente, la desviación estándar de los estimadores es del 1.60%, con un rango aproximado de $\pm 5\%$.

Estos resultados demuestran que con un tamaño de muestra de n = 500, la distribución de los estimadores se asemeja a una distribución normal y muestra una buena aproximación a la proporción real de la población.

Punto D

d. Repita los puntos b y c para tamaños de muestra n=5, 10, 15, 20, 30, 50, 60, 100, 200, 500. Compare los resultados obtenidos para los diferentes tamaños de muestra en cuanto a la normalidad. Utilice pruebas de bondad y ajuste (shapiro wilks :shspiro.test()) y métodos gráficos (grafico de normalidad: qqnorm()). Comente ensu informe los resultados obtenidos.

Metodología Punto D

Se realiza la simulación de 500 veces el cálculo del estimador \hat{p} con múltiples tamaños de muestra n (5, 10, 15, 20, 30, 50, 60, 100, 200 y 500) sobre la población simulada, y se colocan en un data frame.

Se crea la función medidas_resumen_multiple, que toma un data frame y muestra en forma de tabla medidas de resumen y test de normalidad de una columna seleccionada agrupados por otra columna seleccionada.

Se crea la función gg_qq_plot, que toma un data frame y realiza gráficos de normalidad tipo qqnorm de una columna seleccionada, agrupados por otra columna seleccionada.

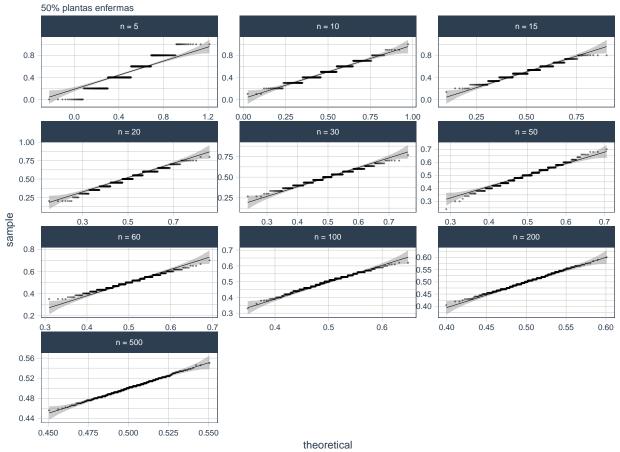
Se usan medidas_resumen_multiple y gg_qq_plot sobre el data frame con las 500 simulaciones para distintos tamaños de nuestra n para su análisis.

Ir a código sección d

Resultado D

n	mean	median	sd	Shapiro-Wilk test P-Value
5	0.4936	0.4000	0.2329	0.0000
10	0.4992	0.5000	0.1534	0.0000
15	0.4995	0.4667	0.1298	0.0000
20	0.5057	0.5000	0.1144	0.0000
30	0.4997	0.5000	0.0852	0.0001
50	0.4972	0.5000	0.0675	0.0017
60	0.5011	0.5000	0.0620	0.0045
100	0.4987	0.5000	0.0485	0.0090
200	0.5002	0.5000	0.0326	0.2231
500	0.5006	0.5020	0.0162	0.4944

qqplot del estimador para 500 repeticiones con n múltiples



Las simulaciones realizadas muestran que a medida que aumenta el tamaño de la muestra en el estudio de plantas enfermas, los estimadores de proporción se aproximan cada vez más a la proporción real de la población, lo cual es indicativo de una buena precisión. Además, se puede observar que la desviación estándar de los estimadores disminuye a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Las gráficas de qqnorm muestran que la distribución de los estimadores se asemeja cada vez más a una distribución normal a medida que se aumenta el tamaño de la muestra. De hecho, el test de Shapiro-Wilk confirma que la distribución se ajusta a una normal a partir de n=200.

En consecuencia, podemos concluir que estas simulaciones demuestran el teorema del límite central, ya que la distribución de la media de nuestras muestras aleatorias de plantas enfermas se aproxima a una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande.

Punto E

e. Repita toda la simulación (puntos a – d), pero ahora para lotes con 10% de plantas enfermas y de nuevo para lotes con un 90% de plantas enfermas. Concluya sobre los resultados del ejercicio.

Metodología Punto E (10%)

Se genera la simulación de $N=1000~{\rm con}~10\%$ de plantas enfermas y se genera tabla para comprobar que las cantidades sean las correctas.

Se realiza la simulación de 500 veces el cálculo del estimador \hat{p} con una muestra de n=500 sobre la población simulada para 10% de plantas enfermas.

Se usan gg_rain_cloud y medidas_resumen sobre las 500 simulaciones de plantas enfermas al 10% para su análisis.

Se realiza la simulación de 500 veces el cálculo del estimador \hat{p} con multiles tamaños de muiestra n (5, 10, 15, 20, 30, 50, 60, 100, 200 y 500) sobre la población simulada con plantas enfermas al 10%, y se colocan en un data frame.

Se usan medidas_resumen_multiple y gg_qq_plot sobre el data frame con las 500 simulaciones para distintos tamaños de nuestra n sobre la población simulada con plantas enfermas al 10% para su análisis.

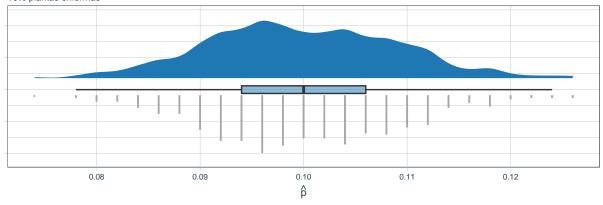
Ir a código sección e

Resultado E (10%)

plantas_enfermas_10	n
FALSE	900
TRUE	100

Distribución estimador para 500 repeticiones con n = 500





mean	median	sd	min	max	skewness	kurtosis
0.0999	0.1	0.0091	0.074	0.126	0.1205	-0.2449

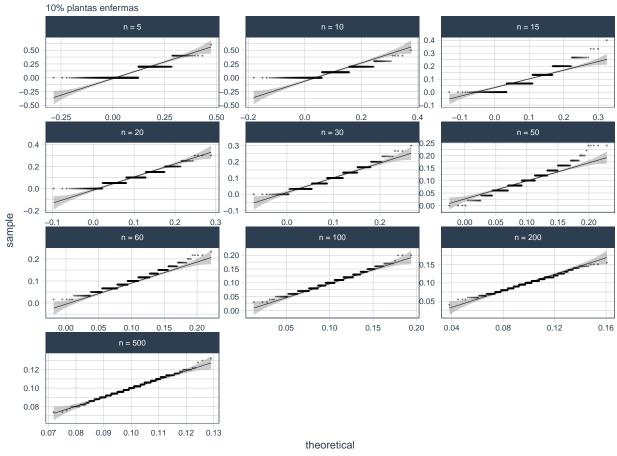
Con una proporción del 10% de plantas enfermas en la población, se ha observado que los estimadores muestran indicadores de skewness y kurtosis bajos. Además, la gráfica de los datos sugiere que se trata de una distribución simétrica. Tanto la mediana como el promedio del estimador se aproximan al valor real de la proporción de la población, lo que indica que la distribución de los estimadores es insesgada. La desviación estándar de los estimadores es del 0.91%, y el rango oscila aproximadamente dentro del $\pm 2\%$.

Estos resultados indican que, con un tamaño de muestra de n=500, la distribución de los estimadores obtenidos a través de la simulación con una proporción del 10% de plantas enfermas se asemeja a una distribución normal y muestra una buena aproximación al valor real de la proporción de la población.

En comparación con la simulación de plantas enfermas al 50%, se observa que la simulación con una proporción del 10% muestra una distribución más aplanada, pero con una variabilidad menor.

n	mean	median	sd	Shapiro-Wilk test P-Value
5	0.0940	0.0000	0.1229	0.0000
10	0.0980	0.1000	0.0904	0.0000
15	0.0968	0.0667	0.0738	0.0000
20	0.0957	0.1000	0.0625	0.0000
30	0.0979	0.1000	0.0548	0.0000
50	0.1019	0.1000	0.0411	0.0000
60	0.1013	0.1000	0.0389	0.0000
100	0.1032	0.1000	0.0293	0.0000
200	0.0994	0.1000	0.0198	0.0027
500	0.1005	0.1000	0.0093	0.0466

qqplot del estimador para 500 repeticiones con n múltiples



En la simulación de plantas enfermas al 10%, se observa que a medida que aumenta el tamaño de la muestra, tanto el promedio como la mediana de los estimadores se aproximan más a la proporción real de la población. Al mismo tiempo, la desviación estándar disminuye. Las gráficas de qqnorm muestran que, para muestras de tamaño n=5 a n=60, las distribuciones suelen tener mayor peso hacia los porcentajes menores a 10%, lo que impide alcanzar la normalidad. Sin embargo, este fenómeno desaparece al llegar a n=100, donde la distribución de los estimadores se asemeja más a una distribución normal. Solo a partir de n=500 se logra pasar el test de Shapiro-Wilk para normalidad.

En conclusión, estas simulaciones confirman el teorema del límite central, ya que la distribución de la media de las muestras aleatorias de plantas enfermas al 10% se aproxima a una distribución normal cuando el

tamaño de la muestra es grande. Sin embargo, para esta simulación en particular, fue necesario un 50% de muestras de la población para alcanzar la normalidad mediante un test estadístico. Gráficamente, se puede decir que la aproximación a una distribución normal comienza a partir de n = 100.

Metodología Punto E (90%)

Se genera la simulación de N=1000 con 90% de plantas enfermas y se genera tabla para comprobar que las cantidades sean las correctas.

Se realiza la simulación de 500 veces el cálculo del estimador \hat{p} con una muestra de n=500 sobre la población simulada para 90% de plantas enfermas.

Se usan gg_rain_cloud y medidas_resumen sobre las 500 simulaciones de plantas enfermas al 90% para su análisis.

Se realiza la simulación de 500 veces el cálculo del estimador \hat{p} con multiles tamaños de muiestra n (5, 10, 15, 20, 30, 50, 60, 100, 200 y 500) sobre la población simulada con plantas enfermas al 90%, y se colocan en un data frame.

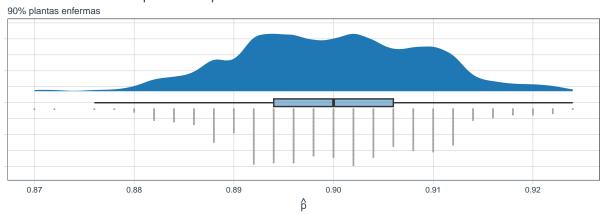
Se usan medidas_resumen_multiple y gg_qq_plot sobre el data frame con las 500 simulaciones para distintos tamaños de nuestra n sobre la población simulada con plantas enfermas al 90% para su análisis.

Ir a código sección e

Resultado E (90%)

plantas_enfermas_90	n
FALSE	100
TRUE	900

Distribución estimador para 500 repeticiones con n = 500



mean	median	sd	min	max	skewness	kurtosis
0.8998	0.9	0.0092	0.87	0.924	-0.0223	-0.273

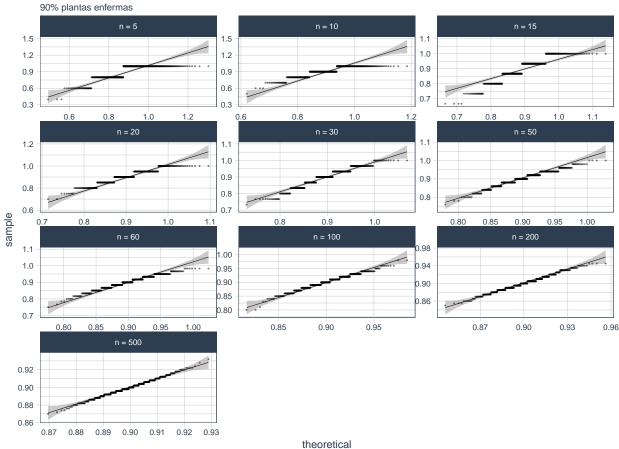
Con una proporción de plantas enfermas del 90%, se observa un comportamiento similar al de plantas enfermas al 10%. Los indicadores de skewness y kurtosis son bajos, la gráfica es algo aplanada y tanto la mediana como el promedio del estimador se aproximan al valor real de la proporción de la población, que

en este caso es del 90%. Además, la desviación estándar es baja, con un valor del 0.92%, y el rango oscila alrededor de $\pm 2\%$. En general, los datos muestran una distribución in-sesgada y baja variabilidad.

Al igual que en la simulación con plantas enfermas al 10%, se puede observar que con un tamaño de muestra de n=500, la distribución de los estimadores de la simulación con plantas enfermas al 90% se asemeja a una distribución normal y muestra una buena aproximación a la proporción real de la población.

n	mean	median	sd	Shapiro-Wilk test P-Value
5	0.8984	1.0000	0.1313	0.0000
10	0.9030	0.9000	0.0916	0.0000
15	0.9017	0.9333	0.0765	0.0000
20	0.9053	0.9000	0.0618	0.0000
30	0.8991	0.9000	0.0550	0.0000
50	0.9042	0.9000	0.0403	0.0000
60	0.8998	0.9000	0.0401	0.0000
100	0.9007	0.9000	0.0272	0.0000
200	0.9011	0.9000	0.0179	0.0015
500	0.8993	0.8980	0.0096	0.1224

qqplot del estimador para 500 repeticiones con n múltiples



En la simulación con plantas enfermas al 90%, se observa que a medida que aumenta el tamaño de la muestra, tanto el promedio como la mediana de los estimadores se acercan cada vez más a la proporción real de la población (en este caso, 90%), y su desviación estándar disminuye. Además, al analizar las gráficas de qqnorm para muestras de tamaño n=5 a n=60, se nota que las distribuciones tienen un mayor peso hacia

los porcentajes mayores al 90% y no se ajustan a la normalidad. Al llegar a n=100, las gráficas se asemejan más a la normalidad pero con algunos puntos fuera de los dos extremos. Solo al llegar a n=200 se observa una clara normalidad y solo en n=500 se logra pasar la prueba de Shapiro-Wilk con un p-valor de 0.12.

Por lo tanto, se puede concluir que estas simulaciones demuestran una vez más el teorema del límite central, ya que la distribución de la media de las muestras aleatorias de plantas enfermas al 90% se aproxima a una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es grande. Sin embargo, de los tres porcentajes de plantas enfermas vistos en este documento, se nota que la simulación de plantas enfermas al 90% necesitó un mayor tamaño de muestra para acercarse a la normalidad.

Conclusión

Durante los ejercicios en los que se utilizaron simulaciones para analizar las proporciones de poblaciones de plantas enfermas, se pudo demostrar el teorema del límite central. Según este teorema, "si se cumplen ciertas condiciones, la distribución de la media de una muestra aleatoria de una población se aproxima a una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande". Al aumentar el tamaño de la muestra en nuestras simulaciones, se pudo observar cómo las estimaciones tomaban formas cada vez más similares a la distribución normal.

Además, se observó que para las proporciones simuladas, el umbral de normalidad fue distinto a n>30, llegando a ubicarse por encima de n>60 cuando la proporción era del 50%, y por encima de n>200 cuando la proporción se acercaba a los extremos (10% y 90%). Esto sugiere que, en el caso de las proporciones, se necesitan tamaños de muestra más grandes para alcanzar niveles de normalidad.

Anexos

Código Librerias

```
library(tidyverse)
                        # Transformación de datos
library(normtest)
                        # Pruebas de normalidad
library(knitr)
                        # Renderizar tablas
library(ggdist)
                        # Expansión de graficas de ggplot
library(tidyquant)
                        # Tema de graficas de gaplot
library(nortest)
                        # Pruebas de normalidad
library(rapportools)
                        # Pruebas de normalidad
library(qqplotr)
                        # QQplot usando gaplot
```

Código Punto A

Volver a metodología sección a

```
# Función para generar población n, con una proporción prop de plantas enfermas
sim_plantas_enfermas <- function(n, prop){
   p <- round(n*prop)
   q <- n-p
   c(rep(TRUE,p), rep(FALSE,q))</pre>
```

```
# Simulando para N = 1000 y 0.5 de plantas enfermas
plantas_enfermas_50 <- sim_plantas_enfermas(1000, 0.5)

# Tabla para visualizar simulación
table(plantas_enfermas_50) %>%
    as_tibble() %>%
    kable()
```

Código Punto B

Volver a metodología sección b

```
# Función para tomar una muestra de tamaño n de un vector x y calcular la
# proporción del estimador.
sample_prop <- function(x, n){
    sample(x, n) %>%
        sum()/n
}

# Reproducibilidad
set.seed(4321)

# Test de función con n = 500, sobre el vector plantas_enfermas_50
str_c("Estimador de prueba = ",
sample_prop(plantas_enfermas_50,500))
```

Código Punto C

Volver a metodología sección c

```
# Función para repetir la función sample_prop un rep número de veces
rep_sample_prop <- function(x, n, rep){</pre>
    map_dbl(1:rep, ~ sample_prop(x,n))
}
# Reproducibilidad
set.seed(4321)
# Creación de 500 estimadores, para un n = 500 de muestras de plantas_enfermas_50
muesta_repetida_50 <- rep_sample_prop(plantas_enfermas_50,500, 500)</pre>
# Función para crear grafico de rain cloud sobre un vector
gg_rain_cloud <- function(x, title, subtitle){</pre>
    ggplot(x %>% as_tibble() , aes( y = value)) +
    stat_halfeye(adjust = 0.5, justification = -0.2, .width = 0, point_colour = NA,
                 fill = "#1F78B4") +
    geom_boxplot(width = 0.12, outlier.color = NA, alpha = 0.5, fill = "#1F78B4") +
    stat_dots(side = "left", justification = 1.1, fill = "#1F78B4") +
    coord flip() +
    theme_tq() +
```

```
scale_fill_tq(theme = "light") +
    theme(axis.text.y = element_blank(),
          text = element_text(size = 8)) +
   xlab("") +
   ylab(expression(hat("p"))) +
    ggtitle(label = title,
            subtitle = subtitle)
}
# Función para crear tabla con medidas de resumen sobre un vector
medidas resumen <- function(x){</pre>
   x %>%
   as_tibble() %>%
    summarise(mean = mean(value), median = median(value), sd = sd(value),
              min = min(value), max = max(value),
              skewness = skewness(value), kurtosis= kurtosis(value)) %>%
   mutate(across(where(is.numeric), ~ round(.,4))) %>%
   kable()
}
# Creación rain cloud y tabla de resumen sobre las 500 repeticiones con muestra
# n = 500, sobre la población simulada
gg_rain_cloud(
   muesta_repetida_50,
    "Distribución estimador para 500 repeticiones con n = 500",
    "50% plantas enfermas")
medidas_resumen(muesta_repetida_50)
```

Código Punto D

Volver a metodología sección d

```
# Reproducibilidad
set.seed(4321)
# Creación de 500 estimadores, para múltiples n de muestras de plantas_enfermas_50
muesta_repetida_multiple_50 \leftarrow map_df(c(5, 10, 15, 20, 30, 50, 60, 100, 200, 500),
                                      ~ tibble(
                                         p_hat = rep_sample_prop(plantas_enfermas_50,
                                                                   ., 500),
                                         n = as_factor(.)))
# Función para crear tabla con medidas de resumen sobre un data frame, para una
# columna agrupada por otra columna
medidas_resumen_multiple <- function(df, value, group){</pre>
  value <- enquo(value)</pre>
  group <- enquo(group)</pre>
  df %>%
    group_by(!!group) %>%
    summarise(mean = mean(!!value), median = median(!!value),
              sd = sd(!!value),
              `Shapiro-Wilk test P-Value` = shapiro.test(!!value)$p.value) %>%
    ungroup() %>%
```

```
mutate(across(where(is.numeric), ~ round(.,4))) %>%
   kable()
}
# Función para crear grafico de qqplot sobre un data frame, para una columna
# agrupada por otra columna
gg_qq_plot <- function(df, value, group, title, subtitle){</pre>
 ggplot(df, aes(sample = {{value}})) +
   stat_qq_band(alpha = 0.5) +
   stat_qq_line(linewidth = 0.1) +
   stat_qq_point(alpha = 0.5, size = 0) +
   facet_wrap(vars(factor(str_c("n = ",{{group}})),
                            levels = c(str_c("n = ", c(5, 10, 15, 20, 30, 50, 60,
                                                       100, 200, 500)))),
               nrow = 4, scales = "free") +
   theme_tq() +
    theme(panel.spacing = unit(0, "lines"),
          text = element_text(size = 8)) +
    ggtitle(label = title,
            subtitle = subtitle)
}
# Creación de tabla de resumen y applots sobre las 500 repeticiones con muestra
# n múltiples, sobre la población simulada
medidas resumen multiple (muesta repetida multiple 50, p hat, n)
gg_qq_plot(muesta_repetida_multiple_50, p_hat, n,
           "gaplot del estimador para 500 repeticiones con n múltiples",
           "50% plantas enfermas")
```

Código Punto E (10%)

Volver a metodología sección e

```
# Simulando para N = 1000 y 0.1 de plantas enfermas
plantas_enfermas_10 <- sim_plantas_enfermas(1000, 0.1)

# Tabla para visualizar simulación
table(plantas_enfermas_10) %>%
        as_tibble() %>%
        kable()

# Reproducibilidad
set.seed(1234)

# Creación de 500 estimadores, para un n = 500 de muestras de plantas_enfermas_10
muesta_repetida_10 <- rep_sample_prop(plantas_enfermas_10,500, 500)

# Creación rain cloud y tabla de resumen sobre las 500 repeticiones con muestra
# n = 500, sobre la población simulada al 10% de plantas enfermas
gg_rain_cloud(
muesta_repetida_10,
"Distribución estimador para 500 repeticiones con n = 500",</pre>
```

```
"10% plantas enfermas")
medidas_resumen(muesta_repetida_10)
# Reproducibilidad
set.seed(1234)
\# Creación de 500 estimadores, para múltiples n de muestras de plantas_enfermas_10
muesta_repetida_multiple_10 \leftarrow map_df(c(5, 10, 15, 20, 30, 50, 60, 100, 200, 500),
                                     ~ tibble(
                                         p_hat = rep_sample_prop(plantas_enfermas_10,
                                                                 ., 500),
                                        n = as_factor(.)))
# Creación de tabla de resumen y applots sobre las 500 repeticiones con muestra
# n múltiples, sobre la población simulada al 10% de plantas enfermas
medidas resumen multiple(muesta repetida multiple 10, p hat, n)
gg_qq_plot(muesta_repetida_multiple_10, p_hat, n,
"qqplot del estimador para 500 repeticiones con n múltiples",
"10% plantas enfermas")
Código Punto E (90%)
Volver a metodología sección e
# Simulando para N = 1000 y 0.9 de plantas enfermas
plantas_enfermas_90 <- sim_plantas_enfermas(1000, 0.9)</pre>
# Tabla para visualizar simulación
table(plantas_enfermas_90) %>%
    as_tibble() %>%
    kable()
# Reproducibilidad
set.seed(1234)
# Creación de 500 estimadores, para un n = 500 de muestras de plantas_enfermas_90
muesta_repetida_90 <- rep_sample_prop(plantas_enfermas_90,500, 500)</pre>
# Creación rain cloud y tabla de resumen sobre las 500 repeticiones con muestra
# n = 500, sobre la población simulada al 90% de plantas enfermas
gg_rain_cloud(
muesta_repetida_90,
"Distribución estimador para 500 repeticiones con n = 500",
"90% plantas enfermas")
medidas_resumen(muesta_repetida_90)
# Reproducibilidad
set.seed(1234)
# Creación de 500 estimadores, para múltiples n de muestras de plantas enfermas 90
```