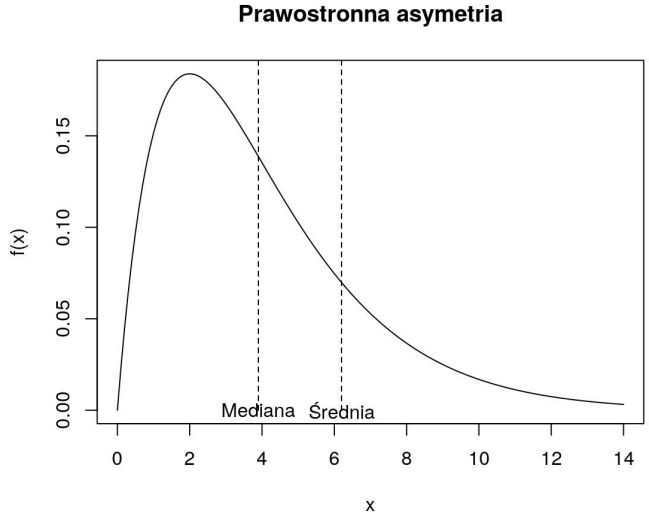
4 Statystyka opisowa

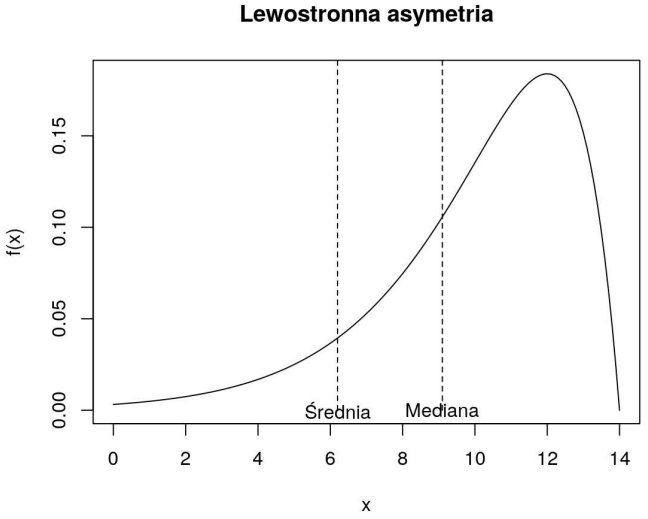
4.1 Miara asymetrii rozkładu

- współczynnik asymetrii (skośności)

$$A = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

- Współczynnik asymetrii
  - równy zeru oznacza symetrię rozkładu zmiennej.
  - przyjmujący wartość dodatnią oznacza prawostronną asymetrię. Prawy ogon jest dłuższy, a masa rozkładu jest skoncentrowana po lewej stronie.
  - przyjmujący wartość ujemną oznacza lewostronną asymetrię. Lewy ogon jest dłuższy, a masa rozkładu jest skoncentrowana po prawej stronie.



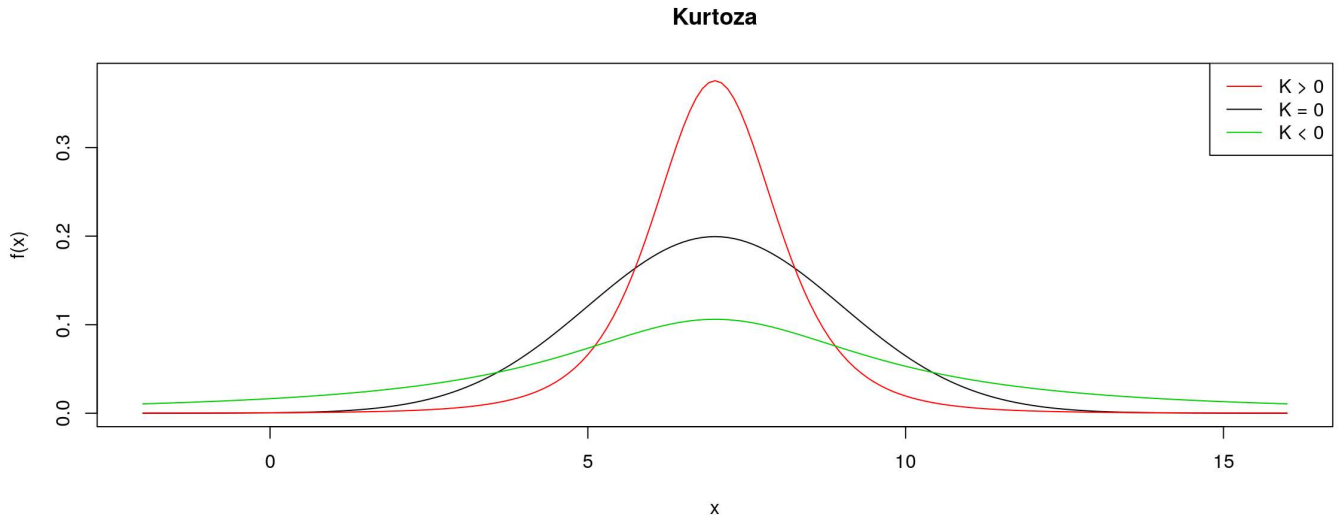


4.2 Miara koncentracji rozkładu

- kurtoza

$$K = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4} - 3$$

- Kurtoza jest miarą skupienia wartości zmiennej wokół średniej.
- Porównuje ona badany rozkład empiryczny z rozkładem normalnym i przyjmuje wartości większe niż -2.
- Im większa wartość K, tym większe skupienie wartości zmiennej wokół średniej.
- Kurtoza rozkładu normalnego wynosi zero.
- Jeśli $K < 0$, wówczas rozkład jest bardziej spłaszczony niż rozkład normalny, a jeśli $K > 0$ - bardziej smukły.



4.3 Przykłady

Przykład 1. Poniższe dane podają liczbę błędów w grupie 50 osób zdających egzamin testowy. Egzamin składał się z 18 pytań (można popełnić maksymalnie dwa błędy, aby zdać egzamin).

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 5 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Zmienna X to liczba błędów. Jest to dyskretna zmienna ilościowa.

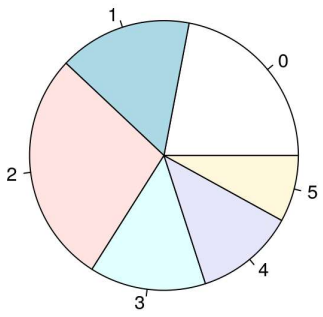
```
liczba_bledow <- c(1, 1, 2, 0, 1, 3, 1, 4, 4, 4, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 3,
                   4, 0, 1, 5, 2, 3, 5, 3, 2, 2, 4, 0, 2, 2, 0, 2, 2,
                   3, 3, 1, 3, 2, 2, 0, 0, 5, 4, 2, 1, 5, 2, 2, 0)
# rozkład empiryczny opisany za pomocą szeregu rozdzielczego
data.frame(cbind(liczebnosc = table(liczba_bledow),
                 procent = prop.table(table(liczba_bledow))))
```

```
##   liczebnosc procent
## 0         11    0.22
## 1          8    0.16
## 2         14    0.28
## 3          7    0.14
## 4          6    0.12
## 5          4    0.08
```

```r
# wykres słupkowy
barplot(table(liczba_bledow),
        xlab = "Liczba błędów", ylab = "Liczebność",
        main = "Rozkład empiryczny liczby błędów")
```


```r
barplot(prop.table(table(liczba_bledow)),
        xlab = "Liczba błędów", ylab = "Prawdopodobieństwo",
        main = "Rozkład empiryczny liczby błędów")
```


```r
# wykres kołowy
pie(table(liczba_bledow))
```




```r
# średnia
mean(liczba_bledow)
```

```
## [1] 2.02
```

```r
# mediana
median(liczba_bledow)
```

```
## [1] 2
```

```
# odchylenie standardowe
sd(liczba_bledow)
```

```
## [1] 1.558256
```

```
# współczynnik zmienności
sd(liczba_bledow) / mean(liczba_bledow) * 100
```

```
## [1] 77.14141
```

Przykład 2. Badano czas oczekiwania na tramwaj, który kursuje w jednakowych odstępach czasu. Plik czas_oczek_tramwaj.RData zawiera dane dotyczące czasu oczekiwania na tramwaj (wyrażonego w minutach) 100 osób wybranych losowo. Zmienna X to czas oczekiwania na tramwaj. Jest to zmienna ilościowa ciągła.

```
load(url("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/czas_oczek_tramwaj.RData"))
head(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1]  4.03 11.04  5.73 12.36 13.17  0.64
```

```
data.frame(cbind(liczebnosc = table(cut(czas_oczek_tramwaj, breaks = seq(0, 14, 2))),
                 procent = prop.table(table(cut(czas_oczek_tramwaj, breaks = seq(0, 14,
```

```
##         liczebnosc procent
## (0,2]           15    0.15
## (2,4]           13    0.13
## (4,6]           15    0.15
## (6,8]           15    0.15
## (8,10]          15    0.15
## (10,12]         12    0.12
## (12,14]         15    0.15
```

```
(czas_oczek_tramwaj_hist <- hist(czas_oczek_tramwaj, plot = FALSE)$breaks)
```

```
## [1]  0  2  4  6  8 10 12 14
```

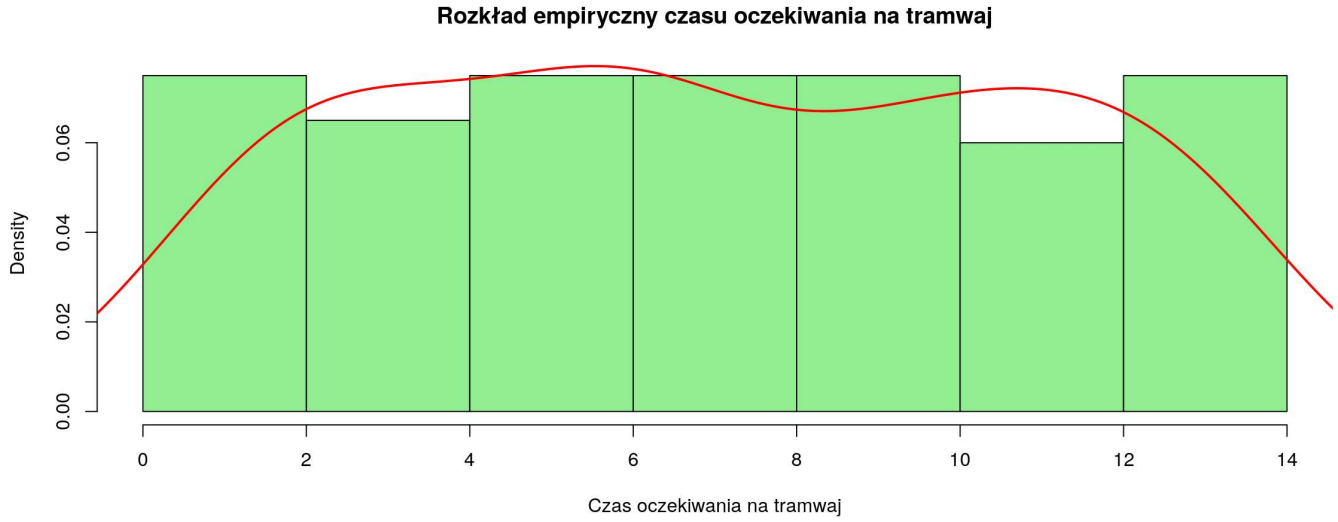
```
data.frame(cbind(liczebnosc = table(cut(czas_oczek_tramwaj, breaks = czas_oczek_tramwaj_
                 procent = prop.table(table(cut(czas_oczek_tramwaj, breaks = czas_oczek_
```

```
##         liczebnosc procent
## (0,2]           15    0.15
## (2,4]           13    0.13
## (4,6]           15    0.15
## (6,8]           15    0.15
## (8,10]          15    0.15
## (10,12]         12    0.12
## (12,14]         15    0.15
```

Histogram - zestaw sąsiadujących prostokątów, których podstawy, równe rozpiętości przedziałów klasowych, znajdują się na osi odciętych, a wysokości są liczebnościami przedziałów.

```r
# histogram
hist(czas_oczek_tramwaj,
     xlab = "Czas oczekiwania na tramwaj",
     main = "Rozkład empiryczny czasu oczekiwania na tramwaj")
rug(jitter(czas_oczek_tramwaj))
```


```r
# histogram z estymatorem jądrowym gęstości
hist(czas_oczek_tramwaj,
     xlab = "Czas oczekiwania na tramwaj",
     main = "Rozkład empiryczny czasu oczekiwania na tramwaj",
     probability = TRUE,
     col = "lightgreen")
lines(density(czas_oczek_tramwaj), col = "red", lwd = 2)
```



Wykres ramkowy to metoda graficznego przedstawienia danych liczbowych za pomocą ich kwantyli. Tworzymy go poprzez umieszczenie na osi pionowej wartości niektórych parametrów rozkładu (kwantyli).

- Wewnątrz prostokąta znajduje się pogrubiona pozioma linia, która określa wartość mediany.
- Nad osią znajduje się prostokąt (ramka), którego dolny bok jest określony przez pierwszy kwartyl, a górny bok przez trzeci kwartyl. Wysokość pudełka odpowiada wartości rozstępu międzykwartylowego ($Q_3 - Q_1$).
- Pudełko jest uzupełnione od góry i od dołu segmentami (wąsami). Dolny koniec dolnego segmentu reprezentuje najmniejszą wartość w zestawie danych, zaś górny koniec górnego segmentu jest obserwacją największą. Wartości te muszą spełniać dodatkowy warunek, a mianowicie dolny koniec nie może być mniejszy niż $Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)$, a górny większy niż $Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)$. Jeśli istnieją obserwacje poza tym zakresem, są one zaznaczane na wykresie indywidualnie jako osobne punkty i są traktowane jako obserwacje odstające.

Wykres pudełkowy jako wskaźnik tendencji centralnej, dyspersji, symetrii, skośności i wielkości ogona:

- dyspersja - odstępy między różnymi częściami pudełka
- symetryczny - pogrubiona linia znajduje się blisko środka pudełka, a długości wąsów są takie same
- prawostronnie asymetryczny - górny wąs jest znacznie dłuższy niż dolny wąs, a linia jest bliższa dolnej części pudełka.
- lewostronnie asymetryczny - dolny wąs jest znacznie dłuższy niż górny wąs, a linia jest bliższa górnej części pudełka
- grube ogony - długość wąsów znacznie przekracza długość pudełka
- cieńkie ogony - długość wąsów jest krótsza niż długość pudełka
- bardzo krótkie ogony (populacja w kształcie litery U, z zanurzeniem w środku zamiast garbu) - wąsy są nieobecne

```
# wykres ramkowy
boxplot(czas_oczek_tramwaj,
        ylab = "Czas oczekiwania na tramwaj",
        main = "Rozkład empiryczny czasu oczekiwania na tramwaj")
```

- statystyki opisowe

```
# średnia
mean(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 6.9796
```

```
# mediana
median(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 6.525
```

```
# odchylenie standardowe
sd(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 3.989571
```

```
# współczynnik zmienności
sd(czas_oczek_tramwaj) / mean(czas_oczek_tramwaj) * 100
```

```
## [1] 57.16046
```

```r
library(e1071)
# współczynnik asymetrii
skewness(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 0.03362109
```

```r
# kurtoza
kurtosis(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] -1.250899
```

4.4 Zadania

Zadanie 1. Zmienna `wynik` w pliku ankieta.txt opisuje wyniki badania działalności prezydenta pewnego miasta. Wybrano losowo 100 mieszkańców miasta i zadano im następujące pytanie: Jak oceniasz działalność prezydenta miasta? Dostępne były następujące odpowiedzi: zdecydowanie dobrze (`a`), dobrze (`b`), źle (`c`), zdecydowanie źle (`d`), nie mam zdania (`e`). Jakiego typu jest ta zmienna? Jakie są możliwe wartości tej zmiennej?

1. Zaimportuj dane z pliku ankieta.txt do zmiennej `ankieta` .

```
##   plec szkola wynik
## 1    m      p     d
## 2    m      s     e
## 3    m      w     a
## 4    m      s     d
## 5    m      p     c
## 6    m      w     c
```

```
## ...
```

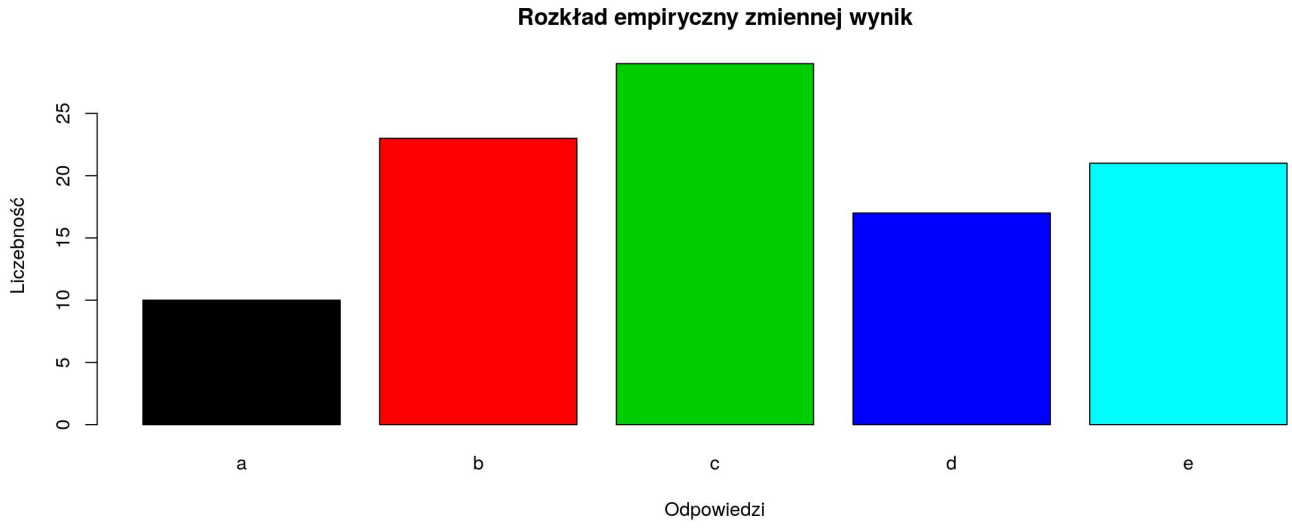
2. Przedstaw rozkład empiryczny zmiennej `wynik` za pomocą szeregu rozdzielczego.

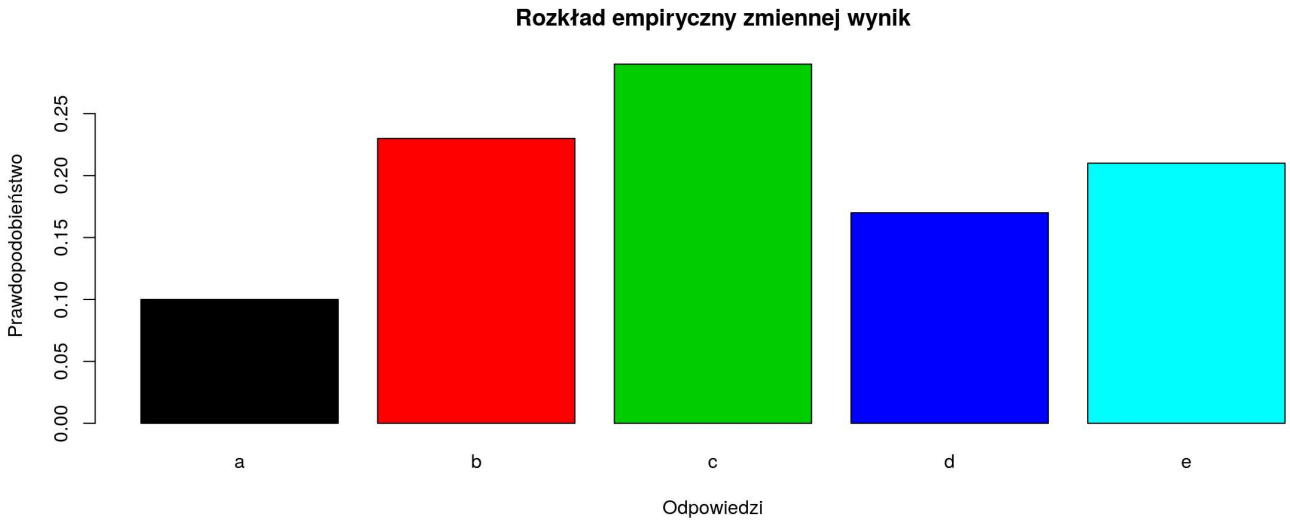
```
##   liczebnosc procent
## a         10    0.10
## b         23    0.23
## c         29    0.29
## d         17    0.17
## e         21    0.21
```

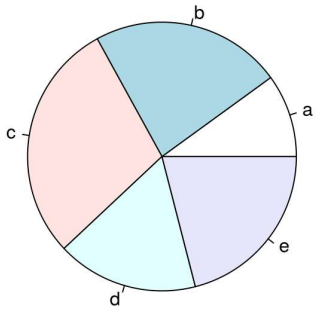
3. Przedstaw rozkład empiryczny zmiennej `wynik` tylko dla osób z wykształceniem podstawowym za pomocą szeregu rozdzielczego.

```
##   liczebnosc    procent
## a          2 0.11764706
## b          3 0.17647059
## c          4 0.23529412
## d          7 0.41176471
## e          1 0.05882353
```

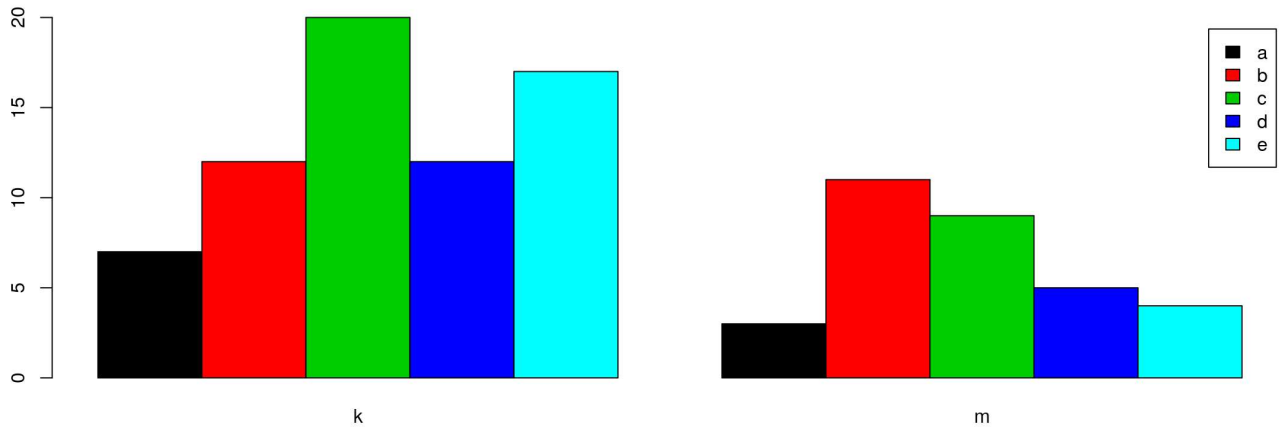
4. Zilustruj wyniki ankiety za pomocą wykresu słupkowego i kołowego.







5. Zilustruj wyniki ankiety za pomocą wykresu słupkowego z podziałem na kobiety i mężczyzn.



6. Zinterpretuj powyższe wyniki (tabelaryczne i graficzne).

Zadanie 2. Przebadano 200 losowo wybranych 5-sekundowych okresów pracy centrali telefonicznej. Rejestrowano liczbę zgłoszeń. Wyniki są zawarte w pliku Centrala.RData. Jakiego typu jest ta zmienna? Jakie są możliwe wartości tej zmiennej?

1. Zaimportuj dane z pliku Centrala.RData.

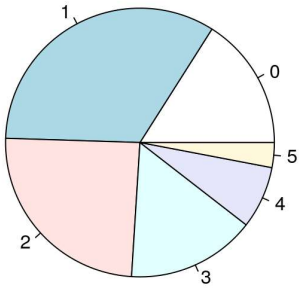
```
##   Liczba
## 1      0
## 2      0
## 3      5
## 4      1
## 5      1
## 6      2


## ...
```

2. Przedstaw rozkład empiryczny liczby zgłoszeń za pomocą szeregu rozdzielczego.

```
##   liczebnosc procent
## 0         32   0.160
## 1         67   0.335
## 2         49   0.245
## 3         31   0.155
## 4         15   0.075
## 5          6   0.030
```

3. Zilustruj liczbę zgłoszeń za pomocą wykresu słupkowego i kołowego.



4. Obliczyć średnią z liczby zgłoszeń, medianę liczby zgłoszeń, odchylenie standardowe liczby zgłoszeń i współczynnik zmienności liczby zgłoszeń.

```
## [1] 1.74
```

```
## [1] 2
```

```
## [1] 1.28086
```

```
## [1] 73.61266
```

5. Zinterpretuj powyższe wyniki (tabelaryczne, graficzne i liczbowe).

Zadanie 3. Notowano pomiary średniej szybkości wiatru w odstępach 15 minutowych wokół nowo powstającej elektrowni wiatrowej. Wyniki są następujące:

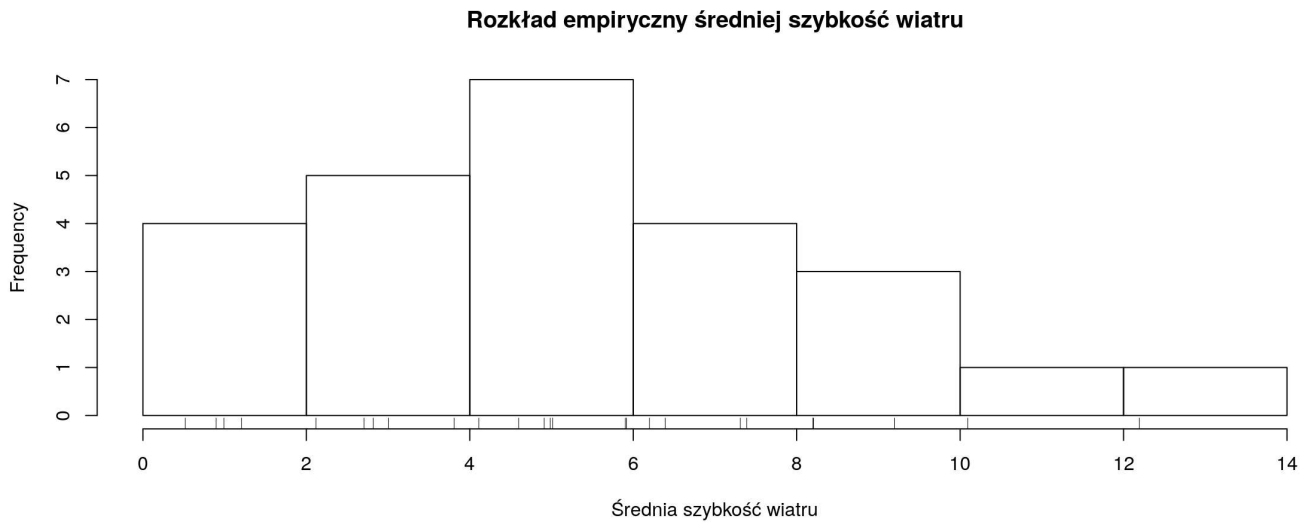
$$\begin{array}{rrrrr} 0.9 & 6.2 & 2.1 & 4.1 & 7.3 \\ 1.0 & 4.6 & 6.4 & 3.8 & 5.0 \\ 2.7 & 9.2 & 5.9 & 7.4 & 3.0 \\ 4.9 & 8.2 & 5.0 & 1.2 & 10.1 \\ 12.2 & 2.8 & 5.9 & 8.2 & 0.5 \end{array}$$

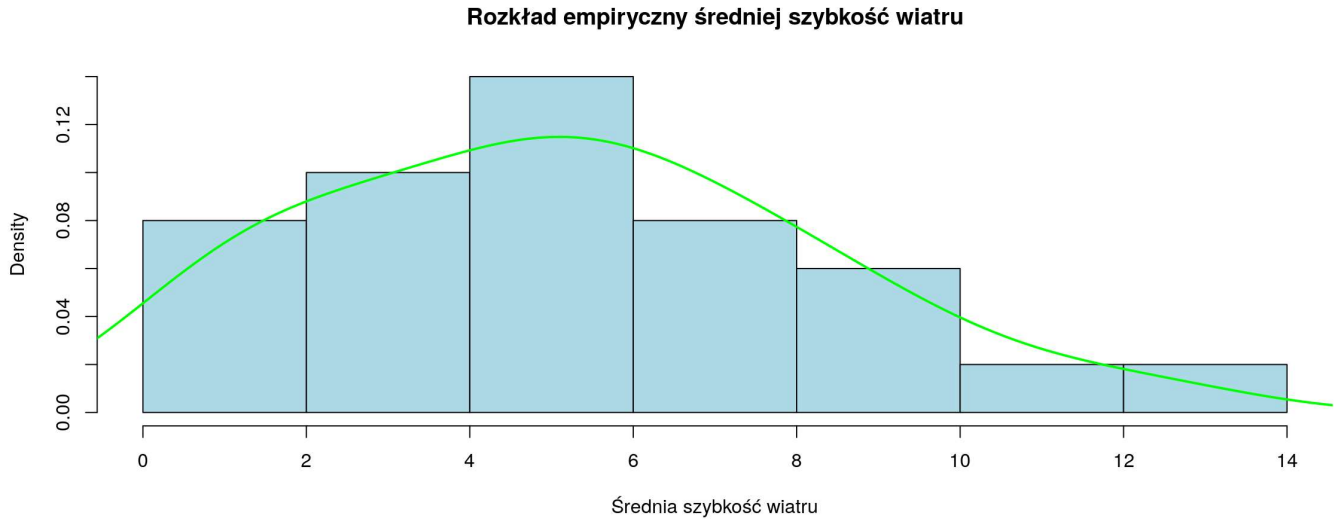
Jakiego typu jest ta zmienna? Jakie są możliwe wartości tej zmiennej?

1. Przedstaw rozkład empiryczny badanej zmiennej za pomocą szeregu rozdzielczego.

```
##         liczebnosc procent
## (0,2]           4    0.16
## (2,4]           5    0.20
## (4,6]           7    0.28
## (6,8]           4    0.16
## (8,10]          3    0.12
## (10,12]         1    0.04
## (12,14]         1    0.04
```

2. Zilustruj rozkład empiryczny średniej szybkości wiatru za pomocą histogramu i wykresu pudełkowego. Jakie są zalety i wady tych wykresów?





4. Obliczyć średnią, medianę, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, współczynnik asymetrii i kurtozę średniej szybkości wiatru.

```
## [1] 5.144
```

```
## [1] 5
```

```
## [1] 3.054925
```

```
## [1] 59.38812
```

```
## [1] 0.3422838
```

```
## [1] -0.665667
```

5. Zinterpretuj powyższe wyniki (tabelaryczne, graficzne i liczbowe).

Zadanie 4. Napisz funkcję `wspolczynnik_zmiennosci()`, która oblicza wartość współczynnika zmienności dla danego wektora obserwacji. Funkcja powinna mieć dwa argumenty:

- `x` - wektor zawierający dane,
- `na.rm` - wartość logiczna (domyślnie `FALSE`), która wskazuje czy braki danych (obiekty `NA`) mają być zignorowane.

Funkcja zwraca wartość współczynnika zmienności wyrażoną w procentach. Ponadto funkcja sprawdza, czy wektor `x` jest wektorem numerycznym. W przeciwnym razie zostanie zwrócony błąd z następującym komunikatem: ,,argument nie jest liczbą''. Przykładowe wywołania i wyniki funkcji są następujące:

```r
x <- c(1, NA, 3)
wspolczynnik_zmiennosci(x)
## [1] NA
wspolczynnik_zmiennosci(x, na.rm = TRUE)
## [1] 70.71068
wspolczynnik_zmiennosci()
## Error in wspolczynnik_zmiennosci() :
##   argument "x" is missing, with no default
wspolczynnik_zmiennosci(c("x", "y"))
## Error in wspolczynnik_zmiennosci(c("x", "y")) : argument nie jest liczbą
```