

複素関数論とその物理への応用

Masaru Hongo,^{a,b}

^aDepartment of Physics, Niigata University, Niigata 950-2181, Japan

^bRIKEN iTHEMS, RIKEN, Wako 351-0198, Japan

E-mail: hongo@phys.sc.niigata-u.ac.jp

ABSTRACT: 複素関数論について、とくに物理への応用を念頭においた講義ノートをまとめる.

[更新履歴]

- 2023/02/07: 演習問題 2 と 4 の解答例の誤りを修正.
- 2023/02/06: 6. 複素関数論の応用例を微修正.
- 2023/01/26: 演習問題 5 を作成.
- 2023/01/25: 6. 複素関数論の応用例の終わりまでを追加.
0. 授業の目標の内容を修正.
- 2023/01/24: 6. 複素関数論の応用例を途中まで追加.
0. 授業の目標の参考図書を追加.
- 2023/01/23: 5. 複素関数の級数展開と無限和の終わりまでを追加.
- 2023/01/10: 4. 複素関数の積分 2 の終わりまでを修正し、公開.
- 2023/01/09: 2. 複素関数とその微分：正則関数の終わりまでを修正.

Contents

0 授業の目標	1
1 複素数と複素平面	3
2 複素関数とその微分：正則関数	11
3 複素関数の積分 1：コーシーの積分定理	27
4 複素関数の積分 2：コーシーの積分公式・留数定理	34
5 複素関数の級数展開と無限和	49
6 複素関数論の応用	56
7 授業のまとめ	70

0 授業の目標

現代物理（とくに量子論）において複素数は「あるのが当然」というくらい基本的な数学的概念となっている。実際、学部3年次以降で習う科目において

- 量子力学：物理系の状態は波動関数と呼ばれる複素数に値を取る関数で記述される。
- （広い意味での）場の理論：フーリエ解析と複素関数論が基本的な理論計算の手法の1つとなる。
- 量子電磁気学：複素数の位相を回す変換に対する量子ゲージ理論が量子電磁気学である。
- 弦理論・共形場理論：複素関数の正則性などの基本的な性質が、理論の解析に使われる。

というように、複素関数論の知識は現代物理の多くの分野で必要になる。ちなみに、2つ目の「(広い意味での) 場の理論」には素粒子や原子核を記述するような相対論的場の量子論だけでなく、実験室で取り扱う物質を記述する物性物理学や統計物理学も含む。また、数学的にも、リーマン予想など現代数学の未解決問題につながる基本となる分野となっている。

複素関数論は様々な分野で使われているが、複素数の「直感的な」理解はむずかしい。さらに、複素関数論で得られる公式もまた、かなり違和感を覚えるものが含まれる。ただし、この講義では物理学科向けの講義ということで、物理で必要となる具体的な計算法を主に扱っていく。たとえば、

$$\zeta(-1) \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12} \quad (0.1)$$

という公式が存在する。この式は与えられた $1 + 2 + 3 + \cdots$ という無限和に対応する $\zeta(-1)$ という量が有限かつ負の定数になることを主張しており、明らかに常識はずれだということだと思う（筆者もそう思う）。実際は、 $\stackrel{?}{=}$ と書いたように、この等号は文字通り受け取ってはならないのだが、 $\zeta(-1) = -1/12$ という結果自体は、実際に現代物理（場の量子論）でも使われる公式であり、かつ実験的な検証もなされている（はず）の式である。

この授業では理論物理で必要になる複素関数論の基礎を学び、来年度以降に習う現代物理の計算のための準備を行うものである。講義を通して習得すべき具体的に課題を以下にまとめる：

- (i) 複素数の四則演算など，基本的な計算規則を使いこなせるようにする（2 コマ）．
- (ii) 複素関数の微分が実行でき，正則関数の定義や性質を理解する（3 コマ）．
- (iii) 複素関数の積分定理を理解し，実際の計算（とくに留数積分）を実行できるようなる（5 コマ）．
- (iv) 複素関数の級数展開（ローラン展開）を実行できるようになる（2 コマ）．
- (v) （できれば）解析接続やリーマン面の概念を理解する（3 コマ）．
- (vi) [2023-0125 追加] ガンマ関数や鞍点法などの複素関数の応用を理解する (?コマ)．

(v) の課題は抽象的な数学概念を理解するという発展的な側面があるので，そこまで突っ込んででは取り扱わないと思う．

◇ 成績評価の方法

授業の成績評価は

- 講義中に出题する小レポート (5 回程度) : 20-30 点
- 学期末の期末試験 : 70-100 点

で定める．レポートの提出は学務情報システムを用いて行う．詳細はレポート出題時にアナウンスする．

◇ 参考図書

たとえば，以下の本を参考図書として挙げておく：

- 『理工系の数学入門コース 複素関数』，表 実，岩波書店 (1988)
できるようになってほしい基本的な計算が多く例とともに載っている．
- 『複素関数入門 (現代数学への入門)』，神保 道夫，岩波書店 (2003)
複素関数論の数学と計算技法が，洗練された形でまとまっている本．上の本よりも少し発展的．
- 『物理のための数学入門 複素関数論』，有馬 朗人，神部 勉，共立出版 (1991)
物理学者が書いた複素関数論の教科書．計算法だけでなく，数学的にもちゃんとまとまっている．
- 『自然科学者のための数学概論 増訂版』，寺沢 寛一，岩波書店 (1983)
複素関数論だけでなく物理数学の多くの分野が載っている辞書的な本．

1 複素数と複素平面

◇ なぜ複素数が必要か？

「数」という概念のもっとも原始的なものの1つに**自然数**がある。数学的な観点から数の体系について大事なものは、考えている「数」がどのような操作のもとで閉じた体系を与えているかである。自然数は足し算・掛け算について閉じた体系を与えているが、引き算についても閉じていることを要請すると(負の数も含めた)**整数**まで数の概念を格上げする必要がある。さらに、割り算についても閉じていることを要請すると、**有理数**を考える必要がある。

このように考えたとき、「代数方程式を解く」という操作のもとで閉じた「数」を考えたい。すると、以下の定理が知られている。

代数学の基本定理：複素係数の任意の n 次方程式 (代数方程式)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{with} \quad a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0 \quad (1.1)$$

は重複も含めてちょうど n 個の複素数解を持つ。

したがって、「代数方程式を解く」という操作のもとで閉じた数は**複素数**で十分であることが示されている。そこで、この節ではまず複素数の基本的な事項を復習しておこう。

◇ 複素数の定義と計算規則

複素数 z とは $i^2 = -1$ を満たす**虚数** i を用いて

$$z = x + iy \quad \text{with} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \quad (1.2)$$

と一意に表される数とする。このとき、ある数 a が実数であることを「実数の集合 \mathbb{R} に属する」という意味の数学記号 $a \in \mathbb{R}$ で表した。同様に、 z が複素数であることを、複素数の集合記号 \mathbb{C} を用いて $z \in \mathbb{C}$ と表す。ここで、 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ のことをそれぞれ複素数 z の実部、虚部と呼び、 $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ と表す。とくに $\operatorname{Im} z = 0$ のときは z は**実数**、 $\operatorname{Re} z = 0$ のときは**純虚数**と呼ぶ。

複素数に関しても実数のときと同様に、「足し算・引き算・掛け算・割り算」が定義される。新しいのは i という虚数が $i^2 = -1$ を満たすということだけである。具体的には、 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ という2つの複素数について、以下のように「足し算・引き算・掛け算・割り算」を定義する：

$$\bullet \text{ 足し算: } z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \quad (1.3)$$

$$\bullet \text{ 引き算: } z_1 - z_2 := x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) \quad (1.4)$$

$$\bullet \text{ 掛け算: } z_1 z_2 := x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.5)$$

$$\bullet \text{ 割り算: } \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad (\text{ただし } z_1 \neq 0) \quad (1.6)$$

ここで、 $:=$ は「右辺により左辺を定義する」という数学記号であり、複素数の「足し算・引き算・掛け算・割り算」を右辺で定めた `sadameta` ことを意味する。掛け算と割り算の定義は少し複雑だが、これらを公式として覚える必要はない。というのも、 $i^2 = -1$ を用いて計算していくと

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \frac{z_2}{z_1} &= \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} \cdot \frac{x_1 - iy_1}{x_1 - iy_1} = \frac{x_1 x_2 - ix_2 y_1 + ix_1 y_2 - i^2 y_1 y_2}{x_1^2 - ix_1 y_1 + ix_1 y_1 - i^2 y_1^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

と導出できるからだ。したがって、複素数の計算は $i^2 = -1$ という虚数の定義さえ覚えておけば、実数と同じように計算することができる。

このように複素数の計算規則を定義すると、以下の構造を満たしていることがわかる：

- 加法の交換則・結合則： $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (1.8)

- 乗法の交換則・結合則： $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (1.9)

- 分配則： $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (1.10)

- 加法・乗法の単位元の存在： $z + 0 = z$, $z \cdot 1 = z$ (1.11)

- 加法・乗法の逆元の存在： $z + (-z) = 0$, $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ ($z \neq 0$) (1.12)

これらの構造を持つ数学的対象を**体 (field)** と呼ぶので、上で与えた規則で定まる複素数全体の集合を**複素数体**と呼び、その頭文字を取って \mathbb{C} で表す。

◇ 複素共役とノルム

複素数 z について、その**複素共役** \bar{z} を「虚部の符号をひっくり返す」ことにより定義する。具体的には、 $z = x + iy$ と表すことができるので、その複素共役 \bar{z} は

- 複素共役： $\bar{z} := x - iy$ (1.13)

として定義される、複素共役を用いると、このとき、定義からただちにわかるように、複素数 z の実部と虚部は

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.14)$$

と表すことができる。また、複素共役を2回行うことや、和や積の複素共役を考えると以下が成立することが示される：

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad (1.15)$$

さて、複素数 z は実部と虚部を併せ持つため、実数のようにその値を持って順序づけすることが難しい。しかし、その「大きさ」を記述する量があると便利であろう。そこで、複素数 z の**ノルム**を以下のように定義する：

- ノルム： $|z| := \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (1.16)

により定義する。複素共役とノルムを用いると、複素数の割り算を簡潔に表すことができる。とくに、 $1/z$ という量は

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (\text{ただし } z \neq 0) \quad (1.17)$$

と表される。

(第1回ここまで)

◇ 複素平面と複素数の極座標表示

複素数 $z = x + iy$ は実部 x と虚部 y という2つの実数の組で記述される数になっている。そこで、横軸・縦軸の値が実部と虚部に一致する2次元平面を導入すると、図1に示すように、2次元平面上の点として複素数を表すことができる。このような複素数を図示する平面のことを**複素平面**と呼び、実部を表す横軸を実軸、虚部を表す縦軸を虚軸と呼ぶ。

さて、複素数を複素平面上の点として表すと、平面上の距離を導入するの自然なように思われる。そこで、既に導入したノルムを用いて複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ と $z_2 = x_2 + iy_2$ の間の**距離**を

$$|z_1 - z_2| := \sqrt{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1.18)$$

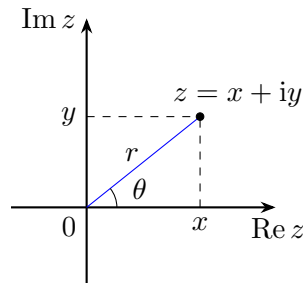


Figure 1. 複素平面を用いた複素数の表示.

と定義する. これは, 最右辺をみればわかるように, これは通常の 2 次元平面上の距離と一致していることがわかる. また, 定義からただちに

- 非退化性: $|z_1 - z_2| = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$,
 - 対称性: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$,
 - 三角不等式: $|z_1 - z_2| + |z_1 - z_3| \geq |z_2 - z_3|$
- (1.19)

という 3 つの条件 (= 距離の公理) を満たすことが確認できる.

図 1 に示すように, 複素数 z のノルムを r , 実軸となす偏角を θ と表そう. このとき, 三角関数の知識から $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ が成立することを用いると, 複素数 z を

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{with} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (1.20)$$

と表すことができる. ここで $\arctan \theta$ は $\tan \theta$ の逆関数なので, 最後の式は $\frac{y}{x} = \tan \theta$ を表している.

例. 図形の複素数による表示: いま, ある決まった複素数 $\alpha = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) と実数 r を考える. このとき, 複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に関して

$$|z - \alpha| = r \quad (1.21)$$

という式は複素平面上でどのような図形を記述するか考えてみよう. このために, この式に上に与えた距離の定義を用いると

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1.22)$$

と表すことができることに注目する. したがって, 式 (1.21) を満たす複素数 z は, 複素平面上で図 2 に示したような中心 α , 半径 r の円を表すとわかる.

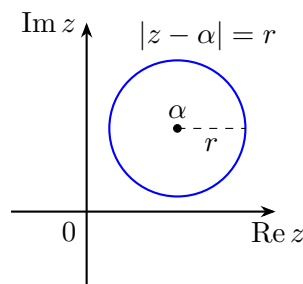


Figure 2. $|z - \alpha| = r$ が表す図形.

さて、複素数 z を距離と偏角で表した式 (1.20) で現れた三角関数の和 $\cos \theta + i \sin \theta$ について考えてみよう。微積分学で習った三角関数に関するテイラー展開を用いると

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\theta^{2k} + \cdots \\ \sin \theta &= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\theta^{2k+1} + \cdots\end{aligned}\quad (1.23)$$

となる。そこで、このテイラー展開の結果と $i^2 = -1$ を用いて式変形をしていくと

$$\begin{aligned}\cos \theta + i \sin \theta &= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{(2k)!}(i\theta)^{2k} + \frac{1}{(2k+1)!}(i\theta)^{2k+1} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n\end{aligned}\quad (1.24)$$

となる。さて、2行目の無限和は見覚えのあるものになっている。実際、**ネイピア数**と呼ばれる自然対数の底 $e = 2.718\cdots$ の指数関数 e^x ($x \in \mathbb{R}$) のテイラー展開が

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad (1.25)$$

で与えられることを思い出そう。すると、上で現れた式は e^x のテイラー展開について、形式的に $x \rightarrow i\theta$ と置き換えたものになっていることに気がつく。しかし、まじめに考えると、 e^x の x として純虚数 (より一般には複素数) を代入した関数の定義は微積分の講義ではしていないと思われる。そこで、この未定義であることを逆手にとって、

$$e^{i\theta} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n \quad \text{with } \theta \in \mathbb{R} \quad (1.26)$$

と定義することにしよう。すると以上の結果から、次の公式が得られたことになる：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.27)$$

これは有名な**オイラーの公式**と呼ばれる式である。この式は、三角関数や指数関数が実数関数としてはまるで別物であったのを、関数の引数を複素数まで広げると統一的に理解できることになったことを表している。とくに $\theta = \pi$ としたときには $e^{i\pi} = -1$ という有名な式を与える。

複素数 z の表示に話を戻そう。オイラーの公式を用いると、複素数 z はそのノルムと偏角を用いて

$$z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = |z|, \quad \theta = \arg z \quad (1.28)$$

と表されることがわかる。この式のように大きさと偏角を用いて複素数を表すことを、複素数の**極表示**と呼ぶ。ある複素数 z を極表示するためには、ノルム r と偏角 θ がわかればよい。ただし、ノルムは一意に定まる量であるのに比べて、偏角はそうではないことに注意が必要である。実際、三角関数の周期性からわかるように偏角 θ と $\theta + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) について、 $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2n\pi)}$ が成立するため、偏角は $\text{mod } 2\pi$ でしか定義されない。このために、 θ の取りうる範囲については、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とか $-\pi \leq \theta < \pi$ などの制限をかけることが普通である。 θ の範囲は自分で勝手に選ぶことができるが、この授業ではなるべく $-\pi \leq \theta < \pi$ を使うようにし、それ以外の規則を使うときには明言するようにする。

さて、この章のはじめに与えたように複素数の加減乗除は、実部と虚部に分けて実数と同じ計算規則に従って具体的に計算することができる。しかし、複素数の計算については、絶対値・複素共役や極表示などを用いて行っていくと便利なことが多いことを注意しておく。

複素数の極表示は実用上も便利である。そこで、加法定理の導出、1 の n 乗根、古典力学における調和振動子の記述法という3つの応用例を以下に示しておこう。

例. 加法定理の導出：2つの複素数の極表示 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ を用いてこれらの掛け算 $z_1 z_2$ を2通りに表すと

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i \{\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1\}] \end{aligned} \quad (1.29)$$

が得られる. 1つ目の結果については, 指数関数の性質 $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ を用いた. 2つの結果が等しくなることから, 実部と虚部を比較して

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

が得られるが, これは三角関数の加法定理に他ならない.

例. 1 の n 乗根：複素数 z について

$$z^n = 1 \quad (1.31)$$

を満たす z を1の n 乗根と呼ぶ. たとえば, 1の2乗根 ($n=2$ のとき) が ± 1 であるのはよく知られており, $n=3$ のときも因数分解することで

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (1.32)$$

と求めることができるが, 一般の n について解くのは少しめんどむように思われる. しかし, これは極表示を用いるとただちに解くことができる.

そのために, $z = r e^{i\theta}$ という極表示を上式に代入すると

$$r^n e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} r &= 1 \\ n\theta &= 0 \pmod{2\pi} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} r &= 1 \\ \theta &= \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right. \quad (1.33)$$

が得られる. $r=1$ という条件から, 解は複素平面で単位円の上にあることがわかる. さらに, 偏角の条件から, $k=0$ に対応する $z=1$ からスタートして, 原点から $2\pi/n$ ずつ回した半直線と単位円との交点が1の n 乗根を与えていることがわかる. $n=2, 3, 4$ の場合について, 結果を複素平面上で表したものが図3に示した.

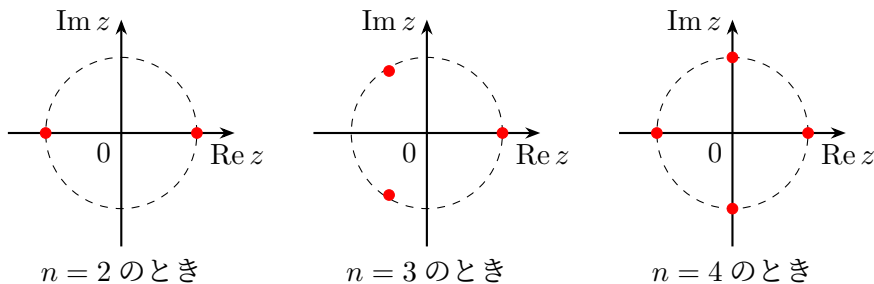


Figure 3. 1 の n 乗根の複素平面上の位置.

物理への応用例. 調和振動子の古典力学：古典力学における1次元調和振動子の運動を考えてみよう. 固

有振動数 ω のバネに取りつけられた質量 m の質点の運動は

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m\omega^2 x(t) \quad (1.34)$$

という2階の常微分方程式で記述される。この方程式の解はよく知られたように、

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (1.35)$$

で与えられる。ここで、 A と δ は積分定数である。これを複素数の極表示を用いて解き直してみる。

まず、運動方程式を考える代わりに、調和振動子が持つエネルギーに注目しよう。古典力学で習うように、エネルギーは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で与えられる。複素数まで拡張すると、この和をいかにように因数分解することができる：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 + \frac{1}{m^2\omega^2} p^2 \right) \\ &= \frac{1}{2m} m^2\omega^2 \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right) \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right) \\ &= \hbar\omega \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right) \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right) \\ &= \hbar\omega |a|^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

3行目では、勝手な定数 \hbar を掛けて割るという恒等変形を行った。また、最終行では

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right), \quad \bar{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right) \quad (1.37)$$

という複素数を定義し、 $a\bar{a} = |a|^2$ というノルムで表されることを用いた。

さて、いま考えている調和振動子の運動について、エネルギー E が保存することを思い出そう。このエネルギー保存則から、

$$|a| = \sqrt{\frac{E}{\hbar\omega}} = \text{const.} \quad (1.38)$$

という式を満たすことがわかる。よって、 a を複素平面に表すと、調和振動子の運動は半径 $\sqrt{\frac{E}{\hbar\omega}}$ の円で記述されることがわかる。これは、係数を調整して $z := x + \frac{i}{m\omega} p = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} a$ という複素数で表すと、 $|z| = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ となるので、実部と虚部がそれぞれ x と $\frac{p}{m\omega}$ で与えられる複素平面において半径 $\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ の円運動を表していることがわかる。さらに、 a の時間微分を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{i}{m\omega} \frac{dp}{dt} \right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{1}{m} p + \frac{i}{m\omega} (-m\omega^2 x) \right) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{1}{m} p - i\omega x \right) = -i\omega \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right) \\ &= -i\omega a(t) \end{aligned} \quad (1.39)$$

を満たすことがわかる。よって、時刻 $t = 0$ での初期値を $a(t = 0)$ と表すと、微分方程式の解はただちに

$$a(t) = a(t = 0)e^{-i\omega t} \quad (1.40)$$

で与えられることがわかり、 $a(t)$ という量の運動は複素平面での時計回りでの回転で記述されることがわかる。また、 $a(t)$ から定数倍だけずらした複素数 $z(t)$ の定義を思い出してその実部と虚部を取ると、

これらが $x(t)$ や $\frac{1}{m\omega}p(t)$ を与えることがわかる．以上から，単振動は図 4 のように複素平面上の回転を，実軸・虚軸への射影したものとして理解できることがわかる．

ちなみに，計算途中で勝手に掛けて割った \hbar という定数は古典力学においてはまったく不要であるように思われるし，実際に不要である．この \hbar という定数は量子力学において現れる重要な定数で，(換算) プランク定数と呼ばれる．また， \bar{a} と a は調和振動子の量子力学 (さらにはその一般化としての場の量子論) を考える際に，生成・消滅演算子と呼ばれる「演算子」に格上げされた上で，非常に基本的な役割を果たす．

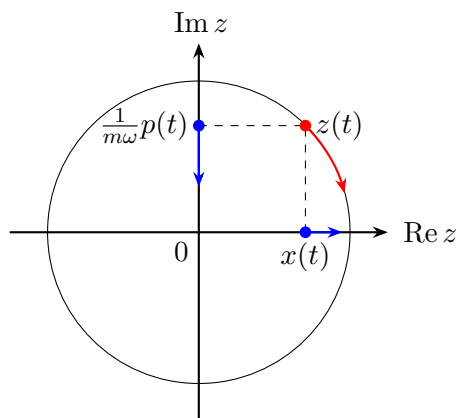


Figure 4. 複素平面を用いた単振動の記述.

(第 2 回ここまで)

[複素解析] 演習問題 1 (2022 年 10 月 17 日 出題, 2022 年 10 月 23 日 (日) 17 時提出締め切り) :

問 1 以下の複素数を $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) という形になるように簡約化せよ.

$$(1) (2+i)(3-2i) \quad (2) (1+i)(1-i) \quad (3) \frac{1}{1-5i} \quad (4) \frac{(2-i)^2}{3+i}$$

問 2 以下の複素数について, 絶対値と偏角を求め, $re^{i\theta}$ という極形式で表わせ.

$$(1) -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (2) \sqrt{3} + i \quad (3) (2+2i)^3 \quad (4) (1-i)^n$$

問 3 $z = x + iy = re^{i\theta}$ ($r = |z|$, $\theta = \arg z$) を考える. このとき, 以下の問いに答えよ

- (1) $\frac{1}{1+z}$ の実部と虚部を x, y を用いて表わせ.
- (2) $\frac{1}{1+z}$ の実部と虚部を r, θ を用いて表わせ.
- (3) $w \equiv \frac{z+i}{z-i}$ の実部と虚部を求め, $|w| < 1$ という条件を x, y で表わせ.

解答例.

問 1 $i^2 = -1$ を使って計算していくと, 以下の通り :

$$\begin{aligned} (1) & (2+i)(3-2i) = 6 + 2 + i(3-4) = 8 - i \\ (2) & (1+i)(1-i) = 1 + 1 = 2 \\ (3) & \frac{1}{1-5i} = \frac{1+5i}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{1+5i}{1+25} = \frac{1}{26} + \frac{5i}{26} \\ (4) & \frac{(2-i)^2}{3+i} = \frac{3-2i}{(3+i)} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{7-9i}{10} = \frac{7}{10} - \frac{9i}{10} \end{aligned}$$

問 2 複素数 $z = x + iy$ について, 絶対値は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 偏角は $\tan \theta = y/x$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と計算すると

$$\begin{aligned} (1) & r = 1, \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ より } -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ (2) & r = 2, \theta = \frac{\pi}{6} \text{ より } \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ (3) & 2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ を用いると } (2+2i)^3 = (2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = 16\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \left(r = 16\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}\right) \\ (4) & 1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \text{ を用いると } (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{7n\pi}{4}} \quad \left(r = 2^{\frac{n}{2}}, \theta = \frac{7n\pi}{4} \bmod 2\pi\right) \end{aligned}$$

問 3 $z = x + iy = re^{i\theta}$, $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$ とオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を使って計算していくと

$$\begin{aligned} (1) & \frac{1}{1+z} = \frac{1}{(1+z)(1+\bar{z})} = \frac{1+\bar{z}}{1+|z|^2+z+\bar{z}} = \frac{1+x-iy}{1+x^2+y^2+2x} \\ & \text{よって } \operatorname{Re} \frac{1}{1+z} = \frac{1+x}{1+x^2+y^2+2x}, \operatorname{Im} \frac{1}{1+z} = \frac{-y}{1+x^2+y^2+2x} \\ (2) & \text{上で得られた結果で } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ とすればよい.} \\ & \text{よって } \operatorname{Re} \frac{1}{1+z} = \frac{1+r \cos \theta}{1+r^2+2r \cos \theta}, \operatorname{Im} \frac{1}{1+z} = \frac{-r \sin \theta}{1+r^2+2r \cos \theta} \\ (3) & w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{|z|^2-1+i(z+\bar{z})}{|z|^2+1+i(z-\bar{z})} = \frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+y^2+1-2iy} \\ & \text{よって } |w| = \sqrt{\frac{(x^2+y^2-1)^2+4x^2}{(x^2+y^2+1-2iy)^2}} < 1 \end{aligned}$$

2 複素関数とその微分：正則関数

◇ 複素関数

複素関数とは複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対し、ある複素数 $f(z) \in \mathbb{C}$ を対応させるものである。前節で扱ったように引数は $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と実部 x 、虚部 y に分解できるが、関数として得られる $f(z)$ もまた複素数なので、次のように実部・虚部に分解できる：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.1)$$

ここで、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は実 2 変数 (x, y) の上で定義された実数値関数を表している。したがって、2 変数の実関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ があれば、1 つの複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ を定義することができる。

実関数がそうであったように、複素関数 $f(z)$ も複素数 \mathbb{C} の部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ の上でのみ定義されていることもある。このとき、実関数のときと同様にして、部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ を $f(z)$ の定義域と呼ぶ。また、前節で見たように、 $z = x + iy$ の実部と虚部が

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (2.2)$$

と表されることを思い出すと、実部と虚部 $u(x, y), v(x, y)$ を具体的に z と \bar{z} の関数として表すこともできる。

例. 複素関数の表し方：複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として、

$$u(x, y) = x + y^2 + 1, \quad v(x, y) = x^2 + 2y + 3 \quad (2.3)$$

を考える。上に与えた x, y の表式を使うと、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{z + \bar{z}}{2} + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + 1 = 1 + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - \frac{1}{4}(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) \\ v(x, y) &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \frac{z - \bar{z}}{2i} + 3 = 3 + \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) + \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

と z と \bar{z} を用いて表すことができる。これを用いて整理すると

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - \frac{1}{4}(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + i \left[3 + \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) + \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) \right] \\ &= 1 + 3i + z + \frac{1}{4}(-1 + i)z^2 + \frac{1}{2}(1 + i)\bar{z}z + \frac{1}{4}(-1 + i)\bar{z}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

という表式が得られる。

この例で得られた結果を一般化すると、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が x, y の多項式で与えられるときには $f(z)$ は複素数 $a_{ij} \in \mathbb{C}$ を係数とする z, \bar{z} の多項式関数 $f(z) = \sum_{i,j=0}^N a_{ij} z^i \bar{z}^j$ として表されるだろうと推察できる。

◇ 複素数列の極限

複素数と複素関数が定義できたので、「複素関数の微分」を考えていきたい。しかし、そのためには複素関数 $f(z)$ の極限值、つまり、その変数 z をある複素数 z_0 に近づけたときのふるまいを調べる必要がある。そこでまず、複素数の数列に関する極限値の定義とその性質をまとめておこう。

定義. 複素数列の極限：複素数の数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束することを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - \alpha| = 0 \quad (2.6)$$

と定義する。

複素数に関する距離 $|\alpha_n - \alpha|$ を使って定義したが、これは $\alpha_n = a_n + ib_n$, $\alpha = a + ib$ と実部と虚部に分けると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad (2.7)$$

と単に実部が表す数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と虚部が表す数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の両者が収束することとして理解できる。したがって、複素数列の極限に関する性質は実数列の極限の性質を用いて示すことができる。たとえば、次の性質が成り立つことを示すことができる：

数列の極限に関する性質： 収束する複素数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c\alpha_n &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \quad (c \in \mathbb{C}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n} \quad \left(\text{ただし } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \neq 0 \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

また、複素数の数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は

$$\text{コーシーの判定条件：} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{p > 0} |\alpha_N - \alpha_{N+p}| = 0 \quad (2.9)$$

が成り立つことである。

また、数列の無限和 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ に関しても、その部分和を

$$S_n \equiv \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad (2.10)$$

と定義して、数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限として定義できる。

例．等比級数の和： 複素数 z に関する等比級数の無限和 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ を考える。このとき、

$$S_N := \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \quad (2.11)$$

となることを思い出すと、無限和は $|z| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$ から収束することがわかり、

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad (2.12)$$

が得られる。このとき、 $z = re^{i\theta}$ という極表示を用いて、両片を別々に計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] \\ \frac{1}{1 - z} &= \frac{1 - \bar{z}}{|1 - z|^2} = \frac{1 - r \cos \theta + ir \sin \theta}{(1 - r \cos \theta)^2 + (-r \sin \theta)^2} \\ &= \frac{r(\cos \theta - i \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

が得られるので、これらの実部と虚部が一致することから、次の関係式が得られる：

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad (2.14)$$

以上のように、複素数列の極限は基本的には2つの実数列の極限に帰着させて理解することができる。

◇ 複素関数の極限・連続性

さて、複素関数 $f(z)$ の $z \rightarrow z_0$ の極限について考えよう。いま、 z は複素平面上に表されるような実2変数に対応することを思い出そう。すると、多変数実関数の極限のときのように、極限を考える場合に複素平面のどちら側から近づいてくるのかを考える余地があることに気づく。 z_0 への近づき方次第で値が異なってしまったら困るので、 $z \rightarrow z_0$ とするときの z_0 への近づき方によらず複素関数 $f(z)$ の値がある値 w_0 に限りなく近づくとき、 $f(z)$ が $z \rightarrow z_0$ で極限值 w_0 を持つものと定義する。定義をまとめておくと、以下の通り：

定義. 複素関数の極限值： $z, z_0 \in \mathbb{C}$ について $z \rightarrow z_0$, つまり $|z - z_0| \rightarrow 0$ の極限を考えたとき、 $|f(z) - w_0| \rightarrow 0$ を満たすとき、 $f(z)$ は $z \rightarrow z_0$ で極限值 w_0 を持つといい、次のように表す：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (\text{または } z \rightarrow z_0 \text{ で } f(z) \rightarrow w_0) \quad (2.15)$$

近づき方に依存しないことは、距離 $|f(z) - w_0| \rightarrow 0$ を使って実現されている。

このようにして定義された複素関数の極限值について、数列の極限の性質から推測されるように

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) &= c \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad (c \in \mathbb{C}) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) &= \left(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right) \left(\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad \left(\text{ただし } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0 \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

が成立することが示される。

以上で定義した複素関数の極限值を用いて、その連続性を以下のように定義する：

定義. 複素関数の連続性： $z \rightarrow z_0$ としたとき、 $f(z)$ が極限值 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ を持ち、かつ、それが $f(z_0)$ と $f(z_0)$ と一致するとき、複素関数 $f(z)$ は $z = z_0$ で連続であるという。

例. 複素関数の極限と連続性：複素関数 $f(z)$ と $g(z)$ として

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + i} \quad (z \neq -i), \quad g(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + 1}{z + i} & (z \neq -i) \\ -2i & (z = -i) \end{cases} \quad (2.17)$$

を考える。関数 $f(z)$ と $g(z)$ は $z \neq -i$ で

$$f(z) = g(z) = \frac{(z + i)(z - i)}{z + i} = z - i \quad (2.18)$$

となるので、 $z \rightarrow -i$ の極限值はどちらも

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(z) = -2i = \lim_{z \rightarrow -i} g(z) \quad (2.19)$$

と等しい。 $g(z)$ はこの極限値が $g(-i) = -2i$ と一致しているので、 $z = -i$ で連続であるが、 $f(z)$ は $z = -i$ での値が定義されていないので $z = -i$ で連続ではない。

◇ 複素関数の微分

上で見たように複素関数 $f(z)$ は 2 変数実数値関数の和で記述されている。そこで、多変数関数の微分で習ったものをそのまま拡張して、 x と y に関する偏微分を実部・虚部の偏微分の和として次のように定義しよう：

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) := \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(z) := \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x, y), \quad (2.20)$$

この定義から 2 変数実関数の偏微分ができれば、複素関数 $f(z)$ の実部 u と虚部 v に関する偏微分を計算できることがわかる。

さて、以上の偏微分 $\partial/\partial x$ と $\partial/\partial y$ は計算上の困難はないものの、「複素関数の微分」としてはいまいちのような気がする。実際、「複素関数の微分」としてより直接的に思われるのは、複素関数 $f(z)$ の z に関する微分だが、複素数 z の微分が何を意味するのかは明瞭ではない。そこで、前節の多項式関数の例で見たように、複素関数 $f(z)$ は一般に z と \bar{z} を用いて表されるようなので、形式的に z と \bar{z} の偏微分を考えることにしよう。まじめに考えると、複素数 $z = x + iy$ が定まると $\bar{z} = x - iy$ と定まるので、「偏微分」の定義もよくわからなく聞こえるが、形式的に

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{i}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2}, \quad (2.21)$$

という微分の連鎖率を用いて、とにかく

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.22)$$

と定義することにする。これを使って $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の微分を行うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} f(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) [u(x, y) + iv(x, y)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) [u(x, y) + iv(x, y)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

と与えられる。

例. 複素関数の微分： $f(z) = z = x + iy$, つまり $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$ と $g(z) = \bar{z} = x - iy$, つまり $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ の場合の微分を行ってみよう。上の結果を用いると、ただちに

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1, \quad (2.24)$$

と求まる。したがって、式 (2.22) で定義した z と \bar{z} の偏微分は、 z と \bar{z} をあたかも独立変数とみなして、それぞれの微分をしたものと一致することがわかる。

(第 3 回ここまで)

◇ コーシー・リーマンの関係式

前節では x, y や z, \bar{z} に関する偏微分を定義したが、複素数 z に関する「全微分」のような微分を考えたい。そこで、実関数のときのやり方に倣って、複素関数 $f(z)$ の微分を

$$\frac{df(z)}{dz} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (2.25)$$

で定義してみよう。この微分は前節の偏微分とは異なるものを考えていることに注意してほしい。ここで、式 (2.25) で定義した微分が存在するような条件を考えたい。これまでに見たように、複素関数は実部と虚部に分けられ2変数実関数が2つあるに過ぎなかった。すると、複素関数の微分もその実部と虚部が実関数として微分可能ならば上の微分も存在するのではないかと期待したくなる。しかし、この期待は成り立っていないことが次の例からわかる。

例. 複素関数 $f(z) = \bar{z} = x - iy$ を考えよう。この関数の実部と虚部はどちらも実関数としてなめらかで何回でも微分可能である。しかし、複素関数としての微分は

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} \quad (2.26)$$

となる。この最右辺は $h = |h|e^{i\theta}$ と極表示を使うと $e^{-2i\theta}$ となり、 $|h| \rightarrow 0$ としても値が定まっていない。したがって、式 (2.25) の定義に現れる極限が存在せず、 $f(z) = \bar{z} = x - iy$ は複素関数として微分可能ではないことがわかる。

上の例が示すように、複素関数としての微分可能性はその実部と虚部の実関数としての微分可能性を調べるだけでは不十分である。そこで、複素関数としての微分可能性を理解するために、式 (2.25) の右辺に現れる極限が存在するかどうかをまじめに考えてみよう。これは $h \rightarrow 0$ の極限を取る際に、 h もまた複素数であることに注意して、複素平面でどちらから近づいても $|h| \rightarrow 0$ で式 (2.25) の右辺が同じ値を与えるときの、複素関数としての微分可能だということを意味している。

この条件を求めるために、実2変数関数 $u(x, y)$ の実関数としての微分可能性を思い出そう。実2変数関数 $u(x, y)$ の微分可能性は $\Delta u(x, y) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$ について、微小な h に対して

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + a\Delta x + b\Delta y + o(\Delta r) \quad \text{with} \quad a = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (2.27)$$

と1次式で近似できることを意味していたことを思い出そう。ここで、 $\Delta r \equiv \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ として、 $o(\epsilon)$ はランダウの記号と呼ばれるもので、 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} o(\epsilon)/\epsilon = 0$ を満たす関数を表している。

同様の考え方を複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ に用いると、その微分可能性を

$$f(z + \Delta z) = f(z) + \alpha \Delta z + o(|\Delta z|) \quad \text{with} \quad \alpha = \frac{df(z)}{dz} \quad (2.28)$$

と「 $f(z)$ を複素数 z の1次式で近似できること」として理解することができる。この条件から得られる帰結を調べるために $\alpha = a + ib$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ と置いて右辺を整理すると

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) &= u(x, y) + iv(x, y) + (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) \\ &= \left[u(x, y) + a\Delta x - b\Delta y \right] + i \left[v(x, y) + b\Delta x + a\Delta y \right] + o(|\Delta z|) \end{aligned} \quad (2.29)$$

が得られる。よって、実部と虚部を取ると

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) &= u(x, y) + a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta r) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) &= v(x, y) + b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta r) \end{aligned} \quad (2.30)$$

が得られる。この式は偏導関数に関して

$$a = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad b = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (2.31)$$

という式が成り立つことを意味している。したがって、複素関数の微分可能性は、実部と虚部が実関数として偏微分可能であるだけでなく、偏導関数の間に適切な関係式が成立することを必要とする。ここで得られた複素関数としての微分可能性を定める偏導関数の間の関係式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \quad (2.32)$$

はコーシー・リーマンの関係式と呼ぶ。

以上の結果を複素数を z を用いてより直接的に表すこともできる。そのために、前節で得られた結果

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} f(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

を思い出そう。この2つ目の式とコーシー・リーマンの関係式を比べてみると、コーシー・リーマンの関係式は単に

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0 \quad (2.34)$$

と表すことができることがわかる。さらに、コーシー・リーマンの関係式を用いると1つ目の式は

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.35)$$

となるが、これは

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta z} = a + ib \quad (2.36)$$

としたものと等しい。したがって、複素関数の微分は単に

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \quad (2.37)$$

となり、単なる z に関する形式的な偏微分として理解することができる。さらに、以上の結果から、 $f(z), g(z)$ が複素関数として微分可能なとき、微分に関する基本公式として、

- ライプニッツ則： $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = \frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz}$
- 合成関数の微分： $g = g(w), w = f(z)$ について $\frac{dg}{dz} = \frac{dg}{dw} \frac{dw}{dz}$

(2.38)

などが成立することが確かめられる。つまり、複素関数として微分可能だとわかったら、あとは通常通りの微分として取り扱って計算できることがわかる。

以上で得られた結果をまとめておこう：

複素関数の微分可能性： 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が複素関数として微分可能であるための必要十分条件は、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が実関数として微分可能で、かつコーシー・リーマンの関係式 (2.32) [または (2.34)] が成り立つことである。また、複素関数の微分の結果は式 (2.37) で与えられる。

例. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.39)$$

を考える。これらを偏微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (2.40)$$

が得られるので、 $z \neq 0$ でコーシー・リーマンの関係式を満たし、複素関数として微分可能であることが

わかる。以上の結果は,

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \quad (2.41)$$

となっていることから, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ を満たすことから理解できる。

(第4回ここまで)

◇ 正則関数・調和関数

さて, 任意の複素関数 $f(z)$ は2つの実2変数関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を用いて, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と与えられるのだった。その中でもとくにコーシー・リーマンの関係式を満たす場合は, 「複素関数として微分可能である」という, とくに性質がよい複素関数を与えている。そこで, このような複素関数に名前を与えておこう。

定義. 正則関数と特異点: 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された複素関数 $f(z)$ が複素関数として微分可能なとき, $f(z)$ は**正則 (holomorphic)** である (または**正則関数**である) という。また, $f(z)$ が $z = z_0$ で複素関数として微分可能でない (つまり正則でない) とき, この点 $z = z_0$ を**特異点**と呼ぶ。

コーシー・リーマンの関係式として式 (2.34) を思い出すと, 正則関数は \bar{z} によらず, z だけで表される関数であることがわかる。

さて, ある正則関数が既知のものとして与えられたとき, そこから新しい正則関数を作り出す規則を考えてみたい。正則関数かどうかは単に \bar{z} に依存しないことで判別できることに注意すると, 次の結果を示すことができる:

定理: $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が正則のとき, 以下の関数も正則である:

- **和と差:** $f_1(z) \pm f_2(z)$
 - **積:** $f_1(z)f_2(z)$
 - **商:** $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ (ただし $f_2(z) \neq 0$)
- (2.42)

正則関数の和・差・積・商 (ただし商は分母 = 0 となる点を除く) が正則関数になっていることを用いると, 単純な正則関数からもう少し複雑なものを構成することができる。

例. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy \quad (2.43)$$

を考える。このとき, 定義に従って偏微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(z) &= 2x + 2iy, & \frac{\partial}{\partial y} f(z) &= -2y + 2ix \\ \frac{\partial}{\partial z} f(z) &= \frac{1}{2}(2x + 2x) - \frac{i}{2}(-2y - 2y) = 2(x + iy) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) &= \frac{1}{2}(2x - 2x) + \frac{i}{2}(-2y + 2y) = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

が得られる。 $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 = z^2$ と表されることに注意すれば, z と \bar{z} に関する偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = 2z = 2(x + iy), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0 \quad (2.45)$$

と簡単に求めることもできる. この結果からも明らかだが $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.46)$$

が成立しており, $f(z)$ は \mathbb{C} 全体でコーシー・リーマンの関係式を満たす正則関数であることがわかる (正則関数であること自体は $f(z) = z^2$ と表されたことから, ただちにわかる).

例. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.47)$$

を考える. 既に見たように, この複素関数は $z \neq 0$ ではコーシー・リーマンの関係式を満たすので, $z \neq 0$ では正則である. また, $z = 0$ では微分可能ではなく, $z = 0$ が特異点になっている. 以上の結果は,

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \quad (2.48)$$

となっていることから理解できる.

さて, $f(z) = \bar{z}$ のようなすべての領域で正則ではないような複素関数は, いたるところが特異点になっているので, それを議論することによりありがたみはなさそうである. 一方, 複素平面上のほとんど領域で正則になっているが, 一部ではそうでないような関数について, どの領域でどのような特異点を持つかは, 複素関数を特徴づける本質的な重要を担っているように思われる. この期待が実際に正しいことを後に見ることになる.

補足. 調和関数: コーシー・リーマンの関係式は 2 つの 2 変数実関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ の間の関係式を与えているが, $u(x, y)$ (あるいは $v(x, y)$) のみで閉じた関係式はどうなるか調べてみる. そのためには, コーシー・リーマンの関係式から $u(x, y)$ または $v(x, y)$ を消去すればよい. 具体的には式 (2.32) の 1 つ目の関係式を x 微分したものと 2 つ目の関係式の y 微分したものを両辺引き算すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0 \quad (2.49)$$

が得られる. 同様にして $v(x, y)$ が満たす式も求まり, コーシー・リーマンの関係式から次式が得られる:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = 0 \quad (2.50)$$

これらの式は 2 次元空間中の **ラプラス方程式** と呼ばれる式になっており, その解は **調和関数** と呼ばれる. つまり, 正則関数の実部と虚部はそれぞれ調和関数になっていることがわかる.

◇ 正則関数の例

ここでは, 正則関数の例を与える.

(1) 多項式関数: z の単項式 $a_n z^n$ ($a_n \in \mathbb{C}$) は正則である. 正則関数の和や差は正則関数なので, 最も単純な正則関数として

$$P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad (2.51)$$

という **多項式関数** があることがわかる. 多項式関数は \mathbb{C} 全体 ($z = \infty$ は除く) で正則である.

(2) **有理関数**： 正則関数の商は分母がゼロになる特異点を除いて、正則関数になるのであった。したがって、多項式関数同士の商として定義される**有理関数**

$$R_{n,m}(z) = \frac{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots \alpha_1 z + \alpha_0}{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots \beta_1 z + \beta_0} \quad (2.52)$$

もまた分母がゼロとなる点を除いて正則である。くりかえしになるが、分子とキャンセルしない分母のゼロ点は特異点になっており、正則ではない。

(3) **指数関数**： 複素数を引数にもつ**指数関数**を

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y) \quad (2.53)$$

で定義しよう (後に別の定義との関係も議論する)。この関数もコーシー・リーマンの関係式を満たすことが確認でき、 \mathbb{C} 全体で正則であることがわかるが、さらに次の性質を満たすことが示される：

- **導関数**： $\frac{d}{dz} e^z = e^z$
- **指数法則**： $e^{z+w} = e^z e^w$
- **周期性**： $e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z})$
- **ゼロ点の非存在**： すべての z に対し $e^z \neq 0$

周期性以外はどれも実関数 e^x ($x \in \mathbb{R}$) が満たしていた性質に他ならない。

(4) **三角関数・双曲線関数**： 複素数を引数にもつ三角関数を

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad (2.55)$$

で定義する。 $e^{\pm iz}$ が正則であること、ならびに正則関数の和・差もまた正則であることを用いると、これらが \mathbb{C} 全体で正則関数であることがわかる (ただし、 $\tan z$ については $\cos z = 0$ を満たす z は特異点となり、正則ではないことに注意)。同様にして、双曲線関数を

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad (2.56)$$

で定義すると、これらも \mathbb{C} 全体で正則関数であるとわかる (ただし、 $\tanh z$ については $\cosh z = 0$ を満たす z は特異点となり、正則ではない)。上式からわかるように、三角関数と双曲線関数は

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z, \quad (2.57)$$

を満たしている。したがって、複素関数まで拡張すると、三角関数・双曲線関数が指数関数を通して統一的に理解されたことになる。また、指数関数と同じく、実関数としての三角関数・双曲線関数が満たしていた関係式は、複素関数としても成り立っていることが確認できる。

(5) **対数関数**： 指数関数 $z = e^w$ の逆関数として $w = \log z$ という**対数関数**を定義したい。ただし、指数関数の周期性に付随して、この関数はこれまでの正則関数には見られなかった微妙な点が現れる。

さて、 $z = re^{i\theta}$ と極表示し、 $w = x + iy$ と表そう。逆関数 $w = x + iy$ を求めるためには、 x, y を r, θ を用いて表せばよい。指数関数の周期性に注意して、これを実行すると

$$re^{i\theta} = e^x e^{iy} \Leftrightarrow r = e^x, \theta = y - 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \log r, y = \theta + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.58)$$

が得られる ($e^{i\theta} = e^{iy}$ から $\theta = y$ とならず、 $\theta = y - 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) となることに注意、ここで \mathbb{Z} は整数の集合を表す)。したがって、 $z = re^{i\theta}$ としたときに、対数関数を

$$\log z := \log r + i\theta + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.59)$$

と定義するのがよさそうに思われる。

が、この右辺は n としてどの整数を持ってくるのかを指定しないと定まっていないが、その定めかたを与えていないのではなマークをつけておいた。実際、関数は「1つの数に対し1つの数を一意に定めるもの」として定義されるのが普通であるが、上の $\log z$ の定義は n が任意の整数となっており、ある z に対して $\log z$ は一意に値が決まっていない。このような1つの引数に対して複数の値を与える「関数」のことを**多価関数 (multi-valued function)** と呼び、通常の一価関数と呼ばれる関数と区別をする。

多価関数はそのままでは不便なので、ここではその取り扱いをもう少し考えておこう。多価関数を記述する方法は大まかにわけて次の2つのやり方がある：

(i) 偏角の取る値の範囲を制限する

1つ目の取り扱い方は偏角 θ の取る値を1周期分をカバーするように適当に制限することである。よく取られるのは $0 \leq \theta < 2\pi$ や $-\pi \leq \theta < \pi$ という選び方である。ちなみに一般には $a \in \mathbb{R}$ として $a \leq \theta < a + 2\pi$ とすることができるが、 a の選び方は、偏角にとっての「日付変更線」をどこに引くかという人が決めるルールに過ぎないので、定めたルールを適切に使い続ければ問題は生じない。

ここでは偏角の取る値を $-\pi \leq \theta < \pi$ としたものを選び、

$$\operatorname{Log} z := \log r + i\theta, \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (2.60)$$

と定義しよう。このように、偏角の範囲を制限して定義した対数関数 $\operatorname{Log} z$ のことを、 $\log z$ の**主値 (principal value)** と呼ぶ。 $\operatorname{Log} z$ は $x < 0$ を負の実数として

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \operatorname{Log}(x + i\epsilon) = \log|x| + i\pi, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \operatorname{Log}(x - i\epsilon) = \log|x| - i\pi \quad (x < 0) \quad (2.61)$$

を満たすため、 $\theta = -\pi$ と π の間での不連続な飛び

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \operatorname{Log}(x + i\epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \operatorname{Log}(x - i\epsilon) = 2i\pi \quad (2.62)$$

を持つ。そのため、 $\operatorname{Log} z$ は負の実軸上では正則ではないが、それ以外の点では正則である。

(ii) 関数の値域の空間を広げる

2つ目の取り扱いでは、偏角に $2\pi\mathbb{Z}$ の分だけの不定性が出たことをより積極的に捉える。つまり、複素関数の値が取る空間 (= 値域) を1枚の \mathbb{C} だけ s に制限すると不定になることに注目し、複素平面 \mathbb{C} を複数枚導入して偏角の $2\pi\mathbb{Z}$ の \mathbb{Z} は何枚目の複素平面かを指定するのに用いる。ただし、偏角が $\pm 2\pi$ 変わると、お互いの複素平面は行き来できるように定義する必要があるので、お互いの複素平面は日付変更線 (たとえば実軸の負の領域) を上下に貼ってつながっているものとする。このようにして一般化された関数の値域を与える複数枚の複素平面を**リーマン面**と呼ぶ。ここで、 $\log z$ の偏角の不定性は整数の分だけあるので、リーマン面の枚数は加算無限枚だけ必要になる。リーマン面の理論は数学的色合いの強いや数理物理で役立つことがあるが、この講義ではあまり扱わない。

(第5回ここまで)

(6) 累乗関数： $z = w^2$ の逆関数として定義される $w = \sqrt{z}$ などの無理関数を考えたい。これもまた、 $z = re^{i\theta}$, $w = Re^{i\phi}$ などと表して R と ϕ を r, θ で表せば逆関数が求まるので、実際にやってみると

$$z = w^2 \Leftrightarrow re^{i\theta} = R^2 e^{2i\phi} \Leftrightarrow R = \sqrt{r}, \quad \phi = \frac{1}{2}\theta + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.63)$$

が得られる。したがって、 $z = re^{i\theta}$ について、 \sqrt{z} は

$$\sqrt{z} := \sqrt{r} e^{\frac{1}{2}i\theta + i\pi n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.64)$$

と定義したくなる。これは n の偶奇に応じて返す値が異なる2価関数になっていることがわかる。したがって、 $\log z$ のときと同様にして、主値を選んで定義するかリーマン面 (いまの場合は2枚で済む) を導入して定義を与える必要がある。

上の \sqrt{z} の例からただちに、一般の累乗関数 z^α についても α の値によっては多価関数になっていることが想像できる。これらは α の値によって何価の多価関数なのかが異なり、一々定義を与える必要があるとしたらかなり煩わしい。しかし、実はこれらは対数関数を用いて統一的に扱える。これを見るためには、

$$z^\alpha = e^{\log z^\alpha} = e^{\alpha \log z} \quad (2.65)$$

と表すことができることを思い出せばよい。この最右辺に多価関数 $\log z$ の表式を代入すると、 $z = re^{i\theta}$ について

$$z^\alpha = e^{\alpha(\log r + i\theta) + 2\pi i \alpha n} \quad \text{with } n \in \mathbb{Z} \quad (2.66)$$

が得られる。 α が整数のときは $e^{2\pi i \mathbb{Z}} = 1$ より z^α は一意に定まっているが、有理数 q/p のときには p 価関数、無理数のときには無限多価関数になっている。そこで、多価関数になるのは避けるためには、対数関数の項で説明した2つの方法のいずれかを用いれば良い。

この講義では主に (i) の方法を用いるので、 $\log z$ の主値を用いて累乗関数 z^α を

$$z^\alpha := e^{\alpha \text{Log } z} = e^{\alpha(\log r + i\theta)} \quad (2.67)$$

と定義したものをを用いる。 $\log z$ の主値は $\text{Log } z$ として区別した文字を使ったが、累乗関数についてはその区別ができない記法になっていることに注意しておく。このとき、 $x < 0$ について

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (x \pm i\epsilon)^\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{\alpha \text{Log}(x \pm i\epsilon)} = e^{\alpha(\log |x| \pm i\pi)} = |x|^\alpha e^{\pm i\alpha\pi} \quad (2.68)$$

が得られる。したがって、 z^α は $z = x < 0$ という負の実軸を $\theta = \pi$ と $\theta = -\pi$ とまたぐ際に

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (x + i\epsilon)^\alpha - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (x - i\epsilon)^\alpha = |x|^\alpha (e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}) = |x|^\alpha 2i \sin \alpha\pi \quad (2.69)$$

という不連続性を持っていることがわかる。 α が整数のときは1価関数なので、不連続性を持たないが、たとえば $\alpha = 1/2$ のときは $2i|x|^\alpha$ の不連続性を持つことがわかる。したがって、 z^α の主値は $z < 0$ の領域で正則ではないことがわかる。

(ii) の方法で累乗関数を記述することももちろん可能である。 p 価関数の場合には p 枚のリーマン面の導入で済むが、 $\log z$ のように無限多価関数になっている場合には加算無限枚のリーマン面を導入する必要がある。

余談. 2次元共形対称性とコーシー・リーマンの関係式：

物理におけるコーシー・リーマンの関係式の応用として、空間2次元中の完全流体の運動を記述するのに用いられた例がよく知られている。しかし、現在ではそこまでアクティブな研究分野ではないと思うので、このノートではスキップする。その代わりに、現代物理においてコーシー・リーマンの関係式はとくに**共形場理論 (Conformal Field Theory, 略して CFT)** や**弦理論**の研究で用いられるので、以下ではこれについて軽く説明をする。試験などには出さないで、興味に応じて読むくらいでよい。

現代物理では「場の理論」という定式化が標準的な理論的手法を与える。これは電磁気学で習った「電磁場」が時空の各点の関数として $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ を考えていたことに倣い、一般に

時空の各点に存在する「場」を自由度として考え、その時空発展を記述する

という考え方に基づいた理論的記述を与える。具体的には、考えている物理現象を記述する「場」を $\varphi(t, \mathbf{x})$ としたとき、場 $\varphi(t, \mathbf{x})$ の運動方程式とその解が (t, \mathbf{x}) の関数としてどのようにふるまうかが場の理論で調べるべき主な性質になる。

さて、場の運動方程式とその解を調べるための直接的な方法は、もちろんその方程式を解くことである。しかし、運動方程式を解かないでわかることもある。そのような方法の1つとして、 (t, \mathbf{x}) の関数としてどういう条件を満たすのかを調べるために、 (t, \mathbf{x}) を取り替える変換を考えてみよう。いま、とくに定常解を考え、場は時間座標に依存しないものとする。さらに、空間は2次元のユークリッド空間 \mathbb{R}^2 を考え、その直交座標を $x^i := (x, y)^t$ (つまり、 $x^1 = x, x^2 = y$) と表す。このとき、 $(x + dx, y + dy)^t$ と $(x, y)^t$ をつなぐ微小な線分の長さを**線素 (line element)** と呼び、 ds^2 と表す。これをピタゴラスの定理

を用いて

$$ds^2 := (dx)^2 + (dy)^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{with} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

と与えられる．ここで，導入した g_{ij} は**計量 (metric)** と呼ばれる量で，一般に基底ベクトルを e_1, e_2 と表したときに， $g_{ij} := e_i \cdot e_j$ で定義される量である．いま用いている直交座標系では $e_1 = (1, 0)$ ， $e_2 = (0, 1)$ なので，基底ベクトルが規格直交化されており，その内積から g_{ij} が上式の行列で与えられることがわかる．また，計量の逆行列として g^{ij} を定義する．直交座標系でその成分は同じで，

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

である．また，いちいち和を明記するのは面倒なので，上下の添字で同じ添字が出たときにはその和を取るという (**アインシュタインの**) **縮約規則**を用いることにする．たとえば，

$$g_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.72)$$

という略記を用いていく．アインシュタインの名前が出たことから想像されたとおり，ここで導入した縮約記法，線素・計量などの概念は時間方向まで含めて一般化されることで**相対性理論**で中心的に使われる．

さて，古典力学でデカルトの直交座標系を用いても極座標系を用いてもよかったように，物理現象を記述するための座標系は自分の好きに取れるはずである．そこで，上で与えた直交座標系から違う座標系に取り替えることを考える．以下，座標変換後の座標の成分が x'^i となったものとしよう．このような変換は基底を

$$e_i \rightarrow e'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} e_j \quad (2.73)$$

と e_i から e'_i に取り替えることによって引き起こされる．したがって，この変換のもとで計量と逆計量は

$$g_{ij} \rightarrow g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}, \quad g^{ij} \rightarrow g'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} g^{kl} \quad (2.74)$$

と変換することがわかる．

いま，計量は基底ベクトルの内積として定義されていたことを思い出すと，計量は座標系の基底ベクトルが持つ長さや角度の情報を持っていることがわかる．したがって，新しい座標系でも「長さや角度」を同じように測るためには，基底を取り替える前後で計量が同じ形になること，つまり

$$g'_{ij} = g_{ij} \Leftrightarrow \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl} = g_{ij} \quad (2.75)$$

を要請するとよい．このような関係を満たす例として，回転変換がある．実際，回転変換を施し，新しい座標系 $(x', y')^t$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

と回転行列 R を用いて表してみると，行列 R の性質から，

$$R^i_k R^j_l g_{ij} = g_{kl} \quad (2.77)$$

を満たすことが確認できる．実際，たとえば $(k, l) = (1, 1)$, $(k, l) = (1, 2)$ のときは以下の通り：

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^2 R^i_1 R^j_1 g_{ij} &= R^1_1 R^1_1 g_{11} + R^2_1 R^2_1 g_{22} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 = g_{11} \\ \sum_{i,j=1}^2 R^i_1 R^j_2 g_{ij} &= R^1_1 R^1_2 g_{11} + R^2_1 R^2_2 g_{22} = \cos \theta (-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta = 0 = g_{12}\end{aligned}\tag{2.78}$$

以上の考え方をさらに一般化して，座標系の取り替えを行った時に「基底ベクトルがなす角度は同じだが，長さは保たれない」という場合を考えてみよう．このような座標変換を**共形変換**（あるいは**等角写像**）と呼ぶ．このとき，変換後の座標を $x'^i = (u(x, y), v(x, y))^t$ （つまり $x' = u(x, y)$, $y' = v(x, y)$ ）として，これが共形変換となるための条件式を考えてみよう．

計量の定義 $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ を思い出すと，角度のみを保つという条件は変換後の計量 g'_{ij} について係数がずれることまで許して $g'_{ij}(x) = \Omega(x)g_{ij}(x)$ とすればよい．つまり，計量の変換則を思い出して，

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl} = \Omega(x)g_{ij}, \quad \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} g^{kl} = \Omega(x)^{-1}g^{ij}\tag{2.79}$$

を要請する．2つ目の式で (i, j) を適当に選んだ式を用いて Ω を消去すると， $g'^{11} = g'^{22}$ や $g'^{12} = g'^{21} = 0$ が条件式になっていることがわかる．ここで， $x^i = (x, y)^t$ と $x'^i = (u(x, y), v(x, y))^t$ を思い出すと，この条件式は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0\end{aligned}\tag{2.80}$$

と表される．いま，変数変換のヤコビ行列がゼロでないとき，少なくともいずれかの成分はゼロではない．そこで，たとえば $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ のときを考えると2つ目の式から

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\tag{2.81}$$

が得られる．これを1式目に代入すると

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]\tag{2.82}$$

が得られる．両辺で共通因子が出ていることに着目すると，この式から

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \pm \frac{\partial u}{\partial x}\tag{2.83}$$

という条件式が得られる．さらに，この関係式を条件式 (2.81) に代入すると，

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \mp \frac{\partial u}{\partial y}\tag{2.84}$$

が得られる．よって，角度のみを保つという条件をまとめると，

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{または} \quad (ii) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.85)$$

と求まる．条件 (i) は $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として定義された複素関数に関するコーシー・リーマンの関係式に他ならない．したがって，2次元空間で考えている座標変換がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき，その変換は共形変換 (あるいは等角写像) を与える．また，条件 (ii) は

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.86)$$

を思い出すと，条件 (ii) $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ とわかる．このように， $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ を満たす関数を**反正則関数**と呼ぶ．以上から，正則関数または反正則関数の実部・虚部で表される座標変換は，2次元空間における共形変換 (あるいは等角写像) を与えることがわかる．

では，共形変換はどのようなときに役立つだろうか．日常的に見られる物理現象を記述する一般の場の理論 (電磁気学や素粒子の標準模型，あるいは統計力学で考えることになるスピン系) について，このような共形変換を考えると場の運動方程式とその解は一般に形を大きく変える．実際，座標系の長さをぐにゃぐにゃ変えるような変換をして，物理現象が「同じに見える」という例は明らかに例外的であることが想像できることと思う．しかし，共形変換のもとで場の運動方程式とその解が「不変」になる特別な場の理論が存在する．このような場の理論を**共形場理論**と呼ぶ．この例外的な状況は，現代物理において，統計力学モデルの臨界現象や弦理論の研究において現れる．

(第6回ここまで)

問 1 複素数の等比級数の和 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ を考える. これは $|z| < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$ を満たすので

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

を満たす. この左辺と右辺を極形式 $z = re^{i\theta}$ で表し, 実部と虚部を比較することから

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r \cos \theta}{1-2r \cos \theta + r^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1-2r \cos \theta + r^2},$$

が成立することを示せ.

問 2 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ について, $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が以下の式で与えられるとする. このとき, $f(z)$ を z と \bar{z} を用いて表わせ.

$$(1) \quad \begin{cases} u(x, y) = x^2 + y^2 \\ v(x, y) = xy + 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 - 2y + 1} \\ v(x, y) = \frac{1-y}{x^2 + y^2 - 2y + 1} \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y \\ v(x, y) = e^x \sin y \end{cases}$$

問 3 問 2 の (2) で与えられる複素関数について, 次の極限值を求め, 標準形 $a + ib$ の形で表わせ.

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow 1} f(z) \quad (2) \quad \lim_{z \rightarrow 3-2i} f(z) \quad (3) \quad \lim_{z \rightarrow -i} f(z)$$

問 4 問 2 の (1)-(3) で定義された複素関数について, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$, ならびに $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$, $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}$ をそれぞれ求めよ. また, その結果からのどの関数が複素関数として微分可能か (つまりコーシー・リーマンの関係式を満たすか) を示せ.

解答例.

問 1 $z = re^{i\theta}$ という極表示を用いて, 両片を別々に計算すると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] \\ \frac{1}{1-z} &= \frac{1-\bar{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-r \cos \theta + ir \sin \theta}{(1-r \cos \theta)^2 + (-r \sin \theta)^2} \\ &= \frac{r(\cos \theta - i \sin \theta)}{1-2r \cos \theta + r^2} \end{aligned}$$

が得られる. これらの実部と虚部が一致することから, 次の関係式が得られる:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r \cos \theta}{1-2r \cos \theta + r^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1-2r \cos \theta + r^2}$$

問 2 $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ やオイラーの公式などを用いて計算していくと以下のとおり:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(z) &= \left[\frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 - \frac{1}{4}(z - \bar{z})^2 \right] + i \left[\frac{1}{4i}(z + \bar{z})(z - \bar{z}) + 3 \right] = z\bar{z} + \frac{1}{4}(z^2 - \bar{z}^2) + 3i \\ (2) \quad f(z) &= \frac{x - i(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x - i(y-1)}{[x + i(y-1)][x - i(y-1)]} = \frac{1}{x + iy - i} = \frac{1}{z - i} \\ (3) \quad f(z) &= e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z \end{aligned}$$

ここで (2) と (3) の解答例では、素直に $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ を代入するのではなく、きれいになることを見抜いた計算をした。一般の複素関数について、このように簡単になる形を見抜けるとは限らないので、その場合は素直に $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ を代入するとよい。

問 3 $f(z) = 1/(z - i)$ と求まったことを用いると、以下のように計算できる：

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{z \rightarrow 1} f(z) &= \frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ (2) \quad \lim_{z \rightarrow 3 - 2i} f(z) &= \frac{1}{3 - 3i} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - i} = \frac{1}{6} + \frac{i}{6} \\ (3) \quad \lim_{z \rightarrow -i} f(z) &= \frac{1}{(-2i)} = \frac{i}{2} \end{aligned}$$

問 4 問 2 の結果も用いながら、定義にしたがって計算していくと以下の通り：

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y \neq x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \bar{z} + \frac{1}{2}z, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z - \frac{1}{2}\bar{z} \quad \cancel{z + \frac{1}{2}\bar{z}}, \\ (2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-x^2 + (y - 1)^2}{[x^2 + (y - 1)^2]^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x(y - 1)}{[x^2 + (y - 1)^2]^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2x(y - 1)}{[x^2 + (y - 1)^2]^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2 + (y - 1)^2}{[x^2 + (y - 1)^2]^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{(z - i)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \\ (3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^z, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \end{aligned}$$

したがって、(2) と (3) ではコーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

が成立していることが確認でき、複素関数として微分可能であることがわかる [ただし、(2) では $z = i$ となる点は除く]。くりかえしになるが、複素関数としての微分可能性、つまり正則かどうかは $f(z)$ が z だけの関数になっているかでも判別できるので、この結果自身は問 1 の結果から既に読み取れるものだった。

3 複素関数の積分 1: コーシーの積分定理

◇ 複素関数の積分

微分に引き続き、この節では複素関数の積分を考えたい。まず、1変数の実数関数 $u(x)$ の定積分を思い出すと、これは

$$\int_a^b dx u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x_n u(x_n) \quad \text{with} \quad \begin{cases} \Delta x_n := x_{n+1} - x_n \\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b \end{cases} \quad (3.1)$$

として定義されていた。これは端点 $x = a$ と $x = b$ さえ与えれば一意に定まるものとして定義されている。

一方、複素関数 $f(z)$ は $z = x + iy$ と実数で考えると2変数関数になっているため、そもそもどのように積分を定義すべきかは自明ではない。実際、1変数の実数関数と異なり、端点 $z = \alpha$ と $z = \beta$ を決めても、どのような経路で積分を定義するか定めないと dz などの定め方がわからない。そこで、多変数関数の線積分のように、複素関数の積分を「複素平面上の経路に沿った積分」として定義することにしよう。

まず、複素平面上での曲線 C により、経路を記述する方法を与えておこう。そのために、曲線 C はパラメータ表示を用いて

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{with} \quad a \leq t \leq b \quad (3.2)$$

という関数 $z = z(t)$ により記述できることを思い出そう。パラメータ t を時刻だと解釈すると、時刻 t での複素平面での位置を $z(t)$ で記述していることになり、この時刻を $a \leq t \leq b$ の範囲で動かしたときに描く軌跡により経路を定めていることになる (図5の左図参照)。

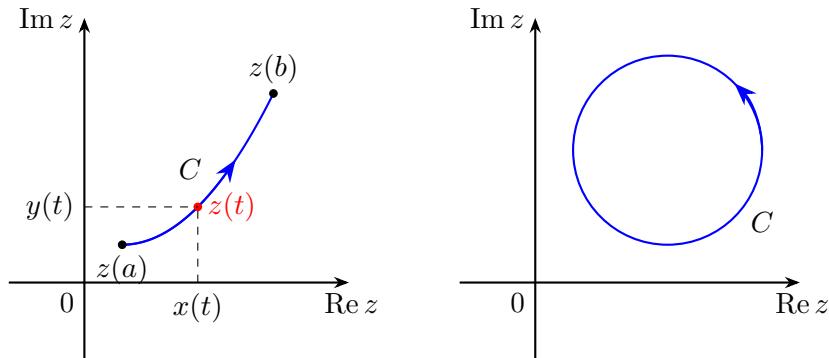


Figure 5. 左図：複素平面上の経路。右図：閉曲線としての円周とその向き。

さて、考える曲線を一般的にしておくと議論がむずかしくなるので、ある程度の制限を加え、さらにその規則をまとめておこう。まず、曲線 C_1 と C_2 について C_1 の終点と C_2 の始点が同じとき、これを組み合わせた曲線 $C := C_2 C_1$ を考えることができる。逆に考えると、一般の曲線 C はその部分曲線に分割することができる。そこで、以下では曲線 C を $C = C_n \cdots C_2 C_1$ と分割したときに、それぞれの部分曲線 C_i はなめらかになっていることを仮定しよう (曲線のつなぎ目ではなめらかじゃなくてもよいものとする)。以下で見ていくように、典型的には線分や円周の一部などをつないで得られる曲線に沿った積分を考えることにする。また、以下では円周や長方形のように閉じた曲線 (単純閉曲線と呼ばれる) を考えるが、曲線の向きを閉曲線で囲われる内側を左手に見るように向きづけする。たとえば、閉曲線として円周を考える場合には、向きは反時計回りにまわるものとして定義する (図5の右図参照)。

以上の準備に基づいて、複素積分を曲線に沿った線積分として定義しよう。具体的には、曲線のパラメータ表示 $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) が与えられたとして、実関数のときの定義 (3.1) に倣って

$$\int_C dz f(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta z_n f(z(t_n)) \quad \text{with} \quad \Delta z_n := z(t_{n+1}) - z(t_n) \quad (3.3)$$

として定義する。証明は省略するが、曲線 C がなめらかなとき、この右辺の極限が存在することを示すことができ、

$$\int_C dz f(z) = \int_a^b dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t)) \quad (3.4)$$

が成立することがわかる．したがって，複素数の積分を定義にしたがって実行するには，この式を計算すればよいことがわかる．右辺には $z(t)$ のパラメータ t に関する微分が含まれるため，経路のパラメータ表示も指定しないと計算ができないことに注意が必要である．また，曲線 C が区分的になめらかになっているときの複素積分は， $C = C_n \cdots C_1$ と分割して，

$$\int_C dz f(z) := \int_{C_1} dz f(z) + \int_{C_2} dz f(z) + \cdots + \int_{C_n} dz f(z) \quad (3.5)$$

と定義する．また，経路 C が閉曲線になっている場合には，閉じた曲線上の周回積分であることを強調するために

$$\oint_C dz f(z) \quad (3.6)$$

と表すことが多い．以上から，複素関数の積分は複素平面上の曲線に沿った線積分として定義され，

- **被積分関数**：複素関数 $f(z)$ の関数形
- **積分経路**：経路を定める曲線 $C: z = z(t)$

の2つを与えることで定まる量だということに注意しよう．

さて，複素関数の積分は実関数のときと同じように，あたかも $dz = dx + i dy$ という無限小の量があるかのようにして変形することができる．したがって， $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ と併せて，実部と虚部に分けると

$$\begin{aligned} \int_C dz f(z) &= \int_C (dx + i y) [u(x, y) + i v(x, y)] \\ &= \int_C [u dx - v dy] + i \int_C [v dx + u dy] \end{aligned} \quad (3.7)$$

と表すこともできる．

では，定義にしたがって，複素関数の積分をいくつかの例について実際に行ってみよう．

例． 複素関数 $f(z) = z$ ，図 6 の左図のように，曲線 C は半径 $a(> 0)$ の円周を反時計周り 1 周としたときの複素積分を計算してみよう．曲線は極表示を用いて $C: z(t) = a e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) となる．よって， $\frac{dz(t)}{dt} = a i e^{it}$ を用いて，以下のように計算される：

$$\oint_C dz f(z) = \int_0^{2\pi} dt a i e^{it} a e^{it} = i a^2 \int_0^{2\pi} dt e^{2it} = i a^2 \left[\frac{1}{2i} e^{2it} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (3.8)$$

例． 上の例と同じ円周を経路として複素関数 $f(z) = \bar{z}$ の積分を考えると次のとおり：

$$\oint_C dz f(z) = \int_0^{2\pi} dt a i e^{it} a e^{-it} = i a^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i a^2 \quad (3.9)$$

例． 複素関数 $f(z) = z$ を図 6 の右図のように 4 点 $z = 0, a, a + ib, ib$ を頂点に持つ長方形を反時計周りに 1 周したときの複素積分を計算してみよう．曲線 $C = C_4 C_3 C_2 C_1$ と分けるとそれぞれのパラメータ表示はたとえば，

$$\begin{cases} C_1: z(t) = t & (0 \leq t \leq a) \\ C_2: z(t) = a + it & (0 \leq t \leq b) \\ C_3: z(t) = a + ib - t & (0 \leq t \leq a) \\ C_4: z(t) = i(b - t) & (0 \leq t \leq b) \end{cases} \quad (3.10)$$

と与えることができる．．したがって、これを用いて次のように計算される：

$$\begin{aligned}
 \oint_C dz f(z) &= \int_0^a dt t + \int_0^b dt i(a + it) + \int_0^a dt (-1)(a + ib - t) + \int_0^b dt (-i)i(b - t) \\
 &= \frac{1}{2}a^2 + i \left(ab + i \frac{b^2}{2} \right) - \left((a + ib)a - \frac{a^2}{2} \right) + \left(b^2 - \frac{b^2}{2} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

例. 上の例と同じ長方形の経路を用いて、複素関数 $f(z) = \bar{z}$ を積分すると次のとおり：

$$\begin{aligned}
 \oint_C dz f(z) &= \int_0^a dt t + \int_0^b dt i(a - it) + \int_0^a dt (-1)(a - ib - t) + \int_0^b dt (-i)(-i)(b - t) \\
 &= \frac{1}{2}a^2 + i \left(ab - i \frac{b^2}{2} \right) - \left((a - ib)a - \frac{a^2}{2} \right) - \left(b^2 - \frac{b^2}{2} \right) \\
 &= 2iab
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

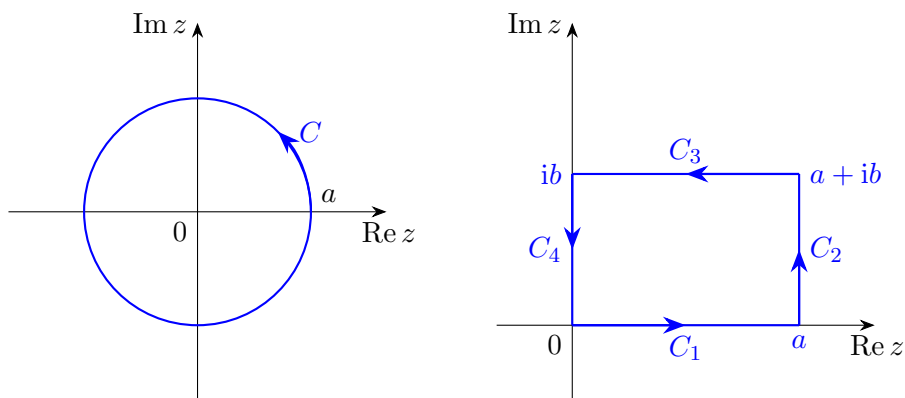


Figure 6. 左図：円周を経路と取ったもの．右図：長方形を経路と取ったもの．

◇ コーシーの積分定理

前節の例で扱った簡単な複素積分の例を見ていると、なんらかの規則があるように思われる．実際、 \bar{z} の積分結果を見ると

$$\oint_C dz \bar{z} = 2i \times (\text{閉曲線 } C \text{ の囲む図形の面積}) \tag{3.13}$$

が成立しているように見える．これは、一般の複素関数 $f(z)$ の複素積分に関して、きれいな定理が成立していることを期待させる．

上の期待に基づいて、実部・虚部が C^1 級の一般の複素関数 $f(z)$ を 4 点

$$z = x_0 + iy_0 (= z_0), \quad x_0 + a + iy_0, \quad x_0 + a + i(y_0 + b), \quad x_0 + i(y_0 + b) \tag{3.14}$$

を頂点に持つ長方形を反時計周り 1 周する閉曲線の複素積分を計算してみよう (図 6 の右図の原点を z_0 にずらしたもの)．閉曲線を $C = C_4 C_3 C_2 C_1$ と分けるとそれぞれのパラメータ表示はそれぞれ

$$\begin{cases} C_1 : z(t) = z_0 + t & (0 \leq t \leq a) \\ C_2 : z(t) = z_0 + a + it & (0 \leq t \leq b) \\ C_3 : z(t) = z_0 + a + ib - t & (0 \leq t \leq a) \\ C_4 : z(t) = z_0 + i(b - t) & (0 \leq t \leq b) \end{cases} \tag{3.15}$$

によって定まる．よって、これを使って複素積分の定義を書き換えていくと

$$\begin{aligned}
& \oint_C dz f(z) \\
&= \int_0^a dt f(z_0 + t) + \int_0^b dt i f(z_0 + a + it) + \int_0^a dt (-1) f(z_0 + a + ib - t) + \int_0^b dt (-i) f(z_0 + i(b - t)) \\
&= \int_0^a dt [f(x_0 + iy_0 + t) - f(x_0 + a - t + i(y_0 + b))] + i \int_0^b dt [f(x_0 + a + i(y_0 + t)) - f(x_0 + i(y_0 + b - t))] \\
&= \int_{x_0}^{x_0+a} dx [f(x + iy_0) - f(x + i(y_0 + b))] + i \int_{y_0}^{y_0+b} dy [f(x_0 + a + iy) - f(x_0 + iy)] \\
&= \int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+b} dy \frac{\partial}{\partial y} [-f(x + iy)] + i \int_{y_0}^{y_0+b} dy \int_{x_0}^{x_0+a} dx \frac{\partial}{\partial x} [f(x + iy)] \\
&= 2i \int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+b} dy \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x + iy)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

が得られる．ここで、前節で $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right]$ と定義したことを思い出すと、長方形の内部を $D \in \mathbb{C}$ とし、上の結果は

$$\oint_C dz f(z) = 2i \int_D dx dy \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) \tag{3.17}$$

が成立することを意味している．

_____ (第7回ここまで)

この結果を一般化して、 C を任意の区分的になめらかな閉曲線、 S を C が囲む図形となっているとき (これを $\partial S = C$ と表す) を考える．このとき、 S を微小長方形の和で近似的に表すことができ、この極限として一般の区分的になめらかな閉曲線の場合を考えることができる．重なっている逆向き経路の線積分の寄与が消えることを考慮すると、

$$\oint_C dz f(z) = 2i \int_S dx dy \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) \tag{3.18}$$

が成立する．これをまとめると以下の通り：

定理. グリーンの公式： 複素関数 $f(z)$ の実部・虚部が C^1 級の2変数実関数だとする．区分的になめらかな閉曲線 C とし、その内部を S と表したとき ($\partial S = C$)、複素関数 $f(z)$ の積分について以下が成り立つ：

$$\oint_C dz f(z) = 2i \int_S dx dy \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) \tag{3.19}$$

グリーンの公式の特別な場合として $f(z) = \bar{z}$ と取れば、確かに

$$\oint_C dz \bar{z} = 2i \int_S dx dy = 2i \times (\text{閉曲線 } C \text{ の囲む図形の面積}) \tag{3.20}$$

を満たし、計算した例からこの節のはじめに予想した結果 (3.13) を再現している．

さて、グリーンの公式において、複素関数 $f(z)$ は実部・虚部が C^1 級である以外の制限はついていない．考えている積分範囲で $f(z)$ が正則関数のときは、さらに単純化された次の結果を得る：

定理. コーシーの積分定理： 区分的になめらかな閉曲線 C とし、その内部を S と表したとき ($\partial S = C$)、複素関数 $f(z)$ がこれらの領域で正則だとする．このとき、以下が成り立つ：

$$\oint_C dz f(z) = 0 \tag{3.21}$$

以下で見るように、このコーシーの積分定理が複素関数論に関する定理の中で、概念的にも実用的にも最も大事な定理の1つである。

さて、閉経路 C とその内部全体で正則な関数については、コーシーの積分定理で計算が可能だが、一部で正則ではないときはどうなるだろうか。このような場合として、次の例を考えてみよう。

例. n を整数として、複素関数 $f(z) = (z - a)^n$ を半径 $R(> 0)$ の円周を反時計回り 1 周とした曲線 C について複素積分した場合を考えてみよう。まず、 $n \geq 0$ のときは、 \mathbb{C} 全体で正則なので、複素積分はゼロになる。一方、 $n < 0$ のときは $z = a$ で正則ではなく積分経路の内部に特異点を含んでいるため、単純にコーシーの積分定理を適用するわけにはいかない。そこで、積分経路を $C: z(t) = a + Re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) と表して定義にしたがって計算すると

$$\oint_C dz f(z) = \int_0^{2\pi} dt R i e^{it} \frac{1}{R^{|n|}} e^{-i|n|t} = i R^{1-|n|} \int_0^{2\pi} dt e^{i(1-|n|)t} = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \quad (3.22)$$

が得られる。途中式では $n < 0$ なのが明瞭になるように、絶対値記号 $|n|$ を用いて表した。

上の例から、 $(z - a)^n$ の複素積分については特異点を持つ $n < 0$ 場合にその特異点を囲む複素積分を考えても $n = -1$ のときのみしか有限の値を持たないことがわかった。この結果は以下の計算で決定的に重要になるので、まとめておこう：

命題. $(z - a)^n$ の複素積分：整数 n について、 $f(z) = (z - a)^n$ の複素積分は以下で与えられる：

$$\oint_C dz (z - a)^n = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \quad (3.23)$$

ただし、積分経路 C は $z = a$ を中心とする半径 R の円周を反時計回りにまわる経路に取った。

さて、複素積分がゼロにならない場合に注目してみると、 $f(z) = \frac{1}{z - a}$ という複素関数について、原点を囲む半径 R の円周を積分経路に取って積分が

$$\oint_C dz \frac{1}{z - a} = 2\pi i \quad (3.24)$$

となるのだった。 $f(z)$ は原点で正則ではないため、右辺がゼロではなくなっているのだが、ここで積分結果が経路の半径 R に依らないことに注意しよう。つまり、特異点 $z = a$ を囲む円周であれば、どんな半径の円であっても結果が同じになることを意味している。

この結果はさらに一般化することができ、被積分関数が正則な領域では複素積分の積分経路を自由に変形しても結果が変わらないことを示すことができる。具体的には経路 C を変形して $C' = C + \delta C$ としたものとしよう。このとき、新たに付け加えた δC の内部で $f(z)$ が正則ならばコーシーの積分定理を用いることができ

$$\int_{C'} dz f(z) = \int_{C+\delta C} dz f(z) = \int_C dz f(z) + \underbrace{\int_{\delta C} dz f(z)}_{=0} = \int_C dz f(z) \quad (3.25)$$

が成立する。これをくりかえすことで、被積分関数が正則な領域であれば好きに経路を変形することができるとわかる。上の例でみた積分経路を与える円周の半径を変えても積分結果が変わらなかったのは、この経路変形の結果として理解できる。

以上の議論からもすでにわかっていることだが、積分経路を変形させる際に注意することをまとめておくと以下の通り：

- コーシーの積分定理から正則な閉領域を囲む複素積分はゼロ
- 正則な領域で同じ位置にある経路を逆向きに走らせるとキャンセルする

● 特異点をまたぐような変形は許されない

以上を使って, $f(z) = \frac{1}{z-a}$ のような $z=a$ に特異点を持つ関数の複素積分についての経路変形をもう一度考えてみよう. 図 7 に示したような積分経路 $C = C_4 C_3 C_2 C_1$ を取ると, この経路 C が囲む閉領域 (上側に切れ目が入ったドーナツのの内側) には特異点は含まれていない. したがって, コーシーの積分定理から

$$0 = \oint_C dz f(z) = \int_{C_1} dz f(z) + \int_{C_2} dz f(z) + \int_{C_3} dz f(z) + \int_{C_4} dz f(z) \quad (3.26)$$

ここで, ドーナツの切れ目が一致する極限を考えると経路 C_2 と C_4 は被積分関数が正則な領域で同じ位置を逆向きに走る経路になるため, 経路 C_2 と C_4 からの積分の寄与はキャンセルしゼロになる. 一方, 経路 C_1 と C_3 は半径が異なる円周の経路を与えるが, 円周上を反時計回りにまわる向きを正に取っていたことを思い出すと,

$$\oint_{|z-a|=R_1} dz f(z) = \oint_{|z-a|=R_2} dz f(z) \quad (3.27)$$

が得られる. ただし, $\oint_{|z-a|=R_1} dz$ は, 中心が $z=a$ にある半径 R_1 の円周上を反時計回りにまわる経路に関する複素積分を表すことにした. このようにして, 上の規則を使うと複素積分の経路は正則な領域でかなり自由に変形することができる.

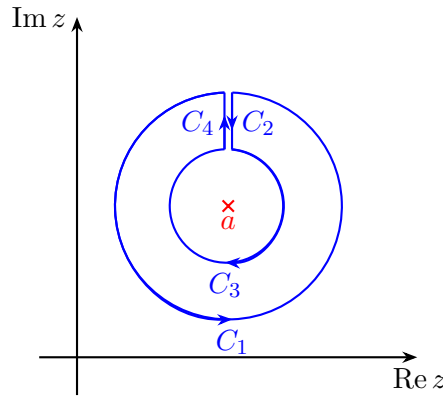


Figure 7. $z=a$ に特異点を持つ複素関数についての積分経路.

◇ コーシーの積分定理の応用

複素積分の計算は定義にしたがって線積分として計算することができるが, 実際にこれを実行するのはめんどろなことが多い. しかし, 単純な閉経路に関する複素積分積分は, 前節で扱った

- 積分経路の変形
- $(z-a)^n$ の積分

の2つを組み合わせると, 簡単に計算できることが多い. コーシーの積分定理の応用として, このような積分計算の例を見てみよう.

例. 図 8 に示すような楕円 $C: x^2/4 + y^2 = 1$ について, 複素積分

$$J: 0 \oint_C dz \frac{2z}{z^2-1} \quad (3.28)$$

を実行したい. 定義どおり, 楕円のパラメータ表示 $z = 2 \cos t + i \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) として計算しようとする

$$J = \int_0^{2\pi} dt (-2 \sin t + i \cos t) \frac{2(\cos t + i \sin t)}{(2 \cos t + i \sin t)^2 - 1} \quad (3.29)$$

となり、かなりめんどろに見える．しかし、特異点 $z^2 - 1 = 0$ を解いて $z = \pm 1$ にあることを考慮すると、2つの特異点を囲む複素積分の和に取り替えられる．実際、部分分数分解を施してから、積分経路の変形を行えば以下のように評価できる：

$$\begin{aligned}
 J &= \oint_C dz \left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \right] \\
 &= \oint_C dz \frac{1}{z+1} + \oint_C dz \frac{1}{z-1} \\
 &= \oint_{|z+1|=R} dz \frac{1}{z+1} + \oint_{|z-1|=R} dz \frac{1}{z-1} \\
 &= 4\pi i
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

3行目では、被積分関数の特異点の位置に注意しながら、積分経路である楕円 C をそれぞれ中心が ± 1 の半径 R の円に積分経路に変形した．定義にしたがって計算する方法と比べて、むずかしい計算をまったく必要とせず結果が得られたことに注目してほしい．

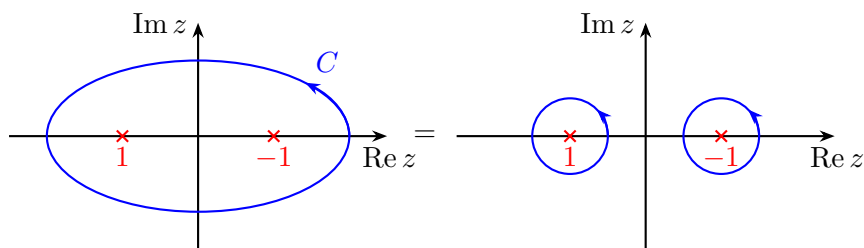


Figure 8. 楕円に沿った複素積分．

例．原点を中心とする半径 2 の円 C について、複素積分

$$J := \oint_C dz \frac{1}{z^2 + 1} \tag{3.31}$$

を実行したい．被積分関数が、 $z^2 + 1 = 0$ を解いて $z = \pm i$ に特異点を持つことに注意して、図 9 のように経路変形をする

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{i}{2} \oint_C dz \left[\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right] = \frac{i}{2} \left[\oint_C dz \frac{1}{z+i} - \oint_C dz \frac{1}{z-i} \right] \\
 &= \frac{i}{2} \left[\oint_{|z+i|=R} dz \frac{1}{z+i} - \oint_C dz \frac{1}{z-i} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

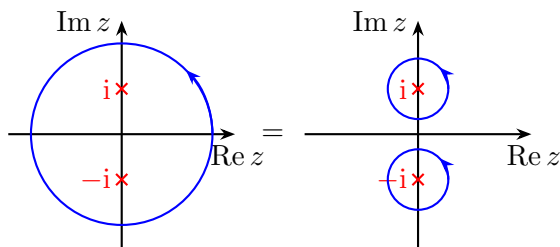


Figure 9. 円に沿った複素積分．

4 複素関数の積分 2: コーシーの積分公式・留数定理

前節までの結果を用いると直ちに次の結果を導出できる.

コーシーの積分公式: $f(z)$ は領域 D とその境界で正則であるとする. このとき,

$$f(z) = \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (4.1)$$

が成立する (∂D は D の境界に沿った経路).

証明 いま, 被積分関数は $\zeta = z$ を除いて正則である. そこで, 積分経路 ∂D を変形して, $\zeta = z$ を囲む微小な円周 $C: \zeta(t) = z + \epsilon e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) に経路を取り替えられる. すると, 変形後の経路について, 複素関数の定義にしたがって計算すると

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \oint_C \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \epsilon e^{it} \frac{f(z + \epsilon e^{it})}{\epsilon e^{it}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z + \epsilon e^{it}) \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z) = f(z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

が得られ, 示したい結果が得られる (まじめに評価すれば $\epsilon \rightarrow 0$ としたところの収束性も数学的にちゃんと示すことができる).

(第 8 回ここまで)

◇ 特異点の分類

コーシーの積分定理は考えている領域全体で正則な関数の複素積分がゼロになることを主張していたが, $f(z) = \frac{1}{z-a}$ の積分の例で見たように, 特異点を含む領域の積分については必ずしもゼロにならない. しかし, 正則な領域では積分経路の変形が可能だったので, 特異点を含む場合の複素積分についても一般的かつ有用な結果が示せそうな期待が湧いてくる.

この期待に基づいて, まずは特異点の中でも**孤立特異点 (isolated singularity)**と呼ばれるものの分類を行おう.

定義: 領域 D 上の複素関数 $f(z)$ に対して, $c \in D$ が**孤立特異点 (isolated singularity)**であるとは, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して, $0 < |z - c| < \epsilon$ で $f(z)$ が正則であることを言う.

この定義は $z = c$ 直上でのふるまいについては触れておらず, $z = c$ のまわりが正則になっているときを考えていることに注意する. つまり, $z = c$ のまわりは正則なので, $z = c$ にどんな特異点があるにしても, 他とは孤立した特異点になっていることを表している.

さて, 立特異点 c の近くでは, テイラー展開を負のべきまで許す形で

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (4.3)$$

という展開が可能であり, かつ展開係数 a_n は $f(z)$ から一意に定まることを示すことができる. これは**ローラン展開**と呼ばれるもので, 次節で詳しく扱う. ここで, 特異点の情報はテイラー展開には現れなかった

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - c)^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - c)^2} + \frac{a_{-1}}{z - c} \quad (4.4)$$

の負のべきの展開部に含まれるだろう. これをローラン展開 (4.3) の**主要部**と呼ぶ. そこで, 孤立特異点の特異点としての情報は「展開係数が負のべき側にどこまで続くのか」に含まれるだろうと考え, 孤立特異点を次のように分類する.

- (i) **取り除き得る特異点**：孤立特異点の定義が $z = c$ 直上のふるまいについては言及していないことを思い出すと、「主要部がゼロとなり、 $z = c$ で正則である」という自明な場合も上の孤立特異点の定義に含まれる。一見、非自明な特異点を持ちそうな場合として $f(z) = \sin z/z$ という関数は $z = 0$ で特異点を持ちそうだが、 $\sin z$ の $z = 0$ まわりのテイラー展開を思い出すと

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left[z - \frac{1}{3!} z^3 + \cdots \right] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots \quad (4.5)$$

となり、主要部がゼロになるので $z = 0$ は取り除きうる特異点になっている。このとき、考えている点で複素関数は正則で、ローラン展開はテイラー展開と一致する。

- (ii) **k 位の極** ($k = 1, 2, \dots$)：主要部が有限個の項で記述され

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-c)^n = \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} \quad (4.6)$$

となっているとき、 $f(z)$ は $z = c$ に k 位の極を持つという。簡単な例として、 $f(z) = (z-c)^n$ は $n < 0$ のときは、 $z = c$ に n 位の極を持っている。

- (iii) **真性特異点**： $z = c$ における展開の主要部が無限個の項を持つ場合、 $z = c$ を**真性特異点**という。たとえば、 $f(z) = e^{1/z}$ という関数は、指数関数の展開を行うと

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} z^2 + \cdots \quad (4.7)$$

となり、主要部が無限に続くため $z = 0$ が真性特異点になっている。

◇ 留数定理とその実積分への応用

さて、 $(z-c)^n$ の複素積分をする際に有限で残るのは $n = -1$ の場合だけであったことを思い出すと、ローラン展開の中で a_{-1} という係数は重要な役割を果たしそうである。この期待に基づいて、係数 a_{-1} に名前を与えておこう：

定義. 留数： $f(z)$ の孤立特異点 $z = c$ でのローラン展開 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ について、 $\frac{1}{z-c}$ の展開係数 a_{-1} を $z = c$ における**留数 (residue)** といい、次の記号で表す：

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=c} f(z) \quad (4.8)$$

以上の定義に、積分経路の変形と $(z-c)^n$ の複素積分の結果を用いると、複素関数論でもっとも大事な定理の1つである以下の結果が示される：

留数定理：複素関数 $f(z)$ は単純閉曲線 C の内部に孤立特異点 c_1, \dots, c_N を持つ他は C とその内部で正則とする。このとき、 C に沿った $f(z)$ の複素積分は、以下のように留数の和で与えられる：

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{z=c_i} f(z) \quad (4.9)$$

ここで与えた留数定理は一見したところでは、どのように有用な結果なのかが少しわかりにくい。しかし、以下で見るように実積分の具体的な計算などにも応用が効く非常に強力な結果を与えており、現代物理では素粒子物理・物性物理問わず (グリーン関数を用いた) 場の理論の解析計算を行う際に必須な結果を与えている。この講義で扱う内容としては、何を差し置いてもこの留数定理の内容と以下で扱う応用をちゃんと身につけておいてほしい。

さて、留数は孤立特異点 $z = c_i$ でのローラン展開の展開係数から求められる．とくに、孤立特異点が 1 位の極の場合には単に

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow c_i} (z - c_i) f(z) \quad (4.10)$$

として計算できる．以前の例で見たように、式 (4.9) の左辺にある積分は定義にしたがって計算すると一般にめんどろな計算が必要になるが、右辺は微分や代数計算で簡単に求まる量となっていることに注意してほしい．これが留数定理が実際の積分計算を行う上で有用になる理由を与えている．

留数定理の応用として、実関数の積分を実行してみよう．

例．実関数の定積分として

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} \quad (4.11)$$

を考えてみよう．この積分は、すでに習った微積分の範囲内でも実行できる．実際、 $x = \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (4.12)$$

などを用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta = \pi \quad (4.13)$$

と評価できる．これを留数定理を用いてやり直してみよう．

被積分関数を複素平面まで拡張して $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ を考えると、この関数は $z = \pm i$ に 1 位の極をもつ．そこで、図 10 に示した上半平面を囲む積分経路 C_R について留数定理を適用すると

$$\oint_{C_R} dz \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \pi \quad (4.14)$$

が得られる．一方、積分経路 C は実軸上の積分ごとに寄与を分割すると

$$\oint_{C_R} dz \frac{1}{1+z^2} = \int_{-R}^R dx \frac{1}{1+x^2} + \int_{C'_R} dz \frac{1}{1+z^2} \quad (4.15)$$

ここで、上半平面を通る半径 R の円周を C'_R と表した．この式の左辺はすでに留数定理で計算してあり、右辺の第 1 項は $R \rightarrow \infty$ で求めたい積分 I に帰着する．右辺の第 2 項は $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1$ を用いると

$$\left| \int_{C'_R} dz \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \int |dz| \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \int_0^\pi dt \frac{R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (4.16)$$

と評価でき、 $R \rightarrow \infty$ でゼロになる．これらを合わせて、次のように積分結果が得られる：

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dx \frac{1}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} dz \frac{1}{1+z^2} \pi - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} dz \frac{1}{1+z^2} = \pi \quad (4.17)$$

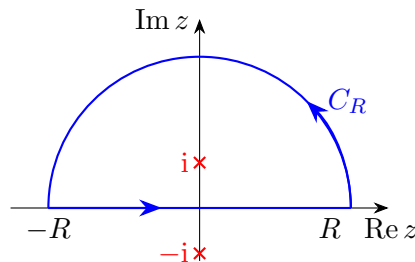


Figure 10. 上半平面を囲う積分経路.

この例で見たように、留数定理を応用して実関数の定積分を計算するためには

- (1) 実行したい積分経路を含むような、適切な閉経路に沿った複素積分を考える。
- (2) 留数定理を用いて (1) で考えた複素積分を実行する。
- (3) 求めたい積分と留数積分の結果の差を評価する。

というステップに応じて計算を進めるのが定石である。(1) で適切な閉じた経路を考える際には、実行したい定積分に加えて余分な寄与を出す経路に沿った複素積分の寄与がなるべくゼロになるように選ぶことがポイントになる。

例. 上の例よりも少し複雑な例として、次の定積分を考えてみよう：

$$I := \int_0^{\infty} dx \frac{1}{1+x^4} \quad (4.18)$$

被積分関数は偶関数なので、積分範囲を取り替える代わりに 1/2 倍して

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^4} \quad (4.19)$$

とする。さて、 x を複素数 z まで拡張してみると、被積分関数は $1+z^4=0$ を解いて、

$$z = e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{-i\pi/4}, e^{-3i\pi/4}, \quad (4.20)$$

に 1 位の極を持つことがわかる。また、被積分関数は $1+z^4$ を分母に持つため、上の例と同様にして上半平面を囲む積分経路を考えると、上半平面の無限に大きな半円上を走る経路からの積分への寄与はゼロになると評価できる。したがって、図 11 に示した経路に対して、留数定理を用いて

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} dz \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname{Res}_{z=e^{3i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} \right] \\ &= \pi i \underbrace{\left[-\frac{1}{4}e^{i\pi/4} - \frac{1}{4}e^{3i\pi/4} \right]}_{=-\frac{1}{4}i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

と求まる。

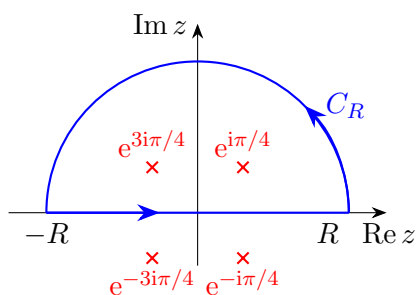


Figure 11. 上半平面を囲う積分経路.

(第 9 回ここまで)

◇ 留数定理の物理への応用

ここまでに得られた積分定理の物理への応用例をいくつか紹介しよう。

例. 場の理論における留数定理の応用：場の量子論の計算では、ファインマングリーン関数と呼ばれる ω と \mathbf{q} の関数を

$$iG(\omega, \mathbf{p}) := \frac{i}{\omega^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon} \quad (4.22)$$

と定義して、次のような積分をよく計算することになる。

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} iG(\omega, \mathbf{p}) \\ J(\mathbf{k}) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}, \mathbf{q}) iG\left(\omega, \frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}\right) iG\left(-\omega, \frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}\right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

という積分を考えることが多くある [$g(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ は \mathbf{k}, \mathbf{q} の何らかの関数]。 d^3q 積分があるため、少し複雑に見えるが、 ω 積分は上の実関数の定積分と同じようにして、留数定理を用いて積分を実行できる。

応用. フレネル積分 (ガウス積分の一般化)：微積分で習ったガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad \text{with } a > 0 \quad (4.24)$$

を思い出そう。この一般化として、係数 a を純虚数にした

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{ia}{2}x^2} \quad \text{with } a > 0 \quad (4.25)$$

という積分を考えてみよう。被積分関数は複素数で振動する関数になっており、実際、オイラーの公式を用いると

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\cos \frac{a}{2}x^2 - i \sin \frac{a}{2}x^2 \right] \quad \text{with } a > 0 \quad (4.26)$$

と表すことができる。振動関数を積分しているので、ゼロになるような気がするがこれは本当だろうか？

この積分を実行するために、複素関数 $f(z) = e^{-\frac{ia}{2}z^2}$ の積分を考えてみる。 $f(z)$ は複素平面全体で正則なので、コーシーの積分定理から閉じた経路に関する複素積分はゼロとなる。そこで、図 12 に示した

$$C_R = \begin{cases} C_1 : z = t & \text{with } -R \leq t \leq R \\ C_2 : z = Re^{it} & \text{with } 0 \leq t \leq -\frac{\pi}{4} \\ C_3 : z = te^{-\frac{i}{4}\pi} & \text{with } R \leq t \leq -R \\ C_4 : z = Re^{it} & \text{with } \frac{3}{4}\pi \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (4.27)$$

という閉じた経路を考えよう。このとき、コーシーの積分定理 (あるいは留数定理) から

$$0 = \oint_C dz f(z) = \int_{C_1} dz f(z) + \int_{C_2} dz f(z) + \int_{C_3} dz f(z) + \int_{C_4} dz f(z) \quad (4.28)$$

となるが、 C_2 と C_4 上の積分は $R \rightarrow \infty$ 指数的に小さくなりゼロになる。一方、 C_1 と C_3 上の積分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} dz f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{ia}{2}t^2} = I \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} dz f(z) &= \int_{\infty}^{-\infty} dt e^{-\frac{i}{4}\pi} e^{-\frac{ia}{2}t^2 e^{-\frac{i}{2}\pi}} = -e^{-\frac{i}{4}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{a}{2}t^2} = -\sqrt{\frac{2\pi}{e^{\frac{i}{2}\pi}a}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる．ここで、 C_3 上の積分がただのガウス積分に帰着したことがポイントである．以上から、コーシーの積分定理から得られた結果で $R \rightarrow \infty$ とすると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{ia}{2}t^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{ia}} \quad a > 0 \quad (4.30)$$

が得られる．つまり、ガウス積分の公式でそのまま $a \rightarrow ia$ としたものが成立していることが確認できる．また、上の結果は $e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ を用いて、実部と虚部に分解すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cos \frac{a}{2}x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin \frac{a}{2}x^2 \quad (4.31)$$

を与える．したがって、振動積分ではあるが、ゼロにはならないことが確認できる．ガウス積分の一般化を与えている以上の積分は**フレネル積分**とも呼ばれることもある．

フレネル積分の公式 (4.30) はファインマンにより定式化された量子力学の経路積分形式において頻繁に使われる式である．

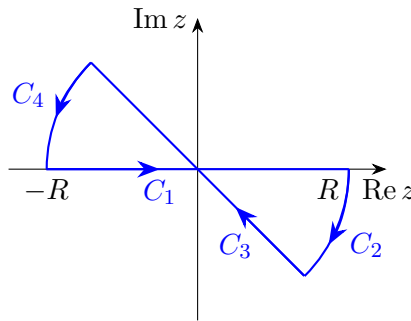


Figure 12. 積分経路 C_R .

応用．留数定理とウィック回転：この節のはじめに、場の理論で現れる例として提示した1つ目の積分を考える．ただし、 ω 積分のみを扱う形に簡単化して、

$$I := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi i (\omega^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (m > 0) \quad (4.32)$$

という積分を考えよう．この積分を以下のように2通りのやり方で評価してみよう．

1つ目の計算方法は留数定理を用いて直接評価することである．いま、被積分関数は $\omega = m - i\epsilon$ と $\omega = -m + i\epsilon$ に1位の極を持つ．ただし、 ϵ は無限小の量であることを使い、 ϵ の係数が1になるようにした．ここで、上半平面を囲むように半径が無限大の積分経路を付け足しても、余分な経路の寄与は半径無限大でゼロになり、積分結果は変わらない．そこで、図13の左図に示した上半平面を囲む経路について留数定理を適用すると

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} d\omega \frac{1}{2\pi i (\omega - m + i\epsilon)(\omega + m - i\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Res}_{\omega = -m + i\epsilon} \frac{1}{(\omega - m + i\epsilon)(\omega + m - i\epsilon)} \\ &= -\frac{1}{2m} \end{aligned} \quad (4.33)$$

と評価できる．

2つ目の方法は留数定理を用いて積分経路を変形して、実軸上の積分から虚軸上の積分に移すことである。そのために、今度は被積分関数の極 $\omega = m - i\epsilon$ と $\omega = -m + i\epsilon$ を囲まないような経路 C として、図 13 の右図に示した $C'_R = C_4 C_3 C_2 C_1$ を考える。先ほどと同様にして、半径が大きい極限で経路 C_2 と C_4 からの寄与はゼロになることが示される。さらに、いま考えている積分経路 C'_R は被積分関数の極を囲まないでコーシーの積分定理 (あるいは留数定理) から

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C'_R} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{dt}{2\pi i} i \frac{1}{-t^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + m^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

が得られる。最右辺の第2項は虚軸上の積分からくる寄与を表している。2行目に進む際には、第2項の積分変数を t から ω に置き換え、さらに $\epsilon \rightarrow 0$ としても積分経路上に特異点が現れなくなったことを用いて、 $\epsilon = 0$ とした。これより、次の公式が得られる：

$$\text{ウィック回転：} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + m^2} \quad (4.35)$$

式 (4.35) では、 ω^2 の前の符号が逆転していることが特徴的である。この公式は、積分経路を反時計回りに $\pi/2$ だけ回転させる操作と解釈することができ、場の量子論で**ウィック回転 (Wick rotation)** と呼ばれるものになっている。特異点が複素平面の第2象限 (左上) と第4象限 (右下) にあるために、積分経路の実軸を反時計回りには回せることに注意してほしい。式 (4.35) に現れる積分は、 $\omega = m \tan x$ と変数変換することで (あるいは留数定理を用いることで) ただちに実行でき、次の結果が得られる：

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + m^2} = -i \frac{1}{2im} = -\frac{1}{2m} \quad (4.36)$$

当然、1つ目の方法と一致した結果を出している。

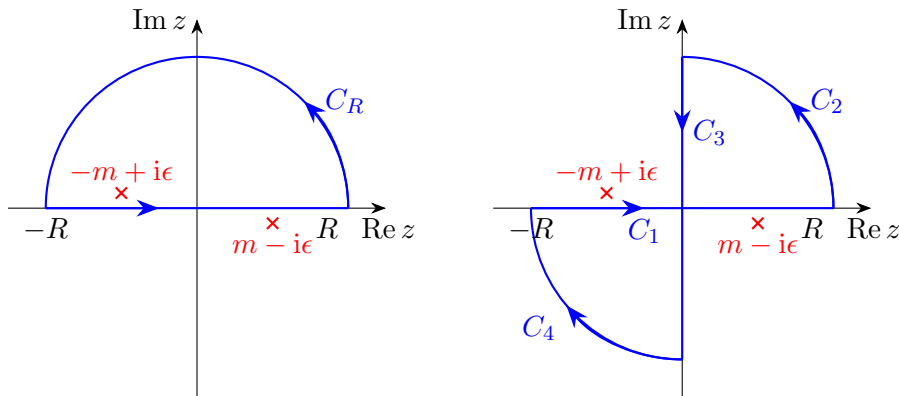


Figure 13. 2つの積分経路.

応用. ステップ関数の積分表示： 次の積分で定義される関数を考えよう。

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} \quad (4.37)$$

いつものように、複素関数まで拡張して $f(z) := \frac{1}{z - i\epsilon} e^{izt}$ を考える。 $\epsilon > 0$ より、この関数は上半平面

の $z = i\epsilon$ という位置に 1 位の極を持ち、さらに留数は

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow i\epsilon} (z - i\epsilon) f(z) = e^{-\epsilon t} \quad (4.38)$$

で与えられる。

さて、無限に大きな半円の経路をつけ足して、いつものように留数定理で評価することを考える。ただし、つけたした無限に大きな半円からの寄与がゼロになるかどうかには注意が必要である。この点に注意するために、 $z = x + iy$ を被積分関数に含まれる指数関数に代入すると $e^{izt} = e^{itx - ty}$ となる。したがって、この部分が指数的に小さくなるのは、 $t > 0$ のときは $y > 0$ 、 $t < 0$ のときは $y < 0$ である。よって、無限に大きな半円からの寄与が落ちるためには、図 14 に示したように、 $t > 0$ のときは上半平面を囲む半円、 $t < 0$ のときは下半平面を囲む半円を考える必要がある。このように t の正負に応じて適切な経路を選ぶことで、無限に大きな半円上の積分が寄与しないようにできる。したがって、留数定理を用いると

$$\begin{aligned} \bullet \quad t > 0 \text{ のとき: } \theta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R^+} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Res } f(z) \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon t} = 1 \\ \bullet \quad t < 0 \text{ のとき: } \theta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R^-} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

が得られる。さらに、 $t = 0$ のときは

$$\theta(t=0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{\omega^2 + \epsilon^2} + \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \epsilon^2} \right] \quad (4.40)$$

となるが、最右辺の第 1 項は奇関数を原点について対象に積分しているためゼロとなり、ひとつ前の例でやったように第 2 項の積分は $1/(2\epsilon)$ と評価できる。したがって、 $t = 0$ の値は $\theta(t=0) = \frac{1}{2}$ と求まった。以上の結果をまとめると、積分により定義した関数 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ \frac{1}{2} & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.41)$$

と与えられることがわかった。このような関数のことを**ヘヴィサイドのステップ関数** $\theta(t)$ と呼ぶ。

上の結果からわかるように、ヘヴィサイドのステップ関数はある点 (上の例では $t = 0$) を境に 0 と 1 の間をジャンプするような関数を与えている。このような関数は、電気回路のスイッチをオンとオフで切り替えるときの電圧の時間依存性や、場の理論において現れる様々なグリーン関数を記述する際など、物理の様々な場面で用いられる。

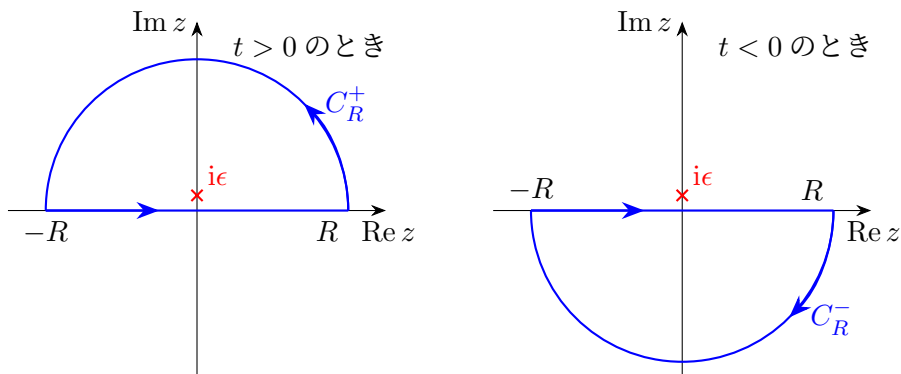


Figure 14. 2つの積分経路.

応用. 主値積分：いま，実関数 $f(x)$ が区間 $a \leq c \leq$ を満たす点 $x = c$ で特異点を持つと，

$$\int_a^b dx f(x) \quad (4.42)$$

という積分は不定になりかねない．そこで，この特異点直上に行ったときの寄与を避けるように，**主値積分**と呼ばれる量を

$$P \int_a^b dx f(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} dx f(x) + \int_{c+\epsilon}^b dx f(x) \right] \quad (4.43)$$

と定義してみよう．

いま，ある複素関数 $g(z)$ が上半平面で正則であるとき， $\frac{g(z)}{z + i\epsilon}$ は下半平面の $x = -i\epsilon$ で特異点を持つ．ここで $a < 0 < b$ として，この関数について実軸上の定積分を考えると，図 15 に示したように，正則な上半平面側に積分経路を少し変形することができる．したがって，微小な半円の寄与を定義にしたがって評価すると

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} g(x) &= \left[\int_a^{-\epsilon} dx + \int_{\epsilon}^b dx \right] \frac{1}{x} g(x) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 dt \epsilon i e^{it} \frac{1}{\epsilon e^{it}} g(\epsilon e^{it}) \\ &= P \int_a^b dx \frac{1}{x} g(x) - i\pi g(0) \end{aligned} \quad (4.44)$$

が得られる．同様にして，分母を $x - i\epsilon$ とすると，第 2 項目の符号は逆符号になる．すると，デルタ関数を $\delta(x)$ として，以上の結果を次のようにまとめられる：

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = P \frac{1}{x} - i\delta(x), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\delta(x) \quad (4.45)$$

この関係式は以下の例で見るとような形で，場の理論や非平衡統計力学でよく使われる．

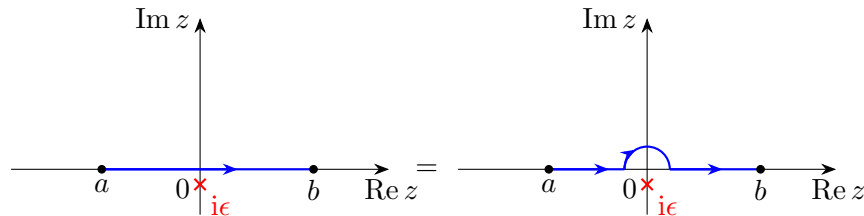


Figure 15. 2つの積分経路.

応用. Kramers-Kronig の関係式：上半平面で正則な関数 $G_R(z)$ を考えよう．このとき，コーシーの積分公式より，実軸と無限に大きな半円で作られる上半平面を囲む積分経路 C に対して

$$G_R(\omega) = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{G_R(z)}{z - \omega - i\epsilon} \quad (4.46)$$

が成立する．さらに関数 $G_R(z)$ は $|z| \rightarrow \infty$ で $f(z) \leq |z|^{-2}$ とふるまい，無限に大きな半円上の積分が寄与しないとしよう．すると，上で得られた主値積分の公式を用いて

$$G_R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{G_R(z)}{z - \omega - i\epsilon} = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{G_R(z)}{z - \omega} + \frac{1}{2} G_R(\omega) \quad (4.47)$$

が得られる。最右辺の第2項は左辺と同じものに比例しているので、移項して

$$G_R(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi i} \frac{G_R(z)}{z - \omega} \quad (4.48)$$

が得られる。この式の両辺について、実部と虚部を比べると

$$\operatorname{Re} G_R(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi} \frac{\operatorname{Im} G_R(z)}{z - \omega}, \quad \operatorname{Im} G_R(\omega) = -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi} \frac{\operatorname{Re} G_R(z)}{z - \omega} \quad (4.49)$$

という関係式が得られる。この関係式は上半平面で正則な関数 $G_R(z)$ の実部と虚部はお互い結びついてることを意味している。つまり、 $G_R(z)$ は実部がわかれば虚部が求まり、虚部がわかれば実部が求まる。この式 (4.49) は **Kramers-Kronig 関係式** と呼ばれ、統計力学や場の理論の研究で使われる式である。

(第10回ここまで)

応用. 分散式. 遅延グリーン関数 $G_R(t)$ と呼ばれる量は $t \geq 0$ のみで値を持つため、ステップ関数 $\theta(t)$ とある関数 $\rho(t)$ を用いて

$$G_R(t) = i\theta(t)\rho(t) \quad (4.50)$$

と表すことができる。このとき、ステップ関数の積分表示を用いると、遅延グリーン関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} G_R(\omega) &= i \int dt e^{i\omega t} \int \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{e^{i\omega' t}}{\omega' - i\epsilon} \int \frac{dz}{2\pi} e^{-izt} \rho(z) \\ &= \int dz \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{\omega' - i\epsilon} \delta(\omega + \omega' - z) \rho(z) \\ &= \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{z - \omega - i\epsilon} \rho(z) \end{aligned} \quad (4.51)$$

この結果に主値積分の公式を用いると

$$G_R(\omega) = P \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{z - \omega} \rho(z) + \frac{i}{2} \rho(\omega) \quad (4.52)$$

が得られる。したがって、 $\rho(z)$ が実関数のときは、

$$\operatorname{Im} G_R(\omega) = \frac{1}{2} \rho(\omega) \quad (4.53)$$

という式が得られる。さらに、上で得られた式に代入することで

$$G_R(\omega) = \int \frac{dz}{\pi} \frac{1}{z - \omega - i\epsilon} \operatorname{Im} G_R(\omega) \quad (4.54)$$

という式が得られる。この結果は**分散式**と呼ばれる関係式を与えており、Kramers-Kronig 関係式と同じように統計力学や場の理論の研究で使われる。

応用. 湯川ポテンシャルの導出: 電荷 q_1 の点電荷を位置 \mathbf{R}_1 に置いたとき、静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ の空間分布はポアソン方程式

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi(\mathbf{x}) = q_1 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) \quad (4.55)$$

により記述される (真空の誘電率 $\epsilon_0 = 1$ とした)。ここで、 $\mathbf{R}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ として、 $\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) =$

$\delta(x - X_1)\delta(y - Y_1)\delta(z - Z_1)$ はデルタ関数の積である．このポアソン方程式の解を $\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1)$ と表そう．いま，静電ポテンシャル $\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1)$ が存在する空間に，さらに電荷 q_2 の点電荷を位置 \mathbf{R}_2 に置くことを考えると，静電エネルギーが

$$V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = q_2 \phi_{\text{sol}}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \quad (4.56)$$

だけ必要になる．このエネルギーは点電荷間に作用するポテンシャルとして理解され，実際に $V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)$ を求めるとクーロンポテンシャルが求まる．この問題を少し変形すると，ノーベル賞に繋がった湯川ポテンシャルの導出を追体験することができる．

そのために，ポアソン方程式の左辺に $m^2(> 0)$ に比例する項を足し，

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 \right] \phi(\mathbf{x}) = q_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) \quad (4.57)$$

という方程式を考えてみる．このとき，以下のステップにしたがって方程式を解くことで，粒子間に作用するポテンシャルエネルギーを求めてみよう．

- (1) 式 (4.57) の両辺に $\int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ を作用させ，両辺をフーリエ変換することを考える．これを部分積分を用いて整理すると， $\phi(\mathbf{x})$ のフーリエ変換は次のように求まる：

$$\tilde{\phi}_{\text{sol}}(\mathbf{k}) := \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) = q_1 \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1}}{m^2 + \mathbf{k}^2} \quad (4.58)$$

- (2) 式 (4.58) のフーリエ逆変換を実行すると，式 (4.57) の解を

$$\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) = q_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{R}_1)}}{m^2 + \mathbf{k}^2} \quad (4.59)$$

と表すことができる．このとき， $\int d^3k$ 積分を，大きさ $k = |\mathbf{k}|$ に関する積分と角度積分に分け，角度積分を実行してから整理すると，次の結果が得られる．

$$\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) = \frac{q_1}{4\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_1|} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k(e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{R}_1|} - e^{-ik|\mathbf{x} - \mathbf{R}_1|})}{m^2 + k^2} \quad (4.60)$$

式 (4.60) で残っている $\int_{-\infty}^{\infty} dk$ 積分は，留数定理を用いて実行することができ結果として $\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1)$ は次式のように与えられることがわかる：

$$\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) = \frac{q_1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x} - \mathbf{R}_1|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_1|} \quad (4.61)$$

- (3) ここまでの結果を用いると，ポアソン方程式の代わりに式 (4.58) を用いると，位置 \mathbf{R}_i ($i = 1, 2$) にそれぞれ電荷 q_i ($i = 1, 2$) の粒子を置いたときの $V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)$ は

$$V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = q_2 \phi_{\text{sol}}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|}}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|} \quad (4.62)$$

と求まり，この結果は湯川ポテンシャルと呼ばれるものになっていることが確認できる．また， $m \rightarrow 0$ としたときには

$$\lim_{m \rightarrow 0} V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|} \quad (4.63)$$

となり，クーロンポテンシャルを再現することも確認できる．

[複素解析] 演習問題 3 (2022 年 12 月 14 日 (水) 出題, 2022 年 12 月 25 日 (日) 17 時提出締め切り)

問 1 以下の関数について, 特異点の位置をすべて求め, その位置を複素平面上に図示せよ. また, それぞれの特異点に対応する留数を求めよ. [訂正] ただし, 定数 ϵ, m, M, T はすべて正の定数で, $m \neq M$ と $\epsilon/m^2 \ll 1, \epsilon/M^2 \ll 1$ を満たすものとし, ϵ に関して 1 次の展開の範囲で結果を求めるのでよい. (ただし, 定数 $\epsilon, m, M, T \in \mathbb{R}$ は, $m \neq M, \epsilon > 0$ を満たす).

$$(1) \frac{1}{1+z^4} \quad (2) \frac{1}{z^2-m^2+i\epsilon} \quad (3) \frac{1}{z^2-m^2+i\epsilon} \frac{1}{z^2-M^2+i\epsilon} \quad (4) \frac{1}{e^{\frac{z}{T}}-1}$$

問 2 前問の結果と留数定理を用いて, 以下の定積分を実行せよ.

$$(1) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \\ (2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{1}{x^2-m^2+i\epsilon} \\ (3) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{1}{x^2-m^2+i\epsilon} \frac{1}{x^2-M^2+i\epsilon}$$

問 3 いま, $\epsilon > 0$ として次の積分で定義される関数を考えよう.

$$\theta(t, \epsilon) \equiv \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t}$$

このとき, $t > 0, t = 0, t < 0$ の 3 つの場合について, それぞれ ω 積分を実行し, $\epsilon \rightarrow 0$ としたときの極限が

$$\theta(t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta(t, \epsilon) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ \frac{1}{2} & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で与えられることを示せ [上式の $\theta(t)$ はヘヴィサイドの階段関数と呼ばれ, 物理の様々な場面で用いられる].

[ヒント] $t > 0$ と $t < 0$ のときは, 適切な閉経路を考えて留数定理を用いる. また, $t = 0$ のときは

$$\theta(t=0, \epsilon) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon}$$

の実部と虚部をそれぞれ求めてみよ.

解答例.

問 1 考えている関数を $f(z)$ と呼ぶ. 特異点の位置は分母がゼロになる点を求めればよく, 留数はローラン展開の -1 次の係数を見ればよい.

(1) $1+z^4=0$ を解くと, $z=e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{-i\pi/4}, e^{-3i\pi/4}$ に 4 つの特異点があることがわかり,どれも 1 位の極になっていることがわかる. 特異点の位置を図示したものが図 16 にある. また, 留数はそれぞれ次のとおり:

$$\operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} f(z) = -\frac{e^{i\pi/4}}{4}, \quad \operatorname{Res}_{z=e^{3i\pi/4}} f(z) = -\frac{e^{3i\pi/4}}{4}, \quad \operatorname{Res}_{z=e^{-i\pi/4}} f(z) = \frac{e^{3i\pi/4}}{4}, \quad \operatorname{Res}_{z=e^{-3i\pi/4}} f(z) = \frac{e^{i\pi/4}}{4}$$

(2) $z^2-m^2+i\epsilon=0$ を解くと, $z=\pm\sqrt{m^2-i\epsilon}$ に 1 位の極を持つことがわかる. $m > 0$ で, $\epsilon/m^2 \ll 1$ を用いると, $z \simeq m - i\epsilon, -m + i\epsilon$ と表される [ϵ は無限小と考え, $\epsilon/(2m)$ を新たに ϵ と呼ぶこと

にした]. 特異点の位置を図示したものは図 16 にある. また, 留数はそれぞれ

$$\operatorname{Res}_{z=m-i\epsilon} f(z) = \frac{1}{2m-i\epsilon}, \quad \operatorname{Res}_{z=-m+i\epsilon} f(z) = -\frac{1}{2m-i\epsilon} \quad (4.64)$$

- (3) 前問と同様にして, $z \simeq m-i\epsilon, -m+i\epsilon, M-i\epsilon, -M+i\epsilon$ に 1 位の極を持つ. また, 留数はそれぞれ以下の通り:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=m-i\epsilon} f(z) &= \frac{1}{2(m^2-M^2)(m-i\epsilon)}, & \operatorname{Res}_{z=-m+i\epsilon} f(z) &= -\frac{1}{2(m^2-M^2)(m-i\epsilon)} \\ \operatorname{Res}_{z=M-i\epsilon} f(z) &= \frac{1}{2(-m^2+M^2)(M-i\epsilon)}, & \operatorname{Res}_{z=-M+i\epsilon} f(z) &= -\frac{1}{2(-m^2+M^2)(M-i\epsilon)} \end{aligned} \quad (4.65)$$

- (4) $e^{z/T} - 1 = 0$ を解くと $z = 2\pi i n T$ ($n \in \mathbb{Z}$) に特異点を持つことがわかる (図 16). また, 指数関数の周期性に注目すると, どの特異点も $z = 0$ の特異点と同じものを与えることがわかる. そこで, $z = 0$ でローラン展開を行うと,

$$f(z) = \frac{1}{e^{z/T} - 1} = \frac{T}{z} - \frac{1}{2} + o(z) \quad (4.66)$$

と求まる. したがって, 主要部は $\frac{T}{z}$ であることから, すべての特異点は 1 位の極で, かつその留数は T であることがわかる.

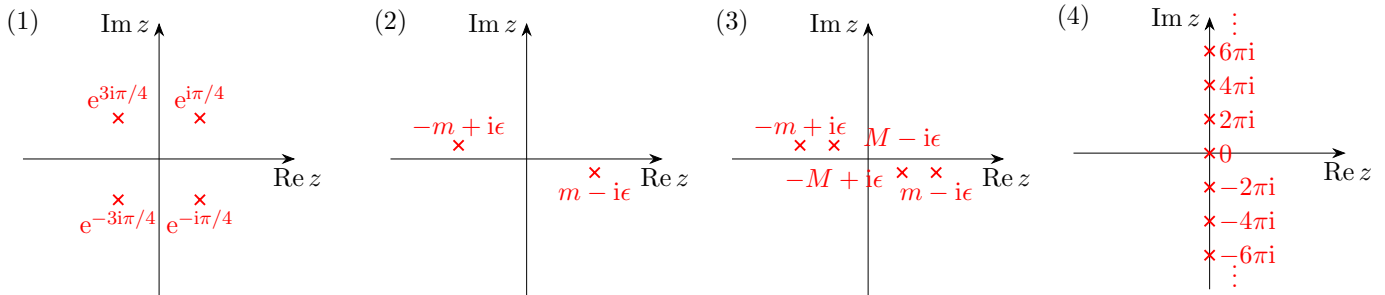


Figure 16. 特異点の位置.

問 2 求めたい積分をそれぞれ I と置き, 前問の結果を参考に留数定理を使って積分を評価すればよい.

- (1) 被積分関数は偶関数なので, 積分範囲を取り替える代わりに $1/2$ 倍して

$$I := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^4} \quad (4.67)$$

とできる. さて, x を複素数 z まで拡張してみると, 被積分関数は問 1 で定めた特異点と留数を持つことがわかる. また, 被積分関数は $1+z^4$ を分母に持つため, 上の例と同様にして上半平面を囲む積分経路を考えると, 上半平面の無限に大きな半円上を走る経路からの積分への寄与はゼロになると評価できる. したがって, 上半平面を囲む積分経路について留数定理を用いれば, 次のように求まる:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} dz f(z) = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} f(z) + \operatorname{Res}_{z=e^{3i\pi/4}} f(z) \right] \\ &= \pi i \left[-\frac{1}{4} e^{i\pi/4} - \frac{1}{4} e^{3i\pi/4} \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.68)$$

$= -\frac{1}{4} i \sqrt{2}$

- (2) 被積分関数を複素数まで拡張したものは問 1 で定めた特異点と留数を持つ。ここで、上半平面を囲むように半径が無限大の積分経路を付け足しても、余分な経路の寄与は半径無限大でゼロになり、積分結果は変わらない。そこで、上半平面を囲む経路について留数定理を適用すると、次のように評価できる：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{dz}{2\pi i} f(z) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Res}_{z=-m+i\epsilon} f(z) = -\frac{1}{2m} \end{aligned} \quad (4.69)$$

- (3) 被積分関数を複素数まで拡張したものは問 1 で定めた特異点と留数を持つ。(2)と同様にしてここで、上半平面を囲む経路について留数定理を適用すると、次のように評価できる：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{dz}{2\pi i} f(z) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\operatorname{Res}_{z=-m+i\epsilon} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-M+i\epsilon} f(z) \right] \\ &= -\frac{1}{2(m^2 - M^2)m} - \frac{1}{2(-m^2 + M^2)M} \\ &= \frac{1}{2mM(M+m)} \end{aligned} \quad (4.70)$$

問 3 いつものように、複素関数まで拡張して $f(z) := \frac{1}{z - i\epsilon} e^{izt}$ を考える。 $\epsilon > 0$ より、この関数は上半平面の $z = i\epsilon$ という位置に 1 位の極を持ち、さらに留数は

$$\operatorname{Res}_{z=i\epsilon} f(z) = \lim_{z \rightarrow i\epsilon} (z - i\epsilon) f(z) = e^{-\epsilon t} \quad (4.71)$$

で与えられる。

さて、無限に大きな半円の経路をつけ足して、いつものように留数定理で評価することを考える。ただし、つけたした無限に大きな半円からの寄与がゼロになるかどうかには注意が必要である。この点に注意するために、 $z = x + iy$ を被積分関数に含まれる指数関数に代入すると $e^{izt} = e^{itx - ty}$ となる。したがって、この部分が指数的に小さくなるのは、 $t > 0$ のときは $y > 0$ 、 $t < 0$ のときは $y < 0$ である。よって、無限に大きな半円からの寄与が落ちるためには、図 17 に示したように、 $t > 0$ のときは上半平面を囲む半円、 $t < 0$ のときは下半平面を囲む半円を考える必要がある。このように t の正負に応じて適切な経路を選ぶことで、無限に大きな半円上の積分が寄与しないようにできる。したがって、留数定理を用いると

$$\begin{aligned} \bullet \quad t > 0 \text{ のとき} : \theta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R^+} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Res}_{z=i\epsilon} f(z) \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon t} = 1 \\ \bullet \quad t < 0 \text{ のとき} : \theta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R^-} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

が得られる。さらに、 $t = 0$ のときは

$$\theta(t=0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{\omega^2 + \epsilon^2} + \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \epsilon^2} \right] \quad (4.73)$$

となるが、最右辺の第 1 項は奇関数を原点について対象に積分しているためゼロとなり、ひとつ前の例でやったように第 2 項の積分は $1/(2\epsilon)$ と評価できる。したがって、 $t = 0$ の値は $\theta(t=0) = \frac{1}{2}$ と求めた。以上の結果をまとめると、積分により定義した関数 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ \frac{1}{2} & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.74)$$

と与えられることがわかった。

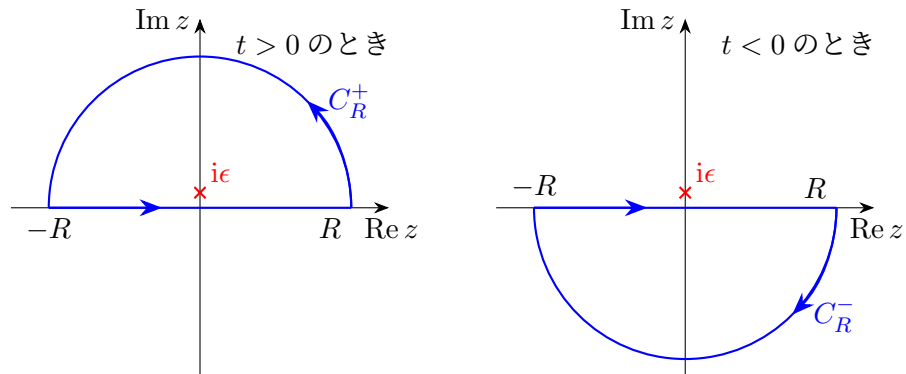


Figure 17. 2つの積分経路.

5 複素関数の級数展開と無限和

◇ ローラン展開

既に議論に現れたように、これまで実関数と複素関数の展開として

$$\begin{aligned} \bullet \text{ テイラー展開: } f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ \bullet \text{ ローラン展開: } f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \cdots + a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \end{aligned} \quad (5.1)$$

というものを考えてきた。ローラン展開はテイラー展開を負のべきまで許す形に拡張したものだが、まずはローラン展開に関する主張をまとめておこう。

定理. ローラン展開: 複素関数 $f(z)$ が $0 < |z| < R$ で正則とする。このとき、 $f(z)$ は $r_1 \leq |z| \leq r_2$ ($0 < r_1 < r_2 < R$) で一様収束する級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (0 < |z| < R) \quad (5.2)$$

に展開でき、係数 a_n は一意に定まり、

$$a_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) z^{-n-1} \quad (5.3)$$

で与えられる。この展開を関数 $f(z)$ の**ローラン展開**と呼ぶ。

証明 (係数の一意性のみ) ここでは係数の一意性のみを示しておく。ローラン展開ができたすると、その両辺に z^{-m-1} ($m \in \mathbb{Z}$) を掛けた $|z| = r$ ($0 < r < R$) の円周上で積分すると、一様収束することから項別に積分が実行でき

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) z^{-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n-m-1} = a_m \quad (5.4)$$

が得られる。つまり、 a_m が $f(z)$ から一意に定まる。

◇ 複素関数の展開：べき級数展開と収束半径

さて、これまで何気なく $\sin z$ や e^z , $\text{Log } z$ などの関数を考えてきた。複素数 z に対するこれらの関数は正則関数の例を議論したときに、たとえば

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y) \quad (5.5)$$

として定義していた。この定義の右辺は実関数 (の和) のみで与えられているので、確かに計算はできるものになっている。しかし、複素数の関数である e^z を実関数で定義するのは、わかりやすくはあるが、概念的には少し微妙なようにも感じられる。そこで、ここでは「複素関数の級数展開」に基づいて、複素関数を定義する方法を考えてみたい。

まず、ローラン展開に入る前に、テイラー展開の範囲で考えてみよう。テイラー展開として考えてきたものは、一般に**形式べき級数**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad (5.6)$$

の「特別なもの」になっていることに注目する。「特別なもの」というのは、「形式的な展開にちゃんとした意味を持たせることができる」ということであり、収束性に関するよい性質が成立することからしたがう帰結である。そこで、「よい収束性」を持つときは、展開式 (5.6) を用いて、複素関数を定義することができそうである。そこでまず、べき級数展開の収束性について考えてみよう。

さて、式 (5.6) に与えられた展開は $z = 0$ では $f(z = 0) = a_0$ となり自明に収束しているが、 $z \neq 0$ としたときにはどこまで収束するかを考えてみる。このとき、以下のいずれかが成立する¹：

定理. べき級数と収束半径：べき級数 (5.6) について、収束半径 R と呼ばれる量が定義され、以下のいずれかが成立する：

- (i) ある有限な $R > 0$ があり、 $|z| < R$ において絶対収束、かつ $|z| > R$ において発散。
- (ii) $R = \infty$ となり、すべての z に対して絶対収束。
- (iii) $R = 0$ となり、0 以外のすべての z に対して発散。

ちなみに、(iii) の収束半径が 0 になる場合の展開のことを、**漸近展開 (asymptotic expansion)** と呼ぶ。

(第 11 回ここまで)

この結果を認めると、次に気になるのは収束半径の求め方である。収束半径の求め方については、次の 2 つの方法が知られている：

命題. 収束半径の求め方：べき級数 (5.6) について、係数 a_n の比の極限が存在するとき、以下のようにそれは収束半径 R に等しい

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (5.8)$$

あるいは、実数列 $\{c_n\}$ の上極限 $c = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n$ をその収束部分列の極限値のうちの最大値として、次式で与えられる：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \quad (5.9)$$

例. 複素変数 z の指数関数 e^z と三角関数 $\cos z$, $\sin z$ を次式で定義する：

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned} \quad (5.10)$$

このとき、係数比の極限を考えると、たとえば指数関数 e^z の収束半径は

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty \quad (5.11)$$

となるので、収束半径 $R = \infty$ である。三角関数も同様である。

例. 対数関数

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots \quad (5.12)$$

¹絶対収束は以下で定義：

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty \text{ を満たすとき、級数 } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \text{ は絶対収束すると定義する。} \quad (5.7)$$

という展開で定義するとその収束半径は

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (5.13)$$

となるので、収束半径 $R = 1$ である。また、

$$\frac{1}{1-z} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad (5.14)$$

についても $R = 1$ と求まる。

例. 次の積分を考える：

$$Z(g^2, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2}x^2 - \frac{g^2}{4}x^4} \quad (g^2 > 0) \quad (5.15)$$

この積分は $g^2 = 0$ のときはガウス積分なので、ただちに実行できる。 $g^2 \neq 0$ のときは少しむずかしいが、第2種修正ベッセル関数 $K_n(z)$ を用いて次式で与えられる：

$$Z(g^2, \beta) = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi g^2}} e^{\frac{\beta^2}{8g^2}} K_{1/4}(\beta^2/8g^2) \quad (5.16)$$

さて、 $g^2 \ll 1$ ならば、上の積分を展開して、項別積分が可能だとすると

$$\begin{aligned} Z(g^2, \beta) &= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2}x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g^2}{4}x^4\right)^n \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \left(-\frac{g^2}{4}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2}x^2} x^{4n} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+2+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} \left(-\frac{1}{\beta^2}\right)^{n+1} (g^2)^{n+1} \end{aligned} \quad (5.17)$$

となる。ここで、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ というものを使ったが、これはだいたい $\Gamma(n+1) = n!$ だと思ってよい。すると、この展開係数は $a_n \sim n!$ くらいでふるまうので、収束半径は

$$R \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0 \quad (5.18)$$

となる。

◇ 解析接続

さて、ローラン展開ですでに扱ったように、複素関数のべき級数展開の展開点はどこにとってもよい。そこで、次の例を考えてみよう：

例. 上の例で見たように、

$$\frac{1}{1-z} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad (5.19)$$

の収束半径は1であった。そこで、収束が保証されている $z = c$ ($|z| < 1$) という新しい点で展開をやり

なおしてみよう。結果は

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-c)-(z-c)} = \frac{1}{1-c} \frac{1}{1-\frac{z-c}{1-c}} \\ &= \frac{1}{1-c} \left[1 + \frac{z-c}{1-c} + \frac{(z-c)^2}{(1-c)^2} + \frac{(z-c)^3}{(1-c)^3} + \cdots \right]\end{aligned}\quad (5.20)$$

となるが、この展開の収束半径は $R = |1-c|$ となる。これは、もとの収束半径よりも大きな領域での収束性を与えており、複素関数 $\frac{1}{1-z}$ をべき級数展開により定義する可能性を広げている。

以上の例をみると、「ある領域で収束べき級数によって定義された何某かの複素関数」をもとの収束半径を超えた領域まで定義を広げられる可能性を示唆している。そこで、「複素関数の定義」を拡張していくことを目指したい。ただし、どんな複素関数でも定義を拡張できるかは微妙だと直ちに想像ができると思う。そこで、収束するべき級数展開を持つ場合はよい性質を持つことを期待し、まずは次の用語を定義する：

定義. 解析関数：領域 D 上で定義された関数 $f(z)$ が、 D に含まれる各点の近傍で収束べき級数に展開できるとき、 $f(z)$ のことを**解析関数**であるとか**解析的**であるという。

複素関数については、正則関数と解析関数は等価なものと考えてよいが、解析関数の方は実関数についても定義できている概念であることに注意する。さて、この準備に基づいて解析関数の定義を拡張することを目指し、次を定義しよう：

定義. 解析接続：複素平面上の領域 D_1 で定義された正則関数 $f_1(z)$ が、 $(D_1$ を含む) より広い領域 D_2 で定義された正則関数 $f_2(z)$ に拡張でき

$$f_1(z) = f_2(z) \quad z \in D_1, \quad D_1 \subset D_2 \quad (5.21)$$

が成立するとする。このとき、 $f_2(z)$ は $f_1(z)$ の D_2 への**解析接続**であるという。

(第 12 回ここまで)

この解析接続はどのような条件のもとで実行でき、どの程度意味を持つかを追求すると、以下の定理が成立することを示すことができる：

定理. 一致の定理：複素関数 $f(z)$ と $g(z)$ が領域 D で正則だとする。このとき、点 $a \in D$ に収束するある点列 $z_n \rightarrow a$ ($z_n \neq a, z_n \in D$) の上で $f(z)$ と $g(z)$ の値が

$$f(z_n) = g(z_n) \quad \text{with } n = 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

と一致しているとする、 D 上のすべての点で $f(z) = g(z)$ が成立する。

この定理は、領域 D での解析接続が存在するとすれば、収束する点列上で一致するという条件だけから一意に決まってしまうことを意味し、非常に強力な結果を与えている。また、たとえば、特別な場合として $f(z) = g(z)$ が、複素平面上の領域 D の中にある点の近傍や(実軸上の区間のような)線分上で成立しているとしよう。このとき、上の定理によると D 全体で $f(z) = g(z)$ が成立することを主張している。

一致の定理の帰結として、たとえば複素関数の定義について、以下の結果が得られる。

例. 講義の前半で、正則関数の例として $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ と指数関数を定義した。一方で、この節で扱ったように指数関数は複素関数の収束べき級数展開として

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \quad (5.23)$$

とも表されたが、収束半径が ∞ であることを考えると、複素関数としてはこのべき級数展開を逆に定義にした方が自然なようにも思われてくる。このように、実関数としての e^x を複素平面上まで拡張することを目的として、別個の方法で定義できしまうと、問題が生じかねない。しかし、一致の定理は実際に

どのようにして e^x 拡張するかとは無関係に、正則関数としての拡張が一意であることを主張している。

例. これまで、指数関数 e^z は、複素関数としても指数法則

$$e^z e^w = e^{z+w} \quad (5.24)$$

を満たすことを当然のように使ってきた。しかし、 $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ と定義するのも、べき展開で定義するにしても、これは証明をしておかねばならない事実である。しかし、一致の定理を用いればこれは直ちに示すことができる。実際、指数法則の両辺は $w \in \mathbb{R}$ を固定すると、どちらも複素平面上で定義された正則関数で、 z を実軸上に制限すると成立することが知られている。したがって、一致の定理により一般に $z \in \mathbb{C}$ でも成立することがわかる。さらに、 $z \in \mathbb{C}$ を固定して、 w の関数として見て同様の議論を繰り返すと、結局は一般の複素数 z, w について、指数法則が成立することが示される。

以上のようにして一致の定理を用いていくことで、一般に以下の結果を示すことができる：

定理. 関数関係不変の原理： 領域 D 上で定義された正則関数 $f(z), g(z), \dots$ の間に

$$F[f, g, \dots] = 0 \quad (5.25)$$

という関係式が、ある点の近傍や (実軸の区間などの) 線分上で成立していたとする。このとき、同じ関係式が領域 D 全体で成立する。

したがって、実関数を正則関数として複素関数上に解析接続できたとき、実関数のときに成立していた関係式はすべて複素関数としても成立することがわかる。

問 1 以下の関数について, 指定された z 近傍で 0 次のローラン展開を行い, 主要部と留数を求めよ. ただし, m, T はそれぞれ正の定数である.

$$(1) \frac{1}{1+z^2} \quad (z=i) \quad (2) \frac{1}{(z^2-m^2)^2} \quad (z=m) \quad (3) \frac{1}{e^{\frac{z}{T}}-1} \quad (z=2\pi iT)$$

問 2 以下の級数について, 収束半径を求めよ.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)z^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!(n+1)!} z^n \quad (3) \log(1+z) \text{ の } z=0 \text{ での級数展開}$$

問 3 三角関数 $\tan z$ の逆関数 $\arctan z$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 変数変換を用いて不定積分 $\int dz \frac{1}{1+z^2}$ を計算することで, 以下の公式を示せ.

$$\frac{d}{dz}(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2}$$

(2) 前問で求めた公式の右辺を $z=0$ まわりで展開した結果を求めよ.

(3) 前問までの結果を利用して, $\arctan z$ の $z=0$ まわりの級数展開を求めよ. また, その結果に基づいて $\arctan z$ の $z=0$ まわりの級数展開について, その収束半径を求めよ.

解答例.

問 1 因数分解・部分分数分解などを用いて直接展開していくと, 以下の通り:

(1) 分母を因数分解してから展開をすると, ローラン展開の結果と主要部は

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{2i} \frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} \left[1 + \frac{i}{2}(z-i) + \cdots \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2i} \frac{1}{z-i}}_{\text{主要部}} + \frac{1}{4} + \cdots \quad \cancel{\frac{i}{2} + \cdots} \end{aligned}$$

と求まる. したがって, $z=i$ における留数は $\frac{1}{2i}$ とわかる.

(2) 分母が $(z^2-m^2)^2 = (z-m)^2(z+m)^2$ と因数分解できることを用いると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-m^2)^2} &= \frac{1}{(z-m)^2} \cdot \frac{1}{(z+m)^2} = \frac{1}{(z-m)^2} \cdot \frac{1}{4m^2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z-m}{2m})^2} \\ &= \frac{1}{(z-m)^2} \frac{1}{4m^2} \left[1 - \frac{z-m}{2m} + \frac{(z-m)^2}{(2m)^2} + \cdots \right]^2 \\ &= \frac{1}{(z-m)^2} \frac{1}{4m^2} \left[1 - \frac{1}{m}(z-m) + \frac{3}{4m^2}(z-m)^2 + \cdots \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{4m^2} \frac{1}{(z-m)^2} - \frac{1}{4m^3} \frac{1}{z-m}}_{\text{主要部}} + \frac{3}{16m^4} + \cdots \end{aligned}$$

よって, $z=m$ において 2 位の極を持ち, 留数は $-\frac{1}{4m^3}$ と求まる.

(3) $z = 2\pi iT$ の近傍で

$$e^{\frac{z}{T}} = e^{\frac{z-2\pi iT}{T}} = 1 + \frac{z-2\pi iT}{T} + \frac{1}{2} \frac{(z-2\pi iT)^2}{T^2} + \dots \quad (5.26)$$

と展開できることを用いて展開すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{\frac{z}{T}} - 1} &= \frac{1}{\frac{z-2\pi iT}{T} + \frac{1}{2} \frac{(z-2\pi iT)^2}{T^2} + \dots} = \frac{T}{z-2\pi i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{z-2\pi iT}{T} + \dots} \\ &= \frac{T}{z-2\pi i} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{z-2\pi iT}{T} + \dots \right] \\ &= \underbrace{\frac{T}{z-2\pi i}}_{\text{主要部}} - \frac{1}{2} + \dots \end{aligned} \quad (5.27)$$

と求まる. よって, $z = 2\pi iT$ で 1 位の極を持ち, その留数 主要部は T と求まる.

問 2 展開係数が a_n のべき級数の収束半径は $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ として求められるので, 以下のように計算できる:

(1) $a_n = 1 + n$ なので, 収束半径は $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{1+n+1} = 1$ と求まる.

(2) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!(n+1)!}$ なので, 収束半径は以下のように求まる:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+3}(n+1)!(n+2)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^2(n+1)(n+2) = \infty \quad (5.28)$$

(3) $\log(1+z)$ について, $z=0$ まわりでの展開を求めると

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (5.29)$$

と求まる. よって, 展開係数が $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ となることから, 収束半径は $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ と求まる.

問 3 (1) $z = \tan \theta$ と変数変換すると,

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (5.30)$$

が成立するので,

$$\int dz \frac{1}{1+z^2} = \int d\theta \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta = \int d\theta = \theta + \text{const.} = \arctan z + \text{const.} \quad (5.31)$$

この式は, $\arctan z$ が $\frac{1}{1+z^2}$ の原始関数になっていることを意味しているが, これを言い換えると示したい式に他ならないことがわかる.

(2) テイラー展開を行うと以下が得られる:

$$\frac{d}{dz}(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (5.32)$$

(3) 前問の結果について, 両辺を $z=0$ から z まで積分した結果から, $\arctan z$ の $z=0$ 近傍での展開が以下のように求まる.

$$\arctan z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \quad (5.33)$$

よって, 展開係数の比の極限から, 収束半径は $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$ とわかる.

6 複素関数論の応用

これまでに学んだ複素関数論の知識を用いて、物理を学習する際に現れる関数や計算法について、いくつか紹介する。

◇ ガンマ関数とベータ関数

数学でも物理でもよく出てくる量として**階乗 (factorial)**

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{with } n \in \mathbb{N} \quad (6.1)$$

がある (\mathbb{N} は自然数全体を表す集合). これは自然数 $n \in \mathbb{N}$ のみに対して値が定義された関数とみることができるが, これを複素変数 $z \in \mathbb{C}$ に拡張した複素関数 $\Gamma(z)$ を考えたい. このような関数 $\Gamma(z)$ を**ガンマ関数**と呼ぶ (Γ は「ガンマ」と読む文字のギリシャ文字の大文字).

さて, 階乗を規定する最も大事な性質は

$$(i) \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!, \quad (ii) \quad 1! = 1 \quad (6.2)$$

の2つであるので, ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は, これらに対応して

$$(i) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\operatorname{Re} z > 0), \quad (ii) \quad \Gamma(1) = 1 \quad (6.3)$$

の2つの条件を満たしてほしい.

唐突かつ天下りではあるが, 実はこのような性質を満たすガンマ関数を, $\operatorname{Re} z > 0$ の領域では次の積分により構成できる:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad \text{with } z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (6.4)$$

実際, 上に与えた2つの性質は, 部分積分などを用いることで

$$\begin{aligned} (i) \quad \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^z = \underbrace{\left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty}}_{=0 \text{ for } \operatorname{Re} z > 0} - \int_0^\infty dt \left[-e^{-t} z t^{z-1} \right] = z \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} = z\Gamma(z) \\ (ii) \quad \Gamma(z=1) &= \int_0^\infty dt e^{-t} = \left[-e^{-t} \right]_{t=0}^{t=\infty} = 1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

と示すことができる. この2つの性質から $z = n \in \mathbb{N}$ となるときには, 確かに $\Gamma(n) = n!$ を満たし, 階乗と一致することがわかる.

上の議論でガンマ関数は $\operatorname{Re} z > 0$ において定義されたが, 一般の z に関しては上の結果に解析接続を組み合わせることで定義できる. そのために, 上で求めた関係式をくりかえし使うことで

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (6.6)$$

と表せることに注意する. いま, n は任意に大きくとれるので, この式の右辺の $\Gamma(z+n+1)$ は常に正に取れる. 正の $\operatorname{Re} z$ のときのガンマ関数は正則であることを用いると, 右辺を用いて $\Gamma(z)$ を定義すると, $\operatorname{Re} z < 0$ の領域におけるガンマ関数の解析接続が定義できたことになる.

さて, ガンマ関数の大事な性質をいくつかまとめておこう.

- **特異点と留数**: 上の定義の仕方から, ガンマ関数は引数が $z = 0, -1, -2, \dots$ という負の整数となる点で1位の極を持つことがわかる. また, 特異点 $z = -n$ ($n \in \mathbb{N}$) における, 留数は以下のように求まる:

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (6.7)$$

- $\Gamma(1/2)$ の値: ガンマ関数の定義式 (6.4) において, $z > 0$ のときに $t = x^{1/z}$ と変数変換すると, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{z} x^{\frac{1-z}{z}}$ などを用いて

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx \frac{1}{z} x^{\frac{1-z}{z}} e^{-x^{1/z}} x^{\frac{z-1}{z}} = \frac{1}{z} \int_0^\infty dx e^{-x^{1/z}} \quad (6.8)$$

が得られる. したがって, $z = 1/2$ にしたときは, ガウス積分の公式

$$\int_0^\infty dx e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (6.9)$$

を用いて計算することができ, 以下の結果が得られる:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (6.10)$$

これをガンマ関数の性質 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ と合わせると, $\Gamma(n/2)$ ($n \in \mathbb{N}$) はすべて求めることができる.

応用. n 次元の超球の表面積・体積: 半径 R の球について, 2 次元球 (つまり円) の面積は πR^2 , 3 次元球の体積は $\frac{4\pi}{3} R^3$ であることはよく知られている. では, より高次元空間を考え, 一般の n 次元球 (これを**超球**と呼ぶ) の体積がどうなるかを考えてみよう.

d 次元空間の直交座標系における座標を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表すと, 半径 R の超球の内部は

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2 \quad (6.11)$$

で指定される. したがって, ヘヴィサイドのステップ関数 $\theta(z)$ を用いて, 超球の体積 V_n は

$$V_n(R) := \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \theta(R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)) \quad (6.12)$$

と定義される.

いま, 超球の体積を考える代わりに, 式 (6.11) の等号で定義される超球の球面の面積 $S_{n-1}(R)$ を考えてみよう. まず, $S_{n-1}(R)$ は $n-1$ 次元の図形の面積なので, 次元解析から R^{n-1} に比例することがわかる. そこで, $S_{n-1}(R) = s_{n-1} R^{n-1}$ (s_{n-1} = 定数) と表すことができる. この上で, 超球の体積を超球をたまねぎの皮のように思って, これをむいて体積を求めると考えると, $S_{n-1}(r)$ を r について積分することで,

$$V_n(R) = \int_0^R dr S_{n-1}(r) = s_{n-1} \int_0^R dr r^{n-1} = \frac{1}{n} s_{n-1} R^n \quad (6.13)$$

と超球の体積 $V_n(R)$ を求めることができる. よって, あとは s_{n-1} さえ求めればよい.

さて, $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2}$ のみの関数 $f(|\mathbf{x}|)$ を n 次元空間で積分することを考えてみる. すると, 被積分関数は \mathbf{x} の長さにしか依存していないため, $|\mathbf{x}| = r$ という半径 r の球面上ではすべて同じ値を与える. このことを考慮すると, 各 r での値に球面の表面積をかけて積分したものが求めたいものを与えるため,

$$\int dx_1 dx_2 \dots dx_n f(|\mathbf{x}|) = \int_0^\infty dr S_{n-1}(r) f(r) = s_{n-1} \int_0^\infty dr r^{n-1} f(r) \quad (6.14)$$

が成立することがわかる. よって, この両辺が評価できるような特別な関数 $f(|\mathbf{x}|)$ があると, s_{n-1} を求めることができ, $S_{n-1}(R)$, ひいては $V_n(R)$ を求めることができる. このような関数として, ちょっと考えると $f(|\mathbf{x}|) = e^{-|\mathbf{x}|^2}$ があることがわかる. 実際, このときには左辺はガウス積分の n 乗として計算でき

$$(\text{左辺}) = \int dx_1 e^{-x_1^2} \int dx_2 e^{-x_2^2} \dots \int dx_n e^{-x_n^2} = \pi^{n/2} \quad (6.15)$$

となる。一方、右辺は $t = r^2$ と変数変換して、ガンマ関数の定義式 (6.4) を思い出すと

$$(\text{右辺}) = s_{n-1} \int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{n-1} = s_{n-1} \int_0^\infty dt \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2} s_{n-1} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2} s_{n-1} \Gamma(n/2) \quad (6.16)$$

と表される。よって、片々を比較することで

$$s_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (6.17)$$

が得られる。よって、超球面 $S_{n-1}(R)$ の面積と超球の体積 $V_n(R)$ はそれぞれ以下で与えられることがわかった：

$$S_{n-1}(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} R^{n-1}, \quad V_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} R^n \quad (6.18)$$

$n = 2, 3$ の場合について、具体的に求めてみると $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ などを用いて

$$\begin{aligned} \bullet \quad n = 2 \text{ のとき: } & S_1(R) = 2\pi R, \quad V_2(R) = \pi R^2 \\ \bullet \quad n = 3 \text{ のとき: } & S_2(R) = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} R^2 = 4\pi R^2, \quad V_3(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned} \quad (6.19)$$

が得られる。これは確かに円の円周・面積と球の表面積・体積を再現していることが確認できる。このような超球の体積は、統計物理学などで必要になる。

(第 13 回ここまで)

ベータ関数：ちなみに、ガンマ関数と関連して現れる関数として**ベータ関数**と呼ばれる次式で定義される 2 変数複素関数がある^a：

$$B(z, w) := \int_0^\infty dx \frac{x^{w-1}}{(1+x)^{z+w}} = \int_0^1 dt t^{z-1} (1-t)^{w-1} \quad \text{with} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} w > 0 \quad (6.20)$$

2 つ目の積分による表式は $x = (1-t)/t$ と置くと $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ であることを用いれば

$$B(z, w) = \int_1^0 dt \left(-\frac{1}{t^2}\right) \left(\frac{1-t}{t}\right)^{w-1} t^{z+w} = \int_0^1 dt t^{z-1} (1-t)^{w-1} \quad (6.21)$$

と求めることができる。2 つ目の定義式から明らかなように、ベータ関数は $B(z, w) = B(w, z)$ という引数の入れ替えに関する対称性を持つ。ベータ関数はガンマ関数を用いて、次のように表される (証明は略)：

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (6.22)$$

また、この関係式で $z = 1-p$, $w = p$, $0 < \operatorname{Re} p < 1$ と置くと、次の式が得られる：

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad (6.23)$$

^a物理 (とくに場の理論) においても、「スケールを変えたときの見え方の変化」を記述する量としてベータ関数と同じ名前がついたものがあるが、ここで出てきたベータ関数とはまったく関係ないことを注意しておく。

◇ 鞍点法 (最急降下法) と漸近展開

べき級数展開と収束半径の議論をした際に、収束半径が 0 となる**漸近展開**と呼ばれるものがあることを説明した。ここでは、漸近展開に関係して**鞍点法 (最急降下法)** と呼ばれる手法の説明を行う。

例. スターリングの公式：さて、まずはガンマ関数を例にして、 $\Gamma(n+1) = n!$ は n が大きいときにどうふるまうか? という問題について考えることで、**スターリングの公式**の導出を行ってみよう。いま、ガンマ関数の積分表示に対して、 $x > 0$ のとき、 $t = xs$ と変数変換して書き直していくと

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^x = \int_0^\infty x ds e^{-xs} (xs)^x = x^{x+1} \int_0^\infty ds e^{x(\log s - s)} \quad (6.24)$$

が得られる。ただし、最右辺では $s^x = e^{\log s^x} = e^{x \log s}$ となることを用いた。

いま、被積分関数の指数に現れた関数 $f(s) = \log s - s$ は $s = 1$ で最大値を取り、 $s = 1$ から離れると単調に減少していく関数である。いま調べたいのは $z \gg 1$ でのふるまいだったので、積分に最も寄与するのは $s = 1$ のまわりの積分だろうとわかる。この点に注目して、次の近似を施してみよう：

- **指数部の展開：**指数に現れた関数 $f(s)$ を最大値を取る $s = 1$ まわりに 2 次まで展開する：

$$\log s - s \simeq -1 - \frac{1}{2}(s-1)^2 \quad (6.25)$$

- **積分範囲の拡張：**積分範囲の下端を 0 から $-\infty$ に置き直す。

かなり雑な近似のように見えるが、この 2 つの近似を施すと、解析的に評価することができ

$$\Gamma(x+1) \simeq x^{x+1} \int_{-\infty}^\infty ds e^{-x - \frac{x}{2}(s-1)^2} = x^{x+1} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \quad (6.26)$$

よって、 $x = n \gg 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) とすると、**スターリングの公式**と呼ばれる階乗に関する次の近似公式 kousiki が得られた：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \Leftrightarrow \log n! = n \log n - n + O(\log n) \quad (6.27)$$

ガンマ関数とスターリングの公式の結果を比較したものを図 18 にプロットした。かなり雑な近似のように見えたが、 $x > 1$ あたりから非常によく結果を再現していることが確認できる。この公式は統計力学でエントロピーを計算するときなどに使われる。

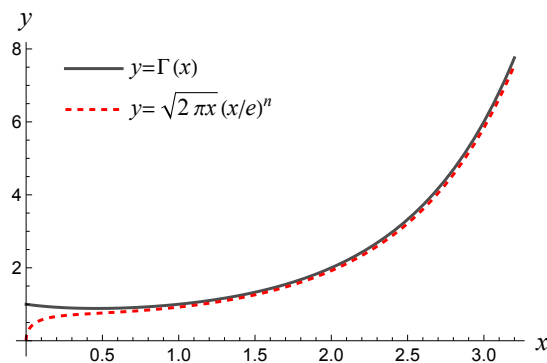


Figure 18. ガンマ関数の厳密な値とスターリングの公式の比較。

さて、スターリングの公式の導出の際に用いた近似を一般化すると C を複素平面上の経路として

$$Z(N) = \int_C dz e^{Nf(z)} \quad \text{with } N \gg 1 \quad (6.28)$$

という形の積分を評価する**鞍点法 (最急降下法)**と呼ばれる近似法が与えられる。これを説明しておこう。まず、スターリングの公式のときと同じく、指数の肩に $N \gg 1$ という大きな数が存在するので、 $f(z)$ が極大値を持つ点まわりで積分に大きな寄与が出ると考えられる。そこで、 $f(z)$ が極値を持つ点 $z = z_*$ のことを**鞍点**と呼ぼう。鞍点の条件は

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_*} = 0 \quad (6.29)$$

で与えられる。

さて、スターリングの公式のときは鞍点が積分経路上に現れていたの、簡単に近似法をあたえることができた。しかし、一般には次の点で問題が複雑になりうる：

- 一般に $f(z)$ は虚部も持つため、被積分関数が振動関数になって積分がむずかしい。
- 計算したい積分経路 C 上に $z = z_*$ があるとは限らない。

1 つ目の問題はとくに積分を数値的に直接実行しようとする際の障害になる。²

以上の問題を解決した近似方法を与えるためには、もとの積分経路 C が与えられたときに、

$$\text{積分経路 } C \text{ を、鞍点 } z = z_* \text{ を通る虚部が一定の経路 } C_* \text{ に変形する} \quad (6.31)$$

という方法が与えられればよいとわかる。実際、このような経路の変形が実行できたとすると、 $z = z_*$ で $f(z)$ が極大値を取ることから

$$f(z) \simeq f(z_*) - \frac{a}{2}(z - z_*)^2 \quad \text{with} \quad a := -f''(z_*) > 0 \quad (6.32)$$

と展開し、積分範囲を適切に拡張してガウス積分として近似することで

$$Z(N) = \int_{C_*} dz e^{Nf(z)} \simeq e^{Nf(z_*)} \int_{C_*} dz e^{-\frac{Na}{2}(z-z_*)^2} \simeq e^{Nf(z_*)} \sqrt{\frac{2\pi}{Na}} \quad (6.33)$$

つまり、以下のような近似結果が得られる：

$$Z(N) \sim e^{Nf(z_*)} \sqrt{\frac{2\pi}{Na}} = \exp \left(Nf(z_*) + \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{Na} \right) \quad \text{with} \quad a := -f''(z_*) \quad (6.34)$$

$z = z_*$ が鞍点と呼ばれる点になっていること、また積分経路を変形した後の C_* が被積分関数が最も急激に減少するものに対応することから、この近似法のことを**鞍点法**とか**最急降下法**と呼ぶ。

参考. 一般化された鞍点法の進展：以上の説明からわかるように、鞍点法では (6.31) に与えたことが実行できるかが一番の問題となる。また、上では1つの鞍点だけが積分に寄与する場合を考えたが、一般には複数の鞍点が寄与する場合を考える必要がある。この点に関して、**レフシェッツ・シンブル法 (Lefschetz thimble method)** と呼ばれる手法を用いると、(1次元積分のような簡単な場合には) 具体的な計算を実行できるレベルまで理論的定式化が整備されている。さらに関連して、**リサーチエンス理論**と呼ばれる漸近展開の理論との関係が調べられ、2010年代の半ば以降に、一般化された鞍点法が物理の問題に適用されるという進展があった。最近の進展については、[このあたりのレビュー論文](#)にまとまっているよ

²経路積分形式の量子論においては、解析力学で習う作用汎関数 $S[q]$ を重みにして

$$Z = \int \prod_i dq(t_i) e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad (6.30)$$

という多次元積分を実行することで物理量が計算される。したがって、積分 (6.28) の多次元版を考えることになり、数値積分を困難にするこの問題がより厄介な形で現れる。この問題は**符号問題 (sign problem)**と呼ばれ、素粒子物理学・物性物理学のどちらにおいても現れる、計算機物理学のとても重要な未解決問題の1つとして現在も研究が続けられている。興味がある人は最近出た[数理学 2023 年 01 月号](#)を見てみたり、江尻さんに質問してみてください。

◇ 正則化：発散する積分を有限にする方法

最後の応用として、場の量子論の計算で頻繁に現れる**正則化**という「発散する積分や無限和を有限にする計算法」について紹介する。

場の量子論の摂動計算 (= 小さな数を用いた展開) に基づいて、物理量の計算をすると、容易に無限大が出てくる。では、どのような計算をして無限大が出てくるかというと、3 次元空間中の相対論的な場の量子論を考えると、基本的には以下の積分

$$I_{p,q}(M^2) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} \frac{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^p}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - M^2 + i\epsilon)^q} \quad (6.35)$$

を実行することから出てくる。ここで、 $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$ として、 $k^2 = -\omega^2 + \mathbf{k}^2$ という記法を用いた。

さて、被積分関数に現れる ω^2 と \mathbf{k}^2 の符号が揃っていないため、このままでは少し計算がやりにくい。そこで、 \mathbf{k} を固定して被積分関数を ω の関数としてみると、被積分関数は $\omega = \pm\sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2 - i\epsilon}$ に極を持つことに注目しよう。すると、式 (4.35) の導出とまったく同じ変形を行うことができ、上の積分は

$$I_{p,q}(M^2) = i(-1)^{p-q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2)^p}{(k^2 + M^2)^q} \quad (6.36)$$

と表すことができる。ここで、 $d^4k := dk^0 d^3k$ 、 $k^2 := (k^0)^2 + \mathbf{k}^2$ という表記を導入した。この積分の書き換えを**ウィック回転**と呼ぶ。書き換えた後の被積分関数は k^2 のみ関数になっているので、式 (6.14) と式 (6.18) で $n = 4$ としたときの結果を用いると

$$I_{p,q}(M^2) = i(-1)^{p-q} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4 \Gamma(2)} \int_0^\infty dk \frac{k^{2p+3}}{(k^2 + M^2)^q} = \frac{i(-1)^{p-q}}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^{2p+3}}{(k^2 + M^2)^q} \quad (6.37)$$

と 1 次元積分まで簡単化することができる。では、この簡単な場合にこの積分が発散することを確認しておこう。

例. いま、簡単な場合として $(p, q) = (0, 1)$ の場合を考えてみよう。このとき、上の結果を用いると

$$I_{p,q}(M^2) = \frac{i(-1)}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{k^2 + M^2} \quad (6.38)$$

いま、 k が十分大きく $k \gg M$ を満たす領域で被積分関数は $\frac{k^3}{k^2 + M^2} \sim k$ とふるまう。したがって、十分大きな k の領域で発散が出ることが期待される。あるいは、いまの場合は簡単に積分が実行できるので、積分の上端を $\Lambda \rightarrow \infty$ と表すと

$$\begin{aligned} I_{p,q}(M^2) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[k^2 - M^2 \log(k^2 + M^2) \right]_{k=0}^{k=\Lambda} \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\Lambda^2 + M^2 \log \frac{M^2}{M^2 + \Lambda^2} \right] \\ &= \infty \end{aligned} \quad (6.39)$$

というように、 Λ^2 に比例する発散が現れることがわかる。

さて、物理量に対応する積分がこのように発散してしまうのは困りものである。そこで、場の量子論を研究していた物理学者たちは**正則化 (regularization)** と呼ばれる「無限大を有限にしておく」といういろいろな計算法を考えた。代表的な手法は大雑把に (1) 積分範囲の上端をいじる、(2) 被積分関数をいじる、(3) 積

分の次元をいじる，という3つである．それぞれの方法の名前と，基本的な考え方を列挙すると以下の通りである：

(1) カットオフ正則化 (cutoff regularization)：

積分の上端を $\Lambda \rightarrow \infty$ を取ると発散するので， Λ は大きい有限な量としておこう．

(2) パウリ・ヴィラス正則化 (Pauli-Villars regularization)：

この被積分関数のままだと発散するので，発散を打ち消すように被積分関数を変形しよう．

(3) 次元正則化 (dimensional regularization)：

時空の次元を4にすると発散しちゃうので，時空の次元を4からずらして計算しよう．

ここでは，一見もっともエキゾチックに見える (3) の次元正則化を用いて $I_{p,q}(M^2)$ を計算する方法を与えよう．

次元正則化はもとの4次元積分を n 次元積分に置き換えるという計算法である．この方法で実際に発散が抑えられることを見てみよう．そのためには，出発点となる式 (6.36) で単純に $d^4k \rightarrow d^n k$ に置き換えればよさそうに思うが， k というのは運動量の次元を持つ量なので，この置き換えをするだけでは計算する物理量の次元もずれてしまう．そこで，次元がずれないように運動量の次元を持つ未知の量 μ という量を導入して

$$I_{p,q}^n(M^2) = i(-1)^{p-q} \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^p}{(k^2 + M^2)^q} \quad (6.40)$$

と置き換える．この場合も被積分関数は k^2 の関数のままなので， n 次元球面の公式を使って変形することができ，以下が得られる：

$$\begin{aligned} I_{p,q}^n(M^2) &= i(-1)^{p-q} \frac{2\pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})} \mu^{4-n} \int_0^\infty dk \frac{k^{2p+n-1}}{(k^2 + M^2)^q} \\ &= i(-1)^{p-q} \frac{2\pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})} \mu^{4-n} \frac{M^{2p+n-1+1}}{M^{2q}} \int_0^\infty dx \frac{1}{2x^{1/2}} \frac{x^{p+\frac{n-1}{2}}}{(1+x)^q} \\ &= i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} \mu^{4-n} M^{2p+n-2q} \int_0^\infty dx \frac{x^{p+\frac{n}{2}-1}}{(1+x)^q} \end{aligned} \quad (6.41)$$

ここで，2行目に進む際には $k^2 = M^2 x$ という変数変換を行った．さて，最終行の積分を眺めてみると，これはベータ関数の定義 (6.20) に他ならないことに気づく．そこで，ベータ関数をガンマ関数で表す式 (6.22) も用いると，

$$\begin{aligned} I_{p,q}^n(M^2) &= i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} \mu^{4-n} M^{2p+n-2q} B(p+n/2, q-p-n/2) \\ &= i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \mu^{4-n} M^{2p+n-2q} \frac{\Gamma(p+\frac{n}{2})\Gamma(q-p-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(q)} \end{aligned} \quad (6.42)$$

これが次元正則化において頻繁に使われる公式であるので，まとめておこう

$$I_{p,q}^n(M^2) = i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \mu^{4-n} M^{2p+n-2q} \frac{\Gamma(p+\frac{n}{2})\Gamma(q-p-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(q)} \quad (6.43)$$

もともとの4次元積分を考える極限は， $n \rightarrow 4$ として得られるが，この極限でガンマ関数の極を拾う形で発散が再現されることがわかる．この公式は場の量子論の計算でよく使われる公式であるが，筆者も [去年書いた論文](#) で使うことになった．

◇ ゼータ関数

授業の冒頭で書き下した

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12} \quad (6.44)$$

という「まるで意味のわからない公式」について考えてみよう．これを理解するためにまず，リーマンのゼータ関数 (以下では，ゼータ関数と略す) $\zeta(z)$ を次式で定義する：

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad \text{with} \quad \operatorname{Re} z > 1 \quad (6.45)$$

ゼータ関数に現れる無限和は， $\operatorname{Re} z \geq R$ を満たす $R > 1$ について

$$|n^{-z}| = n^{-\operatorname{Re} z} \leq n^{-R} \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-R} < \infty \quad \text{with} \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.46)$$

が成立することから， $\operatorname{Re} z > 1$ で絶対収束する．これより，上の式で定義されたゼータ関数は $\operatorname{Re} z > 1$ で正則関数を与えることがわかる．そうすると仮にゼータ関数について $z = -1$ まで含むように解析接続が定義できたとすると，おかしな公式の左辺の無限和は

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots \quad (6.47)$$

と $\zeta(-1)$ として理解することができそうである．

ゼータ関数の解析接続と $\zeta(-1)$ を調べる前に，すでに確実に定義された $z = 2, 4, \dots$ における値

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\ \zeta(4) &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \end{aligned} \quad (6.48)$$

を考えてみよう．これらの無限和に対応する量は，物理の計算においてよく出てくる．具体的には，量子統計力学などでは

$$h(2m) := \int_0^{\infty} dt \frac{t^{2m-1}}{e^t - 1} \quad \text{with} \quad m \in \mathbb{N} \quad (6.49)$$

という積分がよく現れる.³ この積分に含まれる被積分関数について， $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ というテイラー展開を施し，積分と無限和の順序の交換・変数変換などを用いて変形していくと，

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^z} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \\ &= \zeta(z) \Gamma(z) \end{aligned} \quad (6.50)$$

と表せることがわかる．したがって， $\operatorname{Re} z > 0$ の領域でゼータ関数は

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} h(z) \quad \text{with} \quad h(z) := \int_0^{\infty} dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (6.51)$$

という積分形で表せることがわかった．したがって， $m \in \mathbb{N}$ について $\zeta(2m)$ の値がわかれば，物理の計算に必要な積分 $h(2m)$ が求まる．

そこで，被積分関数に現れた $\frac{1}{e^z - 1}$ という関数に注目してみる．この関数はこれまでに演習問題で何回か扱ってきたが，この関数の展開係数から定義される量をここで導入しておこう．

³たとえば， $h(4)$ は電磁場のもつエネルギーと温度の関係を表す関係式 (シュテファン=ボルツマンの法則) を示す際に現れる．

ベルヌーイ数：関数 $\frac{1}{e^z - 1}$ はこれまでに見たように、 $z = 0$ に 1 位の極を持つ。そこで、この 1 位の極を打ち消すために、 z 倍した関数を考える。この関数を $z = 0$ まわりで展開したものを

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (6.52)$$

と表し、展開係数に現れた B_n を**ベルヌーイ数**と呼ぶ。具体的にテイラー展開を行って初めの数項を求めると

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \dots \quad (6.53)$$

と求まる。ここで、 $B_3 = B_5 = 0$ となっているが、展開する前の式に B_1 からくる項を足すと

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z e^z + 1}{2 e^z - 1} = \frac{z e^{z/2} + e^{-z/2}}{2 e^{z/2} - e^{-z/2}} \quad (6.54)$$

と表され、右辺が z の偶関数になっていることから、 $n \geq 1$ の整数について $B_{2n+1} = 0$ が成立することがわかる。したがって、

$$\frac{z e^{z/2} + e^{-z/2}}{2 e^{z/2} - e^{-z/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (6.55)$$

という式が得られる。この式で $z \rightarrow 2\pi iz$ と代入してやると、次の式が得られる：

$$\pi iz \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \pi z \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (-1)^n (2\pi)^{2n} z^{2n} \quad (6.56)$$

では、以上の準備に基づいて $\zeta(2m)$ を表す式を導出しよう。そのために、上の式 (6.56) に現れた $\cot \pi z := \cos \pi z / \sin \pi z$ という関数を考えてみる。この関数は分母に $\sin \pi z$ がいることからわかるように、 $z = n \in \mathbb{Z}$ に 1 位の極を持ち、その留数は $1/\pi$ である。この結果に着目すると、 $\cot \pi z$ を特異点の寄与を足し上げたものとして、以下のように表せることを示すことができる：

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (6.57)$$

したがって、この式の両辺を z 倍したものと式 (6.56) を比較することで

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} (-1)^m (2\pi)^{2m} z^{2m} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z/n)^2}{1 - (z/n)^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2(m+1)} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} z^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \\ &= 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m) z^{2m} \end{aligned} \quad (6.58)$$

が得られる。よって、両辺の z^{2m} の係数を比較することで

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} B_{2m} \quad \text{with } m = 1, 2, \dots \quad (6.59)$$

という公式が得られる。よって、 $m = 1, 2$ の場合について、ベルヌーイ数に関して求めてある結果 (6) を用

いると以下の結果が求まる：

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \frac{(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} B_2 = \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(4) &= -\frac{(2\pi)^4}{2 \cdot 4!} B_4 = \frac{\pi^4}{90}\end{aligned}\tag{6.60}$$

では、次に $\operatorname{Re} z \leq 1$ におけるゼータ関数の解析接続を与えて、 $\zeta(-1)$ を求めに行こう．ゼータ関数の解析接続はいろいろな方法で与えることができるが、ここではリーマン自身によって与えられた積分表示による解析接続を与える．そのためにまず、図 19 に与えたハンケルの積分経路に沿った次の積分を考えてみよう：

$$G(s) := \int_C dz e^{-z} (-z)^{s-1}, \quad H(s) := \int_C dz \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\tag{6.61}$$

いま、 $H(s)$ の被積分関数について、先ほどと同じく $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ というテイラー展開を用いて変形すると

$$\begin{aligned}H(s) &= \int_C dz (-z)^{s-1} \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} = \int_C dz (-z)^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \int_C dz e^{-z} (-z)^{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_C dz e^{-z} (-z)^{s-1} \\ &= \zeta(s) G(s)\end{aligned}\tag{6.62}$$

と表すことができる．一方、ハンケルの経路は実軸の上側と下側と原点周りの小さな円の 3 つに分解できるので、この分解を行ってから、積分変数の取り替えを用いると

$$\begin{aligned}G(s) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{\infty+i\epsilon}^{i\epsilon} dz e^{-z} (-z)^{s-1} + \int_{|z|=\epsilon} dz e^{-z} (-z)^{s-1} + \int_{-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} e^{-z} (-z)^{s-1} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \underbrace{\left[\int_{-\infty+i\epsilon}^{i\epsilon} dz e^z z^{s-1} - \int_{-\infty-i\epsilon}^{-i\epsilon} dz e^z z^{s-1} \right]}_{(A)} + \underbrace{(-1)^{s-1} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint_{|z|=\epsilon} dz e^{-z} (-z)^{s-1}}_{(B)}\end{aligned}\tag{6.63}$$

と変形できる．いま、 (B) は円周に沿った閉じた積分を与えるが、被積分関数は正則なので $(B) = 0$ が得られる．一方、 (A) の 2 項は被積分関数に $z + i\epsilon$ と $z - i\epsilon$ を代入したものの差を与えているが、 $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を取る際に、累乗関数 z^{s-1} について注意が必要になる．実際、正則関数の例を議論したときに累乗関数は、 $\operatorname{Re} z < 0$ の領域で式 (2.69) のような不連続性を持つことを議論したのだった．そこで、上式の (A) の部分に式 (2.69) を用いてやると、

$$\begin{aligned}(A) &= \int_{-\infty}^0 dz e^z |z|^{s-1} 2i \sin[(s-1)\pi] = 2i \sin[(s-1)\pi] \int_{-\infty}^0 dz e^z |z|^{s-1} \\ &= 2i \sin[(s-1)\pi] \int_0^{\infty} dz e^{-z} z^{s-1} \\ &= 2i \sin[(s-1)\pi] \Gamma(s)\end{aligned}\tag{6.64}$$

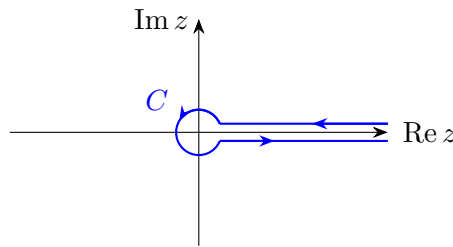


Figure 19. ハンケルの積分経路.

が得られる．最終行ではガンマ関数の定義式 (6.4) を用いた．さらに，得られた結果に公式 (6.23) を用いると

$$G(s) = -2i \sin[(1-s)\pi] \Gamma(s) = -\frac{2\pi i}{\Gamma(1-s)} \quad (6.65)$$

と変形できる．したがって，この結果を式 (6.62) に代入すると，ゼータ関数に関する次の積分表示が得られる：

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C dz \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \quad (6.66)$$

この式の右辺がゼータ関数の解析接続を与えている．

さて，以上の準備に基づき，ゼータ関数の値を求める公式を導出しよう．まず，「ありえない公式」を見るために，ゼータ関数の負の整数での値を見に行くと $n \in \mathbb{N}$ として

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= (-1)^n \frac{\Gamma(1+n)}{2\pi i} \int_C dz \frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} = (-1)^n n! \int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} \\ &= (-1)^n n! \oint_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} \end{aligned} \quad (6.67)$$

が得られる．2行目に進む際に，被積分関数は正の実軸上で不連続性を持たないことを用いて，ハンケル経路の円周上からの寄与のみを拾えばよいことを用いた．あとは被積分関数にベルヌーイ数を用いた展開を代入し，留数定理を用いると

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \oint_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} z^{k-n-2} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \delta_{k-n-2,-1} \\ &= (-1)^n n! \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \\ &= (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \end{aligned} \quad (6.68)$$

が得られる．したがって，次の結果が得られたことになる：

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \quad \text{with } n \in \mathbb{N} \quad (6.69)$$

この結果で $n = 0, 1$ とすると

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= 1 + 1 + 1 + \cdots = B_1 = -\frac{1}{2} \\ \zeta(-1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12} \end{aligned} \quad (6.70)$$

などの「ありえない公式」たちが得られる．このような公式は，場の量子論や弦理論などでよく用いられる式になっている．

最後に「ありえない公式」がなぜ問題ないのか注意をしておく．そのためには，上の議論によって示されたのは，

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \cdots \quad (6.71)$$

という結果に過ぎないことに注目すればよい．もともとのゼータ関数の定義式 (6.45) に基づくと，この式の左辺を上で与えたように

$$\zeta(-1) \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 3 + \cdots \quad (6.72)$$

という等号を書きたくなる．しかし，もともとのゼータ関数の定義式 (6.45) は $\text{Re } z > 1$ のみで正しかつたので，この点に注意をせずに値を代入するのはまずい． $z = -1$ における値 $\zeta(-1)$ はあくまで $\text{Re } z > 1$ での定義されていたゼータ関数を $\text{Re } z \leq 1$ まで解析接続した関数 $\zeta(z)$ の出す値であるので，この点に注意を払わずにもともとの $\text{Re } z > 1$ でのみ許されていた表式に代入したことが一見「ありえない公式」が得られた原因になっている．

余談. 物理学者の数学力：この節では、テイラー展開・ $\cot \pi z$ の無限和の表式や解析接続・複素積分を駆使してゼータ関数の値 $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(-1)$ を読み取りに行った。ハンケル経路に沿った積分など、考えるべき量が天下り式に導入されていることもあり、むずかしく感じることもあったかと思う。では、研究現場にいる理論物理学者は実際にこのような結果をサクサク計算・導出しながら、研究をしているのだろうか？ 自分の経験に即して答えると、この問いに対する回答は「NO!」であり、(標準的な)理論物理学者の多くはこのような計算をスラスラできないのが現実だと思う^a。

では、現場の物理学者はどう研究をしているのかというと、「計算機の力を借りている」というのが答えである。2023年現在、物理の研究現場では、"Mathematica"のような数式処理ソフトが日常的に用いられている。このため、自分の研究で必要な物理量を求めようとした結果、ちょっとめんどろな微分・積分や、たとえば $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(-1)$ などの量が必要になったとき、まずはそれらを数式処理ソフトに放り込んで答えが出るかを確かめる(少し時代を遡ると、数式処理ソフトを使う代わりに数学公式集を使っていたことだろう)。実際、筆者自身 $\zeta(-1) = -1/12$ となることは前から知っていたが、この講義の準備のために、自分の手ではじめて導出した。数学的結果をすべて自分で出さなくても、現代物理の研究はできるのである。

ただし、すべての計算を数式処理ソフトに任せられるかというと、まだそこまで便利な時代にはなっていないことにも注意が必要である。実際、いまのところ留数定理を使った積分などはまだ自分の手で必要になる量を求める必要がある。

また、余談ついでに物理学科の大学2-3年生の頃にかかる可能性がある「大二病」について触れておく。これは典型的には「現代数学がわかれば現代物理がわかるはずだ!」というような症状が現れるもので、筆者も大学3年生あたりの頃に当然のように罹患した。具体的には現代数学の中でも幾何学分野に属する多様体論について学習することで、一般相対論を中心に現代物理が理解できるだろう!という意気込みで、友人と自主ゼミなどをやった。いまになって振り返ると、数学の勉強はそれ自身として楽しめるものだと思うし、実際にそのような勉強をする時間が持てるのは学生の特権だと思うのでとてもよいことだとは思ふ。しかし、やはり現代物理を理解するのにはいささか遠回りと言わざるを得ない。現代物理を理解するには現代物理を勉強するのが一番の近道である。

^a[注] あくまで個人の感想です。

[複素解析] 演習問題 5 (2023 年 2 月 1 日 (水) 出題, 2023 年 2 月 7 日 (火) 17 時提出締め切り)

問 1 経路 C_R として, 半径 R の円に沿った偏角 $\theta = 0$ から $\theta = \pi$ までの半円を考える. このとき, 複素積分の定義にしたがって, 次の複素積分を計算せよ (ただし, \sqrt{z} と $\text{Log } z$ はそれぞれ主値).

$$(1) \int_{C_R} dz z^2 \quad (2) \int_{C_R} dz \frac{1}{z} \quad (3) \int_{C_R} dz \sqrt{z} \quad (4) \int_{C_R} dz \text{Log } z$$

問 2 前問の (1)-(4) の複素積分について, 経路を C'_R 半径 R の円に沿った偏角 $\theta = 0$ から $\theta = -\pi$ までの半円に変えたときの計算をせよ.

問 3 前問の (1)-(4) で計算した複素積分について問 1 の結果と問 2 の結果の差をそれぞれ求めよ. 結果がゼロになる場合・ならない場合について, その理由を簡単に述べよ.

感想 複素解析の授業内容・進度・教え方などについて, 感想・意見・改善点などを自由に書け.

解答例.

問 1 経路 C_R は $z(t) = Re^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) とパラメータ表示できる (図 20 参照). よって, $\frac{dz}{dt} = iRe^{it}$ となることから, 複素積分の定義にしたがって計算すると以下の通り:

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{C_R} dz z^2 &= \int_0^\pi dt iRe^{it} (Re^{it})^2 = iR^3 \int_0^\pi dt e^{3it} = iR^3 \left[\frac{1}{3i} e^{3it} \right]_{t=0}^{t=\pi} = -\frac{2}{3} R^3 \\ (2) \quad \int_{C_R} dz \frac{1}{z} &= \int_0^\pi dt iRe^{it} (Re^{it})^{-1} = i \int_0^\pi dt = \pi i \\ (3) \quad \int_{C_R} dz \sqrt{z} &= \int_0^\pi dt iRe^{it} (Re^{it})^{1/2} = iR^{3/2} \int_0^\pi dt e^{\frac{3}{2}it} = iR^{3/2} \left[\frac{2}{3i} e^{\frac{3}{2}it} \right]_{t=0}^{t=\pi} = -\frac{2}{3} R^{3/2} (1+i) \\ (4) \quad \int_{C_R} dz \text{Log } z &= \int_0^\pi dt iRe^{it} (\log R + it) = iR \left(\log R \int_0^\pi dt e^{it} + i \int_0^\pi dt t e^{it} \right) \\ &= iR [2i \log R + i(-2 + i\pi)] = -R [2 \log R - 2 + i\pi] \end{aligned}$$

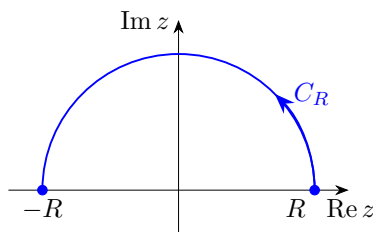


Figure 20. 積分経路 C_R .

問 2 経路 C'_R は $z(t) = Re^{it}$ ($0 \leq t \leq -\pi$) とパラメータ表示できるので, 問 1 の計算において積分の上端 $-\pi$ に置き換えればよい. よって, 結果は以下の通り:

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{C'_R} dz z^2 &= iR^3 \int_0^{-\pi} dt e^{3it} = -\frac{2}{3} R^3 \\ (2) \quad \int_{C'_R} dz \frac{1}{z} &= i \int_0^{-\pi} dt = -\pi i \\ (3) \quad \int_{C'_R} dz \sqrt{z} &= iR^{3/2} \int_0^{-\pi} dt e^{\frac{3}{2}it} = iR^{3/2} \left[\frac{2}{3i} e^{\frac{3}{2}it} \right]_{t=0}^{t=-\pi} = -\frac{2}{3} R^{3/2} (1-i) \\ (4) \quad \int_{C'_R} dz \text{Log } z &= iR \left(\log R \int_0^{-\pi} dt e^{it} + i \int_0^{-\pi} dt t e^{it} \right) = -R [2 \log R - 2 - i\pi] \end{aligned}$$

問3 前問の結果を用い、それぞれ以下のように求まる.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_{C_R} dz z^2 - \int_{C'_R} dz z^2 = 0 \\
 (2) \quad & \int_{C_R} dz \frac{1}{z} - \int_{C'_R} dz \frac{1}{z} = 2\pi i \\
 (3) \quad & \int_{C_R} dz \sqrt{z} - \int_{C'_R} dz \sqrt{z} = \frac{4}{3} R^{3/2} i \\
 (4) \quad & \int_{C_R} dz \operatorname{Log} z - \int_{C'_R} dz \operatorname{Log} z = -2\pi R i
 \end{aligned}$$

ここで、経路 C_R と C'_R はそれぞれ上下の半円を与えているが、これらに沿った積分の差は、 $z(t) = R^{it}$ として

$$\int_{C_R} dz f(z) - \int_{C'_R} dz f(z) = \int_0^\pi dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t)) - \int_0^{-\pi} dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t)) = \int_{-\pi}^\pi dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t))$$

と変形できるので、半径 R の円を偏角 $-\pi$ から π まで閉じた経路に沿って積分したものとして理解できる. よって、積分経路とその内部に特異点がなければ、コーシーの積分定理によりゼロになる. (1) はそのような場合に対応している. 一方、(2) は積分経路で囲まれる円の内部に、1 位の極を持つためにゼロになっていない. また、(3) と (4) は \sqrt{z} と $\operatorname{Log} z$ が多価関数になっており、偏角 $\theta = -\pi$ と $\theta = \pi$ の間で不連続になっていることから、ゼロになっていない.

7 授業のまとめ

はじめの節で述べたように、この授業では来年度以降に習う現代物理の学習準備のために、物理で必要になる複素関数論の基礎を学んだ。講義を通して習得すべきとしていた課題をもう一度以下に載せる：

- (i) 複素数の四則演算など、基本的な計算規則を使いこなせるようにする (2 コマ)。
- (ii) 複素関数の微分が実行でき、正則関数の定義や性質を理解する (3 コマ)。
- (iii) 複素関数の積分定理を理解し、実際の計算 (とくに留数積分) を実行できるようになる (5 コマ)。
- (iv) 複素関数の級数展開 (ローラン展開) を実行できるようになる (2 コマ)。
- (v) (できれば) 解析接続やリーマン面の概念を理解する (3 コマ)。
- (vi) [2023-0125 追加] ガンマ関数や鞍点法などの複素関数の応用を理解する (?コマ)。

複素関数論の中で、理論物理の研究でもっとも大事な事項の1つは「留数定理と積分経路の変形による積分計算の能力」である。素粒子理論・原子核理論・物性理論のどの研究室に配属されても、グリーン関数を用いた摂動計算を行うことになったら、留数積分ができるかは確実に問われるようになる。問題はこのような計算を自分でやる必要が出てくるのは、おそらく学部4年の後期から大学院に入った後くらいで、かなり後の話になってしまうという点である。おそらく具体的に出くわすのは1年以上後になるが、そのときにこの授業で習ったことを忘れないでいてくれるとうれしい。

期末試験について

- 日時：2023年2月13日, 3限 (12:55-14:25)
- 試験範囲：複素関数の授業で扱った内容。とくに、演習問題で扱ったような複素数の定義・計算, 複素関数の微分とコーシー・リーマンの関係式, 複素積分, 留数定理の応用, ローラン展開あたりをよく復習しておくこと。
- その他：ノート教科書などの持ち込みは不可