

Topological solitons in QCD matter under an external magnetic field

Kentaro Nishimura

KEK Theory Center, Tsukuba 305-0801, Japan

目次

1	Introduction	1
2	Effective field theory of QCD	3
2.1	Chiral Lagrangian	3
2.2	Mass term	7
3	Anomalous term in ChPT	8
3.1	Chiral magnetic effect	8
3.2	Chiral hydrodynamics with the triangle anomaly	12
3.3	Anomaly matching for the chiral separation effect	16
3.4	Goldstone-Wilczek current	17
4	Chiral soliton lattice in QCD	19
4.1	Chiral soliton lattice	19
4.2	Ground state	23
4.3	Charged pion fluctuation	25
5	Domain wall Skyrmion in QCD	26
5.1	Non-abelian sine-Gordon soliton	26
5.2	Effective field theory of the non-abelian sine-Gordon soliton	29
5.3	Baby Skyrmion in the non-Abelian sine-Gordon soliton	33
5.4	Ground state	35
付録 A	ゲルマン・レヴィの方法	39
付録 B	Moduli approximation	40

1 Introduction

本セミナーでは、タイトルにあるようにソリトンと呼ばれる空間に局在した場の配位を考える。場の量子論で基底状態を求めるとき、ポテンシャルを最小にする空間的に「一様」な配位を考えることが多いでしょう。空間的に変化した配位は運動項が有限になるので、エネルギー的には一様な方が得なのは当然のように思われる。

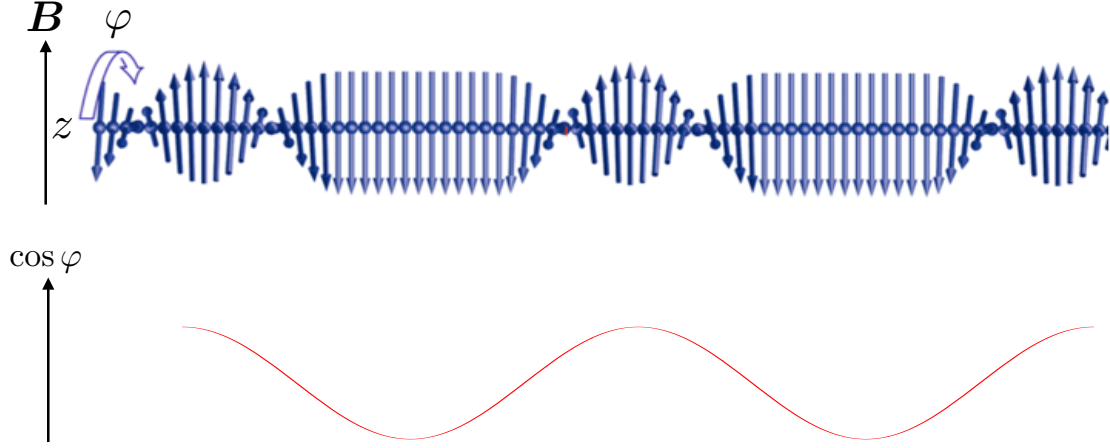


図 1. カイラル磁性体の概略図

ですが、時としてソリトンが基底状態に現れることがあります。図 1 のような z 軸と垂直にスピン自由度があるような磁性体を考えよう。^{*1} さらに、次のようなハミルトニアンで記述されるとする：

$$H = -J \sum_i \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} + \mathbf{B} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i - D \cdot \sum_i \mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_{i+1}. \quad (1.1)$$

スピンベクトルを $\mathbf{S}_i = S(\sin \theta_i \cos \varphi_i, \sin \theta_i \sin \varphi_i, \cos \theta_i)$ として、連続極限を取ると

$$\tilde{H} = JS^2 a_0 \left[\frac{1}{2} (\partial_z \varphi)^2 + \frac{B_x}{JS^2 a_0^2} \cos \varphi - \frac{D}{Ja_0} \partial_z \varphi \right] \quad (1.2)$$

となり、sine-Gordon 模型に全微分項を加えたものに帰着する。第一項目は $J > 0$ のとき、強磁性的な相互作用を表し、隣り合ったスピンを揃える。第二項目は Zeeman 効果を表しており、磁場 \mathbf{B} が系に印加されたとき、スピンの方向に揃う効果を表している。第三項目は Dzyaloshinskii-Moriya (DM) 相互作用と呼ばれており、隣り合ったスピンを捻る効果を表している。磁場を $\mathbf{B} = B\hat{y}$ と軸と垂直方向に加えるとする。磁場が十分に強い場合、磁場の方向にスピンの方向が完全に揃うと基底状態となる。磁場と DM 相互作用が同程度だと、捻れた構造が周期的に並んだ結晶状態が基底状態になる。図 1 を見ると、強磁性的な部分はポテンシャルの最小値であり、捻れた部分は隣り合った真空を繋ぐ配位であり、 φ は空間的に局在していることが分かる。

この捻れた配位で重要なのは、トポロジカルチャージを持っていることでしょう。今、ソリトンが周期的に並んでいるので、周期の端点を同一視する。よって、実空間は S^1 となる。また、 φ の配位空間も 2π 周期を持っているので、こちらも S^1 である。よって、実空間から配位空間への写像を考えたとき、巻き付き数

$$Q_{\text{sG}} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell dz \partial_z \varphi = \varphi(\ell) - \varphi(0) \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

^{*1} ここでは時間も実力もないので、ソリトンの簡単な説明として空間一次元で現れるソリトンを扱う。より深く・広くソリトンを学びたい場合は、教科書 [1–3] を参照すると良い。また、唐突に物性系の話をして驚いたかもしれないが、実はこの一次元的なトポロジカルソリトンも QCD で現れることを後ほど議論する。

は整数値を持つ。一周で何回巻いたかを測るには、境界での φ の値の差を調べれば良いことを表している。これは配位空間に実空間が何回巻き付くかという位相幾何学的な量であることが重要である。このように位相幾何学的なトポロジカル数で特徴付けられる空間的に局在した場の配位をトポロジカルソリトンと呼ぶ。

本日の対象のもう一つは磁場中の QCD 物質であり、基本的な問題として相図を決定することが挙げられる。本セミナーではバリオン数化学ポテンシャル μ_B と磁場 B の相図、特にハドロン相に μ_B と B を加えたときに何が起るかを議論したい。

2 Effective field theory of QCD

QCD ラグランジアン、特に軽いクォークをもつアップ・ダウンを考慮した $N_f = 2$ の QCD ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{YM}}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - M)q, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}. \quad (2.3)$$

で与えられる。クォーク質量は $M = \text{diag}(m_u, m_d)$ で表すことができる。このラグランジアンを直接解けるのであればそれに越したことはないが、残念ながらハドロン相などは非摂動領域にあり解析的なアプローチはとても難しい。このような場合に取られるアプローチの一つとして、対称性とその破れのパターンに基づいた低エネルギー有効理論 (Effective Field Theory, EFT) が挙げられる。以下ではカイラル対称性が自発的に破れた相における EFT を構築する。

本章では、カイラルアノマリーや有限密度に関係しない、よく知られるカイラルラグランジアンを書き下す。本セミナーで本質的となる部分は次章で議論する。

2.1 Chiral Lagrangian

この節ではまず、クォーク質量のゼロ質量極限で QCD ラグランジアンが持つカイラル対称性の説明を行う。このために右巻きと左巻きクォークを導入する：

$$q_R \equiv P_R q, \quad q_L \equiv P_L q. \quad (2.4)$$

P_R と P_L はそれぞれカイラリティ ± 1 成分スピノールへの射影演算子で

$$P_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad P_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (2.5)$$

で与えられる。行列 γ_5 は $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ と定義され、カイラリティとは γ_5 の固有値である。ここで、カイラリティ $+1$ を右巻き、 -1 を左巻きと呼ぶ。 P_R と P_L は射影演算子の性質

$$P_R^2 = P_L^2 = 1, \quad (2.6)$$

$$P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad (2.7)$$

$$P_R + P_L = 1, \quad (2.8)$$

を満たすことに注意する。

QCD ラグランジアン (2.1) はクォーク質量がゼロの極限で大域的な $U(2)_R \times U(2)_L$ 変換

$$q_R \rightarrow e^{-i\theta_0^R} V_R q_R, \quad V_R = e^{-i\tau_a \theta_a^R}, \quad (2.9)$$

$$q_L \rightarrow e^{-i\theta_0^L} V_L q_L, \quad V_L = e^{-i\tau_a \theta_a^L}, \quad (2.10)$$

に対して不変である。 θ_0^R, θ_a^R と θ_0^L, θ_a^L は、それぞれ $U(2)_R$ と $U(2)_L$ 変換に対する変換パラメータである。また、 τ_a は $SU(2)$ 変換の生成子であり、Pauli 行列である。この対称性は QCD におけるカイラル対称性であり、クォーク質量が有限の場合にあらわに破れる対称性である。現実的な QCD においてクォーク質量は有限であり、カイラル対称性は完全に破れている。しかし、軽いクォークであるアップ、ダウンの質量は、QCD の典型的なエネルギースケールである $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}$ に比べて小さい。よって、古典的なラグランジアンのレベルでは、軽い 2 フレーバー QCD は近似的なカイラル対称性 $SU(2)_R \times SU(2)_L$ を持つと見なすことができる。 $\theta_0^R = \theta_0^L$ の場合は、バリオン数に対する $U(1)_B$ 対称性に対応し、QCD 内でこの対称性は保存している。一方、 $\theta_0^R = -\theta_0^L$ の場合は、QCD anomaly の効果によってあらわに破れていることを注意する。

さて、QCD 相図の中で低温・低密度に相当するハドロン相は、カイラル凝縮

$$\Phi = \langle \bar{q}_R q_L \rangle, \quad (2.11)$$

と呼ばれるオーダーパラメータによって特徴づけられる。カイラル凝縮によってカイラル対称性 $SU(2)_R \times SU(2)_L$ は $SU(2)_V$ まで自発的に破れる。その結果として、 $2 \cdot 3 - 3 = 3$ 個の南部・ゴールドストーン (NG) 粒子が現れ、これらが中間子に対応する。

一般的に連続的対称性が自発的に破れた場合、その結果として現れる NG 粒子は軽く、低いエネルギーで励起するために、理論の低エネルギーで有効な自由度となる。そこで今、理論の持つ対称性 G が自発的に H へ破れると仮定して、その NG 粒子に対する低エネルギー有効理論の構築方法を簡単に解説する。

説明のための簡単な模型として、質量 m の中性スカラー場

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

に対する以下のラグランジアンを考える：

$$\mathcal{L} = K - V, \quad (2.13)$$

$$K = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^T \cdot \partial^\mu \phi, \quad (2.14)$$

$$V = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4, \quad \lambda > 0. \quad (2.15)$$

このラグランジアンは $G = SO(3)$ 変換

$$\phi \rightarrow \phi' = R\phi \quad (2.16)$$

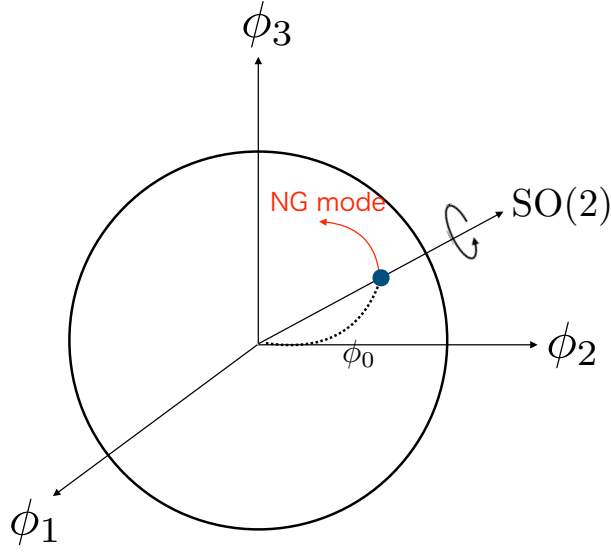


図 2. SO(3) から SO(2) への自発的対称性の破れを表す模式図。半径 ϕ_0 の球面はエネルギー最小面であり、この面上で点の一つ選ぶことで SO(3) 対称性が SO(2) 対称性まで破れる。黒い点が基底状態であり、この点を通る軸周りの回転に対しては基底状態が不変であることから SO(2) まで破れることになる。また、赤矢印は半径 ϕ_0 の球面上に沿っており、この面上は等エネルギー面であることからこの矢印で表現される励起状態はギャップレスである。

に対して不変である。ここで、行列 $R \in \text{SO}(3)$ は回転行列である。このポテンシャル V を最小化すると

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\phi} &= -m^2\phi + 4\lambda\phi^3 = 0, \\ \phi_0 &= \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。ここで、 $\phi \equiv \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}$ と定義する。この理論の基底状態は半径 $\phi_0 = m/(2\sqrt{\lambda})$ の球面上の任意の点であり、図 2 では黒い点を基底状態である。その点を基底状態にとると対称性 $G = \text{SO}(3)$ が $H = \text{SO}(2)$ へと自発的に破れる。破れた先の対称性が SO(2) であることは、図 2 から青い丸を通る直線周りの回転に対して基底状態が不変であることから理解することができる。また、対称性が自発的に破れた結果現れる NG モードは、球面に沿った赤矢印方向の励起モードでギャップレスである。ここで、球面上は半径一定であることから等ポテンシャル面なので、図 2 中の矢印で表される NG モードはギャップレスである。この NG モードは元の対称性 G のなかで、 H に対する変化分は同一視することで得られる。すなわち、この理論における基底状態は G/H で特徴付けられる。実際に、 $\text{SO}(3)/\text{SO}(2) \cong S^2$ で NG モードは二次元球面 S^2 となり、図 2 で説明した内容と一致している。このように、一般的に対称性 G が自発的に H まで破れた場合、その基底状態である NG モードは G/H の元で表せばよいことになる。

上の議論を QCD の場合に適用する。すなわち、QCD の持つカイラル対称性 $G = \text{SU}(2)_R \times \text{SU}(2)_L$ がベクトル対称性 $H = \text{SU}(2)_V$ へと自発的に破れた状況を考える。元の対称性 G の元は

$$G = (V_L, V_R) \quad (2.18)$$

と書くことができる（式 (2.9) と (2.10) で定義した）。自発的に破れた先の対称性 H は、 $\theta^A \equiv \theta_R^A = \theta_L^A$ の場合である。従って、その元は

$$h = (g, g), \quad g = e^{-i\theta_a \tau_a} \quad (2.19)$$

となる。ここで g は $SU(2)$ の元であることから、キャンベル・ベーカー・ハウスドルフの公式から適当な $SU(2)$ の元 V を用いて

$$g = V_R^\dagger V \quad (2.20)$$

と表すことができる。よって、任意の g は任意の V を考えればよいことになる。この時、

$$\begin{aligned} Gh &= (V_L V_R^\dagger V, V_R V_R^\dagger V) \\ &= (V_L V_R^\dagger V, V) \\ &= (V_L V_R^\dagger, 1) (V, V) \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる。この式から

$$\frac{SU(2)_R \times SU(2)_L}{SU(2)_V} \cong SU(2) \quad (2.22)$$

となる。NG モードをパラメトライズする場 Σ は $SU(2)$ の元であるので、以下のようになる：

$$\Sigma = \exp \left(\frac{i\lambda_a \pi_a}{f_\pi} \right), \quad (2.23)$$

$$\tau_a \pi_a = \begin{pmatrix} \pi_0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi_0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

また、指数の方に乗っているパラメーターが中間子に相当することになる。また、式 (2.21) から Σ はカイラル変換に対して

$$\Sigma \rightarrow V_L \Sigma V_R^\dagger \quad (2.25)$$

と変換する。以上の議論からカイラル対称性が自発的に破れた結果現れる NG モードを Σ で表すことができ、その変換則は式 (2.21) であることを示した。よって、 Σ の低エネルギー有効理論は、カイラル対称性不変なラグランジアンを微分展開で書き下すことで構成できる。微分の二次までのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu \Sigma \cdot \partial^\mu \Sigma^\dagger) \quad (2.26)$$

となる。 f_π は π 中間子崩壊定数と呼ばれ、カイラル対称性の自発的破れのエネルギースケール $\Lambda_\chi = 4\pi f_\pi$ を与える [4, 5]。QCD の低エネルギー有効理論はカイラル摂動論と呼ばれ、QCD の対称性とその破れのみを用いているので、模型に依存しない性質を調べることができる。

式 (2.26) に電磁場を結合させるため、この式を $U(1)_{\text{em}}$ ゲージ不変な形にする。そのためにまず、カイラル摂動論内で $U(1)_{\text{em}}$ ゲージ変換はどのように表現されるかを確認する。2 フレーバーの自由度に

対して、電磁相互作用に関する位相変換は

$$q \rightarrow \exp(iQ\theta) q, \quad (2.27)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

と表すことができる。ここで、行列 Q はアップ、ダウクォークの電荷であることを注意する。従って、場 Σ に対しては

$$\Sigma \rightarrow e^{iQ\theta} \Sigma e^{-iQ\theta}, \quad (2.29)$$

$$\Sigma \rightarrow \Sigma + i\epsilon(x)[Q, \Sigma] \quad (2.30)$$

となる。一行目は有限の大きさ、二行目は微小変換である。ゲージ不変なラグランジアンを書き下す際に重要なことは、ゲージ場を導入してゲージ変換に対して共变的に変換する共変微分を構成することである。場 Σ に対しては、そのような共変微分を

$$D_\mu \Sigma \equiv \partial_\mu \Sigma + ieA_\mu [Q, \Sigma] \quad (2.31)$$

と定義すると、ゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon(x), \quad (2.32)$$

$$\Sigma \rightarrow e^{iQ\epsilon(x)} \Sigma e^{-iQ\epsilon(x)}, \quad (2.33)$$

に対して共変な微分となる。式 (2.26) は微分を共変微分に置き換えれば、 $U(1)_{\text{em}}$ ゲージ不変な作用を構成することができ、その作用は

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} (D_\mu \Sigma \cdot D^\mu \Sigma^\dagger) \quad (2.34)$$

となる。

2.2 Mass term

先まで考えていたカイラル対称性 $SU(2)_R \times SU(2)_L$ は、クォーク質量がゼロの場合に厳密に成立する対称性で、現実の QCD ではクォーク質量は有限である。したがって、カイラル対称性は近似的な対称性であり、このあらわな破れによって中間子は有限の質量を持つことになる。この節では、中間子の質量項はカイラル摂動論の枠組みでどのように記述されるのか考えることにする。

カイラル摂動論においてカイラル対称性をあらわに破る項の変換則は、QCD ラグランジアンにおける質量項の変換則と一致しているべきであろう。さて、QCD ラグランジアンの質量項は以下のように書ける：

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\bar{q} M q = -\bar{q}_L M q_R - \bar{q}_R M q_L. \quad (2.35)$$

M は各フレーバーの質量をまとめた行列であり、以下のように定義する：

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

式 (2.2) でも類似の質量行列を定義した。さて、この行列の要素は定数であるが、カイラル変換に対して

$$M \rightarrow e^{-2i\theta_0} V_L M V_R^\dagger \quad (2.37)$$

と変換する行列の特定の値をとったものと捉えよう。よって、行列 M を用いれば、質量項はカイラル変換に対して不変となる。このようにある変換に対して不変とならない項を不変にするため、その変換に対して値が変化する関数と見なす。この関数をスプリオン場と呼ぶ。低エネルギー有効理論であるカイラル摂動論の質量項も行列 M を用いると、カイラル変換に対して不変となるであろう。そのようなラグランジアンは行列 M の一次までで

$$\mathcal{L}_{\text{ChPT}}^{\text{mass}} = B \text{tr} [(MU) + \text{h.c.}] \quad (2.38)$$

となる。 B は未定パラメーターであるが、中間子の質量と比較することで

$$\frac{1}{4} f_\pi^2 m_\pi^2 = \frac{B(m_u + m_d)}{2} \quad (2.39)$$

とカイラル摂動論に現れるパラメータで表すことが出来る。

式 (2.34) と (2.38) と合わせた

$$\mathcal{L}_{\text{ChPT}} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{ChPT}}^{\text{mass}} \quad (2.40)$$

がよく知られているカイラルラグランジアンである。

3 Anomalous term in ChPT

前章は通常よく知られているカイラルラグランジアンを対称性とその破れのパターンに従って書き下した。この章では、外部磁場とバリオン化学ポテンシャルが存在する場合に現れる有効作用を求めたい。そのためには、カイラル磁気効果と呼ばれる相対論的なフェルミオンに対して外部磁場を加えると、磁場に沿った方向へと電流が生じるカイラル磁気効果 (Chiral Magnetic Effect, CME) が本質的となる。

3.1 Chiral magnetic effect

外部磁場中

$$A^i = \begin{cases} Bx^1 & (i = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.1)$$

中のディラック方程式

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi(x) = 0 \quad (3.2)$$

の分散関係は、カイラリティ $+1$ に対しては

$$\omega = \begin{cases} p_z & (n = 0) \\ \pm \sqrt{p_z^2 + 2neB} & (n \neq 0) \end{cases} \quad (3.3)$$

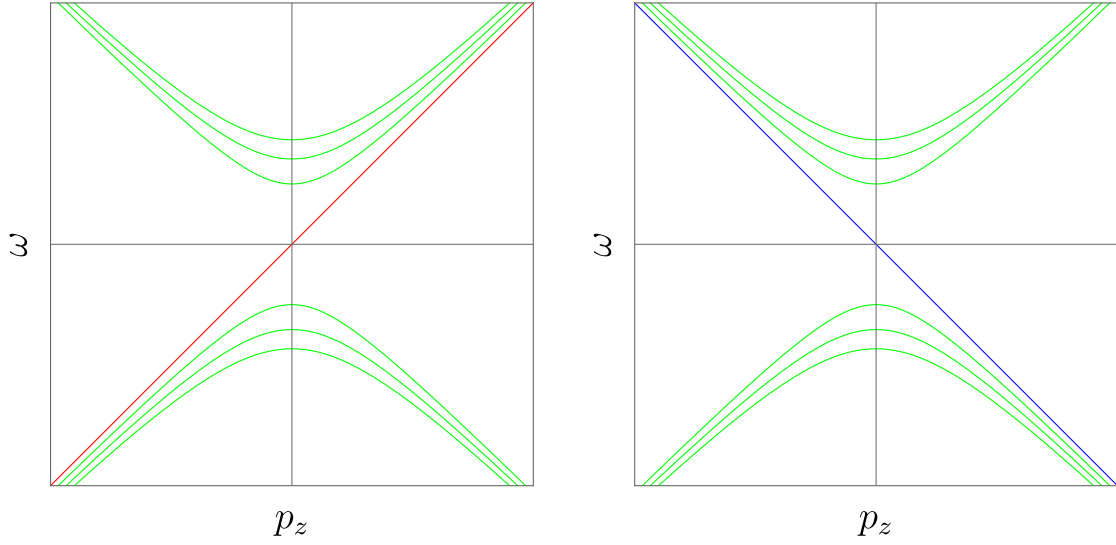


図 3. 磁場中のディラックフェルミオンの分散関係。(左図) カイラリティ +1 の分散関係で、赤実線はギャップレスモードであり、緑線は \sqrt{B} に比例した質量を持っているモードである。(右図) カイラリティ -1 の分散関係で、青実線はギャップレスモードであり、緑線は \sqrt{B} に比例した質量を持っているモードである。

となる。但し、 $n = 0, 1, 2, \dots$ はランダウ準位の量子数を表す整数である。また、カイラリティ -1 に対しては

$$\omega = \begin{cases} -p_z & (n = 0) \\ \pm \sqrt{p_z^2 + 2neB} & (n \neq 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

となる。 $n = 0, 1, 2, \dots$ はカイラリティ +1 の場合と同じくランダウ準位の量子数を表す整数である。最低エネルギー状態に対してカイラリティ +1 に対しては $\omega = p_z$ というギャップレスモードが、カイラリティ -1 に対しては $\omega = -p_z$ というギャップレスモードが生じる (図 3)。これは、磁場の方向に対してスピン偏極が起きて、カイラリティ +1 の粒子はスピンと平行の方向に進み、カイラリティ -1 の粒子はスピンと反平行の方向へと進むことを示している。直感的には、左巻き・右巻きフェルミオン両方とも磁場の方向にスピン偏極し、進行方向は左巻き粒子はスピンと反平行の向き、右巻き粒子はスピンと平行な向きになると理解できる。

この分散関係を用いて CME を導出しよう。特に CME には先程説明したギャップレスモードのみが寄与し、その輸送係数がカイラルアノマリー係数と一致することを確認する。

カイラル輸送現象について議論に先立ち、電場を印加した場合、粒子数カレントが流れる理由をパリティ変換の観点から見ておく。電気伝導率を σ としたとき、電場 \mathbf{E} によって電流 \mathbf{j} が流れることは

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.5)$$

と表すことができる。対称性の観点から式 (3.5) は空間反転に対して両辺とも符号が反転するので、カイラリティインバランスが存在せず σ の符号反転が起きなくても電流は生じる。一方で、磁場によって電

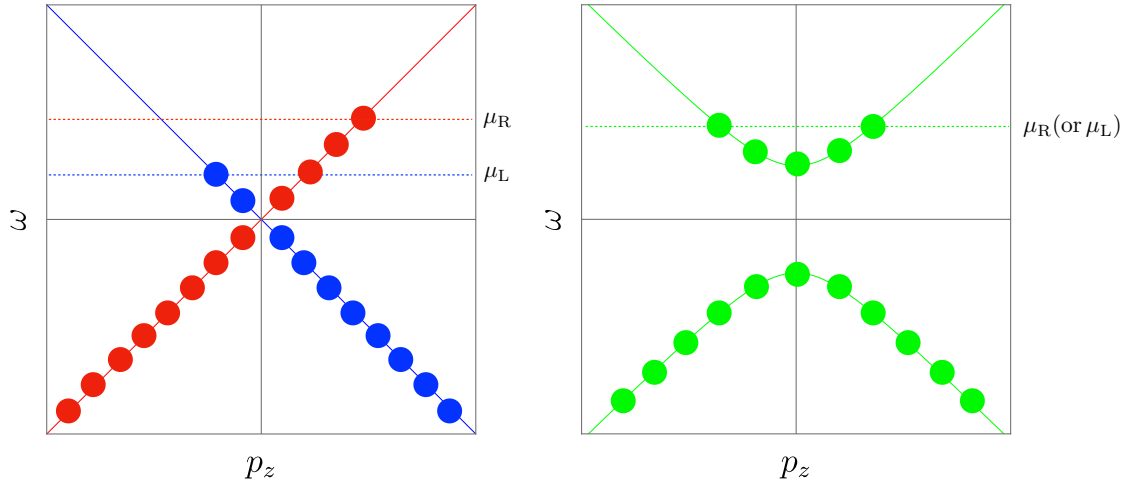


図 4. CME の概略図

流が誘起されると仮定する：

$$\mathbf{j} = \sigma_B \mathbf{B} . \quad (3.6)$$

パリティ変換をすると電流は極性ベクトルなので符号反転するが、磁場は極性ベクトルなので符号反転が起きないので、両辺で矛盾が起きないために比例係数はゼロである必要がある。しかし、カイラリティ ± 1 の粒子はパリティ変換によって $q_R \leftrightarrow q_L$ と入れ替えが起きる。よって、化学ポテンシャルが $\mu_R \neq \mu_L$ であるとき、カイラル化学ポテンシャル $\mu_5 \equiv (\mu_R - \mu_L)/2$ はパリティ変換に対して符号が反転する。よって、 $\mu_5 \neq 0$ であるようなカイラル物質で磁場によって電流が流れることはパリティ変換によって禁止されない。磁場によって誘起される電流を CME と呼ぶ。

3 + 1 次元のカイラルフェルミオン系に磁場を z 軸方向に加える。さらに、右巻き・左巻きカイラルフェルミオンの化学ポテンシャルが一致しない場合を考える。このとき、図 4 のようにエネルギーの最大値である化学ポテンシャル μ_R, μ_L まで粒子が占有される。まず、ギャップレスモードの寄与を考える。図 4 から $\omega > 0$ の領域を考えると、運動量が正の粒子（カイラリティ +1）と負の粒子（カイラリティ -1）にばらつきが生じる。 $\omega < 0$ の領域はカイラリティ ± 1 の寄与が打ち消しあうので考えなくてよい。 $\mu_R > \mu_L$ の場合であれば電流は右向きに流れると予想される。また、図 4 より有限質量モードは $p_z = 0$ に対して対称なので、有限質量モードから電流への寄与はない。従って、ギャップレスモードの存在により電流が存在することが予想される。

それでは、定量的な評価を行う。まず、 $T = 0$ の場合を考える。CME を群速度 $\mathbf{v} = \partial\omega/\partial\mathbf{p}$ とランダウ準位から求める。まず、カイラリティ +1 の場合、分散関係は $\omega = p_z$ なので群速度は

$$v_z = \frac{\partial\omega}{\partial p_z} = +1 \quad (3.7)$$

となる。カイラリティ +1 の z 方向へ流れる粒子数カレント j_R^z は、 xy 平面の縮退度が $eB/(2\pi)$ 、 z 方

向に関して単位長さあたりの状態密度は $1/(2\pi)$ であるので

$$j_R^z = \frac{1}{2\pi} \frac{eB}{2\pi} \int_0^{\mu_R} dp_z(+1) = \frac{eB}{4\pi^2} \mu_R \quad (3.8)$$

と評価出来る [6, 7]。ここで、粒子の電荷を $+e$ とした。また、 $\omega < 0$ の領域はカイラリティ -1 の $\omega < 0$ の領域からの寄与と打ち消すので考えない。カイラリティ -1 は分散関係が $\omega = -p_z$ であるので、群速度は

$$v_z = \frac{\partial \omega}{\partial p_z} = -1 \quad (3.9)$$

となる。カイラリティ -1 の z 方向へ流れる粒子数カレント j_L^z は、カイラリティ $+1$ の場合と同様に評価することができ、

$$j_L^z = \frac{1}{2\pi} \frac{eB}{2\pi} \int_{-\mu_L}^0 dp_z(-1) = -\frac{eB}{4\pi^2} \mu_L, \quad (3.10)$$

となる [6, 7]。よってベクトルカレント j^z は

$$j^z = j_R^z + j_L^z = \frac{eB}{2\pi^2} \mu_5 \quad (3.11)$$

となる。一方で、軸性カレントは

$$j_5^z = j_R^z - j_L^z = \frac{eB}{2\pi^2} \mu \quad (3.12)$$

となり、カイラル分離効果 (Chiral Separation Effect, CSE) と呼ばれている。但し、ベクトル化学ポテンシャル $\mu = (\mu_R + \mu_L)/2$ と定義した。

次に、フェルミ分布関数を用いて粒子数カレントの温度依存性を調べよう。有限温度の場合、高次のランダウ準位 ($n \neq 0$) からの寄与は非自明である。そこから考えることにしよう。高次ランダウ準位から粒子数カレントへの寄与は

$$j_{\text{Higher}} = \frac{eB}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\partial E_n}{\partial p} \left[\frac{1}{e^{\beta(E_n - \mu_R)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_n + \mu_R)} + 1} \right] \quad (3.13)$$

と表せる。ここで、 $\beta \equiv 1/T$ である。第 1 項目は粒子、第 2 項目は反粒子からの寄与である。被積分関数は

$$\begin{aligned} & \frac{eB}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\partial E_n}{\partial p} \left[\frac{1}{e^{\beta(E_n - \mu_R)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_n + \mu_R)} + 1} \right] \\ &= -\frac{1}{\beta} \frac{eB}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp E_n \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{e^{\beta(E_n - \mu_R)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_n + \mu_R)} + 1} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

と変形できて、表面項は運動量が無限の領域でフェルミ分布関数がゼロになることと、奇関数は全運動量領域で積分すればゼロになることに注意すれば、高次ランダウ準位から粒子数カレントへの寄与は厳密にないことがわかる。以上のことは、左巻きカイラルフェルミオンに対しても同様である。

次にギャップレスモードのカレントへの寄与を計算する。カレントは以下ようになる：

$$j_{\text{Lowest}} = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{eB}{2\pi} \int_0^{\infty} dp \left[\frac{1}{e^{\beta(p - \mu_{R/L})} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(p + \mu_{R/L})} + 1} \right]. \quad (3.15)$$

積分領域が高次ランダウ準位と異なっていることに注意する。その結果は以下のように $T = 0$ の場合と同じになる [6, 7] :

$$j_{R/L}^z = \frac{eB}{4\pi^2} \mu_{R/L}. \quad (3.16)$$

今までの導出から CME には、ギャップレスモードである最低次のランダウ準位からの寄与のみであることがわかる。

先程 CME と CSE の輸送係数を求め、その値は $1/(2\pi^2)$ であることが分かった。本セミナーでは磁場中のディラック方程式を解析的に解き、カレントの統計平均を実際に計算することで CME と CSE を求めたが、磁場に対する線形応答理論 [8–10]、カイラルアノマリーを考慮した流体力学 [11, 12]、カイラルフェルミオンに対する運動論 [13–15] から計算することが可能であり、全ての方法で輸送係数は一致している。更に、輸送係数は同じようにギャップレスモードからの寄与で与えられるカイラルアノマリーの係数と一致している [16] :

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{e^2}{2\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.17)$$

$$j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi. \quad (3.18)$$

このことに関して次の節でもう少し議論する。

3.2 Chiral hydrodynamics with the triangle anomaly

ここまでの議論では、自由カイラルフェルミオンに対して粒子数カレントを計算することで、カイラルアノマリー係数と一致することを見てきた。しかし、この結果は偶然一致しただけでカイラルアノマリー係数 $1/(2\pi^2)$ とは全く関係ない可能性もある。

ここでは論文 [11] の議論に従い、カイラルアノマリーを考慮した流体力学に対して熱力学第二法則を要請することで、CME が生じるだけでなく、その化学ポテンシャルに依存した輸送係数がカイラルアノマリーで決定されることを確認する（論文 [12] でも類似の議論が行われた）。ここでは簡単のため、右巻きカイラルフェルミオンの系を考え、電磁場は外場として扱う。

流体力学は系の各構成要素が局所熱平衡にあると仮定し、平均自由行程と緩和時間よりも十分に長距離・長時間スケールの物理を記述する低エネルギー有効理論である。四元流速 u^μ で動く流体を記述する方程式は、系の保存則と対称性から導出する [17]。エネルギーと運動量の保存則はエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の発散で表すことが出来る :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda} j_\lambda. \quad (3.19)$$

j_λ は粒子数カレントであることに注意する。今は電磁場は外場であるので、右辺に電磁場分は保存せずに現れる。また、粒子数カレント j^μ はカイラルアノマリーによって保存せずに

$$\partial_\mu j^\mu = -CE^\mu B_\mu \quad (3.20)$$

を満たし、アノマリー係数 $C \equiv 1/(4\pi^2)$ を定義した。 E^μ, B^μ は流速を考慮した電磁場であり、

$$E^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu, \quad B^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu F_{\alpha\beta}, \quad (3.21)$$

と与えられる。流体の静止系 $\bar{u}^\mu = (1, \mathbf{0})$ を取ることで、通常の電磁場の定義に戻ることを注意する。次に、エネルギー運動量テンソルを対称性に従って流速 u^μ で表す。流体の静止系ではエネルギー運動量テンソルは $\bar{T}^{\mu\nu} = \text{diag}(\epsilon, P, P, P)$ と表すことができる。ここで、 ϵ はエネルギー密度、 P は圧力である。これを一般の流速 u^μ で動く系へとローレンツ変換すれば良い。その結果は $T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu} P$ である。粒子数カレントも同様に静止系において、 $\bar{j}^\mu = (n, \mathbf{0})$ であることから $j^\mu = nu^\mu$ を得る。 n は粒子数密度である。これらの結果は微分展開では $\mathcal{O}(\partial^0)$ までを考えているが、後のために次のオーダーの効果までを考慮する。エネルギー運動量テンソルと粒子数カレント、それぞれに対する $\mathcal{O}(\partial)$ の補正を $\tau^{\mu\nu}$ と ν^μ と表すことにする。本節では、 u^μ をエネルギーに対する流速であると見なすランダウ・リフシッツフレーム [17] を採用する。このとき、 $\tau^{\mu\nu}$ と ν^μ は $u_\mu \tau^{\mu\nu} = 0, u_\mu \nu^\mu = 0$ を満たす。以上の議論から、エネルギー運動量テンソルと粒子数カレントは

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - \epsilon^{\mu\nu} P + \tau^{\mu\nu}, \quad (3.22)$$

$$j^\mu = nu^\mu + \nu^\mu \quad (3.23)$$

となり、一般的に構成方程式と呼ばれる。

保存則と構成方程式を用いてエントロピーカレントの発散を計算する。この量はエントロピーの増減を表すので、熱力学第二法則より常に非負であることが要請される。しかし、カイラルアノマリーの存在によって負になり得ることをまず指摘する。 $u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu}$ は流速の規格化 $u^\mu u_\mu = 1$ を微分することで得られる $u_\mu \partial_\nu u^\mu = 0$ を用いることで、以下のように計算される：

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = u^\mu \partial_\mu \epsilon + (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u_\nu \partial_\mu \tau^{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

ここに、熱力学関係式 $d\epsilon = Tds + \mu dn$ と $\epsilon + P = Ts + \mu n$ を使用して変形する。但し、 s はエントロピー密度、 μ は化学ポテンシャル、 T は温度である。計算結果は

$$\partial_\mu (su^\mu - \bar{\mu}\nu^\mu) = -\left(\frac{E_\mu}{T} + \partial_\mu \bar{\mu}\right)\nu^\mu + \frac{1}{T}\tau^{\mu\nu}\partial_\mu u_\nu + C\bar{\mu}E^\mu B_\mu \quad (3.25)$$

となり、 $\bar{\mu} \equiv \mu/T$ を用いた。式 (3.25) の第一項目は熱流と電流による、第二項目は粘性によるエントロピー生成を表しており、微分の一次まで適切に $\tau^{\mu\nu}$ と ν^μ を決定すれば、これら二つの項に関しては正となることが知られている [17]。よって、アノマリーの効果がない場合には、エントロピーカレントの発散は正となる。しかし、式 (3.25) の第三項目は電磁場の向きと強さを任意に変更できる。従って、式 (3.25) の右辺は負になる可能性があるため、このままでは熱力学第二法則が満たされない。

この問題を回避するため、論文 [11] ではエントロピーカレントと ν^μ に散逸に関する効果だけでなく、磁場 B^μ と渦度 $\omega^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \partial_\alpha u_\beta / 2$ に比例したカレントを補正項として付け加えた：

$$\nu^\mu = \nu_{\text{dis}}^\mu + \xi\omega^\mu + \xi_B B^\mu, \quad (3.26)$$

$$s^\mu = su^\mu - \bar{\mu}\nu^\mu + D\omega^\mu + D_B B^\mu. \quad (3.27)$$

輸送係数である ξ, ξ_B, D, D_B は温度 T と化学ポテンシャル μ の関数である。この補正を考慮してエントロピーカレントの発散を計算し、輸送係数を適切に決定するとその発散が非負となる。 $\partial_\mu s^\mu$ の計算を実行する際に、 $\partial_\mu \omega^\mu$ と $\partial_\mu B^\mu$ を変形する必要があるためその公式の導出を先に行う。式 (3.21) から

$$F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^\mu u^\nu + u_\alpha E_\beta - u_\beta E_\alpha \quad (3.28)$$

となり、ビアンキ恒等式 $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ に u_ν を掛けたものを計算すると

$$0 = \partial_\mu B^\mu - 2E_\mu \omega^\mu + B^\mu u^\nu \partial_\nu u_\mu \quad (3.29)$$

を得る。次に、式 (3.19) の両辺に $\eta_{\rho\nu} - u_\rho u_\nu$ を掛けたものを計算すると

$$u^\mu \partial_\mu u_\rho = \frac{1}{\epsilon + P} \partial_\rho P + \frac{n}{\epsilon + P} E_\rho + \frac{1}{\epsilon + P} u_\rho u^\mu \partial_\mu P \quad (3.30)$$

となる。但し、 $\mathcal{O}(\partial^2)$ の量は無視した。これを式 (3.29) に代入すると

$$\partial_\mu B^\mu = 2E_\mu \omega^\mu - \frac{1}{\epsilon + P} (B^\mu \partial_\mu P + nE_\mu B^\mu) \quad (3.31)$$

のように、 $\partial_\mu B^\mu$ を電磁場と熱力学量のみで表すことができた。渦度の双対 $\tilde{\omega}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \omega_{\rho\sigma} / 2$ に対しても $\partial_\mu \tilde{\omega}^{\mu\nu} = 0$ が成り立つ。同様の計算を実行することで

$$\partial_\mu \omega^\mu = -\frac{2}{\epsilon + P} (\omega^\mu \partial_\mu P + n\omega^\mu E_\mu) \quad (3.32)$$

という式 (3.31) の渦度に対する類似式を得る。それでは、 $\partial_\mu s^\mu$ の計算を式 (3.25) と同じように実行する。この際に式 (3.31) と式 (3.31) を用いる。結果は以下ようになる：

$$\begin{aligned} \partial_\mu s^\mu = & \left(\partial_\mu D - \xi \partial_\mu \bar{\mu} - \frac{2D \partial_\mu P}{\epsilon + P} \right) \omega^\mu + \left(\partial_\mu D_B - \xi_B \partial_\mu \bar{\mu} - \frac{D_B \partial_\mu P}{\epsilon + P} \right) B^\mu \\ & + \left(2D_B - \frac{\xi}{T} - \frac{2nD}{\epsilon + P} \right) E^\mu \omega_\mu + \left(C \bar{\mu} - \frac{\xi_B}{T} - \frac{nD_B}{\epsilon + P} \right) E^\mu B_\mu. \end{aligned} \quad (3.33)$$

ここで、 $B^\mu, \omega^\mu, E^\mu \omega_\mu, E^\mu B_\mu$ は任意に変化できるので、各括弧の中がゼロとなれば右辺を非負にすることが出来る。以上より、次の四つの方程式を得る：

$$\partial_\mu D - \xi \partial_\mu \bar{\mu} - \frac{2D \partial_\mu P}{\epsilon + P} = 0, \quad (3.34)$$

$$\partial_\mu D_B - \xi_B \partial_\mu \bar{\mu} - \frac{D_B \partial_\mu P}{\epsilon + P} = 0, \quad (3.35)$$

$$2D_B - \frac{\xi}{T} - \frac{2nD}{\epsilon + P} = 0, \quad (3.36)$$

$$C \bar{\mu} - \frac{\xi_B}{T} - \frac{nD_B}{\epsilon + P} = 0. \quad (3.37)$$

上の方程式群を解いていく。今 μ, T を独立な変数としているが、ギブズ・デュエムの式 $sdT - dP + nd\mu = 0$ から

$$dT = \frac{T}{\epsilon + P} dP - \frac{nT^2}{\epsilon + P} d\bar{\mu}, \quad (3.38)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{\bar{\mu}} = \frac{T}{\epsilon + P}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{\mu}} \right)_P = -\frac{nT^2}{\epsilon + P} \quad (3.39)$$

とできるので、 $P, \bar{\mu}$ を独立な変数とする。輸送係数の空間微分を $\partial_i D = (\partial D / \partial P) \partial_i P + (\partial D / \partial \bar{\mu}) \partial_i \bar{\mu}$ と変形し、 $\partial_i P, \partial_i \bar{\mu}$ が各時間ごとに初期条件として任意に変化できることを用いると、式 (3.34) は

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{\mu}} = \xi, \quad \frac{\partial D}{\partial P} = \frac{2}{\epsilon + P} D \quad (3.40)$$

と二つの方程式を解けば良いことになる。式 (3.39) を用いると、上の方程式は次の一般解を持つことがわかる：

$$D = T^2 d(\bar{\mu}), \quad \xi = \left(\frac{\partial(T^2 d(\bar{\mu}))}{\partial \bar{\mu}} \right)_P. \quad (3.41)$$

$d(\bar{\mu})$ は現段階で任意の関数である。同様に式 (3.35) は一般解

$$D_B = T d_B(\bar{\mu}), \quad \xi_B = \left(\frac{\partial(T d_B(\bar{\mu}))}{\partial \bar{\mu}} \right)_P \quad (3.42)$$

を持ち、 $d_B(\bar{\mu})$ も現段階では任意の関数である。ここで、式 (3.36) と式 (3.37) を用いると

$$d_B(\bar{\mu}) = \frac{1}{2} d'(\bar{\mu}), \quad d(\bar{\mu})'_B = C \bar{\mu}(\bar{\mu}) \quad (3.43)$$

を得る。但し、プライム $'$ は $\bar{\mu}$ による微分である。これは解析的に解くことが出来る。その解は

$$d_B(\bar{\mu}) = \frac{C}{2} \bar{\mu}^2 + b, \quad d(\bar{\mu}) = \frac{C}{3} \bar{\mu}^3 + 2b\bar{\mu} \quad (3.44)$$

となる。 b は式 (3.43) の右側の微分方程式を積分する際に現れる積分定数であり、対称性だけでは決定できない。以上より、輸送係数は以下のように決定できた：

$$D = \frac{1}{3} C \bar{\mu}^3 + 2b\bar{\mu}, \quad (3.45)$$

$$D_B = \frac{1}{2} C \bar{\mu}^2 + b, \quad (3.46)$$

$$\xi = C \left[\mu^2 - \frac{2n}{3(\epsilon + P)} \mu^3 \right] + 2b \left(T^2 - \frac{2n}{\epsilon + P} T \mu^2 \right), \quad (3.47)$$

$$\xi_B = C \left[\mu - \frac{b}{2(\epsilon + P)} \mu^2 \right] - b \frac{n}{\epsilon + P} T^2. \quad (3.48)$$

ξ_B, D_B は、先程の節で議論した CME (式 (3.8) を参照) と非常に類似しているが、 n, ϵ, P に依存している項が存在している点が異なっている。^{*2} というのも今はランダウ・リフシッツフレームで計算しているので、流体の静止系ではエネルギー流が消えてしまうフレームにいる。そこで、 n, ϵ, P に依存している項を消すように流速を以下のように再定義する [9]：

$$u^\mu \rightarrow u^\mu + \delta u^\mu, \quad (3.49)$$

$$\delta u^\mu = \frac{1}{\epsilon + P} \left(\frac{1}{2} C \mu^2 + \frac{1}{2} b T^2 \right) B^\mu + \frac{1}{\epsilon + P} \left(\frac{2}{3} C \mu^3 + 2b \mu T^2 \right) \omega^\mu. \quad (3.50)$$

このように流速を再定義することで

$$j^\mu = C \mu B^\mu + (C \mu^2 + 2b T^2) \omega^\mu \quad (3.51)$$

となり、光速よりも十分に小さい流速 ($u^\mu = (1, \mathbf{v}), |\mathbf{v}| \ll 1$) に対する $\mathcal{O}(\mathbf{v})$ までの粒子数カレントは

$$\mathbf{j} = C \mu \mathbf{B} + (C \mu^2 + 2b T^2) \boldsymbol{\omega} \quad (3.52)$$

と評価できる。これは式 (3.8) と完全に一致している。以上の議論から、CME の輸送係数はカイラルアノマリー係数によって決定される。

^{*2} また、 ξ, D は CME の渦度に対する対応物であり、カイラル渦効果 (Chiral Vortical Effect, CVE) と呼ばれている。

3.3 Anomaly matching for the chiral separation effect

この節で磁場中のバリオン物質におけるトポロジカル項を導出する。そのために $N_f = 2$ のカイラルアノマリー

$$\partial_\mu j_{a=3}^{5\mu} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (3.53)$$

から $\pi_0 \rightarrow 2\gamma$ の相互作用を導出する簡単な方法を説明する。実は、この方法に基づき磁場中の QCD 物質に現れるトポロジカル項を導出できる。

軸性変換

$$q_R \rightarrow e^{-i\theta_3\tau_3} q_R, \quad q_L \rightarrow e^{i\theta_3\tau_3} q_L, \quad (3.54)$$

を考える。この変換に対して作用は

$$\delta S_{\text{QCD}} = \int d^4x \theta_3 \partial_\mu j_{a=3}^{5\mu}, \quad (3.55)$$

と変化し、 $j_{a=3}^{5\mu}$ はこの変換に対するネーターカレントである。また、添字の QCD は紫外側の理論ということの意味している。先程説明した通り、外部電磁場が存在しているところのカレントは保存せず、式 (3.53) を満たしている。さて、アノマリーが赤外側、すなわちカイラル摂動論でも一致せよという条件

$$\delta S_{\text{EFT}} = \delta S_{\text{QCD}} \quad (3.56)$$

を課す。さらに、 π^0 中間子の場合 π^0 は無限小軸性変換に対して

$$\pi_0 \rightarrow \pi_0 + 2f_\pi \theta_3 \quad (3.57)$$

と変換されるので、有効理論の作用変分は次のように変形できる：

$$\delta S_{\text{EFT}} = \int d^4x \left(\frac{\delta\pi_0}{2f_\pi} \right) \frac{-N_c e^2}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (3.58)$$

但し、 $\delta\pi_0 \equiv 2f_\pi \theta_3$ と定義した。上の無限小の作用を $\delta\pi_0 \rightarrow \pi_0$ として、有限の大きさに直すことで次の有効作用が導かれる：

$$S_{\text{EFT}} = \int d^4x \frac{-N_c e^2}{96\pi^2 f_\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \pi_0 F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (3.59)$$

さて、磁場中の QCD 物質で現れる anomalous な有効作用を求めよう。クォークの自由度で計算した CSE を中間子の自由度でアノマリーマッチングすることで求める。保存量 $\bar{q}\gamma^0 q$ に対する化学ポテンシャル μ_0 に対して、アップ、ダウクォークそれぞれに対する CSE (式 (3.12) を参照) は

$$j_u^5 = N_c \frac{2e}{3} \frac{\mu_0}{4\pi^2} \mathbf{B}, \quad (3.60)$$

$$j_d^5 = -N_c \frac{e}{3} \frac{\mu_0}{4\pi^2} \mathbf{B}, \quad (3.61)$$

となる。従って、軸性カレント $j_{a=3}^5$ は以下のように評価することができる：

$$\begin{aligned} j_{a=3}^5 &\equiv \langle \bar{q} \gamma \gamma_5 \tau_3 q \rangle = \langle \bar{u} \gamma \gamma_5 u \rangle - \langle \bar{d} \gamma \gamma_5 d \rangle \\ &= \frac{e N_c \mu_0}{4\pi^2} \mathbf{B} \\ &= \frac{e \mu_B}{4\pi^2} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

先程 π^0 中間子の二光子崩壊を表す相互作用を導出したとき、式 (3.53) はカレントの発散が有限であった。しかし、今の場合はカレント自体が有限である。そこで、有効作用を導く方法を少しだけ修正する必要がある。まず、軸性変換

$$q \rightarrow e^{-i\tau_3 \theta_3 \gamma_5} q \quad (3.63)$$

に対する作用の変分を計算する。先ほどと異なり、局所的な変換で変換パラメータは $\theta_3 = \theta_3(x)$ と時空に依存していることに注意する。このとき、QCD の作用は次のように変化する（補足付録 A を参照）：

$$\delta S_{\text{QCD}} = \int d^4x \partial_\mu \theta_3 \cdot j_3^{5\mu}. \quad (3.64)$$

今、カイラル極限を考えるため、 $\partial_\mu j_3^{5\mu} = 0$ である。この作用変分を低エネルギー有効理論側で考える。中間子 π_0 は軸性変換に対して (3.57) と変換する。このとき、低エネルギー有効理論のアノマリー部分 S_{EFT} は以下のように変換する：

$$\delta S_{\text{EFT}} = \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\delta \pi_0}{2f_\pi} \right) \cdot j_{a=3}^{5\mu}. \quad (3.65)$$

ここで、アノマリーは赤外側の理論と紫外側の理論で一致する必要があるという条件

$$\delta S_{\text{QCD}} = \delta S_{\text{EFT}} \quad (3.66)$$

を課す。有限の作用 S_{EFT} を得るには、 $\delta \pi_0 \rightarrow \pi_0$ と直せば良い。アノマリー一致条件を用いて式 (3.62) を代入すれば、以下のトポロジカル項が得られる：

$$\mathcal{L}_{\text{topo}} = \frac{e \mu_B}{4\pi^2 f_\pi} \nabla \pi_0 \cdot \mathbf{B} \quad (3.67)$$

を得る [18, 19]。

3.4 Goldstone-Wilczek current

先の章で π_0 中間子が μ_B と結合する有効作用を導出した。非常に古いアイデアでクォーク発見以前に T. Skyrme はバリオンを中間子で表すことを考えたが、実はこれと関係していることをこの節では説明したい。今日、Skyrm 模型と呼ばれているこの模型は、中間子の配位空間が $\text{SU}(2)$ であるので、三次元球 S^3 でこの空間を覆うトポロジカル数を定義できることに着目する。数学ではホモトピー群と呼ばれ、 $\pi_3(\text{SU}(2)) \cong \mathbb{Z}$ であることに対応する。このトポロジカル数は

$$j_{\text{GW}}^\mu = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}(L_\nu L_\alpha L_\beta) \quad (3.68)$$

で与えられ、 $\mu = 0$ 成分をバリオン数と同定する。^{*3} ここで次の量を定義しておく：

$$L_\mu = \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger, \quad R_\mu = \partial_\mu \Sigma^\dagger \Sigma. \quad (3.70)$$

後のためにこれらの $U(1)_{\text{EM}}$ ゲージ変換を計算しておく

$$\delta L_\mu = i\epsilon[Q, L_\mu] - i\partial_\mu \epsilon[Q, \Sigma] \Sigma^\dagger, \quad (3.71)$$

$$\delta R_\mu = i\epsilon[Q, R_\mu] - i\partial_\mu \epsilon \Sigma^\dagger [Q, \Sigma] \quad (3.72)$$

となる。

次に電磁場がある場合の GW current を求める。計算方法はゲージ不変で $\partial_\mu j_{\text{GW}}^\mu = 0$ になる形を見つければ良い。まず、式 (3.68) に $U(1)_{\text{EM}}$ ゲージ変換を施すと

$$\delta j_{\text{GW}}^\mu = \frac{i}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \epsilon \text{tr} Q (L_\alpha L_\beta - R_\alpha R_\beta) \quad (3.73)$$

となる。ここで徐に次の量を計算してみよう：

$$-\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_\alpha \text{tr} Q (L_\beta + R_\beta) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \text{tr} Q (L_\alpha L_\beta - R_\alpha R_\beta). \quad (3.74)$$

これを δj_{GW}^μ に代入すると

$$\delta j_{\text{GW}}^\mu = \frac{i}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu [\partial_\alpha \epsilon \text{tr} Q (L_\beta + R_\beta)] \quad (3.75)$$

となる。そこで、GW current に補正項

$$\frac{ie}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu [A_\alpha \text{tr} Q (L_\beta + R_\beta)] \quad (3.76)$$

を加えると、上の式にゲージ変換したときの

$$\frac{ie}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu [\delta A_\alpha \text{tr} Q (L_\beta + R_\beta)] = -\frac{i}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu [\partial_\alpha \epsilon \text{tr} Q (L_\beta + R_\beta)] \quad (3.77)$$

という寄与が、ちょうど式 (3.75) と打ち消し合う。また、もう一つの寄与

$$\frac{ie}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu [A_\alpha \delta \text{tr} Q (L_\beta + R_\beta)] \quad (3.78)$$

は計算すると 0 になる。以上の議論から $U(1)_{\text{EM}}$ 不変にした GW current は

$$j_{\text{GW}}^\mu = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \{\text{tr} (L_\nu L_\alpha L_\beta) - 3ie\partial_\nu [A_\alpha \text{tr} Q (L_\beta + R_\beta)]\} \quad (3.79)$$

となる。

^{*3} 微視的な理論から直接バリオン数を計算することで、式 (3.68) を導出することが出来る。例えば、核子場 $N = {}^t(p, n)$ に中間子場 Σ が結合している理論を考える：

$$\mathcal{L} = \bar{N} i \gamma^\mu \partial_\mu N - M(\bar{N}_L \Sigma N_R + \bar{N}_R \Sigma^\dagger N_L). \quad (3.69)$$

バリオン数カレントは $\langle j_B^\mu \rangle$ で計算できるので、核子場 N を積分して Σ に依存したバリオン数を求めることが出来る。この方法は Goldstone と Wilczek の論文 [20] で計算されたので、Goldstone-Wilczek current と呼ばれている。詳細な計算は複雑なのでここでは説明しないが、論文 [21–24] に詳しい計算の記載がある。また、教科書 [25] も参考になる。

バリオンカレントは $U(1)_B$ と結合することから

$$\mathcal{L}_{\text{WZW}} = -A_\mu^B j_{\text{GW}}^\mu \quad (3.80)$$

という有効作用を得る。ここまで求めた有効作用を全て足し上げた

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L}_{\text{ChPT}} + \mathcal{L}_{\text{WZW}} \quad (3.81)$$

が我々の解く理論となる。

4 Chiral soliton lattice in QCD

4.1 Chiral soliton lattice

カイラル対称性が自発的に破れた相の低エネルギー有効理論は、中間子を自由度とするカイラル摂動論で記述することができることを説明した。磁場中の QCD 物質ではトポロジカル項も現れるが、この項の存在によって磁場中の QCD 物質の基底状態が QCD 真空ではなくなることを示す。本節では、 $T = 0$ で有限のバリオン化学ポテンシャル $\mu_B (> 0)$ が存在する場合を考察する。さらに、論文 [19, 26] に従い、 π_0 中間子だけの場合から考える：

$$\Sigma = e^{i\chi_3 \tau_3}, \quad (4.1)$$

$$\chi_3 \equiv \frac{\pi_0}{f_\pi}. \quad (4.2)$$

前章で求めた有限密度でのカイラルラグランジアに上の式を代入すると、次の有効ラグランジアンを得る：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} f_\pi^2 (\partial_z \chi_3)^2 + f_\pi^2 m_\pi^2 (1 - \cos \chi_3) - \frac{\mu_B}{4\pi^2} B \partial_z \chi_3. \quad (4.3)$$

但し、 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ とした。基底状態はこのハミルトニアンを最小化する配位である。もちろん、 $B = 0$ の場合の基底状態は、場の配位は z 方向の依存性を持たない方がエネルギー的に安定であり、 $\phi = 0$ が基底状態となる。しかし、回転がある場合にはトポロジカル項が z 微分の一次に依存していることから、 ϕ の z 依存性は非自明となる。以下では場の空間依存性を決めることにする。

それでは、式 (4.3) 運動方程式

$$\partial_z^2 \phi = m_\pi^2 \sin \chi_3 \quad (4.4)$$

を解き、基底状態で実現される場の配位を決定する。これはよく知られているように sine-Gordon 方程式であり、まず、境界条件として $\chi_3(\infty) = 2\pi$ と $\chi_3(-\infty) = 0$ を課すと、ドメインウォール (Domain wall, DW) 解 (空間次元の場合は Kink) を得る：

$$\chi_3 = 4 \tan^{-1} e^{m_\pi z}. \quad (4.5)$$

この配位を図示すると図 5 のようになる。境界ではポテンシャルの極小値をとり、 $z = 0$ でエネルギーが局在している。

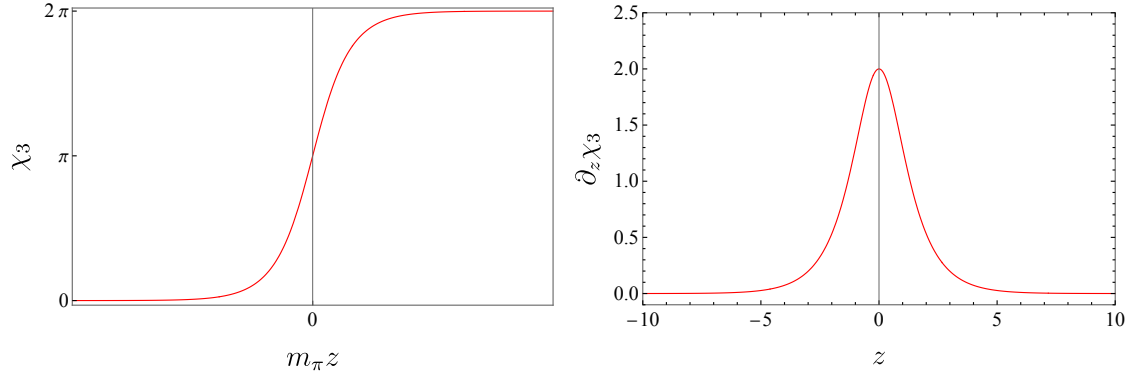


図 5. (4.5) のグラフ

この配位に対するエネルギーを計算しよう。計算は解析的に実行することが出来て、その結果は

$$E = \int d^3x \mathcal{H} = S \left(8m_\pi f_\pi^2 - \frac{B\mu_B}{2\pi} \right), \quad (4.6)$$

$$S = \int dx dy \quad (4.7)$$

となる。第一項は通常の DW のエネルギーでももちろん正だが、第二項はトポロジカル項からの寄与である。全微分項なので局所的な運動方程式には入ってこなかったが、エネルギーのような積分した大域的な量では無視できないことを注意しよう。さらに、負の寄与を与えるので B や μ_B が大きくなればなるほど、全エネルギーは小さくなっていく。よって、 B が

$$B_{\text{CSL}} = \frac{16\pi m_\pi f_\pi^2}{\mu_B}, \quad (4.8)$$

より大きくなると、DW のエネルギー E は負になる。従って、系は $\chi_3 = 0$ であるよりも、DW を磁場と垂直に周期的に並べた方がエネルギーは小さくなる。しかしながら、DW 間には斥力が働いている [27]。よって、無限に詰めることは出来ないので、エネルギー密度が最小となるような適当な周期で DW の結晶状態を作れば良い。

次節でエネルギーを最小にする周期を見つける前に、実は sine-Gordon 方程式に課す境界条件を

$$\chi_3(\ell) = 2\pi, \quad \chi_3(0) = 0, \quad (4.9)$$

とすると、DW の格子解を得られることを示す。式 (4.4) は非線形方程式であるが、振り子の運動方程式と同じ形をしていることに気付く。従って、式 (4.4) はエネルギー積分を用いることで解析的に解くことができる。古典力学で習うことではあるが、その解は楕円関数を用いて解析的に表すことができ、物理的に重要であるので復習を兼ねて解いてみよう。運動方程式 (4.4) を解くために、 $\partial_z \chi_3$ を式 (4.4) の両辺にかけると以下のようになる：

$$\partial_z \left[\frac{1}{2} (\partial_z \chi_3)^2 + m_\pi^2 \cos \chi_3 \right] = 0. \quad (4.10)$$

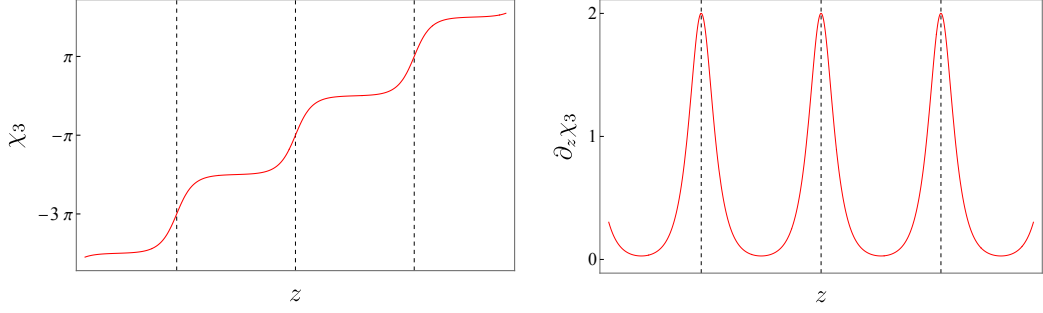


図 6. 式 (4.15) のグラフ

上の方程式から $\frac{1}{2}(\partial_z \chi_3)^2 + m_\pi^2 \cos \chi_3$ は定数となる。そこで以下のように置こう：

$$\frac{1}{2}(\partial_z \chi_3)^2 + m_\pi^2 \cos \chi_3 = A (\text{const}). \quad (4.11)$$

上の式を変形すると以下のようになる：

$$\partial_z \chi_3 = \pm \frac{2m_\pi}{k} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\chi_3}{2}}. \quad (4.12)$$

k は未定パラメータで、 $k^2 = 2m_\pi^2 / (A + m_\pi^2)$ を満たしている。(4.12) は積分することができて、以下のようになる：

$$\int_{\chi_3^{(0)}}^{\chi_3} d\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{2m_\pi}{k} (z - z_0). \quad (4.13)$$

z_0 は初期位置であり、 $\chi_3^{(0)} \equiv \chi_3(z_0)$ と定義した。 $\theta = 2\theta'$ と $\theta' = \varphi - \frac{\pi}{2}$ と置くことで以下を得る：

$$\int_{\chi_3^{(0)}/2+\pi/2}^{\chi_3/2+\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{m_\pi(z - z_0)}{k}. \quad (4.14)$$

ここで境界条件を $\chi_3^{(3)} = \chi_3(0) = -\pi$ と置くと、以下の厳密解を得る：

$$\int_0^{\chi_3/2+\pi/2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{m_\pi z}{k} \equiv \bar{z}, \quad (4.15)$$

$$\cos \frac{\chi_3}{2} = \text{sn}(\bar{z}, k). \quad (4.16)$$

ここで、

$$u = \int_0^\varphi d\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (4.17)$$

$$\text{sn}(u, k) \equiv \sin \varphi, \quad (4.18)$$

と定義される楕円関数を用いた。よって、厳密解は式 (4.15) と書ける。 \bar{z} は無次元化し z 座標で、 k は楕円関数に現れる母数で $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数である。現段階で k は積分定数として現れる未定パラメータであるが、実は周期 ℓ と関係しており、後ほど系のエネルギーを最小化すると決まる。

以下で解 (4.15) の性質を調べる。規格化した π^0 中間子の場の配位 χ_3 とその z 微分の z 依存性を表すグラフは図 6 である。 χ_3 の z 微分をもう少し具体的に書くと以下のように変形することができる：

$$\partial_z \chi_3(z) = \frac{2m_\pi}{k} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\chi_3}{2}}. \quad (4.19)$$

図 6 の $\partial_z \chi_3$ を見ると、この解は周期構造を持っていることが分かる。 χ_3 が 2π 変化すると一周期変化するので、式 (4.15) の右辺は

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = 2K(k) \quad (4.20)$$

分変化する。ここで、 $K(k)$ は第一種完全楕円積分である^{*4}。従って、 z 方向の変化分 ℓ は以下のように評価することができる：

$$\ell = \frac{2kK(k)}{m_\pi}. \quad (4.22)$$

よって、 z 方向に一周期 ℓ 変化すると、場の配位 χ_3 の空間でも一周期変化することになる：

$$\chi_3(z + \ell) = \chi_3(z) + 2\pi. \quad (4.23)$$

セミナーの初めに説明したように、DW は S^1 が S^1 に一回巻きついたことによるトポロジカル数 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ を持つ。

これらの性質とパリティ対称性の破れを合わせた三つの性質

1. パリティ対称性の破れ = カイラル
2. 有限のトポロジカル数 = ソリトン
3. 周期構造 = 格子

から、このオイラー・ラグランジュ方程式の解はカイラルソリトン格子 (Chiral Soliton Lattice, CSL) と呼ばれている。

この節を終える前に、我々の低エネルギー有効理論の counting scheme に関して言及しておきたい。通常のカイラル摂動論では、次の counting scheme が用いられる：

$$\partial = \mathcal{O}(p), \quad m_\pi = \mathcal{O}(p). \quad (4.24)$$

よって、式 (4.3) の初めの二項は $\mathcal{O}(p^2)$ の寄与となる。ここで、anomalous な寄与も $\mathcal{O}(p^2)$ とするには、 $\mu_B B \partial = \mathcal{O}(p^2)$ である必要がある。よって、我々の採用する counting scheme は次のものである [28, 29]：

$$\partial = \mathcal{O}(p), \quad m_\pi = \mathcal{O}(p), \quad \mu_B = \mathcal{O}(p^{-1}). \quad (4.25)$$

^{*4} 第一種完全楕円積分 $K(k)$ は以下のように定義される：

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4.21)$$

カイラル摂動論には、Wess-Zumino-Witten(WZW) 項と呼ばれるカイラルアノマリーの寄与を取り込んだ有効作用も存在している [30, 31]。この WZW 項から有名な $\pi_0 \rightarrow 2\gamma$ を表す $\pi_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ が導かれるが、 $\mathcal{O}(p^4)$ なので我々の議論では無視をする。また、電磁場の運動項も $\mathcal{O}(p^4)$ なので同様に無視している。

4.2 Ground state

計算すること自体は single DW の場合と同じで、CSL 解をハミルトニアンに代入して一周期のエネルギーを計算し、エネルギー密度を計算すれば良い。そして、今まで未定パラメーターであった実数 k をエネルギーの最小化によって決定する。まず、体積 V のエネルギー $\mathcal{E}_{\text{tot}}^{\pi_0}$ を求めるために、 xy 平面の面積 S 、CSL 一つ当たりのエネルギー ϵ_{CSL} を計算する。 ϵ_{CSL} はハミルトニアン (4.3) に CSL 解 (4.15) を代入し、 z 方向は一周期 ℓ だけ積分することで得られる：

$$\epsilon_{\text{CSL}} = \int_{\text{CSL}} d^3x \left[\frac{1}{2} f_\pi^2 (\partial_z \chi_3)^2 + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - \cos \chi_3) - \frac{\mu_B}{4\pi^2} B \partial_z \chi_3 \right], \quad (4.26)$$

$$\epsilon_{\text{CSL}}/S = \int_0^\ell dz \left[\frac{1}{2} f_\pi^2 (\partial_z \chi_3)^2 + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - \cos \chi_3) \right] - \frac{\mu_B B}{2\pi}. \quad (4.27)$$

二行目は xy 平面の積分を行った結果であるが、 x, y 依存性はないのでその結果は面積 S となる。式 (4.19) を用いることで (4.27) の積分部分は次のように変形できる：

$$\begin{aligned} (\text{積分部分}) &= \int_0^\ell dz \left[\frac{f_\pi^2}{2} \frac{4m_\pi^2}{k^2} \left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\chi_3}{2} \right) + 2m_\pi^2 f_\pi^2 \left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\chi_3}{2} \right) \right] \\ &= 2m_\pi^2 f_\pi^2 \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \int_0^\ell dz + \frac{4m_\pi^2 f_\pi^2}{k^2} \int_0^\ell dz \left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\chi_3}{2} \right) \equiv I. \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここで、第二項目を変数変換

$$\int_0^{\frac{\chi_3}{2} + \frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{m_\pi z}{k} \quad (4.29)$$

を行う。この変数変換に対しては

$$0 \rightarrow -\pi, \quad \ell \rightarrow \pi, \quad (4.30)$$

$$dz = \frac{k}{2m_\pi \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\chi_3}{2}}} d\chi_3, \quad (4.31)$$

が成り立つ。従って、式 (4.28) で定義した積分 I は以下のように変形することができる：

$$\begin{aligned} I &= 4m_\pi^2 f_\pi^2 \left(k - \frac{1}{k} \right) K(k) + \frac{2m_\pi f_\pi^2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} \\ &= 4m_\pi^2 f_\pi^2 \left(k - \frac{1}{k} \right) K(k) + \frac{8m_\pi f_\pi^2 E(k)}{k}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

但し、一行目の積分は $\phi \rightarrow 2\varphi$, $\varphi \rightarrow \theta - \pi/2$ と変数変換すれば、第二種完全楕円積分 $E(k)$ になる^{*5}。

^{*5} 第二種完全楕円積分は以下のように定義される：

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.33)$$

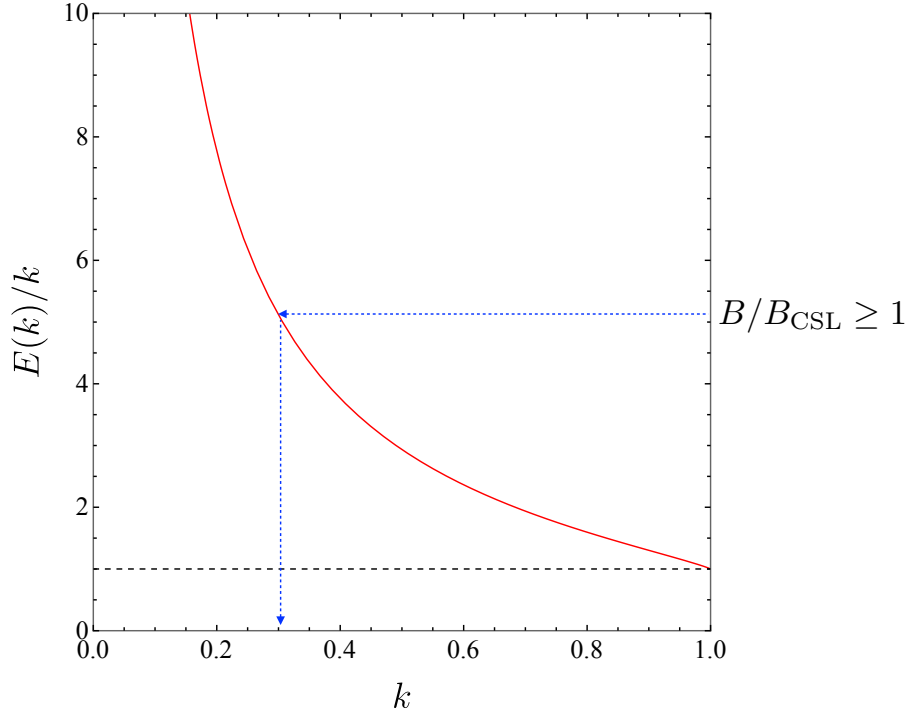


図 7. $E(k)/k$ のグラフ

次に、体積 $V = SL$ のエネルギー $\mathcal{E}_{\text{tot}}^{\pi_0}$ を計算する。 z 方向の長さが L であるので、その中に CSL は L/ℓ 個存在している。従って、そのエネルギーは以下のように評価することができる：

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}^{\pi_0} = S \frac{L}{l} \frac{\epsilon_{\text{CSL}}}{S} \quad (4.34)$$

$$= \frac{m_\pi V}{2kK} \left\{ 4m_\pi f_\pi^2 \left[\frac{2E}{k} + \left(k - \frac{1}{k} \right) K \right] - \frac{\mu_B^2 B}{2\pi} \right\}. \quad (4.35)$$

エネルギーの最小化からパラメーター k は決まる。 $\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}^{\pi_0}}{dk} = 0$ が最小化条件であり

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}^{\pi_0}}{dk} = \frac{Vm_\pi E(k)}{k'^2} \left(\frac{\mu_B B}{16\pi m_\pi f_\pi^2} - \frac{E(k)}{k} \right) = 0 \rightarrow \frac{E(k)}{k} = \frac{\mu_B B}{16\pi m_\pi f_\pi^2} \quad (4.36)$$

となる。途中に第一種完全楕円積分と第二種完全楕円積分の k 微分の公式

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{kk'^2} - \frac{K}{k}, \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k} \quad (4.37)$$

を用いた。但し、 $k' = \sqrt{1-k^2}$ と定義した。 $E(k)/k$ は k に対して単調減少関数であり、 $E(k)/k \geq 1$ と 1 が最小値となる。従って、 k が解を持つ条件

$$\frac{\mu_B B}{16\pi m_\pi f_\pi^2} \geq 1 \quad (4.38)$$

から臨界角速度

$$B_{\text{CSL}} = \frac{16\pi f_\pi^2 m_\pi}{\mu_B} \quad (4.39)$$

が決定する。

最小化条件を満たす k に対する自由エネルギーは式 (4.36) を (4.35) に代入すればよく、以下のようになる：

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{tot}}^{\pi_0}}{V} = 2m_\pi^2 f_\pi^2 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) < 0. \quad (4.40)$$

但し、 $0 < k < 1$ であることを用いた。以上の議論から臨界磁場以上では CSL 状態が発現し、そのエネルギーは自明な $\chi_3 = 0$ よりもエネルギー的に安定であることが示される。

4.3 Charged pion fluctuation

次に χ_\pm の効果を考えよう。手始めに CSL を背景場 Σ_0 としてそこからの中間子の揺らぎを考え、CSL が安定かどうかを調べる。CSL 状態は

$$\Sigma_0 = e^{i\tau_3 \bar{\chi}_3} \quad (4.41)$$

で特徴付けられる。ここで、 $\bar{\chi}_3$ は CSL 解である。 Σ_0 周りの揺らぎは

$$\Sigma = \Sigma_0 U \quad (4.42)$$

と書くことが出来る。 $\Sigma \in \text{SU}(2)$ であることから、 $U \in \text{SU}(2)$ である。式 (4.42) を式 (2.34) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ChPT}} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} & \left[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + i\tau_3 \partial^\mu (U \partial_\mu U^\dagger - \partial_\mu U U^\dagger) - iA^\mu \tau_3 (\partial_\mu U U^\dagger - U^\dagger \partial_\mu U) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} A^2 \tau_3 U \tau_3 U^\dagger + m_\pi^2 (\Sigma_0 U + U^\dagger \Sigma^\dagger) \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

となる。

揺らぎに対して二次までの展開を計算し、運動方程式を求める。そのために U の線型表現を用いた方が便利である：

$$U = \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{f_\pi^2}} + \frac{i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}}{f_\pi}. \quad (4.44)$$

これを式 (4.43) に代入して bilinear の部分を持ってくると

$$\mathcal{L}_{\text{bilin}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 - (A^\mu + \partial^\mu \bar{\chi}_3) (\pi_1 \partial_\mu \pi_2 - \pi_2 \partial_\mu \pi_1) + \frac{1}{2} A^2 (\pi_1^2 + \pi_2^2) - \frac{1}{2} m_\pi^2 \boldsymbol{\pi}^2 \cos \bar{\chi}_3 \quad (4.45)$$

となる。 $\mathcal{L}_{\text{bilin}}$ に対する運動方程式は

$$\omega^2 \pi^+ = \left[-\partial_x^2 + B^2 \left(x - \frac{p_y}{B} \right)^2 \right] \pi^+ + (-\partial_z^2 + 2i\phi' \partial_z + m_\pi^2 e^{i\bar{\chi}_3}) \pi^+, \quad (4.46)$$

$$\pi^+ \equiv \frac{\pi + i\pi_2}{\sqrt{2}} \quad (4.47)$$

となる。但し、ベクトル場は $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ とした。

この方程式を解いていく。まず、右辺第一項は通常のランダウ準位を求める問題と同じであることに気付く。よって、

$$[\omega^2 - (2n+1)B]\pi^+ = \left[-\partial_x^2 + B^2 \left(x - \frac{p_y}{B} \right)^2 \right] \pi^+ + (-\partial_z^2 + 2i\phi' \partial_z + m_\pi^2 e^{i\chi_3})\pi^+ \quad (4.48)$$

を得る。さらに、 $\pi_+ \equiv e^{i\chi_3} \tilde{\pi}^+$ を定義すると、方程式が以下のように簡単になる：

$$[-\partial_{\bar{z}}^2 + 6k^2 \text{sn}^2(\bar{z}, k)]\tilde{\pi}^+ = \frac{k^2}{m_\pi^2} [\omega^2 - (2n+1)B]\tilde{\pi}^+ + (k^2 + 4)\tilde{\pi}^+. \quad (4.49)$$

実は左辺の演算子に対する方程式は Lamé 方程式と呼ばれており、固有値も計算されている。一番エネルギーの低い固有値は $2(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4})$ である。従って、

$$\omega^2 = (2n+1)B - \frac{m_\pi^2}{k^2} (2 - k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}) \quad (4.50)$$

となる。タキオンが生じる条件は

$$B_{\text{CPC}} = \frac{m_\pi^2}{k^2} (2 - k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}) \quad (4.51)$$

である。背景場としてエネルギーが最も低い CSL 状態を考えたので、 k は式 (4.36)

$$\frac{E(k)}{k} = \frac{\mu_B B_{\text{CPC}}}{16\pi m_\pi f_\pi^2} \quad (4.52)$$

を満たすことに注意する。 B_{CSL} と B_{CPC} を $\mu_B - B$ 平面に図示すると図 8 となる。緑線よりも右側では CSL が χ_\pm の揺らぎによって不安定になることは分かったが、基底状態がどのようになるかは分かっていない。^{*6}

5 Domain wall Skyrmion in QCD

前章で CSL が $B > B_{\text{CSL}}$ で QCD 真空よりもエネルギー的に安定になるが、 χ_\pm の揺らぎによって不安定になることを確認した。この不安定領域で基底状態を決定するには χ_\pm 中間子が本質となりそうである。前章では π_0 中間子だけを考えおり、式 (3.80) の第二項だけが寄与した。しかし、 χ_\pm 中間子も考慮すると第一項目も有限になる。この項は有限密度で Skyrmion を安定化させるので、今考えている状況で重要な役割を果たすと期待できる。

本章では、Skyrmion charge と μ_B の coupling を考慮した EFT から基底状態を決定する。

5.1 Non-abelian sine-Gordon soliton

まず、前章で考えた π_0 中間子の DW は普通の sine-Gordon soliton ではなく、内部自由度を持った DW であることを説明する。

^{*6} CSL が基底状態になったことで z 方向の並進対称性が自発的に破れてフォノンが生じるが、本文中で言及しなかった π_3 方向の揺らぎの方程式を解くことでこのフォノンの分散関係を得る [26]。

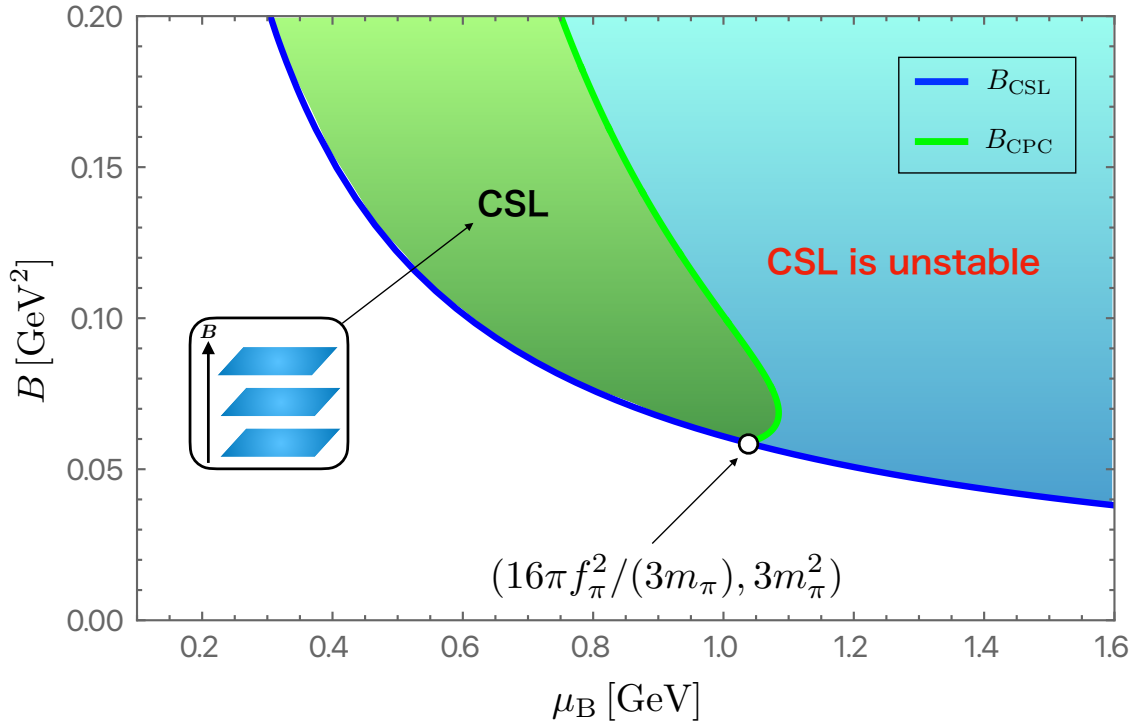


図 8. 論文 [26] で提案された μ_B - B 相図

初めに π_0 中間子の single DW を考える：

$$\Sigma_0 = e^{i\tau_3 \bar{\chi}_3}, \quad (5.1)$$

$$\bar{\chi}_3 = 4 \tan^{-1} e^{m_\pi z}. \quad (5.2)$$

これは前章で見たように運動方程式の解であった。しかし、(一旦電磁場を忘れれると) $SU(2)_V$ 不変なので、一般解は $SU(2)_V$ 変換を用いて

$$\Sigma = g \Sigma_0 g^\dagger = e^{i\theta g \tau_3 g^\dagger} \quad (5.3)$$

で与えられる。但し、 $g \in SU(2)$ である。

一般的にソリトンがある場所では対称性が破れる。例えば、通常の DW でも真空とは異なった局在した配位があるために、並進対称性が自発的に破れ、その結果として並進に関するモジュライが生じる。これは DW 中心を並行移動させたものも解であることから、並進に対してギャップレスであることを表している。 $z \rightarrow \pm\infty$ では $\theta = 0, 2\pi$ となり、 $SU(2)_V$ 変換に対して不変となる。一方、DW 中心の $\theta = \pi$ では、 $g = e^{i\tau_3 \alpha}$ のときのみ不変となる。従って、DW が存在している箇所で

$$SU(2)_V \rightarrow U(1)_3 \quad (5.4)$$

とアイソスピン対称性が $U(1)$ まで自発的に破れる。この対称性の自発的破れに伴った NG mode の配

位空間（モジュライ空間）は

$$\frac{\mathrm{SU}(2)_V}{\mathrm{U}(1)_3} \cong S^2 \quad (5.5)$$

である。このモジュライが本セミナーで本質的役割を果たす。

次に、このモジュライを特徴づける座標を導入しよう。 $\mathrm{O}(3)$ と $\mathbb{C}P^1$ の座標の性質についてまとめる。実スカラー場の三重項 $n_a = (n_1, n_2, n_3)$ を条件 $n_a^2 = 1$ を課すことで、単位球 S^2 に制限する。球 S^2 は、球 S^2 から複素平面への立体射影を通して、自然に複素構造を持つことはよく知られている。南極 $(0, 0, -1)$ と点 (n_1, n_2, n_3) を結ぶ直線と $n_1 n_2$ 平面との交点を S^2 から \mathbb{C} への写像とみなそう。簡単な計算で交点の座標は

$$(u, w) = \left(\frac{n_1}{1 + n_3}, \frac{n_2}{1 + n_3} \right), \quad (5.6)$$

となり、 n_a の代わりに複素変数

$$f \equiv u + iw = \frac{n_1 + in_2}{1 + n_3}, \quad (5.7)$$

という座標変換を考えることも出来る。逆変換は

$$(n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + w^2}, \frac{2w}{1 + u^2 + w^2}, \frac{1 - u^2 - w^2}{1 + u^2 + w^2} \right) \quad (5.8)$$

$$= \left(\frac{f + f^*}{1 + |f|^2}, -i \frac{f - f^*}{1 + |f|^2}, \frac{1 - |f|^2}{1 + |f|^2} \right). \quad (5.9)$$

となります。 ϕ を次の様にとると $|\mathbf{n}| = 1$ は自動的に満たされる：

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + |f|^2}} (1, f). \quad (5.10)$$

f を用いて n_a を表すと

$$(n_1, n_2, n_3) = (\phi^\dagger \tau_1 \phi, \phi^\dagger \tau_2 \phi, \phi^\dagger \tau_3 \phi). \quad (5.11)$$

のようになる。

g と ϕ を関係付けよう。 $g \in \mathrm{SU}(2)$ なので、複素数 α, β を用いて

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

となる。但し、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たすことに注意する。これを踏まえて、次の量を計算してみよう：

$$\frac{1}{2}(g\tau_3 g^\dagger + \mathbf{1}_2) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & 1 - |\alpha|^2 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

さらに、 $\phi\phi^\dagger$ は

$$\phi\phi^\dagger = \frac{1}{1 + |f|^2} \begin{pmatrix} 1 & f^* \\ f & |f|^2 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

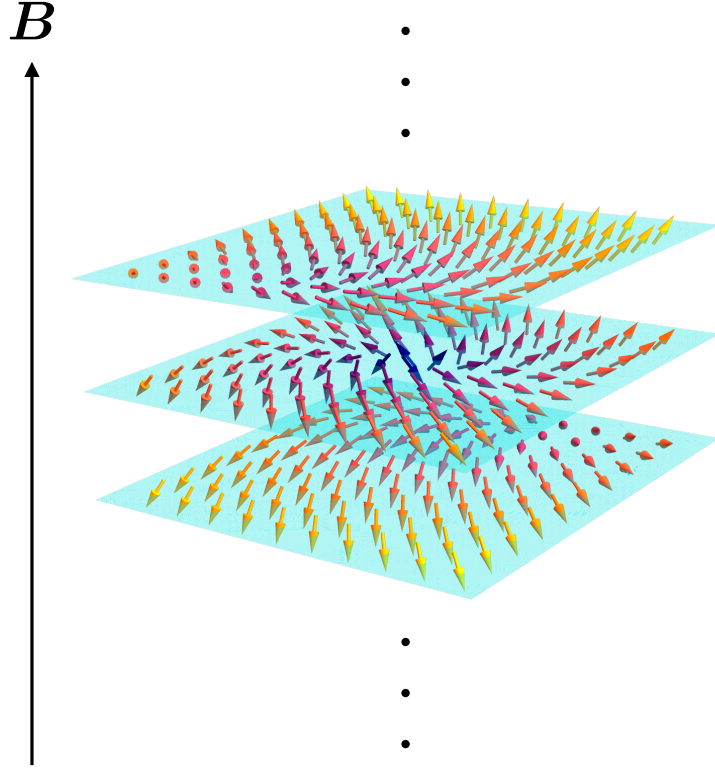


図 9. S^2 モジュライを図示した CSL。各 DW が磁場に沿って並んで、矢印は DW の各点に局在しており、 S^2 モジュライを表している。

となる。 $|\alpha|^2 = 1/(1 + |f|^2)$ かつ $\alpha^* \beta = f/(1 + |f|^2)$ を満たす f は常に変える。よって、 S^2 モジュライは次の条件を満たす複素ベクトル $\phi \in \mathbb{C}^2$ で表すことができる：

$$\phi^\dagger \phi = 1, \quad g\tau_3 g^\dagger = 2\phi\phi^\dagger - \mathbf{1}_2. \quad (5.15)$$

式 (5.3) は ϕ を用いると

$$\Sigma = \exp(2i\theta\phi\phi^\dagger)u^{-1} = [\mathbf{1}_2 + (u^2 - 1)\phi\phi^\dagger]u^{-1} \quad (5.16)$$

のように表すことができる。

5.2 Effective field theory of the non-abelian sine-Gordon soliton

本説では、アイソスピン対称性が自発的に破れたことによって生じたモジュライである ϕ に対する EFT を構成する。 ϕ は χ_\pm に関係した自由度であり、本章の導入で書いたことから ϕ に対する EFT は本質的や役割を果たすことになる。

そのために本セミナーでは、モジュライ近似を用いる。この近似は DW に局在したモジュライをパラメータから場に格上げし、その場に対する理論を解析する。先程考えた sine-Gordon soliton の中心 Z は並進対称性が自発的に破れたモジュライパラメータである。このソリトンの運動を考えると、元の理論から解析しても良いが、当然場の理論なので無限次元でとても難しい。冷静に考えてみるとソリト

ンの運動は並進運動であるので、 Z を自由度とした理論であると予想される。よって、 Z をダイナミカルな自由度に格上げし（今の場合は $Z \rightarrow Z(t)$ ）、この $Z(t)$ に対する理論を構築して解けば良いだろう。この近似の利点は、自由度が無限次元から有限次元にまで落としたことで、解析がしやすくなった所にある（詳細は付録 B を参照）。

それでは、モジュライ近似 [32, 33] を使用して、single DW の EFT を構築しよう。Schematic な絵は 9 であり、effective な $2+1$ 次元の場の理論を構築することになる。 z -座標に垂直な単一の sine-Gordon soliton を配置する。以下では、モジュライパラメータ ϕ を $2+1$ 次元のソリトンの世界体積上の場に昇格させる。DW の並行移動に関するモジュライは重要でないので、DW 中心に関するモジュライ Z は以下では無視する。式 (5.1) を \mathcal{L} に代入して z で積分することで、

$$\mathcal{L}_{\text{DW}} = -8m_\pi f_\pi^2 + \frac{e\mu_B B}{2\pi} + \mathcal{L}_{\text{norm}} + \mathcal{L}_{\text{WZW}} \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}_{\text{norm}} = \frac{16f_\pi^2}{3m_\pi} [(\phi^\dagger D_\alpha \phi)^2 + D_\alpha \phi^\dagger D^\alpha \phi], \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}_{\text{WZW}} = 2\mu_B q + \frac{e\mu_B}{2\pi} \epsilon^{03jk} \partial_j [A_k (1 - n_3)] \quad (5.19)$$

を得る。ここで、 q は $\pi_2(\text{CP}^1)$ の Lump (物性系では Baby Skymion や Magnetic Skymion と呼ばれる) トポロジカル電荷密度であり、

$$q \equiv -\frac{i}{2\pi} \epsilon^{ij} \partial_i \phi^\dagger \partial_j \phi = \frac{1}{8\pi} \epsilon^{ij} \mathbf{n} \cdot (\partial_i \mathbf{n} \times \partial_j \mathbf{n}) \quad (5.20)$$

と定義される。 \mathbb{R}^2 中の微小領域 $dx dy$ は、 \mathbf{n} 空間では $\mathbf{n}(x, y)$ で張られる単位球上の微小領域へと写像される。但し、 \mathbb{R}^2 の無限遠を同一視することで、実空間は S^2 と同値であることを注意する。この微小領域は

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} dx \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} dy \right) \quad (5.21)$$

で与えられる。よって、式 (5.20) を平面上で積分した量は、 \mathbf{n} の配位空間を何回覆うかを表す量であり、整数値を取る：

$$k = \int dx dy q \in \mathbb{Z}. \quad (5.22)$$

そして、 q は GW current 中のバリオン数密度 \mathcal{B} と結合している：

$$q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \equiv \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon^{ijk} \text{tr}(L_i L_j L_k). \quad (5.23)$$

式 (5.17) の最初の二項は、DW のエネルギー密度 (4.6) に -1 を掛けたものである。式 (5.18) は ϕ の運動項である。ここで $U(1)_{\text{EM}}$ ゲージ変換は

$$\phi \rightarrow e^{i\lambda(x)\tau_3/2} \phi \quad (5.24)$$

として与えられ、

$$D_\alpha \phi = \left(\partial_\alpha + i\frac{e}{2} \tau_3 A_\alpha \right) \phi \quad (5.25)$$

はバルク内の背景ゲージ場に対する共変微分である。式 (5.19) では、最初の項は Lump 数を数え、二番目は全微分項である。従って、 ϕ の EFT はトポロジカル項 (5.20) を持つ $\mathbb{C}P^1$ モデル（または $O(3)$ 非線形シグマモデル）である。

この節を終える前に導出の計算過程を記す。式 (2.40) に式 (5.1) を代入すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ChPT}} = & \frac{f_\pi^2}{2}|1-u^2|^2[(\phi^\dagger\partial_\alpha\phi)^2 + \partial_\alpha\phi^\dagger\partial^\alpha\phi] \\ & + \frac{e}{2}f_\pi^2A^\alpha|u^2-1|^2\left[\phi^\dagger\tau_3\phi\cdot\phi^\dagger\partial_\alpha\phi + \frac{1}{2}(\partial_\alpha\phi^\dagger\tau_3\phi - \phi^\dagger\tau_3\partial_\alpha\phi)\right] - \frac{e^2f_\pi^2}{8}A^2|u^2-1|^2[-1 + (\phi^\dagger\tau_3\phi)^2] \\ & - \frac{f_\pi^2}{2}(\partial_z\theta)^2 - f_\pi^2m_\pi^2(1-\cos\theta)\end{aligned}\quad (5.26)$$

となる。この式を z で積分すると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dz \mathcal{L}_{\text{ChPT}} = & \frac{16f_\pi^2}{3m_\pi}[(\phi^\dagger\partial_\alpha\phi)^2 + \partial_\alpha\phi^\dagger\partial^\alpha\phi] \\ & + \frac{16ie}{3m_\pi}f_\pi^2A^\mu\left[\phi^\dagger\tau_3\phi\cdot\phi^\dagger\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^\dagger\tau_3\phi - \phi^\dagger\tau_3\partial_\mu\phi)\right] - \frac{4e^2f_\pi^2}{3m_\pi}A^2[-1 + (\phi^\dagger\tau_3\phi)^2] \\ & - 8m_\pi f_\pi^2\end{aligned}\quad (5.27)$$

を得る。この際に公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz (\partial_z\theta)^2 = 8m_\pi, \quad (5.28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |1-u^2|^2 = \frac{32}{3m_\pi} \quad (5.29)$$

を用いた。ゲージ場の寄与は、共変微分の中にまとめることが出来て

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \mathcal{L}_{\text{ChPT}} = \frac{16f_\pi^2}{3m_\pi}[(\phi^\dagger D_\alpha\phi)^2 + D_\alpha\phi^\dagger D^\alpha\phi] - 8f_\pi^2m_\pi \quad (5.30)$$

となる。ここで、ゲージ変換は $\phi \rightarrow e^{i\lambda\tau_3/2}\phi$ で与えられ、共変微分は

$$D_\alpha\phi = \left(\partial_\alpha + i\frac{e}{2}\tau_3A_\alpha\right)\phi \quad (5.31)$$

となることに注意する。

次にバリオン数密度 \mathcal{B} の z 積分を計算しよう。 \mathcal{B} は

$$\mathcal{B} = -(u - u^{-1})^2 \mathcal{W}(z) q(x, y), \quad (5.32)$$

$$\mathcal{W}(z) \equiv \frac{\partial_3\theta}{2\pi} = \frac{m_\pi}{\pi \cosh m_\pi z} \quad (5.33)$$

と表すことが出来る。 \mathcal{W} を z で積分すると、sine-Gordon soliton のトポロジカル数を与えることを注意する。 \mathcal{B} を z で積分すると

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dz (u - u^{-1})^2 \mathcal{W} = 2 \quad (5.34)$$

から

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dz \mu_B \mathcal{B} = 2\mu_B q \quad (5.35)$$

を得る。

GW current の第二項目は次のように二つのパートに分けることができる；

$$\begin{aligned} \frac{ie\mu_B}{16\pi^2}\epsilon^{0ijk}\partial_i[A_j\text{tr}(\tau_3L_k+\tau_3R_k)] &= \frac{ie\mu_B}{16\pi^2}\epsilon^{0ijk}\partial_iA_j\text{tr}(\tau_3L_k+\tau_3R_k) \\ &+ \frac{ie\mu_B}{16\pi^2}\epsilon^{0ijk}A_j\text{tr}\tau_3(\partial_i\Sigma\partial_k\Sigma^\dagger+\partial_k\Sigma^\dagger\partial_i\Sigma). \end{aligned} \quad (5.36)$$

磁場は $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ と z 方向を向いているとしよう。式 (5.36) の右辺の第一項目は

$$-\frac{ie\mu_B}{16\pi^2}B\text{tr}\tau_3(L_3+R_3) \quad (5.37)$$

となる。 $P \equiv \phi\phi^\dagger$ を用いると、 R_k と L_k は次のように表すことができる；

$$L_k = (1-2P)i\partial_k\theta + (u^{-2}-1)\partial_kP + |u^2-1|^2P\partial_kP, \quad (5.38)$$

$$R_k = (1-2P)i\partial_k\theta + (u^{-2}-1)\partial_kP + |u^2-1|^2\partial_kP \cdot P. \quad (5.39)$$

ϕ は z に依存しないため、 L_3 および R_3 の第二項と第三項は消える。したがって、式 (5.37) は

$$-\frac{e\mu_BB}{4\pi^2}(\phi^\dagger\tau_3\phi)\partial_3\theta, \quad (5.40)$$

となり、 z について積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{ie\mu_B}{16\pi^2}\epsilon^{0ijk}\partial_iA_j\text{tr}(\tau_3L_k+\tau_3R_k) = -\frac{e\mu_BB}{2\pi}\phi^\dagger\tau_3\phi, \quad (5.41)$$

となる。ここで、single DW の境界条件である $\bar{\chi}_3$ の $\bar{\chi}_3(\infty) - \bar{\chi}_3(-\infty) = 2\pi$ を用いた。

次に、式 (5.36) の第二項を計算する。式 (5.16) を $\partial_i\Sigma\partial_k\Sigma^\dagger$ と $\partial_k\Sigma^\dagger\partial_i\Sigma$ に代入すると、これらの量は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} \partial_i\Sigma\partial_k\Sigma^\dagger &= \partial_i\theta\partial_k\theta + [(1-u^{-2}) - (u^2-u^{-2})P]i\partial_i\theta\partial_kP \\ &- [(1-u^2) + (u^2-u^{-2})P]i\partial_k\theta\partial_iP + |1-u^2|^2\partial_iP\partial_kP, \end{aligned} \quad (5.42)$$

および

$$\begin{aligned} \partial_k\Sigma^\dagger\partial_i\Sigma &= \partial_i\theta\partial_k\theta + [(1-u^{-2}) - (u^2-u^{-2})P]i\partial_i\theta\partial_kP \\ &- [(1-u^2) + (u^2-u^{-2})P]i\partial_k\theta\partial_iP + |1-u^2|^2\partial_kP\partial_iP. \end{aligned} \quad (5.43)$$

したがって、 $\epsilon^{0ijk}\text{tr}(\partial_i\Sigma\partial_k\Sigma^\dagger + \partial_k\Sigma^\dagger\partial_i\Sigma)$ を u と ϕ の項で表すと次のようになる：

$$\begin{aligned} \epsilon^{0ijk}\text{tr}\tau_3(\partial_i\Sigma\partial_k\Sigma^\dagger + \partial_k\Sigma^\dagger\partial_i\Sigma) &= \epsilon^{0ijk}\text{tr}\tau_3\{2i[-1+(1+u^2)P](u^{-2}-1)\partial_i\theta\partial_kP \\ &+ 2i[-1+(1+u^{-2})P](u^2-1)\partial_i\theta\partial_kP\} \\ &= 2i|1-u^2|^2\epsilon^{0ijk}\partial_i\theta\text{tr}\tau_3\partial_kP \\ &= 2i|1-u^2|^2\epsilon^{03jk}\partial_3\theta\text{tr}\tau_3\partial_kP. \end{aligned} \quad (5.44)$$

この式を式 (5.36) の第二項に代入すると次のようになる。

$$-\frac{e\mu_B}{8\pi^2}\epsilon^{03jk}|1-u^2|^2\partial_3\theta A_j\partial_k(\phi^\dagger\tau_3\phi). \quad (5.45)$$

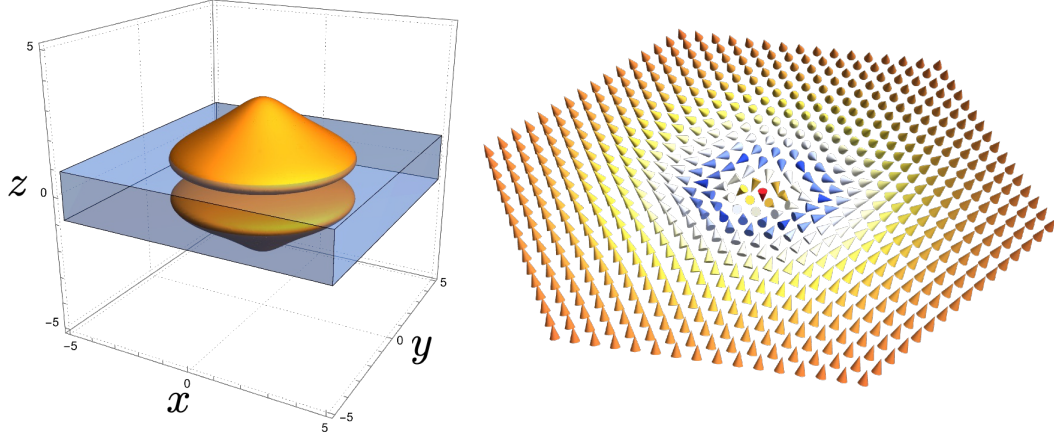


図 10. (左) 最小バリオン $f(w) = 1/w$ に対するバリオン数。 $\mathcal{B} = 1/(50\pi^2)$ の isosurface (オレンジ色) と、 $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ における sine-Gordon soliton (青色)。空間座標は m_π^{-1} を単位として無次元化されている。(右) ソリトン上の $k = 1$ lump に対するモジュライ \mathbf{n}_o 。

z について積分すると

$$\begin{aligned} \int dz \frac{ie\mu_B}{16\pi^2} \epsilon^{0ijk} A_j \text{tr} \tau_3 (\partial_i \Sigma \partial_k \Sigma^\dagger + \partial_k \Sigma^\dagger \partial_i \Sigma) \\ = -\frac{e\mu_B}{2\pi} \epsilon^{03jk} A_j \partial_k (\phi^\dagger \tau_3 \phi). \end{aligned} \quad (5.46)$$

ここで次の積分を使用した：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz (u - u^{-1})^2 \partial_3 \theta = -4\pi. \quad (5.47)$$

式 (5.41) と式 (5.46) を合計すると、式 (3.79) の第二項起源の EFT は次のようになる：

$$\frac{e\mu_B}{2\pi} \epsilon^{03jk} \partial_j (A_k \phi^\dagger \tau_3 \phi). \quad (5.48)$$

最終的に、磁場中の non-Abelian sine-Gordon soliton の EFT に到達する：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DW}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz (\mathcal{L}_{\text{ChPT}} + \mathcal{L}_{\text{WZW}}) = -8f_\pi^2 m_\pi + \frac{e\mu_B B}{2\pi} \\ + \frac{16f_\pi^2}{3m_\pi} [(\phi^\dagger D_\alpha \phi)^2 + D_\alpha \phi^\dagger D^\alpha \phi] \\ + 2\mu_B q + \frac{e\mu_B}{2\pi} \epsilon^{03jk} \partial_j [A_k (1 - n_3)], \end{aligned} \quad (5.49)$$

これにより、式 (5.17)、式 (5.18) および式 (5.19) が導出できる。

5.3 Baby Skyrmion in the non-Abelian sine-Gordon soliton

この節ではまず、 \mathbb{CP}^1 model の持つソリトンである lump の説明をする。 $D_\alpha \rightarrow \partial_\alpha$ とすると

$$\mathcal{L}_{\text{norm}} = \frac{16f_\pi^2}{3m_\pi} [(\phi^\dagger \partial_\alpha \phi)^2 + \partial_\alpha \phi^\dagger \partial^\alpha \phi] \quad (5.50)$$

となる。さらに、 f を用いると

$$\mathcal{L}_{\text{norm}} = \frac{4f_\pi^2}{3m_\pi}(T - V), \quad (5.51)$$

$$T = \frac{|\partial_t f|^2}{(1 + |f|^2)^2}, \quad (5.52)$$

$$V = \frac{|\partial_i f|^2}{(1 + |f|^2)^2} \quad (5.53)$$

を得る。今興味があるのは基底状態なので、ポテンシャル V を最小にする配位を求める。そのために、複素座標 $w = x + iy$ と $\bar{w} = x - iy$ を導入する。 w, \bar{w} を用いると V は次のように変形できる：

$$V = \frac{|\partial_w f|^2 + |\partial_{\bar{w}} f|^2}{(1 + |f|^2)^2}. \quad (5.54)$$

また、Lump charge k は

$$k = \frac{1}{4\pi} \int dw d\bar{w} \frac{|\partial_z f|^2 - |\partial_{\bar{z}} f|^2}{(1 + |f|^2)^2} \quad (5.55)$$

と書くことが出来る。この式から直ちに次の不等式が成り立つ：

$$E \geq 4\pi|k|. \quad (5.56)$$

等式の成立条件は

$$\partial_{\bar{w}} f = 0 \quad \text{as} \quad E = 4\pi k, \quad (5.57)$$

$$\partial_w f = 0 \quad \text{as} \quad E = -4\pi k \quad (5.58)$$

である。

さて、 $\partial_{\bar{w}} f = 0$ はどんな解だろうか？この方程式は Cauchy-Riemann 方程式なので、まず f は \bar{w} に依存しない。さらに、系のエネルギーが有限になるため、無限遠 $w \rightarrow \infty$ で $f = 0$ となる必要がある。よって、次の解を得る：

$$f(w) = \frac{b_{k-1}w^{k-1} + \dots + b_0}{w^k + a_{k-1}w^{k-1} + \dots + a_0}, \quad (5.59)$$

$\{a_A, b_A\}$ ($A = 0, 1, \dots, k-1$) は複素数であり、モジュライパラメータである。

最も簡単な $k = 1$ の場合は

$$f = \frac{b_0}{w - a_0} \quad (5.60)$$

となる。 a_0 は lump の中心位置、 $|b_0|$ は lump のサイズ、 $\arg b_0$ は lump の位相を表している。図示すると図 10 となる。 $k = 2$ の場合は

$$f = \frac{b_0}{(w - X)(w + X)} \quad (5.61)$$

となる。次の節で説明するが、実は $b_1 = 0$ となる。 $k = 2$ の解は二つの中心を持っており、今はその中心の中点を 0 に取った解である。図示すると図 11 となる。

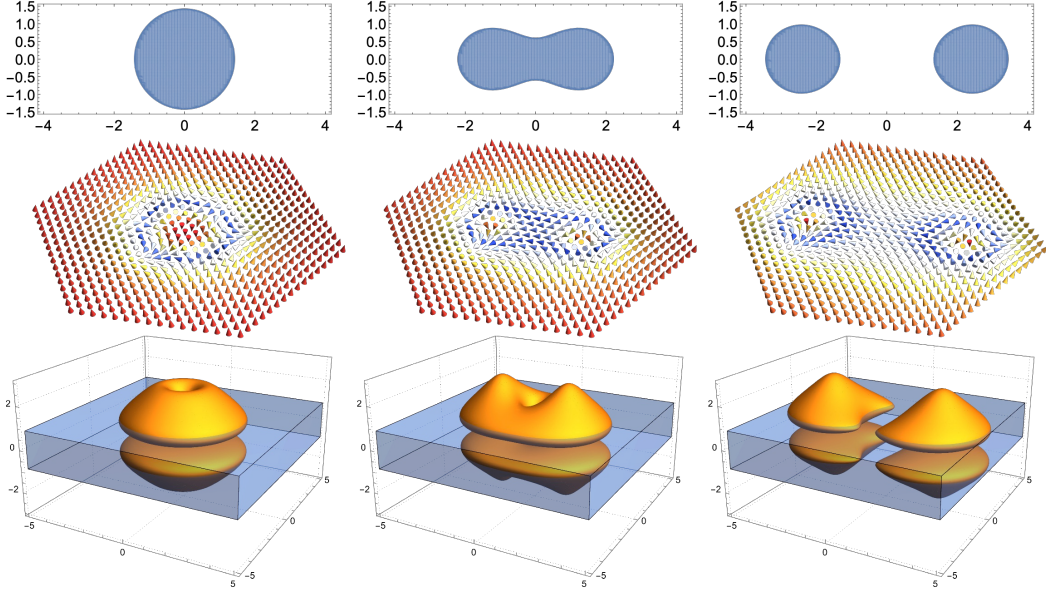


図 11. (上) xy 平面上の領域 ($S_D = 4\pi/eB$, ここでは $eB = 2$) で, $k = 2$ Lump で $f = \frac{b_0}{(w-X)(w+X)}$ ($(b_0, X) = (2, 0), (2.595, 1.5), (5, 2.607)$) を用いた $n_3 \leq 0$ になる領域 (中) DW 上の \mathbf{n} (下) $B = 1/(15\pi^2)$ の isosurface

5.4 Ground state

静的なハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{\text{DW}} = \frac{4f_\pi^2}{3m_\pi}(\partial_i \mathbf{n})^2 - 2\mu_B q - \frac{e\mu_B}{2\pi}\epsilon^{03jk}\partial_j[A_k(1 - n_3)] \quad (5.62)$$

で与えられる。但し、定数部分は無視した。 $E_{\text{DW}} = \int d^2x \mathcal{H}_{\text{DW}}$ は次のような不等式を満たす：

$$E_{\text{DW}} \geq \frac{32f_\pi^2\pi|k|}{3m_\pi} - 2\mu_B k - \frac{e\mu_B}{2\pi}\epsilon^{03jk} \int dxdy \partial_j[A_k(1 - n_3)]. \quad (5.63)$$

等号成立条件は式 (5.57) と (5.58) である。よって、最低エネルギー状態は式 (5.59) を満たしている。

この解の元で式 (5.63) の第三項目を計算しよう。まず、磁場が

$$A_i = \frac{B}{2}\epsilon_{ij}x^j \quad (5.64)$$

と表せることに注意すると

$$\frac{e\mu_B}{2\pi}\epsilon^{03jk}\partial_j[A_k(n_3 - 1)] = \frac{e\mu_B B}{4\pi}\epsilon^{jk}\epsilon_{kl}\partial_j(x^l(n_3 - 1)) = -\frac{e\mu_B B}{4\pi}\partial_l(x^l(n_3 - 1)) \quad (5.65)$$

を得る。この式を xy 平面で積分すると

$$\int dxdy \frac{e\mu_B}{2\pi}\epsilon^{03jk}\partial_j[A_k(n_3 - 1)] = -\frac{e\mu_B B}{4\pi} \int dxdy \partial_l(x^l(n_3 - 1)) = -\frac{e\mu_B B}{4\pi} \oint dS_l x^l(n_3 - 1) \quad (5.66)$$

となる。 $|z| \rightarrow \infty$ での n_3 が必要となるので、計算すると

$$n_3 - 1 \rightarrow \frac{r^2 - |b_{k-1}|^2}{r^2 + |b_{k-1}|^2} - 1 = \frac{-2|b_{k-1}|^2}{r^2 + |b_{k-1}|^2} \quad (5.67)$$

となる。これを式 (5.63) の第三項目に代入して積分を実行すると

$$-\frac{e\mu_B B}{4\pi} \oint dS_j x^j (n_3 - 1) = \frac{e\mu_B B}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\theta r^2 \frac{2|b_{k-1}|^2}{r^2 + |b_{k-1}|^2} = e\mu_B B |b_{k-1}|^2 \quad (5.68)$$

となる。よって、

$$E_{\text{DWSk}} = \frac{32\pi f_\pi^2}{3m_\pi} |k| - 2\mu_B k + e\mu_B B |b_{k-1}|^2 \quad (5.69)$$

を得る。

図 10, 11 を見てみると、黄色の領域は $n = \pm 1$ 以外のところで charged の場が有限の値を持っている。よって、超伝導リングのような状態になっている。そこで、 \mathbf{n} と A_α 間の結合を考えてみよう。まず、 $U(1)_{\text{EM}}$ が τ_3 によって生成されるため、 n_3 中性である。 $n_{1,2}$ が $U(1)_{\text{EM}}$ によって変換を受けるので、変換則を求めよう。そのために

$$\frac{n_1 \pm i n_2}{2} \equiv n_\pm \quad (5.70)$$

を定義する。行列で表すと

$$n_+ = \phi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi, \quad n_- = \phi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi \quad (5.71)$$

となる。ゲージ変換 $\phi \rightarrow e^{i\lambda(x)\tau_3/2} \phi$ から

$$n_\pm \rightarrow e^{\mp i\lambda(x)} n_\pm \quad (5.72)$$

を得る。従って、 ϕ に対する共変微分は

$$D_\alpha(n_1 + i n_2) = (\partial_\alpha - ieA_\alpha)(n_1 + i n_2) \quad (5.73)$$

によって与えられる。

C を $n_3 = 0$ となる閉曲線、 D を C の内部とする。 $U(1)_{\text{EM}}$ は自発的に破れ、荷電パイオンが凝縮する。ゲージ場の配置は C に沿って勾配エネルギー $|D_\alpha(n_1 + i n_2)|^2 = 0$ を最小化することによって決定され、 $|n_1 + i n_2| = 1$ であることから C 上で $n_1 + i n_2 = e^{i\psi}$ と置けることに注意すると

$$\partial_\alpha \psi = eA_\alpha \quad (5.74)$$

となる。これを用いると D 上にはフラックス（および面積）の量子化が生じることを示せる。磁束をゲージ場の周回積分で表すと

$$BS_D = \int_D d^2x B = - \oint_C dx^i A_i \quad (5.75)$$

となる。 n_+ は

$$n_+ = \frac{2f}{1 + |f|^2} \quad (5.76)$$

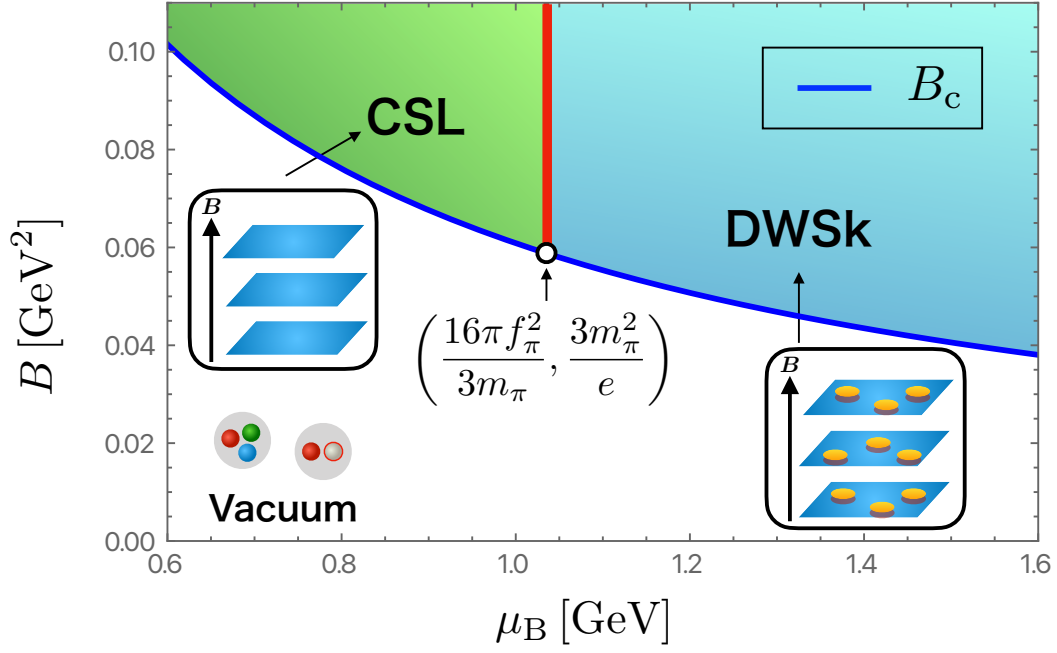


図 12. μ_c と B_{CSL} を書き込んだ相図

と f を用いて表すことが出来る。特に、 $n_3 = 1$ のときには $|f| = 1$ なので

$$n_+ = f \quad (5.77)$$

となる。具体的に議論するために、最も簡単な軸対称な lump 解を考えよう：

$$f = \frac{b_0}{w^k} \quad (5.78)$$

$|f| = 1$ のときには $r^k = b_0$ であり、 $f = e^{-ik\theta}$ と表すことが出来る。式 (5.74) を代入すると

$$BS_D = -\frac{1}{e} \oint_C dx^i \partial_i \psi = \frac{2\pi k}{e} \quad (5.79)$$

を得る。ここで k は D 上の lump 数、 S_D は D の面積である。これにより lump moduli に制限が生じる。軸対称な lump 解でこちらも議論する。 $|f| = 1$ より $r^k = b_0$ となり、 $S_D = \pi r^2$ と合わせて式 (5.79) に代入すると

$$|b_0| = \left(\frac{2k}{eB} \right)^{k/2} \quad (5.80)$$

を得る。

式 (5.69) をみるとエネルギーを最小にするには、 b_{k-1} を 0 にしたいのだが、 $k = 1$ の場合は第二項目と第三項目は

$$-2\mu_B + e\mu_B B \frac{2}{eB} = 0 \quad (5.81)$$

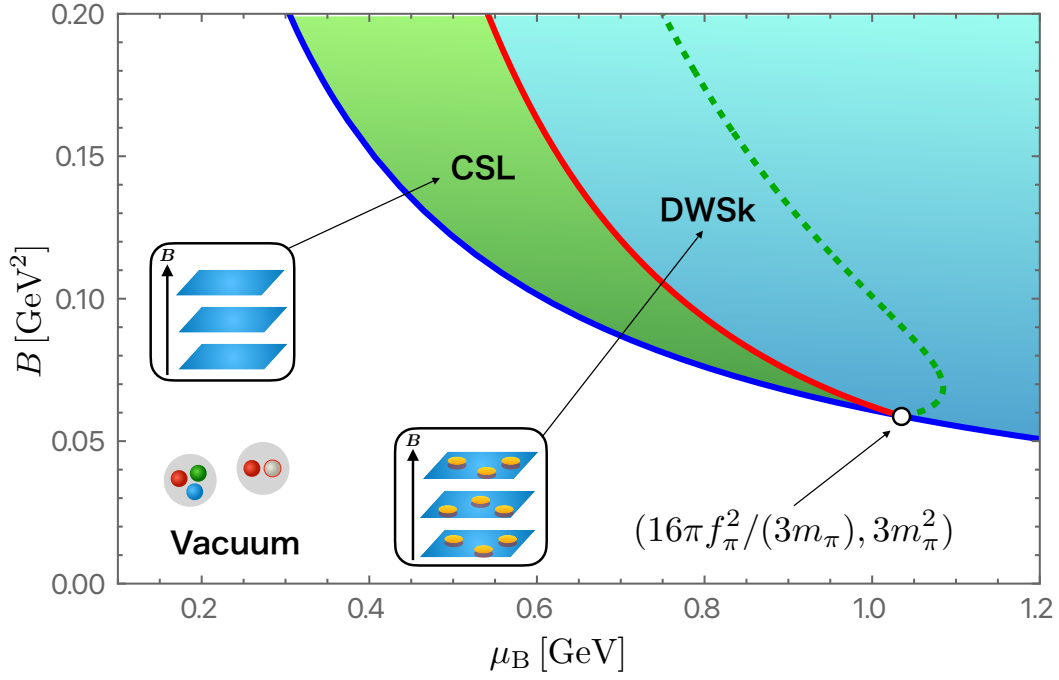


図 13. $\tilde{\mu}_c$, B_{CSL} , B_{CPC} を書き込んだ相図

となってしまうので $E_{\text{DWSk}} >$ となり、自明な場合が最もエネルギーが低い。一方、 $k \geq 2$ の場合は量子化条件 (5.79) に抵触せずに 0 に出来る。よって、 μ_B が

$$\mu_c = \frac{16\pi f_\pi^2}{3m_\pi} \quad (5.82)$$

よりも大きいと、 E_{DWSk} は負になる。よって、DW 上に lump を生成した方がエネルギー的に安定であることが分かった。これを考慮した μ_B - B 相図は図 12 となる [34]。

ここまでの議論は single DW であったが、実は B_{CSL} より上の領域では他の DW が存在することで斥力が存在している [27]。斥力が存在している場合の解析は [35] で行われた。計算自体は背景場 $\bar{\chi}_3$ として、single DW ではなく、CSL を持ちいれば良い。結果は CP^1 理論の運動項部分を

$$\frac{16f_\pi^2}{3m_\pi} \rightarrow \frac{16f_\pi^2}{3m_\pi} \frac{(2-k^2)E(k) - 2(1-k^2)K(k)}{k^3} \equiv \mathcal{C}(k) \quad (5.83)$$

と変更を受ける。 $k \rightarrow 1$ は single DW 極限であるが、この極限で $\mathcal{C}(1) = 1$ となることを注意する。よって、臨界化学ポテンシャルは

$$\tilde{\mu}_c = \frac{16\pi f_\pi^2}{3m_\pi} \frac{(2-k^2)E(k) - 2(1-k^2)K(k)}{k^3} \quad (5.84)$$

となる。従って、相図 12 は図 13 と変更される。

付録 A ゲルマン・レヴィの方法

作用 S は

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \quad (\text{付録 A.1})$$

で与えられるとし、場は適当な変換に対して

$$\varphi_i(x) \rightarrow \varphi_i(x) + \epsilon^\alpha G_i^\alpha \quad (\text{付録 A.2})$$

と変換するとしよう。また大域的な変換に対して作用は不変であるとする：

$$\delta S = 0, \quad \partial_\mu \epsilon^\alpha = 0. \quad (\text{付録 A.3})$$

変換パラメータ ϵ^α が大域的な量であった場合に、作用の微小量は

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \epsilon^\alpha G_i^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu (\epsilon^\alpha G_i^\alpha) \right] \\ &= \int d^4x \epsilon^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} G_i^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu G_i^\alpha \right] \\ &= \int d^4x \epsilon^\alpha \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} G_i^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu G_i^\alpha \right] \\ &= \int d^4x \epsilon^\alpha \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} G_i^\alpha \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 A.4})$$

となる。従って、

$$j_\alpha^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} G_i^\alpha \quad (\text{付録 A.5})$$

がネーターカレントとなる。

次に変換パラメータが局所的な量である場合に、作用の微小変化を計算する。

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \epsilon^\alpha G_i^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu (\epsilon^\alpha G_i^\alpha) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \epsilon^\alpha G_i^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu \epsilon^\alpha \cdot G_i^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \epsilon^\alpha \cdot \partial_\mu G_i^\alpha \right] \\ &= \int d^4x \left[\epsilon^\alpha \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} G_i^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu G_i^\alpha \right) + \partial_\mu \epsilon^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} G_i^\alpha \right) \right] \\ &= \int d^4x \left[\epsilon^\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} G_i^\alpha \right) + \partial_\mu \epsilon^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} G_i^\alpha \right) \right] \\ &= \int d^4x (\epsilon^\alpha \cdot \partial_\mu j_\alpha^\mu + \partial_\mu \epsilon^\alpha \cdot j_\alpha^\mu). \end{aligned} \quad (\text{付録 A.6})$$

この式が局所変換に対する作用の変換を表す一般式であり、その変換に対するネーターカレントで表現できることを示している。

付録 B Moduli approximation

この appendix では、sine-Gordon 模型を例に moduli 近似の説明を行う。本文で言及したように、sine-Gordon 方程式の静的な解は式 (4.5) であった。この解はグラフを見ればわかるように、 $z = 0$ に局在しているキंक解である。しかし、キंक中心 Z は自由に選ぶことができ

$$\varphi(z, Z) = 4 \tan^{-1} e^{m(z-Z)} \quad (\text{付録 B.1})$$

も解である。さて、このキंकの運動を考えよう。もちろん、sine-Gordon 模型は場の理論であり、無限次元なので難しい。そこで、並進を表すパラメータ Z に着目しよう。キंकが壊れたりしない限りは Z をダイナミカルな自由度 $Z(t)$ に格上げし、 $Z(t)$ の理論を解く方が自由度が減って楽そうである。 $\varphi(z, Z) \rightarrow \varphi(z, Z(t))$ として、sine-Gordon 模型のラグランジアンに代入すると

$$S_{\text{SG}} = \int dt dz \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}(z, Z(t))^2 - \frac{1}{2} \varphi'(z, Z(t))^2 - m^2 (1 - \cos \varphi(z, Z(t))) \right] \quad (\text{付録 B.2})$$

となる。 $\varphi(z, Z(t))$ は $z - Z(t)$ に依存していることから

$$S_{\text{SG}} = \int dt dz \left[\frac{1}{2} \varphi'(z, Z(t))^2 \dot{Z}^2(t) - \frac{1}{2} \varphi'(z, Z(t))^2 - m^2 (1 - \cos \varphi(z, Z(t))) \right] \quad (\text{付録 B.3})$$

となる。キंकの質量は

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} \varphi'(z, Z(t))^2 + m^2 (1 - \cos \varphi(z, Z(t))) = 8m \quad (\text{付録 B.4})$$

であり、積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} \varphi'(z, Z(t))^2 = 8m = M \quad (\text{付録 B.5})$$

を用いると

$$S_{\text{SG}} = \int dt dz \left(-M + \frac{M}{2} \dot{Z}^2 \right) \quad (\text{付録 B.6})$$

となる。これはよく知られている点粒子の作用である。もう少し言うと、キंकを点粒子と思って相対論的粒子の作用

$$S = -M \int dt \sqrt{1 - \dot{Z}^2} \quad (\text{付録 B.7})$$

の時間微分が小さいとして、展開したものと同一である。この作用の解は、速度 u 、初期位置 Z_0 の等速直線運動である：

$$Z = ut + Z_0. \quad (\text{付録 B.8})$$

よって、

$$\varphi(z, Z(t)) \simeq 4 \tan^{-1} e^{m(z-ut)} \quad (\text{付録 B.9})$$

となる。

これを sine-Gordon 方程式の厳密解と比較してみよう：

$$\varphi(z, Z(t)) = 4 \tan^{-1} \exp \left(\frac{m(z - ut)}{\sqrt{1 - u^2}} \right). \quad (\text{付録 B.10})$$

u が光速 1 よりも十分小さいとき、この厳密解は (付録 B.9) と一致する。つまり、ソリトンの速度が十分小さくて、ローレンツ収縮が無視できる場合、すなわちキンクの形が変形しないときに良い近似であることが分かった。今の場合は、厳密解が分かっている上にどんな運動をするかも直観的に理解しやすかったので、モジュライ近似のありがたみがよく分からなかったと思う。しかし、本文中での DW 中の ϕ の配位を決定するときはもちろん、他にもソリトンが複数現れる場合や、もっと次元が高いソリトンの運動を記述する際に威力を発揮する。

参考文献

- [1] N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004, [10.1017/CBO9780511617034](#).
- [2] E. J. Weinberg, *Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 9, 2012, [10.1017/CBO9781139017787](#).
- [3] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, 7, 2000.
- [4] S. Weinberg, *Phenomenological Lagrangians*, *Physica A* **96** (1979) 327.
- [5] A. Manohar and H. Georgi, *Chiral Quarks and the Nonrelativistic Quark Model*, *Nucl. Phys. B* **234** (1984) 189.
- [6] A. Vilenkin, *Equilibrium Parity Violating Current in a Magnetic Field*, *Phys. Rev. D* **22** (1980) 3080.
- [7] K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, *The Chiral Magnetic Effect*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 074033 [[0808.3382](#)].
- [8] D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, *Chiral Magnetic conductivity*, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 034028 [[0907.5007](#)].
- [9] K. Landsteiner, *Notes on Anomaly Induced Transport*, *Acta Phys. Polon.* **B47** (2016) 2617 [[1610.04413](#)].
- [10] K. Landsteiner, E. Megías and F. Pena-Benitez, *Anomalous Transport from Kubo Formulae*, *Lect. Notes Phys.* **871** (2013) 433 [[1207.5808](#)].
- [11] D. T. Son and P. Surówka, *Hydrodynamics with Triangle Anomalies*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 191601 [[0906.5044](#)].
- [12] Y. Neiman and Y. Oz, *Relativistic Hydrodynamics with General Anomalous Charges*, *JHEP* **03** (2011) 023 [[1011.5107](#)].
- [13] D. T. Son and N. Yamamoto, *Berry Curvature, Triangle Anomalies, and the Chiral Magnetic Effect in Fermi Liquids*, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 181602 [[1203.2697](#)].

- [14] D. T. Son and N. Yamamoto, *Kinetic theory with Berry curvature from quantum field theories*, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 085016 [[1210.8158](#)].
- [15] M. A. Stephanov and Y. Yin, *Chiral Kinetic Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 162001 [[1207.0747](#)].
- [16] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *ADLER-BELL-JACKIW ANOMALY AND WEYL FERMIONS IN CRYSTAL*, *Phys. Lett. B* **130** (1983) 389.
- [17] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid mechanics, Course of theoretical physics* **6** (1959) .
- [18] D. T. Son and A. R. Zhitnitsky, *Quantum anomalies in dense matter*, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 074018 [[hep-ph/0405216](#)].
- [19] D. T. Son and M. A. Stephanov, *Axial anomaly and magnetism of nuclear and quark matter*, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 014021 [[0710.1084](#)].
- [20] J. Goldstone and F. Wilczek, *Fractional Quantum Numbers on Solitons*, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 986.
- [21] C. M. Fraser, *Calculation of Higher Derivative Terms in the One Loop Effective Lagrangian*, *Z. Phys. C* **28** (1985) 101.
- [22] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, *Derivative Expansions of Fermion Determinants: Anomaly Induced Vertices, Goldstone-Wilczek Currents and Skyrme Terms*, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 2605.
- [23] A. P. Balachandran, V. P. Nair, S. G. Rajeev and A. Stern, *Soliton States in the QCD Effective Lagrangian*, *Phys. Rev. D* **27** (1983) 1153 [Erratum: *Phys.Rev.D* 27, 2772 (1983)].
- [24] A. P. Balachandran, V. P. Nair, S. G. Rajeev and A. Stern, *Exotic Levels from Topology in the QCD Effective Lagrangian*, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1124 [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 50, 1630 (1983)].
- [25] V. P. Nair, *Quantum field theory: A modern perspective*. 2005.
- [26] T. Brauner and N. Yamamoto, *Chiral Soliton Lattice and Charged Pion Condensation in Strong Magnetic Fields*, *JHEP* **04** (2017) 132 [[1609.05213](#)].
- [27] J. K. Perring and T. H. R. Skyrme, *A Model unified field equation*, *Nucl. Phys.* **31** (1962) 550.
- [28] T. Brauner, H. Kolečová and N. Yamamoto, *Chiral soliton lattice phase in warm QCD*, *Phys. Lett. B* **823** (2021) 136767 [[2108.10044](#)].
- [29] T. Brauner and H. Kolečová, *Chiral soliton lattice at next-to-leading order*, *JHEP* **07** (2023) 163 [[2302.06902](#)].
- [30] J. Wess and B. Zumino, *Consequences of anomalous Ward identities*, *Phys. Lett. B* **37** (1971) 95.
- [31] E. Witten, *Global Aspects of Current Algebra*, *Nucl. Phys. B* **223** (1983) 422.
- [32] N. S. Manton, *A Remark on the Scattering of BPS Monopoles*, *Phys. Lett. B* **110** (1982) 54.
- [33] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *Manifestly supersymmetric effective Lagrangians on BPS solitons*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 125008 [[hep-th/0602289](#)].
- [34] M. Eto, K. Nishimura and M. Nitta, *How baryons appear in low-energy QCD: Domain-wall Skyrmion phase in strong magnetic fields*, [2304.02940](#).
- [35] M. Eto, K. Nishimura and M. Nitta, *Phase diagram of QCD matter with magnetic field: domain-wall Skyrmion chain in chiral soliton lattice*, [2311.01112](#).