REGENSBURGER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN 11

Über die Klassifikation numerischer Halbgruppen

Ernst Kunz

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT

REGENSBURG

ÜBER DIE KLASSIFIKATION NUMERISCHER HALBGRUPPEN

Ernst Kunz

REGENSBURGER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN 11

Bestellungen sind an die

Fakultät für Mathematik
Universität, Postfach 397
8400 Regensburg, BRD

zu richten.

Preis (ohne Gewähr) 15,-- DM

Anschrift des Autors:

Ernst Kunz,
Fakultät für Mathematik
Universität, Postfach 397
8400 Regensburg, BRD

AMS Subject Classification: 05 A 15, 13 G 05, 20 M 14

Eingang des Manuskripts: 11.10.86

Bd. 11 ausgegeben: Januar 1987

ISBN 3-88246-113-6 ISSN 0179 - 9746

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Unter einer numerischen Halbgruppe verstehen wir eine Teilmenge $H \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in H$ und $H+H \subset H$, wobei $\mathbb{N} \setminus H$ endlich ist. Die Elemente von $\mathbb{N} \setminus H$ heißen die Lücken von H, ihre Anzahl g(H) das Geschlecht von H. Die kleinste Zahl $c \in H$ mit $c+\mathbb{N} \subset H$ heißt der Führer von H.

Numerische Halbgruppen treten z.B. auf als Wertehalbgruppen der Singularitäten von analytisch irreduziblen algebraischen Kurven (vgl. etwa [2] und [8]) und als Polordnungshalbgruppen in den Weierstraßpunkten kompakter Riemannscher Flächen (singularitätenfreien projektiven algebraischen Kurven). Die (komplettierten) Halbgruppenringe

$$K[\![H]\!] := \{ \sum_{h \in H} a_h t^h | a_h \in K\} \quad \text{(K Körper)}$$

sind beliebt, um Fragen über eindimensionale lokale Ringe zu testen, das sich in diesen Ringen auf Grund der durch die Halbgruppe gegebenen Graduierung gut rechnen läßt.

Viele Invarianten von $K[\![H]\!]$ sind unabhängig von K und daher Invarianten von H. Die Multiplizität m(H) von H ist die kleinste Zahl $m > 0$ aus H. Jede numerische Halbgruppe besitzt ein kanonisches minimales Erzeugendensystem. Seine Länge heißt Einbettungsdimension edim(H) von H. Die Zahlen m(H) und edim(H) stimmen mit den entsprechend bezeichneten Invarianten von $K[\![H]\!]$ überein. Allgemeiner kann man von der Hilbertfunktion, den Bettizahlen, dem Cohen-Macaulay-Typ r(H) etc. numerischer Halbgruppen sprechen. Es ist $r(H) = 1$ genau dann, wenn H symmetrisch ist, d.h. wenn es ein $z \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für jedes $h \in \mathbb{Z}$ gilt: Genau dann ist $h \in H$, wenn $z-h \notin H$ (vgl. [8]).

Sei $\{h_1,\ldots,h_\ell\}$ ein Erzeugendensystem von H,

$$K[\![H]\!] = K[\![X_1,\ldots,X_\ell]\!]/I \qquad (X_i \mapsto t^{h_i})$$

die zugehörige Präsentation von $K[\![H]\!]$ und bezeichne $\mu(I)$ die Länge eines kürzesten Erzeugendensystems von I. Die Zahl

$$d(H) := \mu(I) - (\ell-1)$$

ist eine von der speziellen Erzeugung unabhängige Invariante von H, sie heißt die <u>Abweichung</u> d(H) von H. Ist $d(H) = 0$, so heißt H <u>vollständiger Durchschnitt</u>, ist $d(H) = 1$, so wird H <u>fastvollständiger Durchschnitt</u> genannt.

Mit Strukturaussagen über das <u>Relationenideal</u> I von H beschäftigen sich die Untersuchungen von Bresinsky ([3],[4],[5]), Delorme [6], Herzog [7], Waldi [10] und anderen.

In dieser Schrift bezeichnet $\mathfrak{H}_m$ für eine natürliche Zahl $m \geq 3$ die Menge aller numerischen Halbgruppen H mit $m \in H$. Wir werden $\mathfrak{H}_m$ eine Polyederkegel $P_m \subset \mathbb{R}^{m-1}$ zuordnen, dessen Gitterpunkte eineindeutig den Elementen von $\mathfrak{H}_m$ entsprechen. Hierdurch wird die Menge der Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_m$ geometrisch veranschaulicht. Die disjunkte Zerlegung von P_m in seine offenen Seiten bewirkt eine Klasseneinteilung der numerischen Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_m$. Dabei stellt sich heraus, daß die Halbgruppen H der Multiplizität m, welche den Gitterpunkten einer festen Seite von P_m entsprechen, in dem Sinne sehr ähnlich sind, daß sie in vielen der Invarianten übereinstimmen, an die oben erinnert wurde. Es genügt daher im wesentlichen, für einen Repräsentanten der Klasse die Invarianten zu berechnen. Die Dimension s der Seite von P_m, zu der eine Halbgruppe $H \in \mathfrak{H}_m$ gehört, ist eine weitere Invariante s(H) von H und ein Maß dafür, wieviele zu H "ähnliche" Halbgruppen existieren.

In § 1 wird der Polyederkegel P_m definiert und es werden einige seiner geometrischen Eigenschaften besprochen. Sodann behandelt § 2 die durch P_m bewirkte Klasseneinteilung von $\mathfrak{H}_m$ und gibt allgemeine Aussagen über die Invariante s(H). In § 3 studieren wir die erzeugenden Funktionen (Hilbertreihen) für die Gitterpunkte auf P_m und auf den Seiten von P_m. Die Sätze von Stanley [9] liefern ähnliche Anwendungen auf diese Hilbertreihen, wie sie von Stanley für die Zählung der magischen Quadrate angegeben worden sind.

Für die explizite Berechnung von Invarianten numerischer Halbgruppen stehen diverse Algorithmen zur Verfügung, mit denen sich meine Diplomanden P.Altmann, J.Fischer und G.Heger beschäftigt haben. Sie haben entsprechende Computerprogramme geschrieben; ein Teil der von ihnen mit großem Fleiß zusammengetragenen Daten über P_m und die Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_m$ (für kleine m) ist in den Anhängen A-C zu finden. Mit der vorliegenden Schrift möchte ich diese Daten den Freunden numerischer Halbgruppen zugänglich machen, hoffend, daß sie ihnen nützen mögen, und daß sie vielleicht zu allgemeinen Spekulationen und Erkenntnissen über numerische Halbgruppen Anlaß geben.

 ($\tilde{h}_i = iq - \mu_i p$)

§ 1. Der Polyederkegel, welcher den numerischen Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_m$ entspricht.

Für $H \in \mathfrak{H}_m$ und $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ sei h_i die kleinste Zahl aus H mit $h_i \equiv i \bmod m$. Dann heißt $\{h_1,\ldots,h_{m-1}\}$ die Apéry-Menge von H ([1]). $H = m\cdot\mathbb{N} \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} (h_i+m\mathbb{N})$ ist durch seine Apéry-Menge eindeutig festgelegt. Schreibt man $h_i = i+\mu_i\cdot m$ ($\mu_i \in \mathbb{N}$, $i=1,\ldots,m-1$), so ist

$$g(H) = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i \tag{1}$$

die Lückenzahl von H. Genau dann ist $m = m(H)$, wenn $\mu_i > 0$ für $i=1,\ldots,m-1$. Das $(m-1)$-tupel $(h_1,\ldots,h_{m-1})$ ist eine Lösung des homogenen diophantischen linearen Ungleichungssystems

$$X_i + X_j \geq X_{i+j} \qquad (i+j \neq m) \tag{2}$$

(in dem die Indizes modulo m zu nehmen sind).
Entsprechend ist $(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} X_i + X_j &\geq X_{i+j} && (i+j < m) \\ X_i + X_j &\geq X_{i+j}-1 && (i+j > m). \end{aligned} \tag{3}$$

Sei $P_m \subset \mathbb{R}^{m-1}$ der Durchschnitt der durch diese Ungleichungen gegebenen Halbräume. Es ist dann klar, daß die Abbildung

$$\mu : \mathfrak{H}_m \to P_m \cap \mathbb{N}^{m-1}$$

die jeder Halbgruppe $H \in \mathfrak{H}_m$ das entsprechende $(m-1)$-tupel $(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})$ zuordnet, bijektiv ist.

P_m^* sei die Lösungsmenge des homogenen Systems (2) in $\mathbb{R}^{m-1}$. Die Translation um den Vektor

$v := (-\frac{1}{m}, -\frac{2}{m}, \ldots, -\frac{m-1}{m})$ bildet P_m^*, wie leicht zu sehen, bijektiv auf P_m ab:

$$P_m = v + P_m^* .$$

Zunächst sollen einige einfache geometrische Eigenschaften von P_m und P_m^* festgestellt werden. Wir setzen $E_{ij} := X_i + X_j - X_{i+j}$ für $i,j \in \{1,\ldots,m-1\}$, $i+j \neq m$, wobei die Indizes immer modulo m zu nehmen sind.

1.1. Proposition.

a) Es ist $P_m^* \subset Q := \{(x_1,\ldots,x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} | x_i \geq 0\}$. Der Schnitt von P_m^* mit der Hyperebene $\sum_{i=1}^{m-1} X_i = 1$ ist ein konvexes Polyeder und P_m^* ist der Kegel mit der Spitze in O über diesem Polyeder. Entsprechend ist P_m ein Polyederkegel mit der Spitze in v.

a') Ist m eine Primzahl, dann ist

$$P_m^* \setminus \{0\} \subset \mathring{Q} := \{(x_1,\ldots,x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} | x_i > 0\}.$$

b) Es gilt $\dim P_m = \dim P_m^* = m-1$.

c) Die affine Transformation

$$(x_1,\ldots,x_{m-1}) \mapsto (-x_{m-1}-1, -x_{m-2}-1, \ldots, -x_1-1)$$

bildet P_m bijektiv auf den Polyederkegel

$$P_m' : X_i + X_j \leq X_{i+j} \ (i+j<m), \ X_i + X_j \leq X_{i+j} - 1 \ (i+j>m)$$

ab. Alle Koordinaten der Punkte von P_m' sind negativ.

Beweis. Sei $(x_1,\ldots,x_{m-1}) \in P_m^*$. Für ein $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ sei α die Ordnung von $i+(m)$ in $(\mathbb{Z}/(m),+)$.

a) Es ist $\nu x_i \geq x_{\nu i}$ für alle ν mit $1 \leq \nu \leq \alpha-1$. Für ein k mit $i+k \neq m$ gilt ferner

$\alpha x_i = x_i+(\alpha-1)x_i \geq x_i+x_{(\alpha-1)i} = x_i+x_{m-i} =$

$(x_i+x_k-x_{i+k}) + (x_{i+k}+x_{m-i}-x_k) \geq 0,$

folglich $x_i \geq 0$.

a') Ist $x_i = 0$, dann ist wegen $\nu x_i \geq x_{\nu \cdot i}$ auch $x_{\nu \cdot i} = 0$ für $\nu = 1,\ldots,\alpha-1$. Wenn m eine Primzahl ist, dann durchlaufen die Indizes (modulo m betrachet) alle Zahlen aus $\{1,\ldots,m-1\}$.

b) $(1,\ldots,1)$ ist ein innerer Punkt jedes der P_m^* definierenden Halbräume $E_{ij} \geq 0$. Hieraus folgt die Dimensionsaussage.

c) ergibt sich durch einfaches Nachrechnen.

Unter einer Seite von P_m (oder P_m^*) soll immer eine offene Seite des Polyederkegels verstanden werden. Die 1-kodimensionalen Seiten heißen Facetten, die 1-dimensionalen Seiten heißen Kanten.

1.2. Proposition.

a) Die Facetten von P_m^* (und von P_m) entsprechen eineindeutig den Hyperebenen $E_{ij} = 0$ ($i \leq j$, $i+j \neq m$). P_m und P_m^* besitzen somit für ungerades m genau $\frac{(m-1)^2}{2}$ und für gerades m genau $\frac{(m-1)^2-1}{2}$ Facetten.

b) Sei $m \geq 4$. Die 2-kodimensionalen Seiten von P_m^* (und von P_m) entsprechen eineindeutig den Mengen

$\{E_{ij}, E_{k\ell}\}$ mit $i,j,k,\ell \in \{1,\ldots,m-1\}$, $i \leq j$, $k \leq \ell$, $i+j \neq m$, $k+\ell \neq m$ und $(i,j) \neq (k,\ell)$

wobei zusätzlich noch eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

α) $i+j \notin \{k,\ell\}$, $k+\ell \notin \{i,j\}$ (modulo m).

β) Drei der Zahlen i,j,k,ℓ sind gleich, etwa $=i$, die vierte ist $\equiv 2i \bmod m$ und es ist $3i \not\equiv 0 \bmod m$.

Beweis. a) Ist $i+j < m$, so setze man $x_i = x_j = 2$, $x_{i+j} = 4$ und $x_k = 3$ für $k \neq i,j,i+j$. Dann liegt $(x_1,\ldots,x_{m-1})$ auf der Hyperebene $E_{ij} = 0$, aber im Innern jedes der Halbräume

$$E_{k\ell} \geq 0 \ (k+\ell < m), \quad E_{k\ell} \geq -1 \ (k+\ell > m)$$

für $\{k,\ell\} \neq \{i,j\}$. $E_{ij} = 0$ definiert daher eine Facette von P_m. Ist $i+j > m$, so setze man $x_i = x_j = 2$, $x_{i+j} = 5$, $x_k = 3$ für $k \neq i,j,i+j$ und schließe entsprechend.

Es ist damit sogar gezeigt, daß jede Facette von P_m einen Gitterpunkt aus $\mathbb{N}_+^{m-1}$ enthält.

b) Die Linearformen E_{ij} genügen den Relationen

$$E_{ab} + E_{a+b,c} = E_{ac} + E_{a+c,b} \tag{4}$$

wenn $a+b \neq m$, $a+c \neq m$ und $a+b+c \neq m$. Je drei verschiedene Linearformen E_{ij} sind dagegen linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Die Bedingungen α) bedeuten gerade, daß E_{ij} und $E_{k\ell}$ nicht auf der gleichen Seite einer der Relationen (4) vorkommen. Ist β) erfüllt, so kommen $E_{ij}, E_{k\ell}$

zwar auf der gleichen Seite einer Relation (4) vor, aber auf der anderen Seite der Relation steht dasselbe. α) und β) sind somit sicher notwendig dafür, daß durch $E_{ij} = E_{k\ell} = 0$ eine 2-kodimensionale Seite von P_m^* definiert wird. Wir zeigen, daß α) und β) auch hinreichend hierfür sind.

Im Fall α) setze man $x_i = x_j = x_k = x_\ell = 2$, $x_{i+j} = x_{k+\ell} = 4$ und $x_a = 3$ sonst. Im Fall β) setze man $x_i = 3$, $x_{2i} = 6$, $x_{3i} = 9$ und $x_a = 5$ sonst. Dann erfüllt $(x_1,\dots,x_{m-1})$ die Gleichungen $E_{ij} = E_{k\ell} = 0$, während sonst $E_{rs} > 0$ ist.

Aus 1.2a) folgt insbesondere, daß in den Systemen (2) und (3) keine der Ungleichungen überflüssig ist. Jede Seite von P_m^* ist durch Angabe aller E_{ij}, die auf der Seite verschwinden, eindeutig festgelegt. In den Tabellen am Schluß der Arbeit werden die entsprechenden Seiten von P_m jeweils durch diese E_{ij} gekennzeichnet.

Eine einfache Beschreibung der Kanten von P_m^* oder auch nur eine einfache Regel für ihre Anzahl ist mir nicht bekannt. Auf jeder Kante von P_m^* gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $\delta \in \mathbb{N}^{m-1}$ mit teilerfremden Koordinaten. Repräsentiert man jede Kante von P_m^* durch den entsprechenden Vektor δ, so erhält man, was wir als das <u>kanonische Repräsentantensystem für die Kanten</u> von P_m^* bezeichnen. Anhang A gibt Tabellen für die Anzahl der Kanten und Seiten von P_m^* und Listen für das kanonische Repräsentantensystem, wenn m klein ist.

Gewisse δ lassen sich leicht erraten, z.B. $\delta = (1,2,\ldots,m-1)$. Auf Grund der folgenden Bemerkung findet man weitere δ.

<u>1.3. Bemerkung.</u> Sei $\{\delta_1,\ldots,\delta_t\}$ das kanonische Repräsentantensystem für die Kanten von P_m^*.

a) Die prime Restklassengruppe $\mathbb{Z}/(m)^x$ operiert durch Koordinatenvertauschung auf P_m^*. (Dabei werden für jedes $s \in \mathbb{N}$ die s-dimensionalen Seiten von P_m^* permutiert).

b) Die Operation permutiert auch $\{\delta_1,\ldots,\delta_t\}$ und läßt $\sum_{i=1}^{t} \delta_i$ fest. Ist m eine Primzahl, so ist $\sum_{i=1}^{t} \delta_i = z\cdot(1,\ldots,1)$ mit einem $z \in \mathbb{N}_+$.

c) Für jedes m gilt: Ist $(x_1,\ldots,x_{m-1})$ ein Kantenvektor von P_m^*, so auch $(x_{m-1},\ldots,x_1)$.

Diese Aussagen ergeben sich, weil das P_m^* definierende diophantische Ungleichungssystem (2) invariant unter der Operation von $\mathbb{Z}/(m)^x$ ist. Ist m eine Primzahl, so ist die Operation auf den Koordinaten transitiv, woraus die zweite Aussage von b) folgt. c) ergibt sich aus der Operation der Restklasse $-1+(m) \in \mathbb{Z}/(m)^x$.

<u>1.4. Proposition.</u>

a) $P_m \cap \mathbb{Z}^{m-1} = P_m \cap \mathbb{N}^{m-1}$.

b) Im Innern von P_m und auf den Facetten von P_m liegen immer Gitterpunkte, jedoch braucht eine 2-kodimensionale Seite von P_m keine Gitterpunkte zu enthalten.

c) Ist S eine Seite von P_m, die keine Gitterpunkte enthält, so enthält auch ihr topologischer Abschluß $\overline{S}$ keine Gitterpunkte.

d) Jeder Gitterpunkt $(y_1,\ldots,y_{m-1}) \in P_m$ läßt sich eindeutig in der Form

$$(y_1,\ldots,y_{m-1}) = (x_1,\ldots,x_{m-1}) + z\cdot(1,\ldots,1)$$

schreiben, wobei $(x_1,\ldots,x_{m-1})$ ein Gitterpunkt auf dem Rand von P_m und $z \in \mathbb{N}$ ist. Genau dann ist $(y_1,\ldots,y_{m-1})$ ein innerer Punkt von P_m, wenn $z > 0$ ist.

Beweis. a) Es ist $P_m = (-\frac{1}{m},\ldots,-\frac{m-1}{m}) + P_m^*$ und $P_m^* \subset Q$. Gitterpunkte auf P_m haben daher nichtnegative Koordinaten.

b) Die erste Aussage von b) wurde schon im Beweis von 1.2a) gezeigt, für die zweite findet man bereits für $m=4$ Beispiele.

c) Es ist klar, daß jede Seite S^* von P_m^* Gitterpunkte enthält, da die Kanten von P_m^* Gitterpunkte enthalten. Ist $(x_1,\ldots,x_{m-1})$ ein Gitterpunkt auf $\overline{S}$ und $(y_1,\ldots,y_{m-1})$ ein Gitterpunkt auf $S^* = -v+S$, so ist $(x_1+y_1,\ldots,x_{m-1}+y_{m-1})$ ein Gitterpunkt von S.

d) Da $(1,\ldots,1)$ ein innerer Punkt von P_m^* ist, liegen die angegebenen Punkte $(y_1,\ldots,y_{m-1})$ auf P_m und sind für $z > 0$ innere Punkte. Für einen Gitterpunkt $(y_1,\ldots,y_{m-1})$ im Innern von P_m ist auch $(y_1-1,\ldots,y_{m-1}-1) \in P_m$, und es folgt, daß jeder Gitterpunkt von P_m die angegebene Form besitzt.

<u>1.5. Korollar.</u> Enthalten alle Kanten von P_m Gitterpunkte, dann auch alle Seiten von P_m (außer der Spitze).

Man kann zeigen, daß dies für $m=2,3,5,7$ der Fall ist, nicht aber für $m=4,6,8,9,10$ und auch nicht für $m=11$.

Sei S eine Seite von P_m. Wir sagen, daß eine numerische Halbgruppe $H \in \mathfrak{H}_m$ <u>zu S gehört</u>, wenn der H entsprechende Gitterpunkt $\mu(H)$ auf S liegt.

<u>1.6. Bemerkung.</u> Ist S eine Seite von P_m, die Gitterpunkte enthält, so liegt die S entsprechende Seite $S^* = -v+S$ von P_m^* nicht ganz in einer der Koordinatenhyperebenen $X_i = 0$. Zu S gehören dann unendlich viele Halbgruppen der Multiplizität m und, wenn m Primzahl ist, nur endlich viele Halbgruppen kleinerer Multiplizität.

Beweis. Ist $(\mu_1,\dots,\mu_{m-1})$ ein Gitterpunkt von S, so ist $(h_1,\dots,h_{m-1})$ mit $h_i = i+\mu_i m$ $(i=1,\dots,m-1)$ ein Gitterpunkt von $S^* = -v+S$, woraus die erste Behauptung folgt. Die Punkte $(\mu_1,\dots,\mu_{m-1})+z(h_1,\dots,h_{m-1})$ $(z \in \mathbb{N}_+)$ liegen auf S und entsprechen Halbgruppen der Multiplizität m, da alle ihre Koordinaten positiv sind.

Ist m Primzahl, so ist $S^* \subset \mathring{Q}$ (1.1a') und S besitzt höchstens endlich viele Punkte auf den Koordinatenhyperebenen.

Für $g \in \mathbb{N}$ bezeichne $h_m(g)$ die Anzahl der $H \in \mathfrak{H}_m$, welche die Lückenzahl g besitzen. Diese H entsprechen nach (1) den Gitterpunkten auf dem Durchschnitt von P_m mit der Hyperebene $\sum_{i=1}^{m-1} X_i = g$. Offensichtlich ist die Bestimmung von $h_m(g)$ äquivalent mit der Lösung des folgenden <u>kombinatorischen Problems</u>:

Auf wieviele Arten kann man aus $\mathbb{N}$ genau g Zahlen herausnehmen, wobei 0 und m nicht herausgenommen werden dürfen, so daß die Restmenge additiv abgeschlossen ist.

Entsprechende Funktionen wie $h_m(g)$ kann man auch etwa für die symmetrischen Halbgruppen oder irgendeine Klasse von Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_m$ studieren. In § 3 werden wir einige Aussagen über solche Funktionen gewinnen.

§ 2. Ähnlichkeit numerischer Halbgruppen

Es sei $\{h_1,\ldots,h_{m-1}\}$ die Apéry-Menge einer numerischen Halbgruppe $H \in \mathfrak{H}_m$. Ferner sei $K[\![H]\!]$ die Halbgruppenalgebra von H über einem Körper K und

$$A_m(H) := K[\![H]\!]/t^m K[\![H]\!].$$

Dann ist

$$A_m(H) = K \oplus K\tau_1 \oplus \ldots \oplus K\tau_{m-1} \tag{1}$$

mit $\tau_i := t^{h_i} + t^m K[\![H]\!]$ $(i=1,\ldots,m-1)$ und es gilt

$$\tau_i \cdot \tau_j = \varepsilon_{ij} \cdot \tau_{i+j} \quad (i,j=1,\ldots,m-1) \tag{2}$$

wobei

$$\varepsilon_{ij} := \begin{cases} 0 \ , & \text{falls } i+j=m \text{ oder } h_i+h_j > h_{i+j} \ . \\ 1 \ , & \text{falls } i+j \neq m \text{ und } h_i+h_j = h_{i+j} \ . \end{cases}$$

$M_m(H)$ bezeichne die (symmetrische) Matrix mit den Koeffizienten ε_{ij} $(i,j=1,\ldots,m-1)$. Diese Matrix enthält die folgenden Informationen über H:

2.1. Bemerkung. a) Man entnimmt $M_m(H)$, zu welcher Seite S von P_m die Halbgruppe H gehört, denn es ist $\varepsilon_{ij} = 1$ genau dann, wenn der H in P_m entsprechende Punkt $\mu(H)$ auf der Hyperebene $E_{ij} = 0$ (falls $i+j < m$) bzw. auf der Hyperebene $E_{ij} = -1$ (falls $i+j > m$) liegt.

b) Der Typ $r(H)$ von H ist die Anzahl der Zeilen (Spalten) von $M_m(H)$, in denen nur Nullen stehen.

c) Sei $m(H) = m$ und sei α die Anzahl der $k \in \{1,\ldots,m-1\}$ für die es Zahlen $i,j \in \{1,\ldots,m-1\}$ gibt mit $i+j \equiv k \bmod m$

und $\varepsilon_{ij} = 1$. Dann ist edim $H = m-\alpha$.

Beweis. a) ist klar nach Definition der ε_{ij}.
b) Definitionsgemäß ist $r(H)$ die K-Vektorraumdimension des Sockels von $A_m(H)$. Legt man die Darstellung (1) zugrunde, so wird dieser von den τ_i mit $\tau_i\tau_j = 0$ für $j=1,\dots,m-1$ aufgespannt. Hieraus ergibt sich die Aussage b).
c) Gilt $\varepsilon_{ij} = 1$ und $i+j\equiv k \bmod m$, so ist $h_k = h_i+h_j$ kein Element des minimalen Erzeugendensystems von H. Läßt man aus $\{m,h_1,\dots,h_{m-1}\}$ alle diese h_k weg, so erhält man aber gerade das minimale Erzeugendensystem.

Im folgenden sei $G_m := (\mathbb{Z}/(m),+)$. Gibt man jedem τ_i den Grad $i+(m) \in G_m$, so wird $A_m(H)$ zu einer G_m-graduierten K-Algebra.

<u>2.2. Definition.</u> Zwei numerische Halbgruppen H und H' heißen <u>ähnlich</u>, wenn gilt:

a) H und H' besitzen die gleiche Multiplizität m.
b) Es gibt einen K-Isomorphismus $A_m(H) \cong A_m(H')$, der homogene Elemente auf homogene Elemente abbildet (nicht unbedingt vom gleichen Grad).

Es ist klar, daß die Bedingung 2.2b) nicht von der Wahl des Körpers K abhängt. Mit Hilfe der zugehörigen Matrizen kann man die Ähnlichkeit numerischen Halbgruppen wie folgt charakterisieren.

<u>2.3. Proposition.</u> Für $H, H' \in \mathcal{H}_m$ gelte $m(H) = m(H') = m$ und es sei $M_m(H) = (\varepsilon_{ij})$, $M_m(H') = (\varepsilon'_{ij})$. Genau dann sind H und H' ähnlich, wenn ein $\sigma \in S_{m-1}$ existiert, so daß

$$(3)\quad \begin{aligned} &\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{\sigma(i),\sigma(j)} \text{ für alle } i,j \in \{1,\dots,m-1\} \\ &\text{und} \\ &\sigma(i+j) = \sigma(i)+\sigma(j), \text{ falls } \varepsilon'_{ij} = 1. \end{aligned}$$

Beweis. Ist ein K-Isomorphismus $A_m(H) \cong A_m(H')$ gegeben, der homogene Elemente vom Grad $i \in G_m \setminus \{0\}$ auf homogene Elemente vom Grad $\sigma(i)$ abbildet, so definiert σ eine Permutation aus S_{m-1}. Aus der Gültigkeit der Relationen (2) in $A_m(H)$ und $A_m(H')$ ergeben sich sofort die Aussagen (3).

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so findet man auch gleich einen K-Isomorphismus, wie er in 2.1b) gewünscht wird.

<u>2.4. Beispiele.</u> a) Gehören zwei Halbgruppen H, H' der Multiplizität m zur gleichen Seite von P_m, so sind sie ähnlich, denn es ist $M_m(H) = M_m(H')$ (2.1a). Gehört zu einer Seite S von P_m eine symmetrische Halbgruppe, so ist jede zu S gehörige Halbgruppe symmetrisch (2.1b).

b) Zum Innern von P_m gehören genau die Halbgruppen H mit edim $H = m$ (2.1c). Sie haben alle die Multiplizität m und den Typ $m-1$ (2.1b).

c) Alle zu einer der Facetten E_{ii} $(i=1,\dots,m-1, 2i \neq m)$ gehörigen Halbgruppen der Multiplizität m sind ähnlich (2.3). Sie besitzen die Einbettungsdimension $m-1$ (2.1c) und den Typ m-2 (2.1b).

d) Alle zu einer der Facetten E_{ij} mit $i \neq j$ gehörigen Halbgruppen der Multiplizität m sind ähnlich (2.3). Sie besitzen die Einbettungsdimension m-1 und den Typ m-3.

Für $H \in \mathfrak{H}_m$ bezeichne $s_m(H)$ die Dimension der Seite von P_m, zu der H gehört. Ist $m(H) = m$, so schreiben wir auch $s(H)$ für $s_m(H)$.

<u>2.5. Proposition.</u> Sind H und H' ähnliche Halbgruppen, so gilt $s(H) = s(H')$.

Beweis. Wir wählen ein $\sigma \in S_{m-1}$, das die Bedingungen (3) aus 2.3 erfüllt. $s(H')$ ist die Dimension des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems $E_{ij} = 0$, wobei nur die $i,j \in \{1,\ldots,m-1\}$ mit $\varepsilon_{ij} = 1$ zu nehmen sind. Die durch σ bewirkte Koordinatenvertauschung auf $\mathbb{R}^{m-1}$ bildet diesen Lösungsraum auf den von $E_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0$ $(\varepsilon'_{ij} = 1)$ ab, dessen Dimension gerade $s(H)$ ist.

Wir betrachten die Invariante $s(H)$ als ein Maß dafür, wieviele zu H ähnliche Halbgruppen existieren. Ähnliche Halbgruppen stimmen in vielen ihrer Invarianten überein, allerdings natürlich nicht unbedingt in ihrem Geschlecht oder in ihrem Führer.

Sei $\{n_o,\ldots,n_\ell\}$ das (kanonische) minimale Erzeugendensystem einer numerischen Halbgruppe H und sei

(4) $$K[\![H]\!] = K[\![X_o,\ldots,X_\ell]\!]/I \quad (X_i \mapsto t^{n_i})$$

die zugehörige Präsentation der Halbgruppenalgebra $K[\![H]\!]$ mittels der Potenzreihenalgebra $R := K[\![X_o,\dots,X_\ell]\!]$.

Als R-Modul besitzt $K[\![H]\!]$ eine minimale freie Auflösung

$$0 \to F_t \to F_{t-1} \to \dots \to F_o \to K[\![H]\!] \to 0.$$

Wir nennen die Ränge β_i der freien R-Moduln F_i die <u>Bettizahlen</u> von H. Speziell ist $\beta_1 = \mu(I)$ die "minimale Relationenzahl" von H.

<u>2.6. Proposition.</u> Ähnliche Halbgruppen besitzen die gleiche Einbettungsdimension und die gleichen Bettizahlen. Insbesondere besitzen sie die gleiche Abweichung.

Beweis. Für eine Halbgruppe H der Multiplizität m ist $\text{edim } H = \text{edim } A_m(H) + 1$. Das folgende bekannte Lemma führt die Bettizahlen von H auf die von $A_m(H)$ zurück. Da ähnliche Halbgruppen K-isomorphe Algebren A_m besitzen, folgt die Behauptung.

<u>2.7. Lemma.</u> $(R,\mathfrak{m})$ sei ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlicher R-Modul und

$$\dots \to F_t \to F_{t-1} \to \dots \to F_1 \to F_o \to M \to 0$$

eine minimale freie Auflösung von M. Ist $x \in \mathfrak{m}$ ein Nichtnullteiler von R und von M, dann ist

$$\dots \to F_t/xF_t \to F_{t-1}/xF_{t-1} \to \dots \to F_o/xF_o \to M/xM \to 0$$

eine minimale freie Auflösung des $R/(x)$-Moduls M/xM.

In der Präsentation (4) sei o.B.d.A. $n_o = m$. Man wendet nun 2.7 an mit $x = t^m$.

Insbesondere ergibt sich aus 2.7 noch das Folgende: Es ist

$$A_m(H) = K[\![X_1,\dots,X_\ell]\!]/\overline{I}$$

mit dem Bild $\overline{I}$ von I in $K[\![X_1,\dots,X_\ell]\!]$ bei der Substitution $X_o = 0$. Ist $\{\overline{F}_1,\dots,\overline{F}_s\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\overline{I}$, so besitzt I nach 2.7 ein minimales Erzeugendensystem $\{F_1,\dots,F_s\}$ der Form $F_i = \overline{F}_i - X_oG_i$ ($i=1,\dots,s$, $G_i \in K[\![X_o,\dots,X_\ell]\!]$). Sind für eine konkret gegebene Halbgruppe H die $\overline{F}_i$ bereits berechnet, so sind auch die G_i leicht zu ermitteln. Die $\overline{F}_i$ hängen aber nur von der Ähnlichkeitsklasse von H ab. In den Tabellen des Anhangs B werden (für kleine m) die Ähnlichkeitsklassen der Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_m$ angegeben und für jede Klasse ein minimales Relationensystem von $A_m(H)$. Dann ist im wesentlichen für alle H aus der Klasse ein minimales Relationensystem von H bekannt.

Jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(G_m)$ kann speziell als eine Permutation von $\{1,\dots,m-1\}$ betrachtet werden. Wir nennen zwei Halbgruppen H,H' der Multiplizität m <u>sehr ähnlich</u>, wenn in der Situation von 2.3 σ als ein Automorphismus von G_m gewählt werden kann.

Nach 1.3a) operiert $\mathrm{Aut}(G_m)$ durch Koordinatenvertauschung auf der Menge der Seiten von P_m^* und daher in offensichtlicher Weise auch auf der Menge der Seiten von P_m : Für jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(G_m)$ wird diese Operation geliefert durch die Bewegung $t^{-1}\sigma t : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$, wobei t die Translation ist, welche die Spitze v von P_m auf den Ursprung des $\mathbb{R}^{m-1}$ abbildet. Wir bezeichnen das Bild einer Seite S von P_m unter dieser Operation mit $\sigma(S)$.

2.8. Proposition. Gehören zu einer Seite S von P_m numerische Halbgruppen, so auch zu $\sigma(S)$ für jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(G_m)$.

Beweis. Sei $\{h_1,\ldots,h_{m-1}\}$ die Apéry-Menge einer Halbgruppe H, die zu S gehört. Ferner sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine Zahl, welche die Restklasse $\sigma^{-1} \in (\mathbb{Z}/(m))^x = \mathrm{Aut}(G_m)$ repräsentiert. Setzt man $h_i' := n \cdot h_{\sigma(i)}$ $(i=1,\ldots,m-1)$, so gilt $h_i' \equiv i \bmod m$ $(i=1,\ldots,m-1)$ und es ist klar, daß $\{h_1',\ldots,h_{m-1}'\}$ die Apéry-Menge einer Halbgruppe $H' \in \mathfrak{H}_m$ ist. Wenn $M_m(H) = (\varepsilon_{ij})$ und $M_m(H') = \varepsilon_{ij}'$ ist, so gilt ferner $\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{\sigma(i),\sigma(j)}$ für $i,j=1,\ldots,m-1$ und daher gehört H' zu $\sigma(S)$.

Die Zerlegung der Menge der Halbgruppen der Multiplizität m in Klassen sehr ähnlicher Halbgruppen entspricht der Zerlegung der Menge der Seiten von P_m, die numerische Halbgruppen tragen, in Äquivalenzklassen bzgl. der Operation von $\mathrm{Aut}(G_m)$.

Im folgenden beschreiben wir die Verteilung der Gitterpunkte auf P_m, welche den symmetrischen Halbgruppen entsprechen. Die relative "Seltenheit" symmetrischer Halbgruppen wird dadurch erklärt, daß sie zu "niedrigdimensionalen" Seiten von P_m gehören.

2.9. Satz. Sei $s := [\frac{m}{2}]$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{m}{2}$. Ferner sei

$$t := \begin{cases} m-1 \text{ , falls m ungerade} \\ \frac{m}{2} \text{ , falls m gerade.} \end{cases}$$

Es gibt t s-dimensionale Seiten $S_1,\ldots,S_t$ von P_m, so daß gilt:

a) Zu den S_k $(k=1,\ldots,t)$ gehören symmetrische Halbgruppen und jede Halbgruppe, die zu einer Seite eines $\overline{S}_k$ gehört, ist ebenfalls symmetrisch.

b) Zu jeder symmetrischen Halbgruppe $H \in \mathfrak{J}_m$ existiert genau ein $k \in \{1,\ldots,t\}$, so daß H zu S_k oder einer Seite von $\overline{S}_k$ gehört. Insbesondere ist $s_m(H) \leq [\frac{m}{2}]$.

Beweis. $\{h_1,\ldots,h_{m-1}\}$ sei die Apéry-Menge von $H \in \mathfrak{J}_m$ und h_k sei die größte der Zahlen h_i $(1 \leq i \leq m-1)$. Dann ist $h_i+h_k > h_{i+k}$ für $i=1,\ldots,m-1, i+k \neq m$. Mit der Notation von (1) ergibt sich, daß τ_k zum Sockel von $A_m(H)$ gehört. Damit τ_k den Sockel erzeugt, also $r(H) = 1$ gilt, ist nach 2.1b) sicher hinreichend, daß $h_i + h_{k-i} = h_k$ für jedes $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ mit $i \neq k$. Nach Apéry [1] sind umgekehrt diese Bedingungen in einer symmetrischen Halbgruppe immer erfüllt. H ist somit genau dann symmetrisch, wenn ein $k \in \{1,\ldots,m-1\}$ existiert, so daß $\varepsilon_{i,k-i} = 1$ für $i=\{1,\ldots,m-1\}$, $i \neq k$. Dieses k ist durch H eindeutig bestimmt als Index des größten Elements aus der Apéry-Menge von H. Ist m gerade, so muß k ungerade sein. Wäre nämlich $k = 2j$, $m = 2m'$, so ergäbe sich $2h_j = h_k$ und $2h_{m'+j} = h_k$, also $h_j = h_{m'+j}$, ein Widerspruch.

Sei nun H symmetrisch und k wie angegeben. Dann liegt der H entsprechende Punkt von P_m auf den Hyperebenen $E_{ik-i} = 0$ (falls $i < k$) bzw. $E_{i,k-i} = -1$ (falls $i > k$). Das System $\{E_{i,k-i}\}$ enthält, falls m gerade ist, $\frac{m}{2} - 1$ linear unabhängige Linearformen, und falls m ungerade ist, $\frac{m-1}{2}$ linear unabhängige Linearformen. Hieraus ergibt sich bereits, daß $s_m(H) \leq [\frac{m}{2}]$ ist. Jede Linearform $E_{\alpha\beta}$ mit $\alpha+\beta \neq k$ ist von dem System $\{E_{i,k-i}\}$ linear unabhängig, daher gilt $s_m(H) = s$ genau dann, wenn $\varepsilon_{ij} = 1$ für $i+j = k$, $\varepsilon_{ij} = 0$ für $i+j \neq k$.

Ist m ungerade und ist k eine ungerade Zahl aus $\{1,\dots,m-1\}$, so setzen wir

$$h_i := \begin{cases} 2m+i & \text{für } i = 1,\dots,\frac{k-1}{2} \\ m+i & \text{für } i = \frac{k+1}{2},\dots,k-1 \\ 3m+k & \text{für } i = k \\ m+i & \text{für } i = k+1,\dots,m-1. \end{cases}$$

Ist m ungerade und $k \in \{1,\dots,m-1\}$ gerade oder ist m gerade und k ungerade, so setzen wir

$$h_i := \begin{cases} 2m+i & \text{für } i = 1,\dots,k-1 \\ 4m+k & \text{für } i = k \\ 2m+i & \text{für } i = k+1,\dots,\frac{m+k-1}{2} \\ m+i & \text{für } i = \frac{m+k+1}{2},\dots,m-1. \end{cases}$$

Man prüft in jedem Fall sofort nach, daß $h_i+h_{k-i} = h_k$ für $i \in \{1,\dots,m-1\}$, $i \neq k$ gilt, während sonst $h_i+h_j > h_{i+j}$ ist. Insbesondere ist $\{h_1,\dots,h_{m-1}\}$ die Apéry-Menge einer symmetrischen Halbgruppe $H \in \mathfrak{H}_m$ mit $s_m(H) = s$. Aus der Diskussion ergibt sich, daß durch diese Halbgruppen für ungerades m genau m-1 verschiedene s-dimensionale Seiten von P_m festgelegt werden, für gerades m genau $\frac{m}{2}$ Seiten. Wir nennen sie $S_1,\dots,S_t$.

Ist $H \in \mathfrak{H}_m$ eine beliebige symmetrische Halbgruppe, so gibt es genau ein $k \in \{1,\dots,m-1\}$, so daß $\varepsilon_{i,k-i} = 1$ für $i \in \{1,\dots,m-1\}$, $i \neq k$. Es ist daher klar, daß H zu einer der Seiten $S_1,\dots,S_t$ oder zu einer Seite des topologischen Abschlusses genau eine dieser Seiten gehört. Umgekehrt ist jede Halbgruppe $H \in \mathfrak{H}_m$, die zu einer Seite eines $\overline{S}_\alpha$ gehört, sicher symmetrisch, denn für sie gibt es ein $k \in \{1,\dots,m-1\}$, so daß $\varepsilon_{i,k-i} = 1$ für alle $i \in \{1,\dots,m-1\}$ mit $i \neq k$. Der Satz ist damit bewiesen.

<u>2.10. Proposition.</u> $S_1,\dots,S_t$ seien die in 2.9 beschriebenen Seiten von P_m. Dann gilt:

a) Die zu $\bigcup_{k=1}^{t} S_k$ gehörigen Halbgruppen der Multiplizität m sind untereinander ähnlich. Es sind genau die symmetrischen Halbgruppen der Multiplizität m mit edim H = m-1.

b) Ist m eine Primzahl, so ist $\{S_1,\dots,S_{m-1}\}$ eine Äquivalenzklasse unter der Operation von $\mathrm{Aut}(G_m)$ auf der Menge der Seiten von P_m. Die zu $\bigcup_{k=1}^{m-1} S_k$ gehörigen Halbgruppen der Multiplizität m sind in diesem Fall zueinander sehr ähnlich.

Beweis. a) Gehört $H \in \mathfrak{H}_m$ zu $\bigcup_{k=1}^{t} S_k$ und ist $M_m(H) = (\varepsilon_{ij})$, so gibt es ein $k \in \{1,\dots,m-1\}$, so daß $\varepsilon_{ik-i} = 1$ für $i \in \{1,\dots,m-1\}, i \neq k$, während sonst $\varepsilon_{ij} = 0$ ist.
Ist $m(H) = m$, so ergibt sich aus 2.1c), daß edim $H = m-1$ ist. Nach 2.1c) ist ebenfalls klar, daß jede symmetrische Halbgruppe H mit $m(H) = m$ und edim $H = m-1$ eine wie oben angegebene Matrix besitzt und daher zu $\bigcup_{k=1}^{t} S_k$ gehört.

Gehört auch $H' \in \mathfrak{H}_m$ zu $\bigcup_{k=1}^{t} S_k$ und ist $M_m(H') = (\varepsilon'_{ij})$, so gibt es ein $\ell \in \{1,\dots,m-1\}$ mit $\varepsilon'_{j,\ell-j} = 1$ für jedes $j \in \{1,\dots,m-1\}$ mit $j \neq \ell$, während sonst $\varepsilon'_{ik} = 0$. Man findet sofort ein $\sigma \in S_{m-1}$, das den Bedingungen (3) aus 2.3 genügt. Daher ist H' zu H ähnlich.
b) Ist m eine Primzahl, so ist $|\mathrm{Aut}(G_m)| = m-1$ und man erhält aus einer der Seiten S_k durch Anwendung der $\sigma \in \mathrm{Aut}(G_m)$ alle diese Seiten.

Wir geben nun an, wie $s_m(H)$ für $H \in \mathfrak{H}_m$ berechnet werden kann, wenn $K[\![H]\!]$ durch Erzeugende und Relationen gegeben ist.

<u>2.11. Satz.</u> Sei K ein Körper der Charakteristik 0. $\{n_o,\dots,n_\ell\}$ sei ein Erzeugendensystem von $H \in \mathfrak{H}_m$ und

(5) $\quad K[\![H]\!] = K[\![X_o,\dots,X_\ell]\!]/(F_1,\dots,F_s) \quad (X_i \mapsto t^{n_i})$

eine Präsentation von $K[\![H]\!]$ mit homogenen Polynomen F_i vom Grad ν_i (bzgl. der durch H induzierten Graduierung). Es sei L der Quotientenkörper von $K[\![H]\!]$ und a die Anzahl der n_i mit $n_i - m \notin H$, b die Maximalzahl über L linear unabhängiger Differentiale $dF_i := \sum_{k=o}^{\ell} \frac{\partial F_i}{\partial t^{n_k}} dX_k$ mit

$\nu_i - m \notin H$. Dann ist

$$s_m(H) = a - b.$$

Beweis. Sei $I := (F_1,\dots,F_s)$, $\{h_1,\dots,h_{m-1}\}$ die Apéry-Menge von H und $M_m(H) = (\varepsilon_{ij})$.

Bekanntlich hat man eine exakte Sequenz graduierter $K[\![H]\!]$-Moduln und homogener Abbildungen

$$0 \to \mathrm{Der}_K(K[\![H]\!]) \to \bigoplus_{i=0}^{\ell} K[\![H]\!]\frac{\partial}{\partial X_i} \to \mathrm{Hom}_{K[\![H]\!]}(I/I^2, K[\![H]\!]) \to T^1 \to 0,$$

wobei T^1 unabhängig von der Wahl der Präsentation (5) ist (1.Kotangentenfunktor). $T^1(-m)$ bezeichne den homogenen Anteil vom Grad $-m$ von T^1. Man stellt leicht fest, daß

$$\dim_K T^1(-m) = a - b - 1.$$

Wir betrachten nun andererseits die zu $\{m,h_1,\dots,h_{m-1}\}$ gehörige Präsentation

(6) $K[\![H]\!] = K[\![X_0,\dots,X_{m-1}]\!]/(\{X_iX_j - X_0^{\alpha_{ij}}X_{i+j}\}_{1\le i\le j\le m-1,\, i+j\neq m})$.

Da $h_i - m \notin H$ für $i=1,\dots,m-1$, ist hier $a = m-1$. Zur Berechnung von b hat man nur die Polynome $X_iX_j - X_0^{\alpha_{ij}}X_{i+j}$ mit $\alpha_{ij} = 0$ heranzuziehen, da nur für diese der Grad nicht in m+H liegt. Sie sind durch die Bedingung $\varepsilon_{ij} = 1$ bestimmt. Statt der Differentiale

$$t^{h_i}dX_j + t^{h_j}dX_i - dX_{i+j}$$

kann man auch die Differentiale

$$\frac{dX_i}{t^{h_i}} + \frac{dX_j}{t^{h_j}} - \frac{dX_{i+j}}{t^{h_{i+j}}}$$

betrachten. Die Dimension des L-Vektorraums, den sie aufspannen, ist gleich der Dimension des K-Vektorraums, den die E_{ij} mit $\varepsilon_{ij} = 1$ aufspannen, also gilt

$$b = m-1-s_m(H)$$

und $s_m(H) = a - b$.

<u>2.12. Zusatz.</u> a) $s_m(H) = \dim_k T^1(-m)+1$.

b) Ist H symmetrisch mit dem Führer c, so ist

$$s_m(H) = \dim_K(\Omega^1_{K[\![H]\!]/K}(c+m+1))$$

(homogener Anteil vom Grad c+m+1 des Differentialmoduls).

a) wurde während des Beweises von 2.11 gezeigt und b) folgt durch eine einfache Anwendung des lokalen Dualitätssatzes.

<u>2.13. Korollar.</u> Für jede numerische Halbgruppe H ist $s_m(H) = 1$, wenn m genügend groß ist.

Bekanntlich ist T^1 ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und daher $T^1(-m) = 0$ für große m.

<u>2.14. Korollar.</u>

a) Sei $H = \langle m,q\rangle$, $q > m$, $ggT(m,q) = 1$.
Dann ist $K[\![H]\!] = K[\![X_o,X_1]\!]/(X_o^q-X_1^m)$ und aus 2.11 ergibt sich sofort

$$s_m(H) = s(H) = 1.$$

b) H sei eine numerische Halbgruppe der Multiplizität m, die von $n_o = m$, n_1, n_2 minimal erzeugt wird. Für das minimale Relationensystem in $K[\![X_o,X_1,X_2]\!]$ gibt es nach [7] folgende Möglichkeiten (im folgenden sind alle Exponenten positiv):

α) H ist kein vollständiger Durchschnitt:

$$X_o^{c_o}-X_1^{r_{o1}}X_2^{r_{o2}}, X_1^{c_1}-X_o^{r_{1o}}X_2^{r_{12}}, X_2^{c_2}-X_o^{r_{2o}}X_1^{r_{21}}$$

Man findet $s(H) = 2$.

β) H ist vollständiger Durchschnitt:

i) $X_o^{c_o}-X_1^{c_1}, X_o^{c_o}-X_2^{c_2}$: $s(H) = 2$

ii) $X_o^{c_o}-X_1^{r_{o1}}X_2^{r_{o2}}, X_1^{c_1}-X_2^{c_2}$: $s(H) = 1$

iii) $X_o^{c_o}-X_2^{c_2}, X_1^{c_1}-X_o^{r_{1o}}X_2^{r_{12}}$: $s(H) = 2$

iv) $X_o^{c_o}-X_1^{c_1}, X_2^{c_2}-X_o^{r_{2o}}X_1^{r_{21}}$: $s(H) = 2$.

Entsprechende Betrachtungen kann man für die symmetrischen Halbgruppen mit 4 Erzeugenden ([3]) oder die fastvollständigen Durchschnitte mit 4 Erzeugenden ([10]) anstellen.

Wir zeigen noch

2.15. Proposition. H sei eine numerische Halbgruppe der Multiplizität m und der Abweichung d. Dann gilt

$$s(H) \leq \sqrt{2m + 2d - \frac{7}{4}} - \frac{1}{2} .$$

Beweis. Nach 2.11 (angewandt auf das minimale Erzeugendensystem von H) ist $s(H) \leq \mathrm{edim}(H) - 1$. Die gewünschte Abschätzung ergibt sich durch eine leichte Rechnung, wenn man das folgende Lemma auf $A := A_m(H)$ anwendet.

<u>2.16. Lemma.</u> Sei $(A,\mathfrak{m})$ eine endlichdimensionale lokale K-Algebra mit $\dim_K A = m$. A besitze die Einbettungsdimension β und die Abweichung d. Dann ist

$$\binom{\beta+1}{2} \leq m + d - 1.$$

Beweis. Schreibe $A = K[\![X_1,\ldots,X_\beta]\!]/(q_1,\ldots,q_{\beta+d})$ und gehe zu $A/\mathfrak{m}^3$ über.

§ 3. Erzeugende Funktionen

Die erzeugende Funktion (Hilbertreihe) für die Gitterpunkte auf P_m ist die formale Potenzreihe

$$H_m := \sum_{\mu \in P_m \cap \mathbb{N}^{m-1}} X^\mu \in \mathbb{C}[\![X_1,\ldots,X_{m-1}]\!].$$

Hierbei wurde für $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})$ abkürzend $X_1^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot X_{m-1}^{\mu_{m-1}} =: X^\mu$ gesetzt. Bei der Substitution $X_i \mapsto t$ $(i=1,\ldots,m-1)$ geht H_m über in eine formale Potenzreihe in der Variablen t

$$\widetilde{H_m} := \sum_{g\in\mathbb{N}} h_m(g)\cdot t^g \in \mathbb{C}[\![t]\!]$$

mit den am Ende von § 1 eingeführten Funktionen $h_m(g)$, die angeben, wieviele Halbgruppen $H \in \mathfrak{H}_m$ mit g Lücken es gibt.

Um genauere Aussagen über die Hilbertreihen H_m, $\widetilde{H_m}$ und einige verwandte Funktionen zu erlangen, werden wir Sätze von Stanley ([9],Chap.I) verwenden. Die Theorie von Stanley ist für lineare diophantische Gleichungssysteme formuliert, während wir es hier mit Ungleichungssystemen zu tun haben. Ein lineares diophantisches Ungleichungssystem läßt sich aber durch Einführung zusätzlicher Variablen sofort auf ein Gleichungssystem zurückführen. Dabei übersetzen sich die Sätze für Gleichungssysteme in solche für Ungleichungssysteme. Da diese Übertragungen in jedem Fall sehr einfach sind, werden sie im folgenden nicht näher begründet.

Allgemein bezeichnen wir für eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^{m-1}$ mit $H_K \in \mathbb{C}[\![X_1,\ldots,X_{m-1}]\!]$ die erzeugende Funktion für die

Punkte von $K \cap \mathbb{N}^{m-1}$ und mit $\widetilde{H}_K \in \mathbb{C}[\![t]\!]$ die entsprechende Reihe in der Variablen t. Wir sind hauptsächlich an den Fällen interessiert, daß K eine offene oder abgeschlossene Seite von P_m ist, oder daß

$$K = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Aut}(G_m)} \sigma(S)$$

die Vereinigung der zu einer offenen Seite S von P_m äquivalenten Seiten bzgl. der Operation von $\mathrm{Aut}(G_m)$ ist. Wir betrachten auch die erzeugende Funktion $H_m^{sym} \in \mathbb{C}[\![X_1,\dots,X_{m-1}]\!]$ für die symmetrischen Halbgruppen aus $\mathfrak{h}_m$ und die entsprechende Funktion $\widetilde{H}_m^{sym} \in \mathbb{C}[\![t]\!]$.

Aus 1.4d) erhalten wir unmittelbar die folgende Aussage:

3.1. Bemerkung. H_m^* sei die Hilbertreihe für den Rand von P_m und $\mathring{H}_m$ die für das Innere von P_m. Dann gelten die Formeln

$$H_m = \frac{H_m^*}{1-X_1\cdot\ldots\cdot X_{m-1}} \quad , \quad \mathring{H}_m = X_1\cdot\ldots\cdot X_{m-1}\cdot H_m .$$

Wie früher sei $\{\delta_1,\dots,\delta_t\}$ das kanonische Repräsentantensystem für die Kanten von P_m^*. Ist S eine Seite von P_m und $\overline{S^*}$ der topologische Abschluß der S in P_m^* entsprechenden Seite S^* von P_m^*, so können wir die Unteralgebra

$$R_{\overline{S^*}} := \mathbb{C}[\{X^\mu\}_{\mu \in \overline{S^*} \cap \mathbb{N}^{m-1}}]$$

der Polynomalgebra $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_{m-1}]$ betrachten. Es ist eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra bzgl. des Totalgrads im Polynomring, die von $X^{\delta_1},\dots,X^{\delta_\tau}$ erzeugt wird, wenn $\delta_1,\dots,\delta_\tau$

diejenigen Kantenvektoren aus $\{\delta_1,\ldots,\delta_t\}$ sind, die auf $\overline{S_*}$ liegen. Nach eine Satz von Hochster ([9], Chap.I, 5.11) ist $R_{\overline{S*}}$ ein Cohen-Macaulay-Ring. Seine Krulldimension ist gleich der Dimension der Seite S von P_m.

Durch

$$M_S := \bigoplus_{\mu\in S\cap\mathbb{N}^{m-1}} \mathbb{C}\cdot X^{\mu} \quad \text{und} \quad M_{\overline{S}} := \bigoplus_{\mu\in\overline{S}\cap\mathbb{N}^{m-1}} \mathbb{C}\cdot X^{\mu}$$

werden zwei $\mathbb{Z}$-graduierte $R_{\overline{S*}}$-Untermoduln von $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{m-1}]$ definiert. Sie sind endlich erzeugt ([9], Chap.I, 3.2). Für M_S betrachte man hierbei, daß auch $S \cap \mathbb{N}^{m-1}$ die Lösungsmenge eines (inhomogenen) linearen Ungleichungssystems ist: Ersetze in dem $\overline{S}$ definierendem System jede Ungleichung $E_{ij} \geq a$ durch $E_{ij} \geq a+1$. Nach [9], Chap.I, 7.7 sind die $M_{\overline{S}}$ Cohen-Macaulay-Moduln, da $\overline{S}$ stets den Punkt $(-\frac{1}{m},-\frac{2}{m},\ldots,-\frac{m-1}{m})$ enthält.

Jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(G_m)$ induziert einen homogenen $\mathbb{C}$-Algebrenisomorphismus

$$R_{\overline{S*}} \xrightarrow{\sim} R_{\overline{\sigma(S)*}}$$

der X^{μ} für $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}) \in \overline{S*} \cap \mathbb{N}^{m-1}$ auf $X^{\sigma(\mu)}$ mit $\sigma(\mu) := (\mu_{\sigma(1)},\ldots,\mu_{\sigma(m-1)})$ abbildet. Daher sind auch $M_{\sigma(S)}$ und $M_{\overline{\sigma(S)}}$ in natürlicher Weise endlich erzeugte graduierte $R_{\overline{S*}}$-Moduln und mit $K := \bigcup_{\sigma\in\mathrm{Aut}(G_m)} \sigma(S)$ gilt dies auch für $M_K = \sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(G_m)} M_{\sigma(S)}$.

Aus [9], Chap.I, § 2 entnimmt man zunächst die folgenden Aussagen:

3.2. Proposition. S sei eine s-dimensionale Seite von P_m und $\delta_1,\dots,\delta_\tau$ seien die zu $\overline{S_*}$ gehörigen Kanten aus dem System $\{\delta_1,\dots,\delta_t\}$. Dann gilt:

a) H_S läßt sich als rationale Funktion in der Form

$$H_S = \frac{F_S}{\prod_{i=1}^{\tau}(1-X^{\delta_i})} \quad , \quad F_S \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{m-1}]$$

darstellen. Eine entsprechende Darstellung mit dem gleichen Nenner besitzt auch $H_{\overline{S}}$. Insbesondere ist H_m von der Form

$$H_m = \frac{F_m}{\prod_{i=1}^{t}(1-X^{\delta_i})} \quad , \quad F_m \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{m-1}].$$

b) Es gibt s Zahlen $c_i \in \mathbb{N}_+$ $(i=1,\dots,s)$, so daß

$$\tilde{H}_S = \frac{\tilde{F}_S}{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{c_i})} \quad , \quad \tilde{F}_S \in \mathbb{Z}[t].$$

Eine entsprechende Darstellung mit dem gleichen Nenner hat man auch für $\tilde{H}_{\overline{S}}$ und $\tilde{H}_K$, wenn $K = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Aut}(G_m)} \sigma(S)$.

c) Ist m eine Primzahl, so hat auch $\tilde{H}_m^{sym}$ eine Darstellung

$$\tilde{H}_m^{sym} = \frac{\tilde{F}_m^{sym}}{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{c_i})} \qquad (\tilde{F}_m^{sym} \in \mathbb{Z}[t],\ c_i \in \mathbb{N}_+)$$

wobei $s = \frac{m-1}{2}$.

Beweis. a) folgt aus [9], Chap. I, 2.3, da die Monome X^{δ_i} $(i=1,\dots,\tau)$ die $\mathbb{C}$-Algebra $R_{\overline{S*}}$ erzeugen.

b) $R_{\overline{S*}}$ besitzt ein homogenes Parametersystem $y_1,\ldots,y_s$ und ist ein endlicher Modul über der Polynomalgebra $\mathbb{C}[y_1,\ldots,y_s]$. M_S, $M_{\overline{S}}$ und M_K sind daher endliche $\mathbb{C}[y_1,\ldots,y_s]$-Moduln. b) folgt nun wieder aus [9], Chap. I, 2.3, wobei die c_i die Grade der y_i sind.

c) Nach 2.9 und 2.10 gibt es eine Seite S von P_m der Dimension $s := \frac{m-1}{2}$, so daß gilt: Die Gitterpunkte auf $\bigcup_{\sigma\in \mathrm{Aut}(G_m)} \overline{\sigma(S)}$ gehören zu symmetrischen Halbgruppen und für jede symmetrische Halbgruppe $H \in \mathcal{H}_m$ gibt es genau ein $\sigma \in \mathrm{Aut}(G_m)$, so daß der H entsprechende Gitterpunkt auf $\overline{\sigma(S)}$ liegt. Daher ist $\tilde{H}_m^{sym} = \sum_{\sigma\in \mathrm{Aut}(G_m)} H_{\overline{\sigma(S)}}$ und die Behauptung folgt aus b).

Durch 3.2a) ist die Aufgabe, die auf S liegenden Gitterpunkte zu berechnen, darauf zurückgeführt, die Kantenvektoren von $\overline{S*}$ zu ermitteln und ferner das Zählerpolynom F_S der erzeugenden Funktion H_S zu berechnen. Entsprechend kommt es für die in 3.2b) und 3.2c) betrachteten Reihen darauf an, die Zahlen c_i und die entsprechenden Zählerpolynome zu bestimmen. In Anhang C sind einige dieser Funktionen für kleine m angegeben.

Im weiteren kommt es nun darauf an, Aussagen über die Zählerpolynome der erzeugenden Funktionen herzuleiten und insbesondere ihren Grad zu berechnen oder abzuschätzen. Wir verstehen unter dem Grad einer rationalen Funktion H die Differenz aus Zählergrad und Nennergrad. Bezeichnet H_∞ die Entwicklung von H als eine Potenzreihe in $X_1^{-1},\dots,X_{m-1}^{-1}$, so gilt für den Grad von H und die Ordnung von H_∞ die Beziehung

$$\deg_{X_i} H = -\mathrm{ord}_{X_i^{-1}} H_\infty .$$

Weiterhin sei S eine s-dimensionale Seite von P_m, die mindestens einen Gitterpunkt enthält, und es sei S' die S entsprechende Seite des Polyederkegels P_m' bei der affinen Transformation (vgl. 1.1c))

$$(x_1,\dots,x_{m-1}) \mapsto (-x_{m-1}-1,-x_{m-2}-1,\dots,-x_1-1).$$

Das Reziprozitätsgesetz von Stanley ([9], Chap.I, 8.1) nimmt in unserer Situation die folgende Form an: Bezeichnet $H_{S'}$ die Hilbertreihe für die Punkte von $S' \cap \mathbb{Z}^{m-1}$ (die sämtlich negative Koordinaten haben), so gilt:

$$(1) \qquad H_{\overline{S}}(X_1,\dots,X_{m-1})_\infty = (-1)^s H_{S'}(X_1,\dots,X_{m-1})$$
$$= (-1)^s \frac{1}{X_1 \dots X_{m-1}} H_S(X_{m-1}^{-1},\dots,X_1^{-1}).$$

Hieraus ergibt sich

<u>3.3. Proposition.</u> Es ist

$$\deg_{X_i} H_{\overline{S}} \le -1 \text{ und } \deg_{X_i} H_S \le -1 \text{ für } i=1,\dots,m-1.$$

Ferner gilt

$$\deg \tilde{H}_S \le -(m-1).$$

Ebenso ist

$$\deg_{X_i} H_m^{sym} \le -1 \quad (i=1,\dots,m-1)$$

und

$$\deg \tilde{H}_m^{sym} \le -(m-1).$$

Beweis. Wegen (1) ist

$$\operatorname{ord}_{X_i^{-1}}(H_{\overline{S}})_\infty = 1 + \operatorname{ord}_{X_i} H_S(X_{m-1},\ldots,X_1) \geq 1$$

und somit

$$\deg_{X_i} H_{\overline{S}} \leq -1.$$

Die Hilbertreihe H_S ergibt sich aus $H_{\overline{S}}$, indem man die Hilbertreihe über den Rand von $\overline{S}$ subtrahiert. Mittels Induktion sieht man daher, daß auch $\deg_{X_i} H_S \leq -1$ $(i=1,\ldots,m-1)$. Indem man alle X_i zu t spezialisiert, findet man, daß $\deg \tilde{H}_S \leq -(m-1)$ ist.

H_m^{sym} ist eine Summe von Hilbertreihen für gewisse Seiten von P_m. Daher ist klar, daß die Aussagen auch für H_m^{sym} und $\tilde{H}_m^{sym}$ gelten.

Schreibt man nach 3.2

$$\tilde{H}_S = \frac{\tilde{F}_S}{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{c_i})} = \Sigma h_S(g)t^g \quad (\tilde{F}_S \in \mathbb{Z}[t],\ c_i \in \mathbb{N}_+)$$

so gilt $\deg \tilde{F}_S \leq \sum_{i=1}^{s} c_i - (m-1)$. Nach [9], Chap.O, 1.5 ist die Funktion $h_S(g)$ für alle $g \in \mathbb{N}$ durch ein Quasipolynom vom Grad s-1 und der Periode $\mathrm{klgV}(c_1,\ldots,c_s)$ darstellbar; es ist i.a. jedoch kein Polynom.

Für die Hilbertreihen H_m und $\tilde{H}_m$ kann man genauere Aussagen machen:

<u>3.4. Satz.</u> Schreibe $H_m = \dfrac{F_m}{\prod_{j=1}^{t}(1-X^{\delta_j})}$ mit $F_m = \Sigma a_\mu X^\mu$

($a_\mu \in \mathbb{Z}$). Ferner sei $(d_1,\ldots,d_{m-1}) = \sum_{j=1}^{t} \delta_j - (2,\ldots,2)$.
Dann gilt:

a) $H_m(X_1,\ldots,X_{m-1})_\infty = (-1)^m \frac{1}{(X_1\cdot\ldots\cdot X_{m-1})^2} H_m(X_{m-1}^{-1},\ldots,X_1^{-1})$
und

$$F_m(X_1,\ldots,X_{m-1}) = (-1)^{t+m+1} X_1^{d_1}\cdot\ldots\cdot X_{m-1}^{d_{m-1}}\cdot F_m(X_{m-1}^{-1},\ldots,X_1^{-1}).$$

b) $\deg_{X_i} F_m = d_i$ und $\deg_{X_i} H_m = -2$ $(i=1,\ldots,m-1)$.

c) $a_{\mu_1\ldots\mu_{m-1}} = (-1)^{t+m+1} a_{d_{m-1}-\mu_{m-1},\ldots,d_1-\mu_1}$

für alle $(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$.

Beweis. Nach (1) und 3.1 gilt

$$H_m(X_1,\ldots,X_{m-1})_\infty = (-1)^{m-1}\frac{1}{X_1\cdot\ldots\cdot X_{m-1}} \mathring{H}_m(X_{m-1}^{-1},\ldots,X_1^{-1}) =$$

$$(-1)^{m-1}\frac{1}{(X_1\cdot\ldots\cdot X_{m-1})^2} H_m(X_{m-1}^{-1},\ldots,X_1^{-1}) =$$

$$(-1)^m \frac{1}{(X_1\cdot\ldots\cdot X_{m-1})^2} \cdot \frac{F_m(X_{m-1}^{-1},\ldots,X_1^{-1})}{\prod_{j=1}^{t}(1-X^{-\delta_j})}$$

wobei man in der letzten Gleichung zu beachten hat, daß der Nenner $\prod_{j=1}^{t}(1-X^{\delta_j})$ nach 1.3c) unter der Substitution $(X_1,\ldots,X_{m-1}) \mapsto (X_{m-1},\ldots,X_1)$ invariant ist. Schreibt man andererseits

$$H_m = (-1)^t \frac{1}{X^{\Sigma\delta_j}} \cdot \frac{F_m}{\Sigma(1-X^{-\delta_j})}$$

so liefert der Vergleich der beiden Reihenentwicklungen nach $X_1^{-1},\ldots,X_{m-1}^{-1}$ die Reziprozitätsaussage für F_m in 3.4a). b) und c) sind dann evident, wenn man noch berücksichtigt, daß $F_m(0) = 1$, da $0 \in P_m$.

Man beachte, daß für jede Primzahl m nach 1.2b) gilt:

$$d_1 = \ldots = d_{m-1}.$$

Der folgende Satz ist analog zu Resultaten von Stanley über magische Quadrate.

<u>3.5. Satz.</u> a) $\widetilde{H}_m$ besitzt eine Darstellung

$$\widetilde{H}_m = \frac{\widetilde{F}_m}{\prod_{i=1}^{m-1}(1-t^{c_i})}\quad,\quad \widetilde{F}_m \in \mathbb{Z}[t],\ c_i \in \mathbb{N}_+$$

wobei $\deg \widetilde{F}_m = \Sigma c_i - 2(m-1)$. Insbesondere ist $\deg \widetilde{H}_m = -2(m-1)$.

b) Es gilt

$$\widetilde{H}_m(t)_\infty = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{t^{2(m-1)}}\, \widetilde{H}_m(t^{-1})$$

und

$$\widetilde{F}_m(t) = t^{\Sigma c_i - 2(m-1)} \cdot \widetilde{F}_m(t^{-1}).$$

c) Schreibt man $\widetilde{F}_m(t) = \Sigma a_\nu t^\nu$ und setzt $\delta := \Sigma c_i - 2(m-1)$, so gilt

$$a_\nu = a_{\delta-\nu} \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N}$$

d) $h_m(g)$ ist für alle $g \in \mathbb{N}$ durch ein Quasipolynom vom Grad m-2 darstellbar. Bezeichnet h_m auch dieses Quasipolynom (als Funktion $h_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ betrachtet), so gilt

$$h_m(-1) = \ldots = h_m(-2m+3) = 0$$

$$h_m(g) = (-1)^m h_m(-g-2(m-2)) \quad \text{für } g \in \mathbb{N}.$$

Beweis. a),b) und c) ergeben sich unmittelbar aus 3.4, wenn man dort $X_1 = \ldots = X_{m-1} = t$ setzt. Für d) beachte man, daß nach [9], Chap. I, 8.4 gilt:

$$\widetilde{H}_m(t)_\infty = - \sum_{g>o} h_m(-g)t^{-g}.$$

Dieser Satz ist dort für Polynomfunktionen h_m bewiesen, gilt aber auch für Quasipolynome, wie Stanley im Anschluß an den Beweis bemerkt. Nach b) ist andererseits

$$\widetilde{H}_m(t)_\infty = (-1)^{m-1} \frac{1}{t^{2(m-1)}} \sum_{g \geq o} h_m(g)t^{-g}$$

und die Beziehungen in d) folgen nun durch Koeffizientenvergleich.

Anhang A. Einige Daten über P_m und P_m^*.

m	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Kantenzahl von P_m	2	4	8	11	30	47	122	225	812
Seitenzahl von P_m (ohne Spitze)	3	9	31	83	399	1347			

Das Repräsentantensystem $\{\delta_1,\ldots,\delta_t\}$ für die Kanten von P_m^*:

$m=3$: $\delta_1=(1,2)$, $\delta_2=(2,1)$ $\qquad\qquad \Sigma\delta_i=(3,3)$

$m=4$: $\delta_1=(1,2,3)$, $\delta_2=(3,2,1)$
$\delta_3=(1,0,1)$, $\delta_4=(1,2,1)$ $\qquad\qquad \Sigma\delta_i=(6,6,6)$

$m=5$: $\delta_1=(1,2,3,4)$, $\delta_2=(4,3,2,1)$
$\delta_3=(2,4,1,3)$, $\delta_4=(3,1,4,2)$
$\delta_5=(6,2,3,4)$, $\delta_6=(4,3,2,6)$
$\delta_7=(2,4,6,3)$, $\delta_8=(3,6,4,2)$ $\qquad\qquad \Sigma\delta_i=(25,25,25,25)$

$m=6$: $\delta_1=(1,2,3,4,5)$, $\delta_2=(5,4,3,2,1)$
$\delta_3=(1,2,3,4,2)$, $\delta_4=(2,4,3,2,1)$
$\delta_5=(1,2,3,1,2)$, $\delta_6=(2,1,3,2,1)$
$\delta_7=(1,2,0,1,2)$, $\delta_8=(2,1,0,2,1)$
$\delta_9=(1,0,1,0,1)$, $\delta_{10}=(1,2,1,2,1)$
$\delta_{11}=(1,2,3,2,1)$ $\qquad\qquad \Sigma\delta_i=(18,22,23,22,18)$

$m=7$: $\delta_1=(1,2,3,4,5,6)$, $\delta_2=(6,5,4,3,2,1)$

$\delta_3=(2,4,6,1,3,5)$, $\delta_4=(5,3,1,6,4,2)$

$\delta_5=(3,6,2,5,1,4)$, $\delta_6=(4,1,5,2,6,3)$

$\delta_7=(8,2,3,4,5,6)$, $\delta_8=(6,5,4,3,2,8)$

$\delta_9=(2,4,6,8,3,5)$, $\delta_{10}=(5,3,8,6,4,2)$

$\delta_{11}=(3,6,2,5,8,4)$, $\delta_{12}=(4,8,5,2,6,3)$

$\delta_{13}=(2,4,6,8,10,5)$, $\delta_{14}=(5,10,8,6,4,2)$

$\delta_{15}=(4,8,5,2,6,10)$, $\delta_{16}=(10,6,2,5,8,4)$

$\delta_{17}=(6,5,4,10,2,8)$, $\delta_{18}=(8,2,10,4,5,6)$

$\delta_{19}=(3,6,9,12,8,4)$, $\delta_{20}=(4,8,12,9,6,3)$

$\delta_{21}=(6,12,4,3,9,8)$, $\delta_{22}=(8,9,3,4,12,6)$

$\delta_{23}=(9,4,6,8,3,12)$, $\delta_{24}=(12,3,8,6,4,9)$

$\delta_{25}=(3,6,9,5,8,4)$, $\delta_{26}=(4,8,5,9,6,3)$

$\delta_{27}=(6,5,4,3,9,8)$, $\delta_{28}=(8,9,3,4,5,6)$

$\delta_{29}=(9,4,6,8,3,5)$, $\delta_{30}=(5,3,8,6,4,9)$

$\Sigma\delta_i = 161\cdot(1,\ldots,1)$.

m=8: $\delta_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ $\delta_2 = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$
$\delta_3 = (3, 6, 1, 4, 7, 2, 5)$ $\delta_4 = (5, 2, 7, 4, 1, 6, 3)$
$\delta_5 = (9, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ $\delta_6 = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 9)$
$\delta_7 = (3, 6, 9, 4, 7, 2, 5)$ $\delta_8 = (5, 2, 7, 4, 9, 6, 3)$
$\delta_9 = (9, 10, 3, 4, 5, 6, 7)$ $\delta_{10} = (7, 6, 5, 4, 3, 10, 9)$
$\delta_{11} = (3, 6, 9, 4, 7, 10, 5)$ $\delta_{12} = (5, 10, 7, 4, 9, 6, 3)$
$\delta_{13} = (9, 10, 3, 12, 5, 6, 7)$ $\delta_{14} = (7, 6, 5, 12, 3, 10, 9)$
$\delta_{15} = (3, 6, 9, 12, 7, 10, 5)$ $\delta_{16} = (5, 10, 7, 12, 9, 6, 3)$
$\delta_{17} = (9, 10, 3, 12, 5, 6, 15)$ $\delta_{18} = (15, 6, 5, 12, 3, 10, 9)$
$\delta_{19} = (3, 6, 9, 12, 15, 10, 5)$ $\delta_{20} = (5, 10, 15, 12, 9, 6, 3)$
$\delta_{21} = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$ $\delta_{22} = (1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)$
$\delta_{23} = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 3)$ $\delta_{24} = (3, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$
$\delta_{25} = (1, 2, 1, 2, 3, 2, 1)$ $\delta_{26} = (1, 2, 3, 2, 1, 2, 1)$
$\delta_{27} = (1, 2, 3, 0, 1, 2, 3)$ $\delta_{28} = (3, 2, 1, 0, 3, 2, 1)$
$\delta_{29} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 3)$ $\delta_{30} = (3, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$
$\delta_{31} = (3, 6, 1, 4, 3, 2, 5)$ $\delta_{32} = (5, 2, 3, 4, 1, 6, 3)$
$\delta_{33} = (1, 2, 3, 4, 5, 2, 3)$ $\delta_{34} = (3, 2, 5, 4, 3, 2, 1)$
$\delta_{35} = (5, 2, 3, 4, 1, 2, 3)$ $\delta_{36} = (3, 2, 1, 4, 3, 2, 5)$
$\delta_{37} = (5, 2, 3, 4, 5, 6, 3)$ $\delta_{38} = (3, 6, 5, 4, 3, 2, 5)$
$\delta_{39} = (1, 2, 3, 4, 1, 2, 3)$ $\delta_{40} = (3, 2, 1, 4, 3, 2, 1)$
$\delta_{41} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\delta_{42} = (1, 2, 1, 0, 1, 2, 1)$
$\delta_{43} = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ $\delta_{44} = (1, 2, 3, 2, 3, 2, 1)$
$\delta_{45} = (3, 2, 1, 2, 1, 2, 3)$ $\delta_{46} = (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$
$\delta_{47} = (3, 2, 1, 4, 1, 2, 3)$

$\Sigma\delta_i = (179, 191, 179, 218, 179, 191, 179)$

```
m=9
( 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5)
( 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
( 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
( 8,16,24,14,22,12,11,10)
( 4, 8,12, 7,11, 6,10, 5)
( 4, 2, 3, 4, 2, 6, 4, 2)
( 7, 5,12,10, 8, 6, 4,11)
( 4, 2, 3, 4, 2, 6, 4, 5)
( 5,10, 6, 2, 7,12, 8, 4)
( 4, 8,12,16,11,15,10, 5)
( 5, 1, 6, 2, 4, 3, 2, 4)
(10, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
( 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 2)
( 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2)
(10,11,12, 4,14, 6, 7, 8)
( 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)
( 1, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 2)
( 8, 7,15, 5, 4,12,11,10)
(10, 2,12, 4, 5, 6, 7, 8)
(11, 4, 6, 8,10,12, 5,16)
( 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4)
(10,11,12, 4, 5, 6,16, 8)
( 7, 5,12,10, 8, 6, 4, 2)
( 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2)
( 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2)
(11, 4, 6, 8,10, 3, 5, 7)
( 7, 5, 3,10, 8, 6, 4, 2)
( 4, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 2)
( 8, 7, 6, 5, 4,12,11,10)
( 2, 4, 3, 2, 4, 3, 2, 1)
(16, 5,12,10, 8,15, 4,11)
(10,11,12, 4, 5,15,16, 8)
( 4, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 2)
( 4, 8,12, 7, 2, 6,10,14)
( 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 2)
( 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2)
( 2, 4, 3, 5, 4, 3, 2, 1)
( 7, 5, 3,10, 8, 6, 4,11)
(11,22,24, 8,10,12,14,16)
( 5,10,15,20,16,12, 8, 4)
( 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1)
( 8, 7, 6,14, 4,12, 2,10)
( 2, 4, 6, 2, 1, 3, 5, 4)
( 8, 7, 6, 5, 4, 3,11,10)
( 2, 4, 6, 8,10,12, 5, 7)
(11, 4,15, 8,10,12, 5, 7)
( 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 4)
( 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 4)
(10,11,12, 4, 5,15, 7, 8)
( 5,10,15,11,16,12, 8, 4)
( 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
(10,20,12, 4, 5,15,16, 8)
( 4, 8,12,16,20,15,10, 5)
( 2, 4, 6, 8,10, 3, 5, 7)
( 5,10, 6,11, 7, 3, 8, 4)
( 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7)
( 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2,10)
( 2, 4, 6, 2, 4, 3, 2, 4)
( 2, 4, 6, 2, 4, 3, 5, 4)
( 4, 8, 3, 7, 2, 6,10, 5)
( 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2)
(10, 2,12, 4,14, 6, 7, 8)
( 4, 8, 3, 7,11, 6,10, 5)
( 8, 7, 6,14, 4,12,11,10)
(16, 5,12,10, 8,15, 4,20)
(11, 4, 6, 8,10,12, 5, 7)
( 5, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 4)
(10,11,12,22,14,24,16, 8)
(20, 4,15, 8,10,12, 5,16)
( 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1)
( 2, 4, 3, 2, 1, 3, 5, 4)
( 4, 2, 6, 4, 2, 3, 4, 2)
( 5,10, 6,11,16,12, 8, 4)
(14,10, 6, 2, 7,12, 8, 4)
( 7,14,12,10, 8, 6, 4, 2)
( 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 4)
( 4, 8,12,16,11, 6,10, 5)
( 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 1)
( 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1)
( 4, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 5)
( 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
( 4, 8,12, 7, 2, 6,10, 5)
( 1, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 2)
( 7,14,12,10, 8, 6, 4,11)
( 4, 5, 3, 1, 2, 3, 4, 2)
(14,10,24,11,16,12, 8,22)
( 2, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 1)
( 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
( 7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2)
( 8, 7, 6, 5, 4,12, 2,10)
(16, 5,12,10, 8, 6, 4,11)
( 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1)
(10,11,12, 4, 5, 6, 7, 8)
(22, 8,12,16,11,24,10,14)
( 8,16,15, 5, 4,12,11,10)
( 2, 4, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
( 4, 2, 3, 4, 2, 6, 1, 5)
( 5,10, 6, 2, 7, 3, 8, 4)
( 7, 5,12,10, 8,15, 4,11)
( 2, 4, 3, 2, 4, 6, 2, 4)
( 4, 8,12, 7,11, 6,10,14)
(14,10, 6,11, 7,12, 8, 4)
(11, 4, 6, 8,10,12,14, 7)
( 8,16, 6, 5, 4,12,11,10)
( 2, 4, 6, 5, 4, 3, 2, 4)
( 5,10, 6,11, 7,12, 8, 4)
( 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2)
( 5,10,15,11, 7,12, 8, 4)
(16,14,12,10, 8,24,22,11)
( 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)
( 4, 5, 3, 4, 2, 6, 4, 2)
( 4, 5, 3, 1, 2, 6, 4, 2)
( 2, 4, 6, 8,10,12,14, 7)
( 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1)
( 4, 8,12, 7,11,15,10, 5)
(10,11, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
( 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2)
( 4, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 2)
(11, 4,15, 8,10,12, 5,16)
( 8,16,15, 5, 4,12,20,10)
( 4, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2)
( 5, 4, 6, 2, 4, 3, 2, 4)
```

m=10

(3, 1, 4, 2, 5, 3, 6, 4, 2)
(21,12,13,14,15, 6, 7,18, 9)
(2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(4, 3, 2, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
(2, 4, 6, 3, 5, 2, 4, 6, 8)
(2, 4, 6, 8, 5, 7, 4, 6, 3)
(1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1)
(12,14, 6, 8,10, 7, 4,16, 8)
(3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)
(4, 3, 2, 6, 5, 4, 8, 2, 6)
(3, 6, 4, 2, 5, 3, 1, 4, 7)
(1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
(3, 6, 9, 7, 5, 3, 6, 4, 2)
(11,12, 3,14,15, 6, 7, 8, 9)
(1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 2, 1)
(3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3)
(1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)
(2, 4, 6, 8,10, 7, 9, 6, 3)
(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2)
(6, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4)
(6,12,13, 4, 5, 6, 7, 3, 9)
(3, 4, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3)
(2, 4, 6, 8, 5, 7, 9, 6, 3)
(4, 3, 2, 6, 5, 4, 3, 7, 6)
(9,18, 7, 6,15,14,13,12,21)
(1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)
(1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 1)
(13,26, 9,12,15,18,11,24,27)
(7,14,11,18, 5,12, 9, 6,13)
(13, 6, 9,12, 5, 6,11, 4, 7)
(8,11, 4,12, 5, 8, 6, 4, 7)
(4, 3, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 6)
(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(2, 4, 6, 3, 5, 7, 9, 6, 3)
(4, 8, 7,11, 5, 4, 8,12, 6)
(4, 3, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 6)
(1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1)
(1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3)
(3, 2, 3, 4, 3, 6, 3, 6, 3)
(4, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1)
(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)
(9, 8, 7, 6, 5,14, 3,12,11)
(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
(2, 4, 6, 8,10, 7, 4, 6, 3)
(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)
(1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4)
(3, 6, 4, 2, 0, 3, 6, 4, 2)
(3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7)
(11,12, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 4)
(9,18, 7, 6,15,14, 3,12,21)
(3, 6, 4, 2, 5, 3, 1, 4, 2)
(3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2)
(6,12, 3, 4, 5,11, 7, 8, 4)
(9,18, 7, 6, 5,14,13,12,11)
(1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1)
(11,12, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
(7, 4, 6, 8, 5,12, 9, 6, 3)
(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)
(7,14,11, 8,15,12, 9, 6, 3)
(8, 6, 4,12, 5, 8,11, 4, 7)
(3, 1, 4, 2, 0, 3, 1, 4, 2)
(1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2)

(1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(9, 8, 7, 6,10, 4, 3,12, 6)
(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(7, 4, 1, 3, 5, 2, 4, 6, 3)
(9, 3, 2, 6, 5, 4, 3, 7, 6)
(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3,12, 6)
(11,12, 3, 4,15, 6, 7, 8, 9)
(27,24,11,18,15,12, 9,26,13)
(3, 6, 9,12, 5, 8,11,14, 7)
(13, 6, 9,12, 5,18,11,14, 7)
(11,12, 3,14, 5, 6, 7, 8, 9)
(7, 4, 6, 3, 5, 2, 9, 6, 3)
(9, 8, 7, 6, 5, 4,13,12, 6)
(4, 8, 2, 6,10, 4, 3, 7, 6)
(2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)
(21,12, 3,14,15, 6, 7,18, 9)
(7, 4,11, 8, 5,12, 9, 6, 3)
(1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1)
(4, 8, 7, 6,10,14, 8,12, 6)
(3, 6, 4, 7, 5, 3, 6, 4, 2)
(3, 6, 3, 6, 3, 4, 3, 2, 3)
(1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 1)
(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
(9, 8, 2, 6, 5, 4, 3, 7, 6)
(6, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 4)
(1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(7,14,11,18,15,12, 9, 6, 3)
(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1)
(6, 7, 3, 4, 5, 6, 2, 8, 4)
(6, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 8, 4)
(2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)
(8, 6, 4,12,10, 8, 6,14, 7)
(6, 7, 8,14,10,16,12, 5, 4)
(1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2)
(13, 6, 9,12, 5, 8, 6, 4, 7)
(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(7,14,21,18,15,12, 9, 6,13)
(3, 6, 4, 2, 5, 8, 1, 4, 7)
(3, 6, 9,12, 5, 8,11, 4, 7)
(6, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4)
(6, 7, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 9)
(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3,12,11)
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4)
(7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3)
(3, 4, 1, 2, 5, 2, 1, 4, 3)
(4, 8, 7, 6, 5, 4, 8,12,11)
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4)
(4, 3, 2, 6, 0, 4, 3, 2, 6)
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
(3, 6, 4, 7, 5, 8, 6, 4, 2)
(6, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4)
(6,12, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
(11,12,13, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
(7, 4, 6, 8, 5,12, 4,11, 8)
(3, 6, 3, 2, 3, 6, 3, 4, 3)
(3, 6, 9,12,10, 8, 6, 4, 2)
(4, 3, 2, 6, 5, 4, 3, 2, 6)
(1, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1)
(3, 6, 9, 2, 5, 8,11, 4, 7)
(7, 4, 6, 8,10,12, 9, 6, 3)
(7, 4, 6, 8, 5,12, 9, 6,13)
(1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1)

m=10

(Forts.)

(2, 4, 6, 3, 5, 7, 4, 6, 3)
(7, 4, 6, 3, 5, 2, 4, 6, 3)
(2, 4, 1, 3, 5, 2, 4, 1, 3)
(11,12,13,14, 5, 6, 7,18, 9)
(7, 4, 1, 8, 5, 2, 4, 6, 3)
(2, 4, 6, 8, 5, 2, 4, 6, 3)
(11, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
(2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)
(4, 8, 2, 6, 5, 4, 3, 2, 6)
(1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1)
(3, 6, 4, 2, 5, 3, 6, 4, 2)
(3, 1, 4, 2, 5, 3, 1, 4, 2)
(6, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4)
(11,12,13,24,15,26,27,18, 9)
(3, 4, 3, 6, 3, 2, 3, 6, 3)
(13, 6, 9,12,15,16,21,14, 7)
(6,16, 4, 7,10, 8, 6,14,12)
(7, 4,11, 8,15,12, 9, 6, 3)
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 4)
(1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1)
(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2)
(4, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 6)
(3, 6, 9, 2, 5, 3, 6, 4, 7)
(6,12, 3, 4,10, 6, 7, 8, 9)
(1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1)
(3, 4, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 3)
(7,14, 6, 8,10,12, 4, 6, 8)
(3, 6, 9,12,15,18,11,14, 7)
(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)
(1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)
(1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1)
(3, 6, 9,12,15,18,21,14, 7)
(1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1)
(2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)
(11,12, 3,14,15, 6, 7,16, 9)
(3, 6, 9,12,15, 8,11,14, 7)
(1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)
(2, 4, 6, 3, 5, 2, 4, 6, 3)
(6, 7, 3, 4,10, 6, 2, 8, 9)
(4, 8, 2, 6, 5, 4, 3, 7, 6)
(4, 3, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
(8, 6, 4, 2, 5, 3, 6, 4, 2)
(4, 3, 2, 1, 5, 4, 3, 2, 1)
(3, 6, 9, 7, 5, 8, 6, 4, 2)
(2, 4, 1, 3, 5, 2, 4, 6, 3)
(1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 1)
(7, 4,11, 8, 5,12, 9, 6,13)

(3, 6, 9, 7,10, 8, 6, 4, 2)
(4, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
(2, 4, 6, 3, 0, 2, 4, 6, 3)
(9, 8, 7, 6, 5, 4,13,12,11)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)
(9,18, 7, 6,15,14, 3,12,11)
(7, 4, 6, 8, 5, 2, 4, 6, 3)
(1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)
(6, 7, 3, 4,10, 6, 2, 8, 4)
(7,14,11, 8, 5,12, 9, 6, 3)
(2, 4, 6, 8,10,12, 9, 6, 3)
(3, 6, 4, 2, 5, 3, 6, 4, 7)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1)
(3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1)
(6, 2, 3, 4, 0, 6, 2, 3, 4)
(1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4)
(6,12, 3, 4,10, 6, 2, 8, 9)
(3, 6, 9,12, 5, 8, 6, 4, 7)
(9, 8, 7, 6,15,14, 3,12,11)
(6,12, 8,14,10, 6, 7, 8, 4)
(3, 6, 9,12,15, 8,11, 4, 7)
(2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1)
(2, 4, 1, 3, 0, 2, 4, 1, 3)
(3, 6, 4, 2, 5, 8, 6, 4, 2)
(9, 8, 2, 6,10, 4, 3, 7, 6)
(7, 4,11, 8, 5,12, 4, 6, 8)
(4, 8,12,16,10,14, 8, 7, 6)
(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2,11)
(4, 3, 2, 1, 5, 4, 3, 2, 6)
(9, 8, 2, 6,10, 4, 3,12, 6)
(1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1)
(1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)
(1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3)
(9,18,27,26,15,24,13,12,11)
(3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 3)
(7,14,21,18,15,12, 9, 6, 3)
(6, 7, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4)
(3, 5, 4, 7,10, 8, 6, 4, 2)
(7, 4,11, 8, 5, 2, 9, 6, 3)
(2, 4, 6, 3, 5, 2, 4, 1, 7)
(3, 6, 9,12,10, 6, 5, 4, 7)
(3, 6, 4, 2, 5, 8, 6, 4, 7)
(6, 7, 3, 4, 5, 6, 2, 8, 9)
(1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1)
(9, 8, 7, 6,15, 4, 3,12,11)
(6, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4)

m=11

(21, 9, 8, 7,17,16,15,14,24,12)
(18,25,10, 6,24,20,16,12,30,15)
(27,21,15, 9,36,30,13,18,34,17)
(3, 5,13,10, 7,15,12, 9, 6,14)
(13, 4, 6, 8,10,12,14, 5, 7, 9)
(8, 5,13,10, 7, 4,12, 9,17,14)
(12,24,14,15,16,28,18,30, 9,21)
(1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1)
(10, 9, 8, 7, 6,16,15, 3,13,12)
(18,14,10, 6,24,20, 5,12,19,15)
(15,30,12,16,20,24,17,32,36,18)
(36,28,20,12,26,18,10,24,38,19)
(30,16,24,10,18,15,12,20,26,14)
(12,24,25,15, 5, 6,16,30,20,10)
(30,27,13,10,16,15,12,20,28,14)
(6,12, 7,13, 3,14, 9, 4,10, 5)
(16,20,19, 7, 6, 5,15,14,13,12)
(24,15, 6,30,10,12,14,16,18,20)
(30,16,24,10,29,15,12,20,26,14)
(30,27,24,10,16,15,12,20,28,14)
(30,16,13,10,18,15,12,20,28,14)
(17,12, 7,24, 8,14, 9,15,21,16)
(10,20,30,18, 6, 5,15,25,24,12)
(16,10,15,20,14, 8,13, 7,12, 6)
(1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
(15,30,12,16,20,24,28,32,36,18)
(2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1)
(6,12, 7,13, 8, 3, 9,15,10,16)
(5,10,15,20,14,19,24,18,12, 6)
(12,13, 3,15, 5, 6, 7, 8, 9,10)
(1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(9,18, 5, 3,12,10, 8, 6,15,13)
(1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(4, 8,12,16, 9, 2, 6,10,14,18)
(28,12,16,13,30,14, 9,15,21,27)
(8,16,13,21, 7, 4,12, 9,17,14)
(27,21,15, 9,14,30,13,18,12,28)
(15, 8,12,16, 9,13, 6,21, 3,18)
(12,13,14,15, 5, 6, 7,19, 9,10)
(10,20, 8, 7,17,16, 4,14,24,12)
(15,19,12, 5,20,13, 6,10,25,18)
(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2)
(15,19,12, 5, 9,24, 6,10,14,18)
(15,30,12,16,20,24, 6,10,25,18)
(15,19,12, 5, 9,13, 6,10,14, 7)
(18,36,32,28,24,20,16,12,30,15)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1)
(15,30,12,16,20,24, 6,10,14,18)
(6,12,18,24, 8, 3, 9,15,21,16)
(9, 7, 5,14,12,10, 8, 6,15,13)
(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2)
(18,36,32,17,24,20,16,12,30,15)
(20,40,16,14,34,32, 8,17,26,24)
(12,24,14,15,16,17, 7, 8,20,10)
(14,17,20,12, 4, 7,21,24,16, 8)
(12,13,14,15,16, 6, 7, 8,20,10)
(12,13,14, 4,16, 6,18, 8, 9,10)
(19, 5,24,10,18,15,12, 9, 6,14)
(12,13,14,15,27,28,18,30, 9,21)
(12, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)
(10, 9, 8,18, 6,16, 4,14, 2,12)

(2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2)
(12,13,14,15, 5, 6,18,19,20,10)
(8, 5,13,10,18,15,12, 9, 6, 3)
(18,14,10, 6,24, 9,16,12, 8,15)
(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(16,21,15, 9, 3, 8,24,18,12, 6)
(30,27,13,21,18,15,12, 9,28,14)
(2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(30,16,24,21,18,15,12, 9,28,14)
(8,16,24,21, 7, 4,12,20,17,14)
(34,24,14,26,16,17,40, 8,20,32)
(20, 7, 5,14,12,10,19, 6,15,13)
(16,21,15, 9,14, 8,24, 7,12,17)
(16,10, 4,20,14, 8,24, 7,12,17)
(30,27,13,21,18,15,34, 9,17,36)
(13,15, 6, 8,21,12, 3,16,18, 9)
(12,13, 3,15,16, 6,18, 8, 9,21)
(2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2)
(2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2)
(4, 8,12,16, 9,13, 6,10,14, 7)
(18, 3,10, 6,13, 9, 5,12, 8,15)
(13, 4, 6, 8,10,12, 3, 5, 7, 9)
(16,21,15, 9, 3, 8,13,18,12, 6)
(20,18,16,14,12,10, 5, 8,26,13)
(4, 8,12, 5, 9,13, 6,10,14,18)
(26,30,12,16,20,13,26,10,14,29)
(15, 8,12, 5, 9,13, 6,10, 3, 7)
(16,21,15,20,14, 8,24, 7,12,28)
(12,13,14, 4,16,17, 7, 8,20,21)
(5,10, 4, 9,14, 8,13, 7,12,17)
(10, 9, 8,18, 6, 5,15, 3,13,12)
(19, 5,13,10, 7,15,12,20, 6,14)
(20,18,16,14,12,10,30, 6,15,24)
(15,19,12, 5,20,24, 6,10,25,18)
(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)
(9, 7, 5, 3,12,10, 8, 6, 4, 2)
(2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(20,18, 5,14,12,10,19, 6,15,13)
(24, 4,17, 8,10,12,14,16, 7,20)
(12,24, 3,15,16, 6,18, 8, 9,21)
(13,15, 6, 8,10,12,14, 5, 7, 9)
(20, 7,16,14,12,21, 5,17, 4,13)
(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2)
(20,18,16,25,12,10,30, 6,15,24)
(12,24,36,15,16,17,18,30,20,32)
(2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2)
(25, 6,20,12,15,18,10,13, 5,19)
(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1)
(2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1)
(13,26,28, 8,10,12,14,16,18,20)
(19, 5,13,10,16,15,12, 9, 6,14)
(12,13, 3, 4,16, 6, 7, 8, 9,10)
(3, 6, 9,12, 4, 7,10,13, 5, 8)
(1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2)
(24,15,26, 8,21,12,14,16, 7,20)
(34,13,36,15,27,17,16,30, 9,21)
(40,14,32,17,24,20,16,34, 8,26)
(12,24,36,15,16,28,18,30,20,32)
(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(12,13,14, 4, 5, 6,18, 8, 9,10)
(19,38,24,10,18,26,12,20,22,36)
(14,28,20,12,15,18,10,24,27,30)

```
(14,28,20,12,26,29,10,13,16,30)
( 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2)
(13, 4, 6, 8,10,12,14,16, 7, 9)
( 6,12,16, 2, 8,14, 9, 4,10,16)
(17,34,18,13,30,36, 9,15,21,27)
(12, 2,14, 4,16, 6,18, 8, 9,10)
(18, 3,10, 6,13, 9,16,12, 8,15)
(14, 6,20,12,15, 7,10,13, 5, 8)
(18,14,10, 6,24, 9, 5,12,19,15)
( 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1)
( 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)
(24,15,26,19,10,12,14,27,18, 9)
( 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1)
( 7,14,10, 6,13, 9,16,12, 8, 4)
( 5,16,13,10, 7,15,12, 9, 6, 3)
(28,12,29,13,30,14,20,26,10,16)
(19,27,24,10,18,15,12, 9,28,14)
( 9,18,16,14,12,21,30,28,15,24)
(18, 3,21, 6,24, 9,16,12, 8,15)
(17,12, 7,13, 6,14, 9, 4,10,16)
( 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2)
( 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(12,13,14, 4, 5,17, 7, 8, 9,10)
(37,19,12,16,20,24,17,32,36,18)
(14,17, 9,12, 4, 7,10,13,16, 8)
(15, 8,12,16, 9,24, 6,21, 3,18)
(10,20,30,18,28,27,15,14,24,12)
(15, 8,12,16, 9,24,17,21,14, 7)
(15,19,12, 5,20,13, 6,10,14,18)
( 6,12,16,24, 8,14, 9,15,10,16)
(18,14,10, 6, 2, 9,16,12, 8, 4)
( 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2)
(18,14,21,28,24, 9,16,12,30,15)
(17,12, 7,13, 6,14,20, 4,10,16)
(10, 9, 6,18, 6, 5,15,14,13,12)
( 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1)
( 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2)
( 8,16,13,10,16,26,12,20,28,14)
(12,13,14,26,16,28,29,30,20,10)
( 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)
( 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(12,13,14,26,16,28,16,30,20,12)
( 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1)
( 4, 8,12,16, 9,13,17,21,14, 7)
(14,28,21,12,26,18,10,13,16, 8)
(12,13,14, 4,16, 6, 7, 8, 9,10)
(12,24,14, 4,16,17, 7, 8,20,10)
( 9,18,16, 3,12,10, 5, 6,13,13)
( 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2)
(15,30,12,16,20,13,28,10,14,18)
(19, 5,13,10, 7,15,12,20, 6,14)
(16,21, 4,20,14, 8,24, 7,12,17)
(15,30,12,16,20,24,28,10,14,29)
(15,30,12,27,20,13,28,10,14,18)
(10, 9,19,18,28,27,15,14,24,12)
( 6,12,18,24,19,14, 9,15,10, 5)
(15,30,12,16,20,24,28,10,14,18)
(18,36,10,28,24,20,30,12,19,26)
(15,30,12,27,20,24,28,10,14,18)
(10,20,19,18,26,38,26,36,24,12)
(12,24,14,15,27,28,18,30,20,10)
(14,17,20,12, 4, 7,10,13,16, 8)
(19, 5,13,10,15,15,12,20, 6,14)
(12,24,14,26,16,17,18, 8, 9,10)
( 4, 8,12,16,20,24,17,21,14, 7)
(45,24,14,15,27,28,18,30,42,21)
( 9, 7, 5,14,12,10, 8, 6, 4,13)
(14,17, 9,12,26,18,10,24,16, 8)
(12,13,14,15,27,28,18,30,20,10)
(15, 8,12, 5,20,13, 6,10,14,18)
( 5,10,15, 9,14,19,13,18,12, 6)
(12,24,14,15,27,28,16,19, 9,10)
( 5,10,15, 9,14, 8,13,18,12, 6)
(12,13,14,15, 5, 6,18, 6,20,10)
( 4, 8,12,16,20,13,17,21,14, 7)
( 8, 5,13,10, 7,15,12, 9, 6, 3)
(10, 9, 6, 7, 6, 5, 4,14,13,12)
( 6,12, 7,13, 8,14,20,15,10, 5)
( 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1)
( 5,10,15,20,14,19,13,18,12, 6)
(13,15,17,30,21,34,36,27,15, 9)
( 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
( 9,18, 5,14,12,10,19, 6,15,13)
(21, 9,30,18,28,16,15,14,24,12)
( 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1)
(14, 6, 9,12,15,18,10,24,16, 8)
(27,10,15, 9,14,19,24,18,12,28)
( 8,16,24,10,16,26,12, 9,17,14)
( 6,12,18,13,19,25,20,15,10, 5)
(13, 4, 6, 8,10,12,14,16,18, 9)
(16,21,15, 9,14,30,24,18,12,28)
(12,13,14, 4,16,17, 7, 8, 9,21)
(14,17, 9,12,15, 7,21,24,16, 8)
( 9, 7, 5,14,12,10, 6,17, 4,13)
( 8,16, 2,10, 7, 4,12, 9, 6,14)
( 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
( 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1)
( 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2)
(30,27,24,21,18,15,45,42,20,14)
( 6,12, 7,13,19,14, 9,15,10, 5)
(20,29,16,14,12,10,30,28,26,13)
(16,10,26,20,14, 8,13,18,12, 6)
(20,18,16,14,12,10,30,28,26,13)
(25, 6,20,12,15,18,10,24, 5,19)
( 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)
( 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2)
(15,30,12,16, 9,24,28,21,14,18)
( 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1)
(32,20,19,18,17,16,37,36,24,12)
( 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2)
(17,12,18,24,19,36,20,37,32,16)
(15,19,12,27, 9,24,28,10,14,18)
( 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2)
(14, 6, 9,12,15,18,21,24,16, 8)
( 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1)
(10,20,30,29,28,16,15,14,24,12)
( 7,14,21,17,13, 9,16,12, 8, 4)
(18,14,10,17,24, 9,16,12, 8,26)
( 7,14,10, 6, 2, 9, 5,12, 6, 4)
(17,12,18,24,30,36,20,15,32,16)
(10,20,30,18, 6,16,15,25,24,12)
( 8,16,24,21, 7,15,12,20,25,14)
(17,34,40,24, 8,14,20,26,32,16)
(10,20, 8,18, 6,16,26,14,13,12)
```

(10,20,30,18, 6,16,15,14,24,12)
(15,30,34,27, 9,13,17,21,36,18)
(1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)
(21, 9, 8, 7,17,16, 4,14,13,12)
(6,12, 7,13, 8,14,20,15,10,16)
(2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1)
(4, 8,12,16,20,13,17,10,14, 7)
(8, 5,13,10, 7, 4,12, 9, 6, 3)
(28,12,16,24,30,36,20,15,32,16)
(1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1)
(1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1)
(15,30,12,27, 9,13,28,21,14,18)
(1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(3, 6, 9,12,15,18,10,13,16, 8)
(7,14,10,17,24,20,16,12, 8,15)
(12,13,14, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)
(1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1)
(18,14,21,28,13, 9,27,12,30,15)
(1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2)
(2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)
(16,32,15,20,36,30,24,18,12,17)
(1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(14,17,20,12,15, 7,10,24,16, 8)
(10, 9, 8, 7, 6, 5,15,14,13,12)
(2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)
(1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1)
(10,20, 6,18,26,16,26,14,13,12)
(2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1)
(10,20,19,18, 6, 5,15,25,13,12)
(16,32,15,20,36,30,24,18,12,28)
(20,18,16,14,12,10, 8,28,26,13)
(5,10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6)
(5,10,15,20,25,19,13,18,12, 6)
(32,20,30,18,26,16,15,36,24,12)
(5,10, 4, 9,14, 8,13, 7,12, 6)
(32,20,30,18,17,16,15,36,24,12)
(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)
(5,10, 4, 9,14, 8,13,18,12, 6)
(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
(15,14,21,28,24,42,27,45,30,15)
(14, 6,20,12,15, 7,10,13,16, 8)
(8,16, 2,10,18, 4,12, 9, 6,14)
(8,16,13,10,18,26,12,20, 6,14)
(16,10, 4, 9,14, 8, 2,18,12, 6)
(2, 4, 6, 8,10,12,14,16,18, 9)
(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1)
(3, 6, 9,12,15,18,21,13,16, 8)
(36,28,20,12,15,18,32,24,16,30)
(9,18, 5,14,12,10, 8, 6,15,13)
(1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1)
(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1)
(10, 9,19,18, 6, 5,15,14,13,12)
(36,17,20,12,15,18,32,24,16,30)
(14, 6,20,12, 4, 7,10,13,16, 8)
(10,20, 8, 7,17,16,15,14,24,12)
(10, 9,19,18, 6, 5,15,14,24,12)
(16,32,26,20,14, 8,24,40,34,17)
(12,24,14,15,16, 6,18,30,20,10)
(12,24,25,15,16, 6,18,30,20,10)
(15,19,12, 5, 9,13, 6,10,14,18)
(8, 5,13,10,18,15,12, 9, 6,14)
(4, 8,12,16,20,24,17,10,14, 7)

(6,12,18,24,30,14,20,15,10,16)
(4, 8,12, 5, 9,13, 6,10, 3, 7)
(12,13,25,15, 5, 6,16,19,20,10)
(7,14,21,28,24,20,16,12, 8, 4)
(6,12,18,24,30,25,20,15,10,16)
(14, 6, 9,12,15,18,10,24, 5,19)
(1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)
(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)
(9,18,27,36,34,21,30,17,15,13)
(8,16,24,32,40,26,34,20,17,14)
(6,12, 7, 2, 8,14, 9, 4,10, 5)
(6,12,18,13, 8, 3, 9,15,10, 5)
(18,36,21,17,13, 9,27,34,35,15)
(6,12, 7,13, 8,14, 9,15,10, 5)
(16,10, 4, 9,14, 8,13, 7,12,17)
(18, 3,21, 6,13, 9,16,12, 8,15)
(4, 8,12,16, 9,13,17,10,14, 7)
(20,18,16,36,12,32,19,17,37,24)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2)
(27,10,15,20,14,30,24,18,12,28)
(12,13,14,15,16,28,18,30,20,10)
(29,14,10,28,24,20,16,12,30,15)
(26,30,12,16,20,13,28,10,14,18)
(7, 3,10, 6,13, 9, 5,12, 8, 4)
(1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(10,20, 8, 7, 6, 5,15,14,13,12)
(2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(15, 8,12, 5, 9,13, 6,10,14, 7)
(7,14,21,17,24, 9,16,12, 8,15)
(8,16,13,10,15,15,12, 9, 6, 3)
(13,15, 6, 8,10,12,14, 5,18, 9)
(12,13,14,15, 5, 6, 7, 8, 9,10)
(18,14,10,28,13,20,16,12,30,15)
(30,16,13,10,18,26,12,20,28,14)
(12, 2,14, 4,16, 6, 7, 8, 9,10)
(15,30,45,27,42,24,28,21,14,18)
(10,20,30,29,28,16,26,14,13,12)
(10,20,30,18,28,16,26,14,13,12)
(13, 4,17, 8,10,12,14,16, 7,20)
(26,19,12,38,20,24,25,10,36,18)
(16,32,37,20,35,19,24,18,12,17)
(6,12,18,24,19,14,20,15,10, 5)
(28,12,16,24,30,14, 9,15,21,16)
(2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1)
(10, 9, 8, 7,17,16, 4,14,13,12)
(12,13,14, 4,16,17, 7, 8, 9,10)
(28,12,18,13,30,14,20,26,10,16)
(9, 7,16,14,12,10, 8, 6, 4,13)
(16,10,26, 9,14, 8,24,18,12,17)
(2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1)
(18,14,10,28,24,20,16,12,30,15)
(14, 6, 9,12,15, 7,10,13, 5,19)
(15, 8,12,16,20,24,28,21,14, 7)
(18,14,10,28,24,20,27,12,30,15)
(18,14,10, 6,13,20, 5,12,19,15)
(14,28,20,12,15,18,10,13,16,30)
(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
(13, 4, 6, 8,10,12,14, 5,18, 9)
(9, 7,16,14,12,10, 8,17, 4,13)

(3, 6, 9,12,15,18,21,24,16, 8)
(1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1)
(15,30,12, 5,20,24, 6,10,25,18)
(5,10,15,20,14, 8,13,18,12, 6)
(12,24,14,15,16,28,18,30,20,10)
(6,12, 7,13,19,14,20,15,10, 5)
(12,24,14,15,16,28,29,30,20,10)
(13, 4,17, 8,21,12,14,16, 7, 9)
(10, 9, 8,18,17,16,26,14,24,12)
(6,12,18,13,19,14,20,15,10, 5)
(16,10,15,20,14,30,24,29,12,28)
(2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)
(18,14,21, 6,24, 9,16,12, 8,15)
(1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1)
(2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(24,15,26,30,32,12,36,16,18,20)
(15,14,10,28,13,20,27,12,30,15)
(3, 6, 9,12,15, 7,10,13,16, 8)
(3,16,13,10, 7, 4,12, 9, 6, 3)
(16,10, 4, 9,14, 8,13, 7,12, 6)
(3, 6, 9,12, 4, 7,10, 2, 5, 8)
(4, 8,12, 5, 9,13,17,10,14, 7)
(1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2)
(14,28,20,12,26,18,10,13,16,30)
(30, 5,24,10,18,15,12,20, 6,25)
(2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(14, 6, 9,12, 4,18,10, 2,16, 8)
(15,36,32,17,24,20,16,12,19,37)
(12,24,14, 4,16,28, 7, 8,20,21)
(21,42,30,18,26,27,15,14,24,45)
(28,12,29,24,30,14,20,15,10,16)
(12,24,14,15,16,17, 7, 8, 9,21)
(5,10,15, 9, 3, 8,13,18,12, 6)
(14, 6, 9,12, 4,18,10,13, 5, 8)
(16,21, 4,20,14, 8,24, 7,12,28)
(5,10,15, 9,14, 8,13, 7,12, 6)
(5,10,15, 9,14,19,13, 7,12, 6)
(2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2)
(35,10,26,20,36,19,24,18,12,28)
(25,12,18,24,30,14,20,15,10,16)
(13, 4,17, 8,21,12,14,16, 7,20)
(12,24,14,15,16, 6,18, 8, 9,21)
(25,12,18,24,19,36,20,26,10,38)
(8,16,24,10, 7, 4,12,20,17,14)
(16,10, 4,20,14, 8,13, 7,12,17)
(28,12,16,13,30,14,20,15,10,16)
(28,12,16,24,30,14,20,15,10,27)
(16,10, 4, 9,14, 8, 2, 7,12, 6)
(12,24,14,15, 5, 6,18,19,20,10)
(5,10,15,20,14, 8,13, 7,12, 6)
(24,15,17,30,32,12,36,16,18,20)
(5,10,15,20,25,19,24,18,12, 6)
(24,15,28,30,21,45,14,27,16,42)
(10, 9, 8, 7,17, 5, 4,14,13,12)
(8,16,13,10, 7, 4,12,20,17,14)
(1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2)
(10, 9, 8, 7, 6,16, 4, 3,13,12)
(19,16,24,32,18,37,12,20,17,36)
(12,24,14,15, 5, 6,18,19, 9,10)
(16,10,15,20,14,30,13,18,12,28)
(12,13,14,15, 5, 6,18, 8, 9,10)
(8,16,13,10, 7, 4,12,20, 6,14)

(8, 5, 2,10, 7, 4, 1, 9, 6, 3)
(9,18,16, 3,12,21, 8, 6,15,24)
(28,45,18,24,30,14,42,15,21,27)
(20,18, 5,25,12,10,19, 6,15,13)
(24,37,17,19,32,12,36,16,18,20)
(16,21, 4,20,14, 8,13, 7,12,17)
(2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2)
(4, 8,12,16,20,13, 6,10,14, 7)
(10, 9, 8, 7, 6, 5,15, 3,13,12)
(27,10,15,20,14,30,13,18,12,28)
(3, 6, 9,12, 4, 7,10,13,16, 3)
(4, 8,12,16, 9,13, 6,10,14,18)
(6,12, 7,13, 8, 3, 9, 4,10,16)
(14,28,20,12, 4, 7,21,24,16, 8)
(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4,14, 2,12)
(15, 8,12,16,20,24,17,10,14, 7)
(5,16,13,10, 7, 4,12, 9,17,14)
(2, 4, 6, 8,10,12,14,16, 7, 9)
(7,14,10, 6,13,20, 5,12, 8,15)
(5,10, 4, 9, 3, 8, 2, 7,12, 6)
(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2)
(3, 6, 9,12,15,18,10,13, 5, 8)
(20, 7,16,14,12,21, 8,17, 4,24)
(15, 8,12, 5, 9,13, 6,10, 3,18)
(19, 5,13,10,18,15,12,20, 6,25)
(16,10,15,20,14,30,24,18,12,28)
(4, 8,12,16,20,24,28,21,14, 7)
(18,14,10, 6,13, 9,16,12, 8, 4)
(18,14,10,28,24, 9,27,12,19,15)
(12,13, 3,15,16, 6,18, 8, 9,10)
(7, 3,10, 6,13, 9,16,12, 8,15)
(24,15, 6,30,10,12,25,16,18,20)
(4, 8,12,16, 9, 2, 6,10,14, 7)
(28,12, 7,24, 8,14,20, 4,21,16)
(2, 4, 6, 8,10,12,14, 5, 7, 9)
(24,15, 6,19,10,12,14, 5,18,20)
(14, 6, 9,12, 4, 7,10,13,16, 8)
(6,12, 7,13, 8,14,20, 4,10,16)
(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1)
(5,10, 4, 9, 3, 8,13, 7,12, 6)
(9,18,27,14,12,21,30,28,15,13)
(15, 8,12, 5, 9,13, 6,10,14,18)
(16,10,15,20,14,30,24,18,12, 6)
(10,20,19,18, 6, 5,15,14,13,12)
(9, 7,16,14,12,21, 8,17, 4,13)
(13, 4, 6, 8,10,12, 3,16, 7, 9)
(1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1)
(9, 7,16, 3,12,10, 6, 6, 4,13)
(1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1)
(15, 8,12,16, 9,13, 5,10, 3, 7)
(20, 7,16,14,12,10, 8,17, 4,13)
(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3,13,12)
(6,12,18,24,30,25,20,15,10, 5)
(8,16,13,10,18, 4,12, 9, 6,14)
(24,15,17, 8,21,12,14,16, 7, 9)
(9,18,16, 3,12,21, 8, 6,15,13)
(13,15,28,30,10,12,14,16,18,20)
(30,16,24,10,18,15,12,20, 6,25)
(13,15, 6, 8,10,12, 3,16, 7, 9)
(42,18,27,14,45,21,30,28,15,24)
(30,16,24,10,18,15,12,20, 6,14)
(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2)

(8, 5,13,10,18,15,12,20, 6,14)
(12,24,36,37,16,17,18,19,20,32)
(7,14,21,17,13,20,16,12, 8, 4)
(24,15, 6,19,10,12,14, 5,18, 9)
(10, 9, 8,18, 6,16, 4,14,13,12)
(26,12, 7,24, 8,14,20,15,21,16)
(18,14,10, 6,13, 9, 5,12, 8,15)
(6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4,10, 5)
(1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1)
(1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2)
(16,10, 4, 9, 3, 8,13, 7,12, 6)
(8,16,24,21, 7,15,12, 9,17,14)
(8,16,24,21,18,15,12, 9, 6, 3)
(6,12,18,13,19,14, 9,15,10, 5)
(7,14,10,17,13, 9,16,12, 8, 4)
(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1)
(24,15, 6, 8,21,12,14,16,18, 9)
(12,13,14,15, 5, 6, 7,19,20,10)
(24, 4,26, 8,21,12,14,16, 7,20)
(6,12,18,13, 6,14, 9, 4,10,16)
(14,28,42,45,15,18,21,24,27,30)
(2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(9,18,27,14,12,10,19,28,15,24)
(9, 7,16,14,12,21, 8,17,15,24)
(16,10,26,20,14,30,13,29,12,28)
(13,15,28,30,21,12,14,27,18, 9)
(12,13,14,15, 5, 6, 7, 8,20,10)
(26, 8,12,16,20,13,28,10,14,18)
(10,20, 8, 7, 6,16, 4,14,13,12)
(16,10,15,20,14, 8,24, 7,12,17)
(15, 8,12,16, 9,24, 6,21,14,18)
(12,13,14,26,16,28,18, 8,20,10)
(16,10,26,20,14,30,13,18,12,28)
(20, 7,16,14,12,10, 8, 6, 4,13)
(1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2)
(1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)
(8,16,13,10, 7,15,12,20, 6,14)
(2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)
(3, 6, 9, 1, 4, 7,10, 2, 5, 8)
(24,15, 6, 8,21,12, 3,16,18, 9)
(6,12,18,13, 8,14,20,26,10,16)
(13, 4,17, 8,10,12,14, 5, 7, 9)
(15, 8,12, 5,20,13, 6,10,14, 7)
(20, 7,16,14,12,10, 8,17, 4,24)
(9,18,16,14,12,10, 8, 6, 4,13)
(6,12,18,13, 8,14,20,15,10, 5)
(4, 8,12,16, 9,13, 6,10, 3, 7)
(20,18,38,36,12,10,19,28,26,24)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1)
(12,13,14,26,16, 6,18, 8,20,10)
(6,12, 7, 2, 8, 3, 9, 4,10, 5)
(17,12, 7,24, 8,14,20,15,10,16)
(20,18,16,36,12,32,30,28,15,24)
(9,18,16,14,12,21, 8, 6,15,24)
(26, 8,12,16,20,13, 6,10,14,18)
(20, 7,16,14,12,10, 8, 6,15,13)
(20,18,16,36,12,32,30,17,15,24)
(12,13,14,15, 5, 6,18,19, 9,10)
(13,15,26,30,10,12,14,27,18,20)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2)
(21, 9, 6,18, 6,16,15,14,24,12)
(13, 4, 6, 8,10,12,14,16, 7,20)

(1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1)
(6,12,18,24, 8,14, 9,15,21,16)
(7,14,10,17,24,20,16,12, 8, 4)
(6,12,18,13, 8,14, 9,15,10, 5)
(9,18,16,14,12,10, 8, 6,15,24)
(12,24,14, 4,16,17, 7, 8,20,21)
(14, 6, 9,12,15, 7,10,13, 5, 8)
(10, 9, 8,18, 6,16,15,14,24,12)
(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
(7,14,21,17,24,20,16,12, 8, 4)
(8,16,13,21,18,15,12, 9, 6, 3)
(1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)
(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2)
(6,12, 7,13, 8, 3, 9, 4,10, 5)
(26, 8,34,16,20,24,17,32,14,40)
(16,10,15,20,25,30,24,18,12, 6)
(28,12,16,24,19,14, 9,15,10,27)
(20, 7,16,14,12,10, 8,17,15,24)
(14, 6,20,12,15,18,10,24,16,30)
(21, 9,30,18,17,27,15,36,13,34)
(25, 6,20,12,15,18,10,24,16,30)
(8, 5,13,10, 7, 4,12, 9, 6,14)
(12,24,25,15, 5, 6,18,19,20,10)
(1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1)
(15, 8,12,16,20,13, 6,10,14, 7)
(1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)
(1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)
(14, 6, 9,12, 4, 7,10,13, 5, 8)
(10, 9, 8, 7, 6,16, 4,14,13,12)
(24,15,26,30,10,12,14,16,18,20)
(1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2)
(14, 6,20,12,26,18,10,13,16, 8)
(5,10,15,20,25,30,24,18,12, 6)
(3, 6, 9,12,15, 7,10,13, 5, 8)
(24,15, 6,30,10,12,25, 5,18,20)
(13,15, 6, 8,10,12,14,16, 7,20)
(14, 6,20,12,15, 7,10,13, 5,19)
(12,24,14,15,16, 6,18, 8, 9,10)
(7, 3,10, 6,13, 9, 5,12, 8,15)
(16,21, 4, 9,14, 8,13, 7,12,17)
(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2)
(7, 3,10, 6,13, 9,16,12, 8, 4)
(18,14,10, 6,13,20,16,12, 8,26)
(14,28, 9,12,15,18,21,13,27,30)
(17,12, 7,24, 8,14,20, 4,10,16)
(16,10,26,20,14, 8,13,19,12,28)
(21,20, 8, 7,28,16, 4,14,24,12)
(8,16,24,10,18,15,12, 9, 6,14)
(1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1)
(13, 4,17, 8,10,12,14,16, 7, 9)
(19, 5,24,10,18,15,12,20, 6,25)
(14,17, 9,12, 4, 7,10,13, 5, 8)
(5,10,15, 9,14,19,24,18,12, 6)
(10,20, 8, 7, 6,16,15,14,13,12)
(8, 5, 2,10, 7, 4,12, 9, 6,14)
(8,16,13,10, 7, 4,12, 9, 6,14)
(5,10,15, 9, 3, 8,13, 7,12, 6)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2)
(18,25,10, 6,13,20, 5,12,19,15)
(2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
(12,13, 3,15, 5, 6,18, 8, 9,10)
(13,15, 6, 8,10,12, 3, 5, 7, 9)

(24, 4,17, 8,21,12,14,16, 7,20)
(12,13,14, 4,16, 6, 7, 8,20,10)
(16,10, 4, 9,14, 8,13,18,12, 6)
(6,12,18,24,19,25,20,15,10, 5)
(21,20, 8, 7,17,16, 4,14,13,12)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1)
(2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1)
(14,17,20,12, 4, 7,10,24,16, 8)
(14,17,20,34,26,40,32,24,16, 8)
(1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
(14, 6,20,12,15,18,10,24, 5,19)
(24,15, 6,19,10,12,25, 5,18,20)
(18,14,10, 6,13, 9, 5,12,19,15)
(18,14,10, 6,13,20, 5,12, 8,15)
(13,15, 6, 8,10,12,14, 5, 7,20)
(24,15,28,30,10,12,14,27,18,20)
(8,16,24,21,18,15,12, 9, 6,14)
(14, 6, 9,12, 4, 7,10, 2, 5, 8)
(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)
(12,13, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)
(20,18, 5,25,12,10,19, 6,15,24)
(13,15, 6, 8,10,12, 3,16,18, 9)
(12,13,14, 4,16,17, 7, 8,20,10)
(14, 6, 9,12, 4,18,10,13,16, 8)
(9, 7, 5, 3,12,10, 8, 6, 4,13)
(32,20, 8,40,17,16,26,14,24,34)
(20,18, 5,25,12,10,30, 6,15,24)
(2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
(21, 9, 8,18, 6,16,15, 3,24,12)
(36,17, 9,34,15,18,21,13,27,30)
(15,19,12, 5,20,13, 6,10,14, 7)
(2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)
(14, 6, 9,12, 4, 7,10, 2,16, 8)
(17,12, 7,13, 8,14, 9, 4,10, 5)
(21, 9, 8,18, 6,16,15, 3,13,12)
(7,14,10, 6,13, 9, 5,12, 8,15)
(20, 7, 5,14,12,10, 8, 6,15,13)
(10,20,19,18, 6, 5,15,25,24,12)
(2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1)
(1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1)
(2, 4, 6, 8,10, 1, 3, 5, 7, 9)
(19, 5,13,10, 7,15,12, 9, 6,14)
(26, 8,12,16, 9,24,17,10,14,18)
(10,20,30,18,26,27,15,14,13,12)
(1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
(16,10,15, 9, 3, 8,13, 7,12, 6)
(1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
(13,26,26,30,10,12,14,16,29,20)
(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)
(20,18,27,14,12,10,30,28,15,13)
(16,10,15, 9,14, 8,24,18,12, 6)
(8,16,24,10, 7,15,12,20,17,14)
(20, 7,16,14,12,21, 8,28,15,24)
(10,20,30,18,26,16,15,14,13,12)
(4, 8, 1, 5, 9, 2, 6,10, 3, 7)
(10,20,30,18,26,16,15,14,24,12)
(12,24,36,26,38,28,18,19,20,10)
(13,15, 6, 8,10,12, 3, 5,18, 9)
(20,18,16,14,12,10,30,28,15,13)
(24,15,17, 8,10,12,14,16, 7,20)
(28,12,18,13, 8,14,20,26,10,16)
(2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1)

(1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
(24,26,17, 8,10,12,14,16,18, 9)
(17,12, 7,13, 8,14,20, 4,21,16)
(21,20, 8, 7,17,16, 4,14,24,12)
(7,14,10, 6,13,20,16,12, 8, 4)
(16,10,15, 9, 3, 8,13,18,12, 6)
(18,14,10, 6,13, 9, 5,12, 8, 4)
(9, 7, 5,14,12,10, 8, 6, 4, 2)
(20,18, 5,14,12,10, 8, 6,15,13)
(9, 7, 5, 3, 1,10, 8, 6, 4, 2)
(14,28,20,12,15,29,10,24,16,30)
(6,12, 7, 2, 8,14, 9, 4,10,16)
(12,24,14,15,16,28, 7, 8,20,21)
(14,28,20,12,15,18,10,24,16,30)
(6,12,18,13, 8, 3, 9,15,21,16)
(7,14,10,17,13,20,16,12, 8, 4)
(15, 8,12,16, 9,24, 6,10,14,18)
(10, 9, 6,18, 6, 5, 4,14,13,12)
(14,28, 9,12,15,18,10,24,27,19)
(4, 8,12, 5, 9, 2, 6,10, 3, 7)
(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2,12)
(7, 3,10, 6, 2, 9, 5,12, 8, 4)
(5,10,15,20,14,19,13, 7,12, 6)
(36,17,20,12,37,18,32,24,16,19)
(14, 6, 9,12,15,18,10,13, 5, 8)
(4, 8,12, 5, 9, 2, 6,10,14, 7)
(7,14,10, 6,13,20, 5,12,19,15)
(7,14,10,17,13, 9, 5,12, 8, 4)
(13,26,28,30,10,12,14,16,18,20)
(9,18,16,14,12,10, 8, 6, 4, 2)
(4, 8,12, 5, 9,13, 6,10,14, 7)
(1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2)
(28,12,18,13,30,14,20,15,1[illegible],27)
(9, 7,16,14,12,10, 8, 6, 4, 2)
(6,12, 7,13, 8,14, 9, 4,10,16)
(9, 7, 5, 3,12,10, 8, 6,15,13)
(20,18, 5,14,12,10,19, 6,15,24)
(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2)
(13,15, 6,19,10,12,14, 5,18, 9)
(10, 9, 6,18, 6,16,15, 3,13,12)
(13,15, 6,19,10,12,14, 5, 7, 9)
(7,14,21,28,24,20,16,12, 8,15)
(14,17,20,12, 4, 7,21,13,16, 8)
(1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2)
(24,15,28,30,21,12,14,16,18, 9)
(10, 9,19, 7, 6, 5,15,14,13,12)
(20, 7,16,14,12,21, 8,28, 4,24)
(2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2)
(2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1)
(18,25,10, 6,24,20, 5,12,19,15)
(15,19,12, 5,20,24, 6,10,14,18)
(7,14,10, 6,13,20,16,12, 8,15)
(5,10, 4, 9,14, 8, 2, 7,12, 6)
(6,12,16,13, 8,14, 9, 4,10, 5)
(9,18, 5,14,12,10,19, 6,15,24)
(10, 9, 8, 7, 6,16, 4,14, 2,12)
(13,26, 6, 8,10,12,14,16,18,20)
(7,14,10, 6, 2, 9,16,12, 8, 4)
(2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
(13,15, 6,19,10,12,25, 5,18,20)
(14, 6,20,12,15,18,10,13, 5, 8)
(14,28,20,12,15,18,10,13,27,30)

m=11(Forts.)

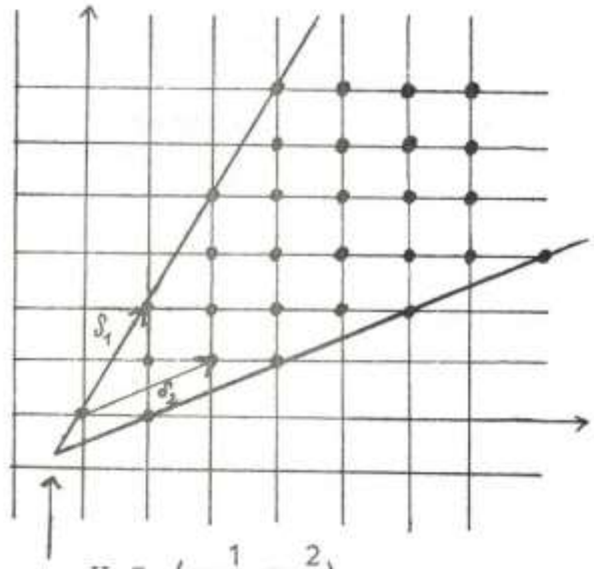
```
( 7,14,10, 6,13, 9, 5,12, 8, 4)
( 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2)
( 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1)
(14, 6,20,12,15,18,10,13, 5,19)
( 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)
( 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2)
(18,14,10, 6,24,20,16,12,30,15)
(10,20, 8, 7,17,16, 4,14,13,12)
(12,13, 3,15,16, 6, 7, 8, 9,10)
(15,10, 4,20,14, 8,13, 7,12, 6)
( 9, 7,16, 3,12,10, 8, 6,15,13)
(30,16,24,32,18,15,12,20,28,36)
(30,16,24,32,15,15,12,20,17,36)
(24,15,26,30,10,12,14,16,29,20)
( 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2)
( 8,16,24,21, 7, 4,12,20,28,14)
(20,18,27,14,12,10,30,28,15,24)
( 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2)
(17,12,18,24, 8,14, 7,26,10,16)
( 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1)
( 9,18, 5,14,12,10, 3, 6, 4,13)
( 9, 7, 5,14,12,10,19, 6,15,13)
(20,29,16,14,12,10,30,28,15,24)
(30,16,13,10,29,26,12,20,28,14)
( 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)
(20,18,16,14,12,10,30,28,15,24)
( 8,16,13,21, 7, 4,12,20,17,14)
( 6,12, 7,13, 6, 3, 9,15,10, 5)
( 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2)
(25, 6,20,12,15,18,10,24, 5,30)
(10,20, 6,18, 6, 5,15,14,13,12)
( 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2)
(14,17, 9,12, 4, 7,21,13,16, 8)
(24,26,26,19,10,12,36,38,18,20)
( 6, 5,13,10,18, 4,12, 9, 6,14)
(14,28,20,12,15, 7,21,24,16, 8)
(16,21,15, 9,14, 8,24,18,12, 6)
( 9,18,16,14,12,10, 8,17,26,24)
(19, 5,24,10,18,15,12,20, 6,14)
(21,20, 8, 7,28,16,15,14,24,12)
( 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1)
(14,28, 9,12,15,18,21,24,16,30)
( 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2)
(10,20,19,18, 6, 5,15,14,24,12)
(24,26,17, 8,32,34,14,16,40,20)
( 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)
( 7, 3,10, 6, 2, 9, 5, 1, 8, 4)

(21, 9,30,18,28,27,15,14,13,12)
(13,15, 6,19,10,12,14, 5, 7,20)
(13,15, 6, 8,10,12,14, 5,18,20)
(15, 8,12,16, 9,13, 6,10, 3,18)
(29,14,10,28,13,20,16,12,30,26)
( 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1)
( 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2)
(12, 2,14, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)
(18,25,10, 6,24,20, 5,12,30,15)
(18,14,10,28,13,20,16,12, 8,26)
(24,15, 6, 8,10,12,14,16,18, 9)
(17,12, 7,13, 6,14, 9, 4,21,16)
(14, 6, 9,12,15,18,10,13, 5,19)
( 8, 5, 2,10, 7, 4,12, 9, 6, 3)
( 2, 4, 6, 8,10,12, 3, 5, 7, 9)
( 7,14,10, 6,13, 9, 5,12,19,15)
(17,12, 7,24, 8,14,20, 4,21,16)
( 6,12,18,13, 6, 3, 9,15,10,16)
(13,15, 6,19,10,12,14, 5,18,20)
(18,14,10,28,13,20,16,12,30,26)
(27,21,15,42,14,30,24,18,45,28)
STOP
```

Anhang B. Die Ähnlichkeitsklassen numerischer Halbgruppen

Die Klassen numerischer Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_3$.

Die Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_3$ entsprechen eineindeutig den Gitterpunkten der Ebene auf dem Polyederkegel

$$P_3 : 2X_1-X_2 \geq 0, \ 2X_2-X_1 \geq -1.$$



$v = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

Man hat hier zwei Klassen ähnlicher Halbgruppen, dem Innern von P_m und dem Rand entsprechend.

	$M_3(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
1)	E_{11} E_{22}	δ_1 δ_2	<3,4> <3,5>	1	1	O	X_1^3
2)	O	$\delta_1\delta_2$	<3,4,5>	2	2	1	X_1^2, X_1X_2, X_2^2

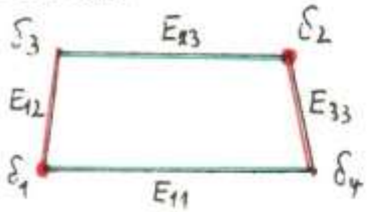
O bezeichnet hier und im folgenden die zum Innern von P_m gehörige Klasse.

Das Symbol E_{11} für $M_3(H)$ bedeutet, daß in dieser Matrix $\varepsilon_{11} = 1$ ist, während sonst $\varepsilon_{ij} = 0$ ist. E_{11} bezeichnet auch die Seite von P_m, zu der H gehört. Die Zahlen s,r,d stehen für die Invariante s(H), den Typ r(H) und die Abweichung d(H) der Elemente aus der jeweiligen Klasse. In der Rubrik Relationen steht ein kürzestes Relationensystem für die Algebra $K[\![H]\!]/(t^m)$ bzgl. eines minimalen Erzeugendensystems des maximalen Ideals.

<u>Die Klassen numerischer Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_4$</u>

	$M_4(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
1)	E_{11} E_{12} E_{23} E_{33}	δ_1 δ_2	$\langle 4,5\rangle$ $\langle 4,7\rangle$	1	1	0	X_1^4
2)	E_{11} E_{33}	$\delta_1\delta_4$ $\delta_2\delta_4$	$\langle 4,5,7\rangle$ $\langle 4,7,9\rangle$	2	2	1	X_1^3, X_1X_2, X_2^2
3)	E_{12} E_{23}	$\delta_1\delta_3$ $\delta_2\delta_3$	$\langle 4,5,6\rangle$ $\langle 4,6,7\rangle$	2	1	0	X_1^2, X_2^2
4)	0	$\delta_1,\ldots,\delta_4$	$\langle 4,5,6,7\rangle$	3	3	3	X_iX_j $(1 \leq i \leq j \leq 3)$

Der Schnitt von P_4^* mit der Hyperebene $\Sigma X_i = 1$ ist ein Viereck:



rot: symmetrische Halbgruppen

grün: fastvollständige Durchschnitte

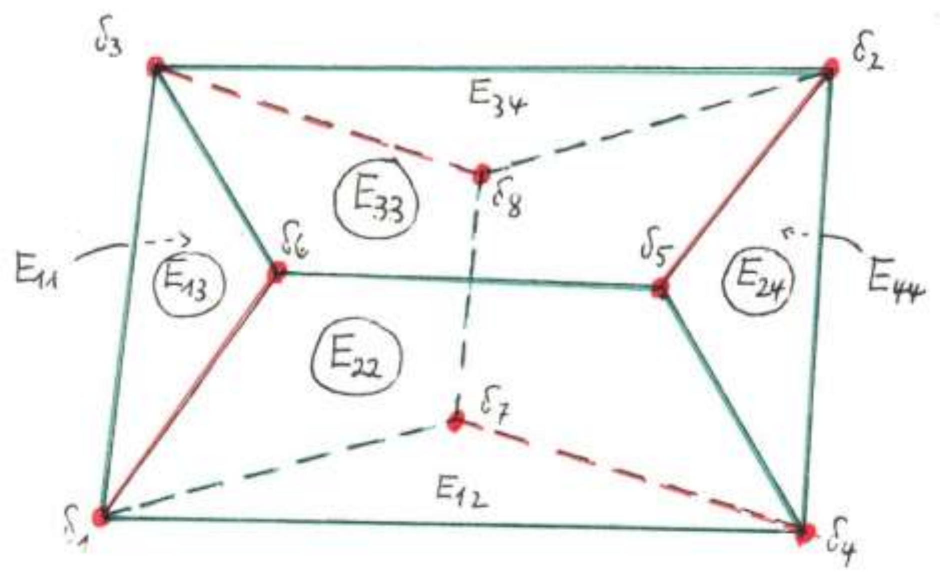
P_4^* ist der Kegel mit der Spitze in 0 über diesem Viereck.

Die Klassen numerischer Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_5$

	$M_5(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
1)	$E_{11}\ E_{12}\ E_{13}\ E_{22}$	δ_1	<5,6>	1	1	0	x_1^5
	$E_{11}\ E_{13}\ E_{33}\ E_{34}$	δ_3	<5,8>				
	$E_{12}\ E_{22}\ E_{24}\ E_{44}$	δ_4	<5,7>				
	$E_{24}\ E_{33}\ E_{34}\ E_{44}$	δ_2	<5,9>				
2)	$E_{11}\ E_{12}\ E_{44}$	δ_7	<5, 6, 9>	1	1	0	$x_1^3-x_2^2, x_1x_2$
	$E_{11}\ E_{34}\ E_{44}$	δ_8	<5,14,21>				
	$E_{12}\ E_{22}\ E_{33}$	δ_6	<5, 8,12>				
	$E_{22}\ E_{24}\ E_{33}$	δ_5	<5,12,18>				
3)	$E_{11}\ E_{12}$	$\delta_1\delta_7$	<5,6,14>	2	2	1	x_1^4, x_1x_2, x_2^2
	$E_{13}\ E_{33}$	$\delta_3\delta_6$	<5,8,17>				
	$E_{22}\ E_{24}$	$\delta_4\delta_5$	<5,7,13>				
	$E_{34}\ E_{44}$	$\delta_2\delta_8$	<5,9,16>				
4)	$E_{11}\ E_{13}$	$\delta_1\delta_3$	<5,6,8>	2	2	1	$x_1^3, x_1^2x_2, x_2^2$
	$E_{12}\ E_{22}$	$\delta_1\delta_4$	<5,6,7>				
	$E_{24}\ E_{44}$	$\delta_2\delta_4$	<5,7,9>				
	$E_{33}\ E_{34}$	$\delta_2\delta_3$	<5,8,9>				
5)	$E_{11}\ E_{34}$	$\delta_3\delta_8$	<5,9,11,13>	2	1	2	$x_1^2, x_1x_2, x_2^2-x_1x_3,$
	$E_{12}\ E_{44}$	$\delta_4\delta_7$	<5,7, 9,11>				x_2x_3, x_3^2
	$E_{13}\ E_{22}$	$\delta_1\delta_6$	<5,6, 7, 8>				
	$E_{24}\ E_{33}$	$\delta_2\delta_5$	<5,7, 8, 9>				

	$M_5(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
6)	E_{11} E_{44} E_{22} E_{33}	$\delta_7\delta_8$ $\delta_5\delta_6$	<5,9,11> <5,7, 8>	2	2	1	X_1^3, X_1X_2, X_2^3
7)	E_{11} E_{22} E_{33} E_{44}	$\delta_1\delta_3\delta_7\delta_8$ $\delta_1\delta_4\delta_5\delta_6$ $\delta_2\delta_3\delta_5\delta_6$ $\delta_2\delta_4\delta_7\delta_8$	<5,6, 8, 9> <5,7, 9,11> <5,8, 9,12> <5,9,11,12>	3	3	3	X_1^3, X_1X_2, X_1X_3 X_2^2, X_2X_3, X_3^2
8)	E_{12} E_{13} E_{24} E_{34}	$\delta_1\delta_4\delta_7$ $\delta_1\delta_3\delta_6$ $\delta_2\delta_4\delta_5$ $\delta_2\delta_3\delta_8$	<5,6, 7, 9> <5,8,11,12> <5,7, 9,13> <5,8, 9,11>	3	2	2	X_1^2, X_1X_3, X_2^2 X_2X_3, X_3^2
9)	O	$\delta_1,\ldots,\delta_8$	<5,6,7,8,9>	4	4	6	X_iX_j $(1\leq i\leq j\leq 4)$

Der Schnitt von P_5^* mit der Hyperebene $\Sigma X_i = 1$ ist ein Polyeder mit der folgenden kombinatorischen Struktur



rot: symmetrische Halbgruppen

grün: fastvollständige Durchschnitte

Die Klassen numerischer Halbgruppen aus $\mathfrak{g}_6$

	$M_6(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
1)	E_{11} E_{12} E_{13} E_{14} E_{22} E_{23}	δ_1	<6, 7>	1	1	0	X_1^6
	E_{25} E_{34} E_{35} E_{44} E_{45} E_{55}	δ_2	<6,11>				
2)	E_{11} E_{12} E_{13} E_{22}	$\delta_1\delta_3$	<6, 7,17>	2	2	1	X_1^5, X_2^2, X_1X_2
	E_{35} E_{44} E_{45} E_{55}	$\delta_2\delta_4$	<6,11,25>				
3)	E_{11} E_{13} E_{14} E_{23}	$\delta_1\delta_7$	<6, 7, 9>	2	1	0	X_1^3, X_2^2
	E_{12} E_{14} E_{22} E_{23} *)	$\delta_1\delta_9$	<6, 7, 8>				*) X_1 und X_2
	E_{12} E_{14} E_{44} E_{45}	$\delta_5\delta_9$	<6,10,13>				zu vertauschen
	E_{12} E_{22} E_{25} E_{45}	$\delta_6\delta_9$	<6, 8,11>				
	E_{14} E_{23} E_{34} E_{44}	$\delta_7\delta_9$	<6, 9,10>				
	E_{22} E_{23} E_{25} E_{34}	$\delta_8\delta_9$	<6, 8, 9>				
	E_{25} E_{34} E_{35} E_{55}	$\delta_2\delta_8$	<6, 9,11>				
	E_{25} E_{34} E_{44} E_{45}	$\delta_2\delta_9$	<6,10,11>				
4)	E_{11} E_{12} E_{14}	$\delta_1\delta_5$	<6, 7, 9>	2	2	1	$X_1^4, X_2^2, X_1^2X_2$
	E_{25} E_{45} E_{55}	$\delta_2\delta_6$	<6,11,14>				
5)	E_{11} E_{12} E_{45}	$\delta_5\delta_{11}$	<6, 7,10,11>	2	1	2	$X_1^3-X_2X_3, X_2^2, X_3^2,$
	E_{12} E_{45} E_{55}	$\delta_6\delta_{11}$	<6,11,14,19>				X_1X_2, X_1X_3
6)	E_{11} E_{12} E_{55}	$\delta_3\delta_{11}$	<6, 7,11>	2	2	1	X_1^4, X_2^3, X_1X_2
	E_{11} E_{45} E_{55}	$\delta_4\delta_{11}$	<6,11,13>				

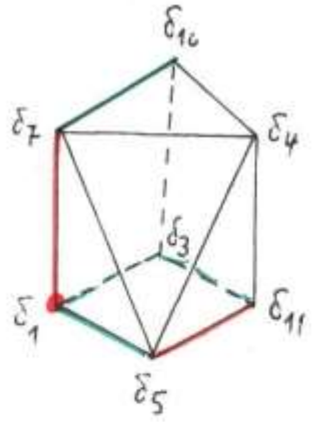
	$M_6(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
7)	$E_{11}\ E_{13}\ E_{35}$	$\delta_7\delta_{10}$	$\langle 6,9,13,17\rangle$	2	2	1	$x_1^2, x_2^2-x_1x_3, x_2x_3,$
	$E_{13}\ E_{22}\ E_{23}$	$\delta_1\delta_8$	$\langle 6,7,8,9\rangle$				x_3^2
	$E_{13}\ E_{35}\ E_{55}$	$\delta_8\delta_{10}$	$\langle 6,9,11,13\rangle$				
	$E_{34}\ E_{35}\ E_{44}$	$\delta_2\delta_7$	$\langle 6,9,10,11\rangle$				
8)	$E_{11}\ E_{13}\ E_{55}$	$\delta_3\delta_{10}$	$\langle 6,7,11,15\rangle$	2	2	2	$x_1^3, x_1x_2,$
	$E_{11}\ E_{35}\ E_{55}$	$\delta_4\delta_{10}$	$\langle 6,11,13,15\rangle$				$x_2^2-x_1x_3, x_2x_3, x_3^2$
9)	$E_{11}\ E_{12}$	$\delta_1\delta_3\delta_5\delta_{11}$	$\langle 6,7,11,16\rangle$	3	3	3	$x_1^4, x_2^2, x_3^2, x_1x_2,$
	$E_{45}\ E_{55}$	$\delta_2\delta_4\delta_6\delta_{11}$	$\langle 6,11,19,20\rangle$				x_1x_3, x_2x_3
10)	$E_{11}\ E_{13}$	$\delta_1\delta_3\delta_7\delta_{10}$	$\langle 6,7,9,11\rangle$	3	3	3	$x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_3,$
	$E_{11}\ E_{14}$	$\delta_1\delta_5\delta_7$	$\langle 6,7,9,10\rangle$				x_2^2, x_2x_3, x_3^2
	$E_{12}\ E_{22}$ *)	$\delta_1\delta_3\delta_6\delta_9$	$\langle 6,7,8,11\rangle$				*) x_1 und x_2 zu
	$E_{14}\ E_{44}$ *)	$\delta_5\delta_7\delta_9$	$\langle 6,9,10,13\rangle$				vertauschen
	$E_{22}\ E_{23}$	$\delta_1\delta_8\delta_9$	$\langle 6,8,9,13\rangle$				
	$E_{22}\ E_{25}$	$\delta_6\delta_8\delta_9$	$\langle 6,8,9,11\rangle$				
	$E_{25}\ E_{55}$ *)	$\delta_2\delta_6\delta_8$	$\langle 6,9,11,14\rangle$				
	$E_{34}\ E_{44}$	$\delta_2\delta_7\delta_9$	$\langle 6,10,11,15\rangle$				
	$E_{35}\ E_{55}$ *)	$\delta_2\delta_4\delta_8\delta_{10}$	$\langle 6,9,11,19\rangle$				
	$E_{44}\ E_{45}$	$\delta_2\delta_4\delta_5\delta_9$	$\langle 6,10,11,13\rangle$				
11)	$E_{11}\ E_{35}$	$\delta_4\delta_7\delta_{10}$	$\langle 6,11,13,15,16\rangle$	3	2	5	$x_1^2, x_1x_2, x_1x_4,$
	$E_{13}\ E_{22}$	$\delta_1\delta_3\delta_8$	$\langle 6,7,8,9,11\rangle$				$x_2^2-x_1x_3, x_2x_3, x_2x_4,$
	$E_{13}\ E_{55}$	$\delta_3\delta_8\delta_{10}$	$\langle 6,9,11,13,14\rangle$				x_3^2, x_3x_4, x_4^2
	$E_{35}\ E_{44}$	$\delta_2\delta_4\delta_7$	$\langle 6,9,10,11,13\rangle$				

	$M_6(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
12)	$E_{11}\ E_{45}$	$\delta_4\delta_5\delta_{11}$	<6,11,13,16>	3	2	2	$x_1^2, x_1x_2, x_2^3, x_2x_3, x_3^2$
	$E_{12}\ E_{55}$ *)	$\delta_3\delta_6\delta_{11}$	<6,11,13,14>				*) $x_1 \leftrightarrow x_3$
13)	$E_{11}\ E_{55}$	$\delta_3\delta_4\delta_{10}\delta_{11}$	<6,11,13,21>	3	3	3	$x_1^3, x_1x_2, x_1x_3, x_2^3, x_2x_3,$ x_3^2
14)	$E_{12}\ E_{14}$	$\delta_1\delta_5\delta_9$	<6,7, 8,10>	3	2	1	$x_1^2, x_2^2, x_2x_3, x_3^2$
	$E_{13}\ E_{23}$	$\delta_1\delta_7\delta_8$	<6,9,13,14>				*) $x_1 \leftrightarrow x_3$
	$E_{13}\ E_{35}$	$\delta_7\delta_8\delta_{10}$	<6,9,17,19>				
	$E_{23}\ E_{34}$ *)	$\delta_7\delta_8\delta_9$	<6,8, 9,10>				
	$E_{25}\ E_{45}$ *)	$\delta_2\delta_6\delta_9$	<6,8,10,11>				
	$E_{34}\ E_{35}$	$\delta_2\delta_7\delta_8$	<6,9,11,16>				
15)	$E_{12}\ E_{45}$	$\delta_5\delta_6\delta_9\delta_{11}$	<6,8,10,11,13>	3	1	5	$x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4-x_2x_3,$
	$E_{14}\ E_{23}$	$\delta_1\delta_7\delta_9$	<6,7, 8, 9,10>				$x_2^2, x_2x_4, x_3^2, x_3x_4, x_4^2$
	$E_{25}\ E_{34}$	$\delta_2\delta_8\delta_9$	<6,8, 9,10,11>				
16)	E_{11}	$\delta_1\delta_3\delta_4\delta_5\delta_7\delta_{10}\delta_{11}$	<6, 7, 9,10,11>	4	4	4	$x_1^3, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4,$
	E_{22}	$\delta_1\delta_3\delta_6\delta_8\delta_9$	<6, 8, 9,11,13>				$x_2^2, x_2x_3, x_2x_4, x_3^2,$
	E_{44}	$\delta_2\delta_4\delta_5\delta_7\delta_9$	<6,10,11,13,15>				x_3x_4, x_4^2
	E_{55} *)	$\delta_2\delta_3\delta_4\delta_6\delta_8\delta_{10}\delta_{11}$	<6, 9,11,14,19>				*) $x_1 \leftrightarrow x_2$
17)	E_{12}	$\delta_1\delta_3\delta_5\delta_6\delta_9\delta_{11}$	<6 7, 8,10,11>	4	3	5	$x_1^2, x_1x_3, x_1x_4, x_2^2,$
	E_{13}	$\delta_1\delta_3\delta_7\delta_8\delta_{10}$	<6, 9,13,14,17>				$x_2x_3, x_2x_4, x_3^2, x_3x_4, x_4^2$
	E_{14}	$\delta_1\delta_5\delta_7\delta_9$	<6,10,13,14,15>				
	E_{23}	$\delta_1\delta_7\delta_8\delta_9$	<6, 8, 9,10,13>				
	E_{25}	$\delta_2\delta_6\delta_8\delta_9$	<6, 8,10,11,15>				
	E_{34}	$\delta_2\delta_7\delta_8\delta_9$	<6, 9,10,11,14>				
	E_{35}	$\delta_2\delta_4\delta_7\delta_8\delta_{10}$	<6, 9,11,13, 6>				
	E_{45}	$\delta_2\delta_4\delta_5\delta_6\delta_9\delta_{11}$	<6,10,11,13,14>				

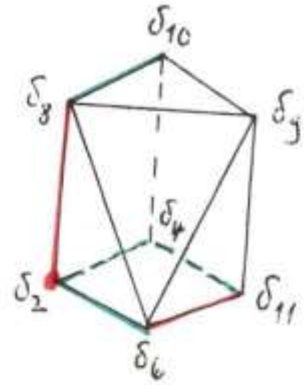
	$M_6(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
18)	O	$\delta_1,\ldots,\delta_{11}$	<6,7,8,9,10,11>	5	5	10	X_iX_j $(1\leq i\leq j\leq 5)$

Der Schnitt von P_6^* mit der Hyperebene $\Sigma X_i = 1$ ist ein 4-dimensionales Polyeder, dessen (3-dimensionale) Facetten den Facetten E_{ij} von P_6^* eineindeutig entsprechen. Die folgende Liste gibt die kombinatorische Struktur dieser Facetten an. Rot eingezeichnet sind die Seiten zu denen symmetrische Halbgruppen gehören, grün sind die Seiten markiert, zu denen fastvollständige Durchschnitte gehören.

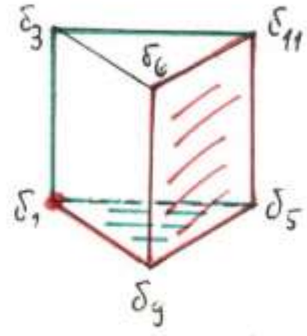
$\boxed{E_{11}}$



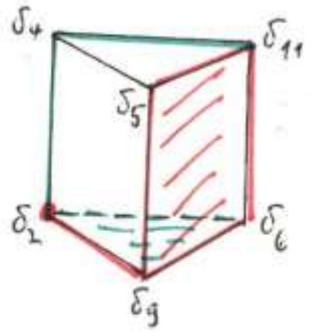
$\boxed{E_{55}}$



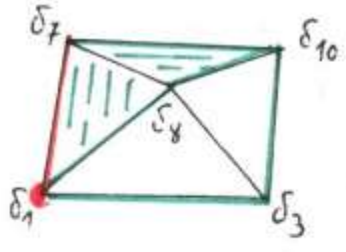
$\boxed{E_{12}}$



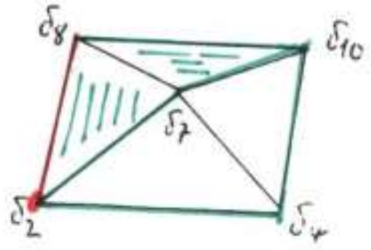
$\boxed{E_{45}}$



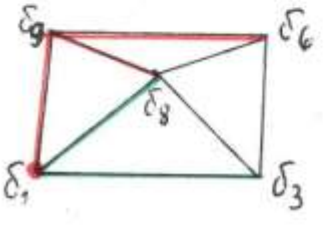
$\boxed{E_{13}}$



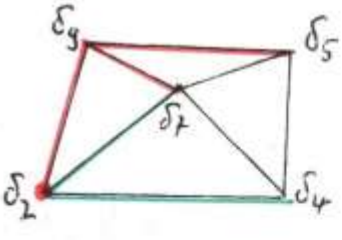
$\boxed{E_{35}}$



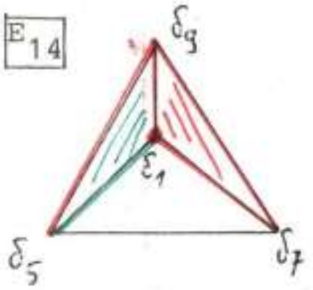
E_{22}



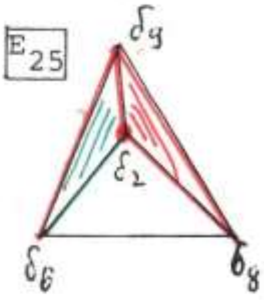
E_{44}



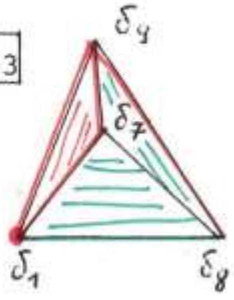
E_{14}



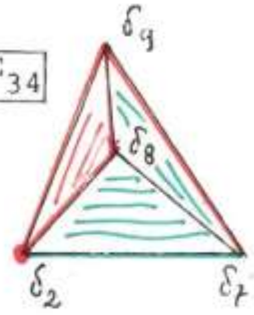
E_{25}



E_{23}



E_{34}



Die Klassen numerischer Halbgruppen aus $\mathfrak{H}_7$

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
1)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{14}E_{15}E_{22}E_{23}E_{24}E_{33}$	δ_1	$\langle 7,\ 8\rangle$	1	1	0	x_1^7
	$E_{11}E_{12}E_{14}E_{15}E_{24}E_{44}E_{45}E_{46}E_{55}$	δ_3	$\langle 7,11\rangle$				
	$E_{11}E_{13}E_{15}E_{33}E_{35}E_{36}E_{45}E_{55}E_{56}$	δ_5	$\langle 7,12\rangle$				
	$E_{12}E_{14}E_{22}E_{23}E_{24}E_{26}E_{44}E_{46}E_{66}$	δ_6	$\langle 7,\ 9\rangle$				
	$E_{13}E_{22}E_{23}E_{26}E_{33}E_{35}E_{36}E_{56}E_{66}$	δ_4	$\langle 7,10\rangle$				
	$E_{26}E_{35}E_{36}E_{44}E_{45}E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	δ_2	$\langle 7,13\rangle$				
2)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{14}E_{22}E_{23}E_{66}$	δ_{13}	$\langle 7,\ 8,20\rangle$	1	1	0	$x_1^5-x_2^2, x_1x_2$
	$E_{11}E_{14}E_{15}E_{24}E_{33}E_{44}E_{45}$	δ_{15}	$\langle 7,18,45\rangle$				
	$E_{11}E_{36}E_{45}E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	δ_{14}	$\langle 7,20,50\rangle$				
	$E_{12}E_{22}E_{24}E_{26}E_{44}E_{46}E_{55}$	δ_{18}	$\langle 7,16,40\rangle$				
	$E_{13}E_{15}E_{22}E_{23}E_{35}E_{55}E_{66}$	δ_{17}	$\langle 7,12,30\rangle$				
	$E_{23}E_{26}E_{33}E_{35}E_{36}E_{44}E_{66}$	δ_{16}	$\langle 7,10,25\rangle$				
3)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{15}E_{22}E_{55}E_{56}$	δ_9	$\langle 7,\ 8,12\rangle$	1	1	0	$x_1^3-x_2^2, x_1^2x_2$
	$E_{11}E_{13}E_{14}E_{23}E_{33}E_{36}E_{66}$	δ_{11}	$\langle 7,10,15\rangle$				
	$E_{11}E_{14}E_{36}E_{44}E_{45}E_{46}E_{66}$	δ_{12}	$\langle 7,18,27\rangle$				
	$E_{12}E_{22}E_{26}E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	δ_{10}	$\langle 7,20,30\rangle$				
	$E_{15}E_{24}E_{33}E_{35}E_{44}E_{45}E_{55}$	δ_8	$\langle 7,12,18\rangle$				
	$E_{22}E_{23}E_{24}E_{26}E_{33}E_{35}E_{44}$	δ_7	$\langle 7,16,24\rangle$				
4)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{22}E_{56}E_{66}$	δ_{19}	$\langle 7,15,20\rangle$	1	1	0	$x_1^4-x_2^3, x_1x_2$
	$E_{11}E_{12}E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	δ_{20}	$\langle 7,27,36\rangle$				
	$E_{11}E_{14}E_{33}E_{36}E_{44}E_{45}$	δ_{21}	$\langle 7,18,24\rangle$				
	$E_{14}E_{23}E_{33}E_{36}E_{44}E_{66}$	δ_{22}	$\langle 7,24,32\rangle$				
	$E_{15}E_{22}E_{24}E_{33}E_{35}E_{55}$	δ_{23}	$\langle 7,12,16\rangle$				
	$E_{22}E_{24}E_{26}E_{35}E_{44}E_{55}$	δ_{24}	$\langle 7,\ 9,12\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
5)	$E_{11}E_{12}E_{14}E_{46}E_{66}$	δ_{25}	$\langle 7,15,20,25\rangle$	1	2	1	$x_1^3-x_2x_3, x_1x_2, x_2^2-x_1x_3, x_3^2$
	$E_{11}E_{13}E_{36}E_{56}E_{66}$	δ_{26}	$\langle 7,27,36,45\rangle$				
	$E_{12}E_{15}E_{22}E_{24}E_{55}$	δ_{30}	$\langle 7, 9,12,15\rangle$				
	$E_{14}E_{23}E_{24}E_{33}E_{44}$	δ_{27}	$\langle 7,18,24,30\rangle$				
	$E_{22}E_{26}E_{35}E_{55}E_{56}$	δ_{29}	$\langle 7,12,16,20\rangle$				
	$E_{33}E_{35}E_{36}E_{44}E_{45}$	δ_{28}	$\langle 7,24,32,40\rangle$				
6)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{14}E_{22}E_{23}$	$\delta_1\delta_{13}$	$\langle 7, 8,27\rangle$	2	2	1	x_1^6, x_1x_2, x_2^2
	$E_{11}E_{14}E_{15}E_{24}E_{44}E_{45}$	$\delta_3\delta_{15}$	$\langle 7,11,31\rangle$				
	$E_{12}E_{22}E_{24}E_{26}E_{44}E_{46}$	$\delta_6\delta_{18}$	$\langle 7, 9,36\rangle$				
	$E_{13}E_{15}E_{33}E_{35}E_{55}E_{56}$	$\delta_5\delta_{17}$	$\langle 7,12,37\rangle$				
	$E_{23}E_{26}E_{33}E_{35}E_{36}E_{66}$	$\delta_4\delta_{16}$	$\langle 7,10,32\rangle$				
	$E_{36}E_{45}E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	$\delta_2\delta_{14}$	$\langle 7,13,36\rangle$				
7)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{15}E_{22}$	$\delta_1\delta_9$	$\langle 7, 8, 9\rangle$	2	2	1	$x_1^5, x_1^2x_2, x_2^2$
	$E_{11}E_{14}E_{44}E_{45}E_{46}$	$\delta_3\delta_{12}$	$\langle 7,11,20\rangle$				
	$E_{13}E_{23}E_{33}E_{36}E_{66}$	$\delta_4\delta_{11}$	$\langle 7,10,22\rangle$				
	$E_{15}E_{33}E_{35}E_{45}E_{55}$	$\delta_5\delta_8$	$\langle 7,12,25\rangle$				
	$E_{22}E_{23}E_{24}E_{26}E_{44}$	$\delta_6\delta_7$	$\langle 7, 9,17\rangle$				
	$E_{26}E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	$\delta_2\delta_{10}$	$\langle 7,13,23\rangle$				
8)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{22}E_{56}$	$\delta_9\ \delta_{19}$	$\langle 7, 8,13,19\rangle$	2	1	2	$x_1^4-x_2x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_3^2$
	$E_{11}E_{14}E_{36}E_{44}E_{45}$	$\delta_{12}\delta_{21}$	$\langle 7,11,20,24\rangle$				
	$E_{12}E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	$\delta_{10}\delta_{20}$	$\langle 7,13,23,29\rangle$				
	$E_{14}E_{23}E_{33}E_{36}E_{66}$	$\delta_{11}\delta_{22}$	$\langle 7,10,18,22\rangle$				
	$E_{15}E_{24}E_{33}E_{35}E_{55}$	$\delta_8\ \delta_{23}$	$\langle 7,12,23,25\rangle$				
	$E_{22}E_{24}E_{26}E_{35}E_{44}$	$\delta_7\ \delta_{24}$	$\langle 7, 9,17,19\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
9)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{22}E_{66}$	$\delta_{13}\delta_{19}$	$\langle 7,\ 8,19\rangle$	2	2	1	x_1^5, x_1x_2, x_2^3
	$E_{11}E_{14}E_{33}E_{44}E_{45}$	$\delta_{15}\delta_{21}$	$\langle 7,11,17\rangle$				
	$E_{11}E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	$\delta_{14}\delta_{20}$	$\langle 7,13,22\rangle$				
	$E_{15}E_{22}E_{33}E_{35}E_{55}$	$\delta_{17}\delta_{23}$	$\langle 7,12,23\rangle$				
	$E_{22}E_{24}E_{26}E_{44}E_{55}$	$\delta_{18}\delta_{24}$	$\langle 7,\ 9,19\rangle$				
	$E_{23}E_{33}E_{36}E_{44}E_{66}$	$\delta_{16}\delta_{22}$	$\langle 7,10,18\rangle$				
10)	$E_{11}E_{12}E_{14}E_{15}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_3$	$\langle 7,\ 8,11\rangle$	2	2	1	$x_1^4, x_1^3x_2, x_2^2$
	$E_{12}E_{14}E_{22}E_{23}E_{24}$*)	$\delta_1\ \delta_6$	$\langle 7,\ 8,\ 9\rangle$				*) $x_1 \leftrightarrow x_2$
	$E_{12}E_{14}E_{24}E_{44}E_{46}$*)	$\delta_3\ \delta_6$	$\langle 7,\ 9,11\rangle$				
	$E_{13}E_{33}E_{35}E_{36}E_{56}$	$\delta_4\ \delta_5$	$\langle 7,10,12\rangle$				
	$E_{26}E_{35}E_{36}E_{56}E_{66}$*)	$\delta_2\ \delta_4$	$\langle 7,10,13\rangle$				
	$E_{35}E_{36}E_{45}E_{55}E_{56}$	$\delta_2\ \delta_5$	$\langle 7,12,13\rangle$				
11)	$E_{11}E_{13}E_{14}E_{23}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_{11}$	$\langle 7,\ 8,10\rangle$	2	2	1	$x_1^3, x_1x_2^2, x_2^3$
	$E_{11}E_{13}E_{15}E_{55}E_{56}$	$\delta_5\ \delta_9$	$\langle 7,12,15\rangle$				*) $x_1 \leftrightarrow x_2$
	$E_{12}E_{22}E_{26}E_{46}E_{66}$	$\delta_6\ \delta_{10}$	$\langle 7,\ 9,13\rangle$				
	$E_{15}E_{24}E_{44}E_{45}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_8$	$\langle 7,11,12\rangle$				
	$E_{22}E_{23}E_{26}E_{33}E_{35}$*)	$\delta_4\ \delta_7$	$\langle 7,\ 9,10\rangle$				
	$E_{36}E_{44}E_{45}E_{46}E_{66}$*)	$\delta_2\ \delta_{12}$	$\langle 7,11,13\rangle$				
12)	$E_{11}E_{13}E_{14}E_{23}E_{66}$	$\delta_{11}\delta_{13}$	$\langle 7,\ 8,10,13\rangle$	2	1	2	$x_1^3, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3,$
	$E_{11}E_{14}E_{15}E_{24}E_{33}$*)	$\delta_1\ \delta_{15}$	$\langle 7,\ 8,17,18\rangle$				$x_3^2-x_1^2x_2$
	$E_{11}E_{36}E_{45}E_{46}E_{66}$	$\delta_{12}\delta_{14}$	$\langle 7,13,18,22\rangle$				*) $x_2 \leftrightarrow x_3$
	$E_{11}E_{36}E_{45}E_{55}E_{56}$	$\delta_5\ \delta_{14}$	$\langle 7,12,20,22\rangle$				**) $x_1 \leftrightarrow x_2$
	$E_{12}E_{14}E_{22}E_{23}E_{66}$**)	$\delta_6\ \delta_{13}$	$\langle 7,\ 8,\ 9,13\rangle$				
	$E_{12}E_{22}E_{26}E_{46}E_{55}$*)	$\delta_{10}\delta_{18}$	$\langle 7,\ 9,19,20\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
Noch 12)	$E_{12}E_{24}E_{44}E_{46}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_{18}$	$\langle 7,11,16,19\rangle$				
	$E_{13}E_{15}E_{22}E_{55}E_{56}$	$\delta_9\ \delta_{17}$	$\langle 7,12,22,23\rangle$				
	$E_{13}E_{22}E_{33}E_{35}E_{56}$	$\delta_4\ \delta_{17}$	$\langle 7,10,12,16\rangle$				
	$E_{15}E_{24}E_{33}E_{44}E_{45}$	$\delta_8\ \delta_{15}$	$\langle 7,11,12,17\rangle$				
	$E_{23}E_{26}E_{33}E_{35}E_{44}$	$\delta_7\ \delta_{16}$	$\langle 7,10,16,18\rangle$				
	$E_{26}E_{35}E_{36}E_{44}E_{66}$ **)	$\delta_2\ \delta_{16}$	$\langle 7,10,13,18\rangle$				
13)	$E_{11}E_{12}E_{14}E_{46}$	$\delta_3\ \delta_{25}$	$\langle 7,\ 8,11,13\rangle$	2	2	2	$X_1^3-X_2X_3, X_1^2X_2, X_1X_3, X_2^2, X_3^2$
	$E_{12}E_{15}E_{22}E_{24}$ *)	$\delta_1\ \delta_{30}$	$\langle 7,\ 8,\ 9,19\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{13}E_{36}E_{56}E_{66}$ *)	$\delta_4\ \delta_{26}$	$\langle 7,10,13,29\rangle$				
	$E_{14}E_{23}E_{24}E_{44}$ *)	$\delta_6\ \delta_{27}$	$\langle 7,\ 9,11,24\rangle$				
	$E_{26}E_{35}E_{55}E_{56}$	$\delta_2\ \delta_{29}$	$\langle 7,12,13,23\rangle$				
	$E_{33}E_{35}E_{35}E_{45}$	$\delta_5\ \delta_{28}$	$\langle 7,10,12,18\rangle$				
14)	$E_{11}E_{12}E_{14}E_{66}$	$\delta_{13}\delta_{25}$	$\langle 7,\ 8,13,18\rangle$	2	2	2	$X_1^4, X_2^2-X_1X_3, X_3^2, X_1X_2, X_2X_3$
	$E_{11}E_{36}E_{56}E_{66}$	$\delta_{14}\delta_{26}$	$\langle 7,13,22,31\rangle$				
	$E_{12}E_{22}E_{24}E_{55}$	$\delta_{18}\delta_{30}$	$\langle 7,\ 9,19,29\rangle$				
	$E_{14}E_{24}E_{33}E_{44}$	$\delta_{15}\delta_{27}$	$\langle 7,11,17,23\rangle$				
	$E_{22}E_{35}E_{55}E_{56}$	$\delta_{17}\delta_{29}$	$\langle 7,12,13,34\rangle$				
	$E_{33}E_{35}E_{36}E_{44}$	$\delta_{16}\delta_{28}$	$\langle 7,10,18,26\rangle$				
15)	$E_{11}E_{12}E_{15}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_9$	$\langle 7,\ 8,11,12\rangle$	2	3	3	$X_1^4, X_1^3-X_3^2, X_2^2, X_1X_2, X_1^2X_3, X_2X_3$
	$E_{11}E_{13}E_{33}E_{36}$	$\delta_5\ \delta_{11}$	$\langle 7,10,12,15\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{14}E_{44}E_{46}E_{66}$ *)	$\delta_6\ \delta_{12}$	$\langle 7,16,18,27\rangle$				
	$E_{22}E_{23}E_{24}E_{33}$ *)	$\delta_1\ \delta_7$	$\langle 7,15,16,24\rangle$				
	$E_{22}E_{26}E_{56}E_{66}$ *)	$\delta_4\ \delta_{10}$	$\langle 7,17,20,30\rangle$				
	$E_{35}E_{44}E_{45}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_8$	$\langle 7,12,13,18\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
16)	$E_{11}E_{12}E_{46}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_{20}$	$\langle 7, 8, 11, 12, 13\rangle$	2	1	5	$X_1^3-X_2X_4, X_2^2, X_3^2-X_2X_4, X_4^2$
	$E_{11}E_{33}E_{36}E_{45}$	$\delta_5\ \delta_{21}$	$\langle 7, 10, 12, 15, 18\rangle$				$X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, X_2X_3, X_3X_4$
	$E_{13}E_{22}E_{56}E_{66}$ *)	$\delta_4\ \delta_{19}$	$\langle 7, 17, 20, 30, 43\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{14}E_{23}E_{44}E_{66}$ *)	$\delta_6\ \delta_{22}$	$\langle 7, 17, 18, 27, 37\rangle$				
	$E_{15}E_{22}E_{24}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_{23}$	$\langle 7, 16, 19, 24, 29\rangle$				
	$E_{26}E_{35}E_{44}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_{24}$	$\langle 7, 12, 13, 18, 23\rangle$				
17)	$E_{11}E_{12}E_{44}E_{66}$	$\delta_{20}\delta_{25}$	$\langle 7, 13, 15, 32\rangle$	2	2	2	$X_1^3, X_2^3-X_1X_3, X_3^2, X_1X_2, X_2X_3$
	$E_{11}E_{13}E_{56}E_{66}$ *)	$\delta_{19}\delta_{26}$	$\langle 7, 13, 15, 24\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{14}E_{23}E_{33}E_{44}$	$\delta_{22}\delta_{27}$	$\langle 7, 10, 11, 23\rangle$				
	$E_{15}E_{22}E_{24}E_{55}$ *)	$\delta_{23}\delta_{30}$	$\langle 7, 16, 19, 29\rangle$				
	$E_{22}E_{26}E_{35}E_{55}$ *)	$\delta_{24}\delta_{29}$	$\langle 7, 19, 23, 34\rangle$				
	$E_{33}E_{36}E_{44}E_{45}$ *)	$\delta_{21}\delta_{28}$	$\langle 7, 10, 11, 19\rangle$				
18)	$E_{11}E_{12}E_{55}E_{56}$	$\delta_9\ \delta_{20}$	$\langle 7, 8, 12, 13\rangle$	2	2	1	$X_1^3-X_2^2, X_3^2, X_1X_2, X_1X_3$
	$E_{11}E_{14}E_{33}E_{36}$	$\delta_{11}\delta_{21}$	$\langle 7, 10, 11, 15\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{12}E_{22}E_{56}E_{66}$	$\delta_{10}\delta_{19}$	$\langle 7, 20, 22, 30\rangle$				**) $X_2 \leftrightarrow X_3$
	$E_{14}E_{36}E_{44}E_{66}$ *)	$\delta_{12}\delta_{22}$	$\langle 7, 17, 18, 27\rangle$				
	$E_{22}E_{24}E_{33}E_{35}$ **)	$\delta_7\ \delta_{23}$	$\langle 7, 16, 19, 24\rangle$				
	$E_{24}E_{35}E_{44}E_{55}$ **)	$\delta_8\ \delta_{24}$	$\langle 7, 12, 16, 18\rangle$				
19)	$E_{11}E_{12}E_{56}E_{66}$	$\delta_{19}\delta_{20}$	$\langle 7, 13, 15\rangle$	2	2	1	X_1^4, X_2^4, X_1X_2
	$E_{14}E_{33}E_{36}E_{44}$	$\delta_{21}\delta_{22}$	$\langle 7, 10, 11\rangle$				
	$E_{22}E_{24}E_{35}E_{55}$	$\delta_{23}\delta_{24}$	$\langle 7, 16, 19\rangle$				
20)	$E_{11}E_{13}E_{15}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_5$	$\langle 7, 8, 10, 12\rangle$	2	3	3	$X_1^3, X_2^2-X_1X_3, X_3^2, X_1^2X_2, X_1^2X_3,$
	$E_{11}E_{15}E_{45}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_5$	$\langle 7, 12, 15, 18\rangle$				X_2X_3
	$E_{13}E_{22}E_{23}E_{33}$ *)	$\delta_1\ \delta_4$	$\langle 7, 8, 9, 10\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_3$

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
Noch 20)	$E_{22}E_{23}E_{26}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_6$	$\langle 7, 9, 13, 17\rangle$				
	$E_{26}E_{44}E_{46}E_{66}$*)	$\delta_2\ \delta_6$	$\langle 7, 9, 11, 13\rangle$				
	$E_{44}E_{45}E_{46}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_3$	$\langle 7, 11, 12, 13\rangle$				
21)	$E_{11}E_{13}E_{36}E_{56}$	$\delta_5\ \delta_{26}$	$\langle 7, 13, 15, 17, 19\rangle$	2	2	4	$X_1^2, X_2^2-X_1X_3, X_3^2, X_4^2$
	$E_{12}E_{14}E_{46}E_{66}$*)	$\delta_6\ \delta_{25}$	$\langle 7, 9, 11, 13, 15\rangle$				$X_1X_2, X_1X_4-X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4$
	$E_{12}E_{15}E_{24}E_{55}$*)	$\delta_3\ \delta_{30}$	$\langle 7, 11, 15, 19, 23\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_4$, $X_2 \leftrightarrow X_3$
	$E_{14}E_{23}E_{24}E_{33}$*)	$\delta_1\ \delta_{27}$	$\langle 7, 8, 9, 10, 11\rangle$				
	$E_{22}E_{26}E_{35}E_{56}$*)	$\delta_4\ \delta_{29}$	$\langle 7, 10, 13, 16, 19\rangle$				
	$E_{35}E_{36}E_{44}E_{45}$	$\delta_2\ \delta_{28}$	$\langle 7, 10, 11, 12, 13\rangle$				
22)	$E_{11}E_{13}E_{36}E_{66}$	$\delta_{11}\delta_{26}$	$\langle 7, 13, 15, 17\rangle$	2	3	1	$X_1^3, X_2^2-X_1X_3, X_3^2, X_1X_2$
	$E_{11}E_{14}E_{46}E_{66}$*)	$\delta_{12}\delta_{25}$	$\langle 7, 11, 13, 15\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_3$
	$E_{12}E_{15}E_{22}E_{55}$*)	$\delta_9\ \delta_{30}$	$\langle 7, 15, 19, 23\rangle$				
	$E_{22}E_{26}E_{55}E_{56}$*)	$\delta_{10}\delta_{29}$	$\langle 7, 13, 16, 19\rangle$				
	$E_{23}E_{24}E_{33}E_{44}$*)	$\delta_7\ \delta_{27}$	$\langle 7, 9, 10, 11\rangle$				
	$E_{33}E_{35}E_{44}E_{45}$	$\delta_8\ \delta_{28}$	$\langle 7, 10, 11, 12\rangle$				
23)	$E_{11}E_{14}E_{36}E_{66}$	$\delta_{11}\delta_{12}$	$\langle 7, 11, 13, 15, 17\rangle$	2	2	4	$X_1^2, X_2^2-X_1X_3, X_3^2-X_2X_4, X_4^2,$
	$E_{12}E_{22}E_{55}E_{56}$	$\delta_9\ \delta_{10}$	$\langle 7, 13, 16, 19, 22\rangle$				$X_1X_2, X_1X_4, X_2X_3, X_3X_4$
	$E_{24}E_{33}E_{35}E_{44}$	$\delta_7\ \delta_8$	$\langle 7, 9, 10, 11, 12\rangle$				
24)	$E_{11}E_{15}E_{33}E_{45}$	$\delta_5\ \delta_{15}$	$\langle 7, 12, 17, 22, 32\rangle$	2	2	4	$X_1^2, X_2^2-X_1X_3, X_3^2-X_1X_4, X_4^2$
	$E_{11}E_{45}E_{46}E_{55}$*)	$\delta_3\ \delta_{14}$	$\langle 7, 13, 19, 22, 25\rangle$				$X_1X_2, X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4$
	$E_{13}E_{15}E_{22}E_{35}$	$\delta_1\ \delta_{17}$	$\langle 7, 8, 9, 10, 12\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_4$, $X_2 \leftrightarrow X_3$
	$E_{13}E_{22}E_{23}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_{13}$	$\langle 7, 10, 13, 16, 22\rangle$				
	$E_{23}E_{26}E_{44}E_{66}$	$\delta_6\ \delta_{16}$	$\langle 7, 9, 11, 13, 17\rangle$				
	$E_{26}E_{44}E_{46}E_{55}$*)	$\delta_2\ \delta_{18}$	$\langle 7, 9, 11, 12, 13\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
25)	$E_{11}E_{13}E_{14}E_{23}$	$\delta_1\ \delta_{11}\delta_{13}$	<7, 8,17,20>	3	2	2	$X_1^3, X_2^2, X_3^2, X_1X_3, X_2X_3$
	$E_{11}E_{14}E_{15}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_{15}$	<7, 8,11,17>				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{12}E_{14}E_{22}E_{23}$*)	$\delta_1\ \delta_6\ \delta_{13}$	<7, 8, 9,20>				
	$E_{12}E_{22}E_{26}E_{46}$	$\delta_6\ \delta_{10}\delta_{18}$	<7, 9,13,19>				
	$E_{12}E_{24}E_{44}E_{46}$*)	$\delta_3\ \delta_6\ \delta_{18}$	<7, 9,11,19>				
	$E_{13}E_{15}E_{55}E_{56}$	$\delta_5\ \delta_9\ \delta_{17}$	<7,12,15,23>				
	$E_{13}E_{33}E_{35}E_{56}$	$\delta_4\ \delta_5\ \delta_{17}$	<7,10,12,23>				
	$E_{15}E_{24}E_{44}E_{45}$	$\delta_3\ \delta_8\ \delta_{15}$	<7,11,19,24>				
	$E_{23}E_{26}E_{33}E_{35}$	$\delta_4\ \delta_7\ \delta_{16}$	<7,10,16,25>				
	$E_{23}E_{35}E_{36}E_{66}$*)	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_{16}$	<7,10,13,25>				
	$E_{36}E_{45}E_{46}E_{66}$	$\delta_2\ \delta_{12}\delta_{14}$	<7,13,18,29>				
	$E_{36}E_{45}E_{55}E_{56}$	$\delta_2\ \delta_5\ \delta_{14}$	<7,12,13,22>				
26)	$E_{11}E_{12}E_{13}E_{22}$	$\delta_1\ \delta_9\ \delta_{13}\delta_{19}$	<7, 8,19,30>	3	3	3	$X_1^5, X_2^2, X_3^2, X_1X_2, X_1X_3,$
	$E_{11}E_{14}E_{44}E_{45}$	$\delta_3\ \delta_{12}\delta_{15}\delta_{21}$	<7,11,24,27>				X_2X_3
	$E_{15}E_{33}E_{35}E_{55}$	$\delta_5\ \delta_8\ \delta_{17}\delta_{23}$	<7,12,25,30>				
	$E_{22}E_{24}E_{26}E_{44}$	$\delta_6\ \delta_7\ \delta_{18}\delta_{24}$	<7, 9,19,24>				
	$E_{23}E_{33}E_{36}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_{11}\delta_{16}\delta_{22}$	<7,10,18,29>				
	$E_{46}E_{55}E_{56}E_{66}$	$\delta_2\ \delta_{10}\delta_{14}\delta_{20}$	<7,13,29,30>				
27)	$E_{11}E_{12}E_{14}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_{13}\delta_{25}$	<7, 8,11,20>	3	3	3	$X_1^4, X_2^2, X_3^2, X_1^2X_2, X_1X_3,$
	$E_{11}E_{12}E_{15}$*)	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_9$	<7, 8,18,19>				X_2X_3
	$E_{12}E_{22}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_6\ \delta_{18}\delta_{30}$	<7, 9,15,19>				*) $X_2 \leftrightarrow X_3$
	$E_{13}E_{33}E_{36}$*)	$\delta_4\ \delta_5\ \delta_{11}$	<7,10,19,22>				
	$E_{14}E_{24}E_{44}$	$\delta_3\ \delta_6\ \delta_{15}\delta_{27}$	<7,11,16,24>				
	$E_{14}E_{44}E_{46}$*)	$\delta_3\ \delta_6\ \delta_{12}$	<7,11,16,20>				
	$E_{22}E_{23}E_{24}$*)	$\delta_1\ \delta_6\ \delta_7$	<7, 9,15,17>				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
Noch 27)	$E_{26}E_{56}E_{66}$ *)	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_{10}$	<7,13,17,23>				
	$E_{33}E_{35}E_{36}$	$\delta_4\ \delta_5\ \delta_{16}\delta_{28}$	<7,10,12,25>				
	$E_{35}E_{45}E_{55}$ *)	$\delta_2\ \delta_5\ \delta_8$	<7,12,20,25>				
	$E_{35}E_{55}E_{56}$	$\delta_2\ \delta_5\ \delta_{17}\delta_{29}$	<7,12,13,30>				
	$E_{36}E_{56}E_{66}$	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_{14}\delta_{26}$	<7,13,17,29>				
28)	$E_{11}E_{12}E_{46}$	$\delta_3\ \delta_{20}\delta_{25}$	<7,15,20,25,26>	3	2	5	$X_1^3-X_2X_3, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_1X_2$
	$E_{13}E_{56}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_{19}\delta_{26}$	<7,13,17,22,23>				$X_1X_3, X_1X_4, X_2X_4, X_3X_4$
	$E_{14}E_{23}E_{44}$	$\delta_6\ \delta_{22}\delta_{27}$	<7,11,16,17,20>				*) $X_3 \leftrightarrow X_4$
	$E_{15}E_{22}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_{23}\delta_{30}$	<7, 9,12,15,17>				
	$E_{26}E_{35}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_{24}\delta_{29}$	<7,12,16,20,25>				
	$E_{33}E_{36}E_{45}$ *)	$\delta_5\ \delta_{21}\delta_{28}$	<7,17,19,29,32>				
29)	$E_{11}E_{12}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_9\ \delta_{20}$	<7, 8,12,13,18>	3	3	5	$X_1^3-X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_1X_2, X_1X_3$
	$E_{11}E_{33}E_{36}$	$\delta_5\ \delta_{11}\delta_{21}$	<7,10,15,18,19>				$X_1X_4, X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4$
	$E_{14}E_{44}E_{46}$ *)	$\delta_6\ \delta_{12}\delta_{22}$	<7,18,24,27,37>				*) $X_2 \leftrightarrow X_3$
	$E_{22}E_{24}E_{33}$ *)	$\delta_1\ \delta_7\ \delta_{23}$	<7,16,19,24,36>				
	$E_{22}E_{56}E_{66}$ *)	$\delta_4\ \delta_{10}\delta_{19}$	<7,20,24,30,43>				
	$E_{35}E_{44}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_8\ \delta_{24}$	<7,12,18,20,23>				
30)	$E_{11}E_{12}E_{56}$	$\delta_9\ \delta_{19}\delta_{20}$	<7,15,20,26>	3	2	2	$X_1^4, X_2^2, X_3^2, X_1X_2, X_1X_3$
	$E_{12}E_{56}E_{66}$	$\delta_{10}\delta_{19}\delta_{20}$	<7,13,15,23>				
	$E_{14}E_{33}E_{36}$	$\delta_{11}\delta_{21}\delta_{22}$	<7,17,18,29>				
	$E_{14}E_{36}E_{44}$	$\delta_{12}\delta_{21}\delta_{22}$	<7,11,17,20>				
	$E_{22}E_{24}E_{35}$	$\delta_7\ \delta_{23}\delta_{24}$	<7, 9,12,17>				
	$E_{24}E_{35}E_{55}$	$\delta_8\ \delta_{23}\delta_{24}$	<7,12,16,25>				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
31)	$E_{11}E_{12}E_{66}$	$\delta_{13}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{25}$	$\langle 7, 8, 13, 25\rangle$	3	3	3	$x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2$
	$E_{11}E_{56}E_{66}$	$\delta_{14}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{26}$	$\langle 7, 13, 15, 31\rangle$				
	$E_{14}E_{33}E_{44}$	$\delta_{15}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{27}$	$\langle 7, 11, 17, 30\rangle$				
	$E_{22}E_{24}E_{55}$	$\delta_{18}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{30}$	$\langle 7, 9, 12, 22\rangle$				
	$E_{22}E_{35}E_{55}$	$\delta_{17}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{29}$	$\langle 7, 12, 16, 27\rangle$				
	$E_{33}E_{36}E_{44}$	$\delta_{16}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{28}$	$\langle 7, 10, 11, 26\rangle$				
32)	$E_{11}E_{13}E_{15}$	$\delta_1\ \delta_5\ \delta_9$	$\langle 7, 8, 12, 17\rangle$	3	3	3	$x_1^3, x_2^2, x_3^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_2$
	$E_{13}E_{23}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_{11}$	$\langle 7, 10, 15, 16\rangle$				*) $x_1 \leftrightarrow x_2$
	$E_{15}E_{45}E_{55}$*)	$\delta_3\ \delta_5\ \delta_8$	$\langle 7, 11, 12, 15\rangle$				
	$E_{22}E_{23}E_{26}$	$\delta_4\ \delta_6\ \delta_7$	$\langle 7, 9, 10, 13\rangle$				
	$E_{26}E_{46}E_{66}$	$\delta_2\ \delta_6\ \delta_{10}$	$\langle 7, 13, 16, 18\rangle$				
	$E_{44}E_{45}E_{46}$	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_{12}$	$\langle 7, 11, 13, 19\rangle$				
33)	$E_{11}E_{13}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_5\ \delta_{11}$	$\langle 7, 8, 10, 19\rangle$	3	4	4	$x_1^3, x_2^3, x_3^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x$
	$E_{11}E_{15}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_5\ \delta_9$	$\langle 7, 12, 15, 25\rangle$				x_2x_3
	$E_{22}E_{23}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_7$	$\langle 7, 9, 10, 15\rangle$				
	$E_{22}E_{26}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_6\ \delta_{10}$	$\langle 7, 9, 13, 24\rangle$				
	$E_{44}E_{45}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_8$	$\langle 7, 11, 12, 20\rangle$				
	$E_{44}E_{46}E_{66}$	$\delta_2\ \delta_6\ \delta_{12}$	$\langle 7, 11, 13, 16\rangle$				
34)	$E_{11}E_{13}E_{36}$	$\delta_5\ \delta_{11}\delta_{26}$	$\langle 7, 20, 22, 24, 33\rangle$	3	3	4	$x_1^2, x_2^2-x_1x_3, x_3^2, x_4^2$
	$E_{11}E_{15}E_{45}$*)	$\delta_3\ \delta_5\ \delta_{15}$	$\langle 7, 12, 15, 17, 18\rangle$				$x_1x_2, x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4$
	$E_{12}E_{15}E_{55}$**)	$\delta_3\ \delta_9\ \delta_{30}$	$\langle 7, 15, 18, 19, 23\rangle$				*) $x_1 \mapsto x_4 \mapsto x_3 \mapsto x_1$
	$E_{13}E_{15}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_5\ \delta_{17}$	$\langle 7, 12, 17, 22, 23\rangle$				**) $x_1 \mapsto x_4 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$
	$E_{13}E_{22}E_{23}$	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_{13}$	$\langle 7, 8, 9, 10, 13\rangle$				+) $x_1 \leftrightarrow x_3$
	$E_{14}E_{46}E_{66}$*)	$\delta_6\ \delta_{12}\delta_{25}$	$\langle 7, 11, 13, 15, 16\rangle$				
	$E_{22}E_{26}E_{56}$*)	$\delta_4\ \delta_{10}\delta_{29}$	$\langle 7, 13, 15, 17, 19\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
Noch 34)	$E_{23}E_{24}E_{33}$ $^{+)}$	$\delta_1\ \delta_7\ \delta_{27}$	<7, 9,10,11,15>				
	$E_{23}E_{26}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_6\ \delta_{16}$	<7,10,13,16,18>				
	$E_{26}E_{44}E_{46}$	$\delta_2\ \delta_6\ \delta_{18}$	<7, 9,11,13,19>				
	$E_{35}E_{44}E_{45}$ $^{*)}$	$\delta_2\ \delta_8\ \delta_{28}$	<7,19,20,25,31>				
	$E_{45}E_{46}E_{55}$ $^{+)}$	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_{14}$	<7,11,12,13,15>				
35)	$E_{11}E_{13}E_{56}$	$\delta_5\ \delta_9\ \delta_{19}\delta_{26}$	<7, 8,12,13,17>	3	2	5	$X_1^3, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_1X_2, X_1X_3,$
	$E_{12}E_{46}E_{66}$	$\delta_6\ \delta_{10}\delta_{20}\delta_{25}$	<7,13,15,16,18>				$X_1X_4-X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4$
	$E_{14}E_{23}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_{11}\delta_{22}\delta_{27}$	<7,10,11,15,16>				*) $X_1 \leftrightarrow X_2,\ X_3 \leftrightarrow X_4$
	$E_{15}E_{24}E_{55}$ $^{*)}$	$\delta_3\ \delta_8\ \delta_{23}\delta_{30}$	<7,11,12,15,16>				
	$E_{22}E_{26}E_{35}$	$\delta_4\ \delta_7\ \delta_{24}\delta_{29}$	<7, 9,10,12,13>				
	$E_{36}E_{44}E_{45}$	$\delta_2\ \delta_{12}\delta_{21}\delta_{28}$	<7,11,13,17,19>				
36)	$E_{11}E_{13}E_{66}$	$\delta_{11}\delta_{13}\delta_{19}\delta_{26}$	<7, 8,13,17>	3	3	3	$X_1^3, X_2^3, X_3^2, X_1X_2, X_1^2X_3, X_2X_3$
	$E_{11}E_{14}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_{11}\delta_{15}\delta_{21}$	<7, 8,10,11>				*) $X_2 \leftrightarrow X_3$
	$E_{11}E_{46}E_{66}$	$\delta_{12}\delta_{14}\delta_{20}\delta_{25}$	<7,13,15,18>				**) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{11}E_{55}E_{56}$ $^{*)}$	$\delta_5\ \delta_9\ \delta_{14}\delta_{20}$	<7,12,13,15>				+) $X_1 \mapsto X_2 \mapsto X_3 \mapsto X_1$
	$E_{12}E_{22}E_{66}$	$\delta_6\ \delta_{10}\delta_{13}\delta_{19}$	<7, 9,13,15>				++) $X_1 \leftrightarrow X_3$
	$E_{15}E_{22}E_{55}$ $^{*)}$	$\delta_9\ \delta_{17}\delta_{23}\delta_{30}$	<7,12,15,16>				
	$E_{22}E_{26}E_{55}$	$\delta_{10}\delta_{18}\delta_{24}\delta_{29}$	<7, 9,12,13>				
	$E_{22}E_{33}E_{35}$ $^{**)}$	$\delta_4\ \delta_7\ \delta_{17}\delta_{23}$	<7, 9,10,12>				
	$E_{23}E_{33}E_{44}$	$\delta_7\ \delta_{16}\delta_{22}\delta_{27}$	<7,10,11,16>				
	$E_{24}E_{44}E_{55}$ $^{+)}$	$\delta_3\ \delta_8\ \delta_{18}\delta_{24}$	<7, 9,11,12>				
	$E_{33}E_{44}E_{45}$	$\delta_8\ \delta_{15}\delta_{21}\delta_{28}$	<7,11,17,19>				
	$E_{36}E_{44}E_{66}$ $^{++)}$	$\delta_2\ \delta_{12}\delta_{16}\delta_{22}$	<7,10,11,13>				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
37)	$E_{11}E_{14}E_{36}$	$\delta_{11}\delta_{12}\delta_{21}$	<7,17,18,22,27>	3	2	4	$x_1^2, x_2^2, x_3^2-x_1x_4, x_4^2,$
	$E_{12}E_{22}E_{56}$	$\delta_9\ \delta_{10}\delta_{19}$	<7,13,15,16,19>				$x_1x_2, x_1x_3, x_2x_4, x_3x_4$
	$E_{12}E_{55}E_{56}$*)	$\delta_9\ \delta_{10}\delta_{20}$	<7,13,15,19,23>				*) $x_1 \leftrightarrow x_2$
	$E_{14}E_{36}E_{66}$*)	$\delta_{11}\delta_{12}\delta_{22}$	<7,10,11,13,15>				
	$E_{24}E_{33}E_{35}$*)	$\delta_7\ \delta_8\ \delta_{23}$	<7,12,16,17,18>				
	$E_{24}E_{35}E_{44}$	$\delta_7\ \delta_8\ \delta_{24}$	<7,16,19,25,31>				
38)	$E_{11}E_{14}E_{46}$	$\delta_3\ \delta_{12}\delta_{25}$	<7,11,15,20>	3	3	2	$x_1^2, x_2^3, x_3^2, x_1x_2^2, x_2x_3$
	$E_{12}E_{15}E_{22}$	$\delta_1\ \delta_9\ \delta_{30}$	<7, 8, 9,12>				*) $x_1 \leftrightarrow x_2$
	$E_{13}E_{36}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_{11}\delta_{26}$	<7,10,13,15>				
	$E_{23}E_{24}E_{44}$	$\delta_6\ \delta_7\ \delta_{27}$	<7, 9,11,17>				
	$E_{26}E_{55}E_{56}$*)	$\delta_2\ \delta_{10}\delta_{29}$	<7,12,13,16>				
	$E_{33}E_{35}E_{45}$	$\delta_5\ \delta_8\ \delta_{28}$	<7,12,17,18>				
39)	$E_{11}E_{14}E_{66}$	$\delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}\delta_{25}$	<7, 8,13,17,18>	3	3	5	$x_1^3, x_2^2-x_1x_4, x_3^2, x_4^2, x_1x_2$
	$E_{11}E_{15}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_5\ \delta_{15}$	<7,12,15,17,18>				$x_1x_3, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$
	$E_{11}E_{36}E_{66}$*)	$\delta_{11}\delta_{12}\delta_{14}\delta_{26}$	<7,13,15,17,18>				*) $x_3 \leftrightarrow x_4$
	$E_{11}E_{45}E_{55}$**)	$\delta_3\ \delta_5\ \delta_{14}$	<7,12,13,15,18>				**) $x_2 \leftrightarrow x_3$
	$E_{12}E_{22}E_{55}$	$\delta_9\ \delta_{10}\delta_{18}\delta_{30}$	<7, 9,12,13,15>				
	$E_{13}E_{22}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_{17}$	<7,10,16,19,22>				
	$E_{22}E_{23}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_6\ \delta_{13}$	<7, 9,13,15,17>				
	$E_{22}E_{55}E_{56}$**)	$\delta_9\ \delta_{10}\delta_{17}\delta_{29}$	<7,12,15,16,20>				
	$E_{24}E_{33}E_{44}$	$\delta_7\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{27}$	<7,11,17,19,23>				
	$E_{26}E_{44}E_{66}$**)	$\delta_2\ \delta_6\ \delta_{16}$	<7,13,17,18,23>				
	$E_{33}E_{35}E_{44}$*)	$\delta_7\ \delta_8\ \delta_{16}\delta_{28}$	<7,10,11,12,16>				
	$E_{44}E_{46}E_{55}$*)	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_{18}$	<7,11,12,13,16>				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
40)	$E_{11}E_{33}E_{45}$	$\delta_5\ \delta_{15}\delta_{21}$	$\langle 7,17,19,22,25\rangle$	3	2	5	$X_1^3, X_2^2, X_3^2-X_2X_4, X_4^2, X_1X_2,$
	$E_{11}E_{46}E_{55}$*)	$\delta_3\ \delta_{14}\delta_{20}$	$\langle 7,13,15,19,25\rangle$				$X_1X_3, X_1X_4, X_2X_3, X_3X_4$
	$E_{13}E_{22}E_{66}$	$\delta_4\ \delta_{13}\delta_{19}$	$\langle 7,13,15,16,17\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{15}E_{22}E_{23}$*)	$\delta_1\ \delta_{17}\delta_{23}$	$\langle 7,12,16,17,22\rangle$				
	$E_{23}E_{44}E_{66}$*)	$\delta_6\ \delta_{16}\delta_{22}$	$\langle 7,10,11,13,16\rangle$				
	$E_{26}E_{44}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_{18}\delta_{24}$	$\langle 7,19,20,25,30\rangle$				
41)	$E_{11}E_{36}E_{45}$	$\delta_5\ \delta_{12}\delta_{14}\delta_{21}$	$\langle 7,12,13,15,17,18\rangle$	3	1	9	$X_1^2, X_2^2, X_3^2-X_2X_4, X_4^2, X_5^2$
	$E_{12}E_{46}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_{10}\delta_{18}\delta_{20}$	$\langle 7,9,11,12,13,15\rangle$				$X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, X_1X_5-X_2X_4$
	$E_{13}E_{22}E_{56}$	$\delta_4\ \delta_9\ \delta_{17}\delta_{19}$	$\langle 7,10,13,16,19,22\rangle$				$X_2X_3, X_2X_5, X_3X_4, X_3X_5, X_4X_5$
	$E_{14}E_{23}E_{66}$	$\delta_6\ \delta_{11}\delta_{13}\delta_{22}$	$\langle 7,10,11,13,15,16\rangle$				
	$E_{15}E_{24}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{23}$	$\langle 7,8,9,10,11,12\rangle$				
	$E_{26}E_{35}E_{44}$	$\delta_2\ \delta_7\ \delta_{16}\delta_{24}$	$\langle 7,9,10,11,12,13\rangle$				
42)	$E_{11}E_{36}E_{56}$	$\delta_5\ \delta_{14}\delta_{26}$	$\langle 7,12,13,15,17\rangle$	3	2	4	$X_1^2, X_2^2, X_3^2-X_2X_4, X_4^2,$
	$E_{11}E_{45}E_{46}$*)	$\delta_3\ \delta_{12}\delta_{14}$	$\langle 7,11,13,15,19\rangle$				$X_1X_3, X_1X_4, X_2X_3, X_3X_4$
	$E_{12}E_{14}E_{66}$*)	$\delta_6\ \delta_{13}\delta_{25}$	$\langle 7,15,16,20,25\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_4$
	$E_{12}E_{24}E_{55}$*)	$\delta_3\ \delta_{18}\delta_{30}$	$\langle 7,9,11,12,15\rangle$				*) $X_1 \mapsto X_3 \mapsto X_2 \mapsto X_1$
	$E_{13}E_{15}E_{22}$	$\delta_1\ \delta_9\ \delta_{17}$	$\langle 7,12,15,16,17\rangle$				
	$E_{13}E_{23}E_{66}$**)	$\delta_4\ \delta_{11}\delta_{13}$	$\langle 7,10,13,15,16\rangle$				
	$E_{14}E_{24}E_{33}$*)	$\delta_1\ \delta_{15}\delta_{27}$	$\langle 7,11,15,17,23\rangle$				
	$E_{15}E_{33}E_{45}$**)	$\delta_5\ \delta_8\ \delta_{15}$	$\langle 7,12,17,18,22\rangle$				
	$E_{22}E_{35}E_{56}$**)	$\delta_4\ \delta_{17}\delta_{29}$	$\langle 7,12,16,17,20\rangle$				
	$E_{23}E_{26}E_{44}$*)	$\delta_6\ \delta_7\ \delta_{16}$	$\langle 7,9,10,11,13\rangle$				
	$E_{26}E_{46}E_{55}$*)	$\delta_2\ \delta_{10}\delta_{18}$	$\langle 7,13,16,19,25\rangle$				
	$E_{35}E_{36}E_{44}$	$\delta_2\ \delta_{16}\delta_{28}$	$\langle 7,13,17,18,19\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
43)	$E_{12}E_{14}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_6$	<7, 8, 9, 11>	3	3	1	$x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2x_3$
	$E_{35}E_{36}E_{56}$	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_5$	<7, 10, 12, 13>				
44)	$E_{12}E_{14}E_{46}$	$\delta_3\ \delta_6\ \delta_{25}$	<7, 11, 15, 16, 20>	3	2	4	$x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1x_3$
	$E_{12}E_{15}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_{30}$	<7, 8, 9, 11, 12>				$x_1x_4-x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$…
	$E_{13}E_{36}E_{56}$	$\delta_4\ \delta_5\ \delta_{26}$	<7, 10, 12, 13, 15>				
	$E_{14}E_{23}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_6\ \delta_{27}$	<7, 9, 11, 15, 17>				
	$E_{26}E_{35}E_{56}$	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_{29}$	<7, 12, 13, 16, 17>				
	$E_{35}E_{36}E_{45}$	$\delta_2\ \delta_5\ \delta_{28}$	<7, 12, 13, 17, 18>				
45)	$E_{11}E_{12}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_9\ \delta_{13}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{25}$	<7, 8, 13, 18, 19>	4	4	6	$x_1^4, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1x_2, x_1$…
	$E_{14}E_{44}$	$\delta_3\ \delta_6\ \delta_{12}\delta_{15}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{27}$	<7, 11, 17, 20, 23>				$x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$…
	$E_{22}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_{18}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{30}$	<7, 9, 12, 17, 22>				
	$E_{33}E_{36}$	$\delta_4\ \delta_5\ \delta_{11}\delta_{16}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{28}$	<7, 10, 18, 19, 22>				
	$E_{35}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_{17}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{29}$	<7, 12, 20, 23, 25>				
	$E_{56}E_{66}$	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_{10}\delta_{14}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{26}$	<7, 13, 17, 23, 29>				
46)	$E_{11}E_{13}$	$\delta_1\ \delta_5\ \delta_9\ \delta_{11}\delta_{13}\delta_{19}\delta_{26}$	<7, 8, 10, 12, 13>	4	4	6	$x_1^3, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1^2x_2, x_1$…
	$E_{15}E_{55}$	$\delta_3\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_9\ \delta_{17}\delta_{23}\delta_{30}$	<7, 12, 15, 16, 18>				$x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$
	$E_{22}E_{26}$	$\delta_4\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_{10}\delta_{18}\delta_{24}\delta_{29}$	<7, 9, 12, 13, 17>				
	$E_{23}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_7\ \delta_{11}\delta_{16}\delta_{22}\delta_{27}$	<7, 10, 15, 16, 18>				
	$E_{44}E_{45}$	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_8\ \delta_{12}\delta_{15}\delta_{21}\delta_{28}$	<7, 11, 12, 13, 17>				
	$E_{46}E_{66}$	$\delta_2\ \delta_6\ \delta_{10}\delta_{12}\delta_{14}\delta_{20}\delta_{25}$	<7, 13, 16, 18, 22>				
	$E_{11}E_{14}$*)	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}\delta_{15}\delta_{21}\delta_{25}$	<7, 8, 10, 11, 13>				*) $x_2 \leftrightarrow x_3$
	$E_{12}E_{22}$	$\delta_1\ \delta_6\ \delta_9\ \delta_{10}\delta_{13}\delta_{18}\delta_{19}\delta_{30}$	<7, 8, 9, 12, 13>				
	$E_{24}E_{44}$**)	$\delta_3\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{18}\delta_{24}\delta_{27}$	<7, 9, 11, 12, 17>				**) $x_1 \leftrightarrow x_2$
	$E_{33}E_{35}$	$\delta_4\ \delta_5\ \delta_7\ \delta_8\ \delta_{16}\delta_{17}\delta_{23}\delta_{28}$	<7, 10, 12, 16, 18>				
	$E_{36}E_{66}$**)	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_{11}\delta_{12}\delta_{14}\delta_{16}\delta_{22}\delta_{26}$	<7, 10, 13, 15, 18>				
	$E_{55}E_{56}$	$\delta_2\ \delta_5\ \delta_9\ \delta_{10}\delta_{14}\delta_{17}\delta_{20}\delta_{29}$	<7, 12, 13, 15, 16>				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
Noch 46)	$E_{11}E_{15}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_5\ \delta_9\ \delta_{15}$	$\langle 7,8,11,12,17\rangle$				
	$E_{13}E_{33}$*)	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_5\ \delta_{11}\delta_{17}$	$\langle 7,10,12,15,16\rangle$				
	$E_{22}E_{23}$*)	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_{13}$	$\langle 7,9,10,13,15\rangle$				
	$E_{26}E_{66}$	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_6\ \delta_{10}\delta_{16}$	$\langle 7,13,16,17,18\rangle$				
	$E_{44}E_{46}$	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_6\ \delta_{12}\delta_{18}$	$\langle 7,11,13,16,19\rangle$				
	$E_{45}E_{55}$*)	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_{14}$	$\langle 7,12,13,18,22\rangle$				
47)	$E_{11}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_5\ \delta_{11}\delta_{15}\delta_{21}$	$\langle 7,17,19,22,32\rangle$	4	4	6	$x_1^3, x_2^2, x_3^3, x_4^2, x_1x_2, x_1x_3,$
	$E_{11}E_{55}$*)	$\delta_3\ \delta_5\ \delta_9\ \delta_{14}\delta_{20}$	$\langle 7,12,15,20,25\rangle$				$x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$
	$E_{22}E_{33}$*)	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_7\ \delta_{17}\delta_{23}$	$\langle 7,9,10,12,15\rangle$				*) $x_2 \leftrightarrow x_3$
	$E_{22}E_{66}$*)	$\delta_4\ \delta_6\ \delta_{10}\delta_{13}\delta_{19}$	$\langle 7,13,16,17,22\rangle$				
	$E_{44}E_{55}$*)	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_8\ \delta_{18}\delta_{24}$	$\langle 7,11,12,16,20\rangle$				
	$E_{44}E_{66}$*)	$\delta_2\ \delta_6\ \delta_{12}\delta_{16}\delta_{22}$	$\langle 7,11,13,16,17\rangle$				
	$E_{11}E_{66}$*)	$\delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}\delta_{14}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{25}\delta_{26}$	$\langle 7,13,15,18,24\rangle$				
	$E_{22}E_{55}$*)	$\delta_9\ \delta_{10}\delta_{17}\delta_{18}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{29}\delta_{30}$	$\langle 7,9,12,20,22\rangle$				
	$E_{33}E_{44}$*)	$\delta_7\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{16}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{27}\delta_{28}$	$\langle 7,10,11,16,19\rangle$				
48)	$E_{11}E_{36}$	$\delta_5\ \delta_{11}\delta_{12}\delta_{14}\delta_{21}\delta_{26}$	$\langle 7,13,15,17,18,19\rangle$	4	3	9	$x_1^2, x_2^2-x_1x_3, x_3^2, x_4^2, x_5^2$
	$E_{11}E_{45}$*)	$\delta_3\ \delta_5\ \delta_{12}\delta_{14}\delta_{15}\delta_{21}$	$\langle 7,12,15,17,18,20\rangle$				x_1x_2, x_1x_4, x_1x_5
	$E_{12}E_{55}$*)	$\delta_3\ \delta_9\ \delta_{10}\delta_{18}\delta_{20}\delta_{30}$	$\langle 7,16,19,20,22,25\rangle$				x_ix_j $(2\le i<j\le 5)$
	$E_{13}E_{22}$	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_9\ \delta_{13}\delta_{17}\delta_{19}$	$\langle 7,8,9,10,12,13\rangle$				*) $x_3 \leftrightarrow x_4$
	$E_{14}E_{66}$	$\delta_6\ \delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}\delta_{22}\delta_{25}$	$\langle 7,11,13,15,16,17\rangle$				
	$E_{15}E_{33}$*)	$\delta_1\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{17}\delta_{23}$	$\langle 7,12,17,18,22,23\rangle$				
	$E_{22}E_{56}$*)	$\delta_4\ \delta_9\ \delta_{10}\delta_{17}\delta_{19}\delta_{29}$	$\langle 7,13,16,17,19,22\rangle$				
	$E_{23}E_{66}$*)	$\delta_4\ \delta_6\ \delta_{11}\delta_{13}\delta_{16}\delta_{22}$	$\langle 7,10,13,15,16,18\rangle$				
	$E_{24}E_{33}$	$\delta_1\ \delta_7\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{23}\delta_{27}$	$\langle 7,9,10,11,12,15\rangle$				
	$E_{26}E_{44}$*)	$\delta_2\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_{16}\delta_{18}\delta_{24}$	$\langle 7,9,11,12,13,17\rangle$				
	$E_{35}E_{44}$	$\delta_2\ \delta_7\ \delta_8\ \delta_{16}\delta_{24}\delta_{28}$	$\langle 7,10,11,12,13,16\rangle$				
	$E_{46}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_{10}\delta_{14}\delta_{18}\delta_{20}$	$\langle 7,11,12,13,15,16\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
49)	$E_{11}E_{46}$	$\delta_3\ \delta_{12}\delta_{14}\delta_{20}\delta_{25}$	$\langle 7,13,15,18,19\rangle$	4	3	5	$X_1^2, X_2^3, X_3^2, X_4^2, X_1X_2, X_1$
	$E_{13}E_{66}$ *)	$\delta_4\ \delta_{11}\delta_{13}\delta_{19}\delta_{26}$	$\langle 7,13,15,17,23\rangle$				X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4
	$E_{15}E_{22}$	$\delta_1\ \delta_9\ \delta_{17}\delta_{23}\delta_{30}$	$\langle 7,15,16,19,24\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{23}E_{44}$ **)	$\delta_6\ \delta_7\ \delta_{16}\delta_{22}\delta_{27}$	$\langle 7,16,17,18,27\rangle$				**) $X_2 \leftrightarrow X_3$
	$E_{26}E_{55}$	$\delta_2\ \delta_{10}\delta_{18}\delta_{24}\delta_{29}$	$\langle 7,12,13,16,18\rangle$				
	$E_{33}E_{45}$ *)	$\delta_5\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{21}\delta_{28}$	$\langle 7,10,11,12,15\rangle$				
	$E_{11}E_{56}$	$\delta_5\ \delta_9\ \delta_{14}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{26}$	$\langle 7,13,15,19,24\rangle$				
	$E_{12}E_{66}$ *)	$\delta_6\ \delta_{10}\delta_{13}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{25}$	$\langle 7,13,15,16,25\rangle$				
	$E_{14}E_{33}$ *)	$\delta_1\ \delta_{11}\delta_{15}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{27}$	$\langle 7,10,11,15,23\rangle$				
	$E_{22}E_{35}$	$\delta_4\ \delta_7\ \delta_{17}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{29}$	$\langle 7,12,16,17,27\rangle$				
	$E_{24}E_{55}$ *)	$\delta_3\ \delta_8\ \delta_{18}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{30}$	$\langle 7,12,16,18,29\rangle$				
	$E_{36}E_{44}$	$\delta_2\ \delta_{12}\delta_{16}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{28}$	$\langle 7,10,11,13,19\rangle$				
50)	$E_{12}E_{14}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_6\ \delta_{13}\delta_{25}$	$\langle 7,\ 8,\ 9,11,13\rangle$	4	3	4	$X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_1X_4,$
	$E_{12}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_6\ \delta_{18}\delta_{30}$	$\langle 7,\ 9,11,15,19\rangle$				X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4
	$E_{14}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_6\ \delta_{15}\delta_{27}$	$\langle 7,11,15,16,17\rangle$				
	$E_{35}E_{36}$	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_5\ \delta_{16}\delta_{28}$	$\langle 7,10,12,13,18\rangle$				*) $X_1 \leftrightarrow X_2$
	$E_{35}E_{56}$ *)	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_5\ \delta_{17}\delta_{29}$	$\langle 7,10,12,13,16\rangle$				
	$E_{36}E_{56}$ *)	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_5\ \delta_{14}\delta_{26}$	$\langle 7,10,13,15,18\rangle$				
	$E_{12}E_{15}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_9\ \delta_{30}$	$\langle 7,15,16,19,25\rangle$				
	$E_{13}E_{15}$ *)	$\delta_1\ \delta_5\ \delta_9\ \delta_{17}$	$\langle 7,12,15,17,23\rangle$				
	$E_{13}E_{23}$ *)	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_{11}\delta_{13}$	$\langle 7,15,17,23,27\rangle$				
	$E_{13}E_{36}$	$\delta_4\ \delta_5\ \delta_{11}\delta_{26}$	$\langle 7,10,13,15,19\rangle$				
	$E_{14}E_{46}$	$\delta_3\ \delta_6\ \delta_{12}\delta_{25}$	$\langle 7,11,15,20,23\rangle$				
	$E_{15}E_{45}$ *)	$\delta_3\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_{15}$	$\langle 7,11,12,15,17\rangle$				
	$E_{23}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_{27}$	$\langle 7,16,18,24,29\rangle$				
	$E_{23}E_{26}$	$\delta_4\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_{16}$	$\langle 7,16,17,20,25\rangle$				
	$E_{26}E_{46}$	$\delta_2\ \delta_6\ \delta_{10}\delta_{18}$	$\langle 7,13,16,18,19\rangle$				

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
Noch 50)	$E_{26}E_{56}$	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_{10}\delta_{29}$	$\langle 7,13,19,23,24\rangle$				
	$E_{35}E_{45}$	$\delta_2\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_{28}$	$\langle 7,12,17,18,20\rangle$				
	$E_{45}E_{46}$*)	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_{12}\delta_{14}$	$\langle 7,13,18,19,22\rangle$				
51)	$E_{12}E_{46}$	$\delta_3\ \delta_6\ \delta_{10}\delta_{18}\delta_{20}\delta_{25}$	$\langle 7,\ 9,11,13,15,19\rangle$	4	2	9	$X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_5^2,\ X_1X_2,$
	$E_{13}E_{56}$	$\delta_4\ \delta_5\ \delta_9\ \delta_{17}\delta_{19}\delta_{26}$	$\langle 7,10,12,13,15,16\rangle$				$X_1X_3, X_1X_4-X_2X_3, X_1X_5,$
	$E_{14}E_{23}$	$\delta_1\ \delta_6\ \delta_{11}\delta_{13}\delta_{22}\delta_{27}$	$\langle 7,\ 8,\ 9,10,11,13\rangle$				$X_2X_4, X_2X_5, X_3X_4, X_3X_5,$
	$E_{15}E_{24}$	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{23}\delta_{30}$	$\langle 7,11,12,15,16,17\rangle$				X_4X_5
	$E_{26}E_{35}$	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_7\ \delta_{16}\delta_{24}\delta_{29}$	$\langle 7,12,13,16,17,18\rangle$				
	$E_{36}E_{45}$	$\delta_2\ \delta_5\ \delta_{12}\delta_{14}\delta_{21}\delta_{28}$	$\langle 7,10,11,12,13,15\rangle$				
52)	$E_{12}E_{56}$	$\delta_9\ \delta_{10}\delta_{19}\delta_{20}$	$\langle 7,20,22,30,33\rangle$	4	2	4	$X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2$
	$E_{14}E_{36}$*)	$\delta_{11}\delta_{12}\delta_{21}\delta_{22}$	$\langle 7,17,18,27,29\rangle$				$X_1X_2, X_1X_3, X_2X_4, X_3X_4$
	$E_{24}E_{35}$	$\delta_7\ \delta_8\ \delta_{23}\delta_{24}$	$\langle 7,16,19,24,25\rangle$				*) $X_3 \leftrightarrow X_4$
53)	E_{11}	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_5\ \delta_9\ \delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}$	$\langle 7,\ 8,10,11,12,13\rangle$	5	5	10	$X_1^3, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_5^2$
		$\delta_{14}\delta_{15}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{21}\delta_{25}\delta_{26}$					$X_iX_j\ (1 \le i < j \le 5)$
	E_{22}	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_9\ \delta_{10}\delta_{13}$	$\langle 7,\ 9,10,12,13,15\rangle$				
		$\delta_{17}\delta_{18}\delta_{19}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{29}\delta_{30}$					
	E_{33}	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_5\ \delta_7\ \delta_8\ \delta_{11}\delta_{15}$	$\langle 7,10,11,12,15,16\rangle$				
		$\delta_{16}\delta_{17}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{23}\delta_{27}\delta_{28}$					
	E_{44}	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_8\ \delta_{12}\delta_{15}$	$\langle 7,11,12,13,16,17\rangle$				
		$\delta_{16}\delta_{18}\delta_{21}\delta_{22}\delta_{24}\delta_{27}\delta_{28}$					
	E_{55}	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_9\ \delta_{10}\delta_{14}$	$\langle 7,12,13,15,16,18\rangle$				
		$\delta_{17}\delta_{18}\delta_{20}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{29}\delta_{30}$					
	E_{66}	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_6\ \delta_{10}\delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}$	$\langle 7,13,15,16,17,18\rangle$				
		$\delta_{14}\delta_{16}\delta_{19}\delta_{20}\delta_{22}\delta_{25}\delta_{26}$					

	$M_7(H)$	Kanten	Beispiel	s	r	d	Relationen
54)	E_{12}	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_6\ \delta_9\ \delta_{10}\delta_{13}\delta_{18}$ $\delta_{19}\delta_{20}\delta_{25}\delta_{30}$	<7, 8, 9, 11, 12, 13>	5	4	9	X_i^2 (i=1,...,5)
	E_{13}*)	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_5\ \delta_9\ \delta_{11}\delta_{13}\delta_{17}$ $\delta_{19}\delta_{26}$	<7, 10, 13, 15, 16, 19>				X_1X_3, X_1X_4, X_1X_5
	E_{14}	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_6\ \delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}\delta_{15}$ $\delta_{21}\delta_{22}\delta_{25}\delta_{27}$	<7, 11, 15, 16, 17, 20>				X_iX_j $(2\leq i<j\leq 5)$
	E_{15}	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_9\ \delta_{15}\delta_{17}$ $\delta_{23}\delta_{30}$	<7, 12, 15, 16, 17, 18>				*) $X_2 \leftrightarrow X_3$
	E_{23}	$\delta_1\ \delta_4\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_{11}\delta_{13}\delta_{16}$ $\delta_{22}\delta_{27}$	<7, 9, 10, 11, 13, 15>				
	E_{24}	$\delta_1\ \delta_3\ \delta_5\ \delta_7\ \delta_8\ \delta_{15}\delta_{18}$ $\delta_{23}\delta_{24}\delta_{27}\delta_{30}$	<7, 9, 11, 12, 15, 17>				
	E_{26}	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_6\ \delta_7\ \delta_{10}\delta_{16}\delta_{18}$ $\delta_{24}\delta_{29}$	<7, 13, 16, 17, 18, 19>				
	E_{35}	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_5\ \delta_7\ \delta_8\ \delta_{16}\delta_{17}$ $\delta_{23}\delta_{24}\delta_{28}\delta_{29}$	<7, 10, 12, 13, 16, 18>				
	E_{36}*)	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_5\ \delta_{11}\delta_{12}\delta_{14}\delta_{16}$ $\delta_{21}\delta_{22}\delta_{26}\delta_{28}$	<7, 10, 12, 13, 15, 18>				
	E_{45}	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_5\ \delta_8\ \delta_{12}\delta_{14}\delta_{15}$ $\delta_{21}\delta_{28}$	<7, 11, 12, 13, 15, 17>				
	E_{46}	$\delta_2\ \delta_3\ \delta_6\ \delta_{10}\delta_{12}\delta_{14}\delta_{18}$ $\delta_{20}\delta_{25}$	<7, 11, 13, 15, 16, 19>				
	E_{56}	$\delta_2\ \delta_4\ \delta_6\ \delta_9\ \delta_{10}\delta_{14}\delta_{17}$ $\delta_{19}\delta_{20}\delta_{26}\delta_{29}$	<7, 12, 13, 15, 16, 18>				
55)	O	$\delta_1, \ldots\ldots, \delta_{30}$	<7, ..., 13>	6	6	16	X_iX_j $(1\leq i\leq j\leq 6)$

Beispiel für die Verwendung der Tabelle:

Gegeben sei $H = \langle 7,75,83,92 \rangle$. Durch Betrachtung mod 7 findet man sofort:

$h_1 = 92$

$h_2 = 2h_1 = 184$

$h_3 = 2h_5 = 150$

$h_4 = h_5+h_6 = 158$

$h_5 = 75$

$h_6 = 83$

und $M_7(H) = (E_{11}, E_{55}, E_{56})$. Die Halbgruppe gehört zur Klasse 36) der Tabelle. Man liest ab, daß

$$s(H) = 3, \ r(H) = 3, \ d(H) = 3.$$

Die zugehörigen Relationen sind:

$$X_1^3, X_2^2, X_3^3, X_1X_3, X_1^2X_2, X_2X_3$$

wobei die Zuordnungen wie folgt zu verstehen sind:

$X_1 \mapsto 75$, $X_2 \mapsto 83$, $X_3 \mapsto 92$.

Es ist $3 \cdot 75 = 225 + 19 \cdot 7 + 92$ und hierzu gehört die Relation $X_1^3 - X_0^{19} \cdot X_3$ im Relationenideal des Halbgruppenrings. Man ermittelt auf diese Weise das minimale Relationensystem

$$X_1^3-X_0^{19} \cdot X_3, X_2^2-X_0^{13} \cdot X_1, X_3^3-X_0^{18} \cdot X_2, X_1^2X_2-X_0^7 \cdot X_3^2, X_1X_3-X_0^{12} \cdot X_2, X_2X_3-X_0^{25}$$

Anhang C. Hilbertreihen

I) m=3

$$H_3(X_1,X_2) = \frac{1+X_1+X_1X_2}{(1-X_1X_2^2)(1-X_1^2X_2)},$$

$$\tilde{H}_3(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)} = (1+t+t^2)+2(t^3+t^4+t^5)+3(t^6+t^7+t^8)+\ldots$$

Hilbertreihen für die Gitterpunkte auf den Seiten von P_3

E_{11}	$\frac{1}{1-X_1X_2^2}$	$\frac{1}{1-t^3}$	$\frac{1+t}{1-t^3}$
E_{22}	$\frac{X_1}{1-X_1^2X_2}$	$\frac{t}{1-t^3}$	
O	$\frac{X_1X_2(1+X_1+X_1X_2)}{(1-X_1X_2^2)(1-X_1^2X_2)}$	$\frac{t^2}{(1-t)(1-t^3)}$	

Hilbertreihe für die Randpunkte (symmetrischen Halbgruppen):

$$H_3^{\mathrm{sym}}(X_1,X_2) = \frac{(1-X_1X_2)(1+X_1+X_1X_2)}{(1-X_1X_2^2)(1-X_1^2X_2)},$$

$$\tilde{H}_3^{\mathrm{sym}}(t) = \frac{1+t}{1-t^3} = (1+t)+(t^3+t^4)+(t^6+t^7)+\ldots$$

II) m=4

$$H_4(X_1,X_2,X_3) = \frac{F_4}{(1-X_1X_2^2X_3^3)(1-X_1^3X_2^2X_3)(1-X_1X_3)(1-X_1X_2^2X_3)}$$

$$\text{mit } F_4 = 1+X_1+X_1X_2+X_1X_2X_3+X_1^2X_2+X_1X_2X_3^2+X_1X_2^2X_3^2$$
$$- X_1^2X_2^2X_3^3-X_1^2X_2^3X_3^3-X_1^3X_2^3X_3^3-X_1^4X_2^3X_3^2-X_1^4X_2^3X_3^3-X_1^4X_2^4X_3^3-X_1^4X_2^4X_3^4$$

$$\tilde{H}_4(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

Hilbertreihen für die Gitterpunkte auf den Seiten von P_4

Seite	H_S	$\tilde{H}_S$	
E_{11} E_{12}	$\frac{1}{1-X_1X_2^2X_3^3}$	$\frac{1}{1-t^6}$	$\frac{1}{1-t^3}$
E_{23} E_{33}	$\frac{X_1^2X_2}{1-X_1^3X_2^2X_3}$	$\frac{t^3}{1-t^6}$	
E_{11}	$\frac{X_1X_2^2X_3+X_1X_2^2X_3^3}{(1-X_1X_2^2X_3^3)(1-X_1^3X_2^2X_3)}$	$\frac{t^4}{(1-t^2)(1-t^6)}$	$\frac{t^2}{(1-t^2)(1-t^4)}$
E_{33}	$\frac{X_1+X_1^3X_2^2X_3}{(1-X_1^3X_2^2X_3)(1-X_1X_2^2X_3)}$	$\frac{t^2(1+t^4)}{(1-t^4)(1-t^6}$	
E_{12}	$\frac{X_1X_3+X_1X_2X_3^2}{(1-X_1X_2^2X_3^3)(1-X_1X_3)}$	$\frac{t^2(1+t^2)}{(1-t^2)(1-t^6)}$	$\frac{t}{(1-t)(1-t^3)}$
E_{23}	$\frac{X_1+X_1^3X_2X_3}{(1-X_1^3X_2^2X_3)(1-X_1X_3)}$	$\frac{t(1+t^4)}{(1-t^2)(1-t^6)}$	
O	$X_1X_2X_3 \cdot H_4$	$\frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$	

$$H_4^{sym} = \frac{1+X_1+X_1^2X_2+X_1X_2X_3^2-X_1^2X_2^2X_3^3-X_1^3X_2^2X_3-X_1^3X_2^3X_3^3-X_1^4X_2^3X_3^3}{(1-X_1X_2^2X_3^3)(1-X_1^3X_2^2X_3)(1-X_1X_3)}$$

$$\tilde{H}_4^{sym} = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)}$$

III) <u>m=5</u>

Im Zähler der erzeugenden Funktion $H_5(X_1,X_2,X_3,X_4)$ treten mehrere hundert Monome auf

$$\tilde{H}_5 = \frac{\tilde{F}_5}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^{10})(1-t^{15})}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{F}_5 &= 1 + t + t^2 + t^4 + 2t^5 + 3t^6 + 3t^7 + 2t^8 + 2t^9 + 3t^{10} + 2t^{11} \\ &\quad + t^{22} + t^{21} + t^{20} + t^{18} + 2t^{17} + 3t^{16} + 3t^{15} + 2t^{14} + 2t^{13} + 3t^{12} \\ &= 1 + t + t^2 + t^4 + 2t^5 + 3t^6 + 3t^7 + 2t^8 + 2t^9 + 3t^{10} + t^{11} \\ &\quad + t^{22}(1 + t^{-1} + t^{-2} + t^{-4} + 2t^{-5} + 3t^{-6} + 3t^{-7} + 2t^{-8} + 2t^{-9} + 3t^{-10} + t^{-11}).\end{aligned}$$

$$\tilde{H}_5^{sym} = \frac{\tilde{F}_5^{sym}}{(1-t^{10})(1-t^{15})}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{F}_5^{sym} &= 1+t+t^2+2t^4+t^5+2t^6+2t^7+2t^9 + 2t^{10}+t^{11}+2t^{12}+t^{14}+ t^{15}+ t^{16} \\ &= 1+t+t^2+2t^4+t^5-2t^6+2t^7+ t^{16}(1+t^{-1}+t^{-2}+2t^{-4}+t^{-5}+2t^{-6}+2t^{-7})\end{aligned}$$

<u>Beispiel:</u> Es gibt keine symmetrische Halbgruppe H in $\mathfrak{H}_5$ mit $g(H) \equiv 3 \bmod 5$.

Literatur

[1] R.Apéry. Sur les branches superlinéaire des courbes algebriques. C.R.Acad.Sci.Paris 222, 1198-1200 (1946)

[2] J.Bertin u. P.Carbonne. Sur la structure des semi-groupes d'entiers et applications aux branches. C.R.Acad.Sc.Paris 280, 1745-1748 (1975)

[3] H.Bresinsky. Symmetric Semigroups of Integers Generated by 4 Elements. Manuscripta Math. 17, 205-219 (1975)

[4] ——. On Prime Ideals with Generic zero $x_i = t^{n_i}$. Proc.Am.Math.Soc. 47, 329-333 (1975)

[5] ——. Monomial Gorenstein Ideals. Manuscripta Math. 29, 159-181 (1979)

[6] C.Delorme. Sous-monoide d'intersection complète de $\mathbb{N}$. Ann.scient.Ec.Norm.Sup.9, 145-154 (1976)

[7] J.Herzog. Generators and Relations of Abelian Semigroups and Semigroup Rings. Manuscripta Math. 3, 175-193 (1970)

[8] J.Herzog u. E.Kunz. Die Wertehalbgruppe eines lokalen Rings der Dimension 1. Sitz.Ber.Heidelberger Akad. d. Wissensch. 2. Abhandlung (1971)

[9] R.Stanley. Combinatorics and Commutative Algebra. Progress in Math. 41, Birkhäuser Boston-Basel-Stuttgart (1983)

[10] R.Waldi. Zur Konstruktion von Weierstraßpunkten mit vorgegebener Halbgruppe. Manuscripta Math. 30, 257-278 (1980)

REGENSBURGER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

der Fakultät für **Mathematik der Universität Regensburg,PF 397,** 8400 Regensburg. Preis: 15,--DM pro Exemplar (ohne Gewähr).

1. G.Wassermann. Classification of singularities with compact abelian symmetrie (1977)
2. P.Slodowy. Einfache Singularitäten und einfache algebraische Gruppen (1978), vergriffen, jetzt: Simple Singularities and Simple Algebraic Groups, Springer Lecture Notes 815 (1980)
3. J.Rung. Mengentheoretische Durchschnitte und Zusammenhang (1978), vergriffen
4. R.Waldi. Äquivariante Deformation monomialer Kurven (1980)
5. J.Koch. Über die Torsion des Differentialmoduls von Kurvensingularitäten (1983)
6. G.Meixner. Ein algebraischer Modulraum für die kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht g (1983)
7. Ch.Maier. Über Familien von C^{∞}-Funktionen mit vorgegebenen Singularitäen auf D^2 (1983)
8. K.Jänich. Linienfelder mit Verzweigungsdefekten (1984)
9. S.Hellebrand. Deformation dicker Punkte und Netze von Quadriken (1986)
10. G.Bauer, R.Mennicken. Störungstheorie für diskrete Spektraloperatoren (1986)
11. E.Kunz. Über die Klassifikation numerischer Halbgruppen (1987)
12. M.Rost. Abbildungsdefekte in 4-Mannigfaltigkeiten (erscheint 1987)