

AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Praca inżynierska

Maciej Domagalski

kierunek studiów: **informatyka stosowana**

Symulacja propagacji sygnału w linii przesyłowej metodą Monte Carlo

Opiekun: **dr hab. inż. Tomasz Chwiej**

Kraków, styczeń 2021

Oświadczenie studenta

Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz. U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelni przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

Maciej Domagalski

Spis treści

Cel pracy	4
1 Wstęp teoretyczny	5
1.1 Metoda Monte Carlo.	5
1.2 Wybrane zastosowania algorytmu Monte Carlo.	6
1.3 Równanie telegrafistów.	7
1.3.1 Transformacja równania telegrafistów do postaci całkowej z uwzględnieniem warunku początkowego.	10
1.3.2 Równanie telegrafistów w postaci całkowej z uwzględnieniem warunku brzegowego.	18
2 Równanie telegrafistów dla układu nieograniczonego przestrzennie.	24
2.1 Parametry użyte w symulacjach.	24
2.2 Algorytm Rungego-Kutty 4. rzędu – porównanie z wynikami analitycznymi.	25
2.3 Algorytm Monte Carlo (1/2 - iteracyjny) – porównanie z wynikami analitycznymi.	27
2.4 Algorytm Monte Carlo (3 - rekurencyjny) – porównanie z wynikami analitycznymi.	30
2.5 Porównanie wyników uzyskanych metodą RK4 i rekurencyjnego MC dla niezerowego μ	31
2.6 Analiza jakościowa (algorytm Monte Carlo)	32
2.7 Analiza wydajności algorytmów MC i metody RK4.	33
3 Równanie telegrafistów z warunkiem brzegowym.	34
3.1 Parametry użyte w symulacjach.	34
3.2 Porównanie wyników analitycznych i numerycznych (rekurencyjny algorytm MC).	35
3.3 Analiza ilościowa rozwiązań.	39
4 Równanie telegrafistów w układzie o zmiennej charakterystyce przestrzennej parametrów linii	40
4.1 Parametry użyte w symulacjach.	41
4.2 Wyniki MC dla $f_0 = 0$ i $f_0 = 3GHz$	42
4.3 Analiza wydajności algorytmu MC.	46
Podsumowanie	47
Bibliografia	48

Cel pracy

Metoda Monte Carlo, bazująca na komputerowej realizacji pewnego probabilistycznego modelu służącego rozwiązaniu określonego problemu jest często stosowana w nauce (fizyce, chemii, matematyce) oraz w inżynierii [1]. Dzięki dużej elastyczności możliwe jest jej stosowanie w tak prostych przypadkach jak obliczanie wartości całek, ale również w bardziej zaawansowanych problemach, jak rozwiązywanie równań różniczkowych (gdzie sztandarowym przykładem jej skuteczności są symulacje równań zawierających wyrazy dyfuzyjne), poprzez rozwiązywanie równań całkowych i ich układów, a skończywszy na bardzo zaawansowanych symulacjach numerycznych, w których metoda ta jest tylko jednym z wielu elementów zawartych w rozbudowanym module obliczeniowym programu. Jako przykład może tu posłużyć pakiet obliczeniowy GEANT stworzony w CERN-ie, wykorzystywany do modelowania oddziaływania promieniowania z materii.

W niniejszej pracy zastosowano metodę MC do rozwiązania układu równań różniczkowych opisujących przenoszenie się sygnału elektrycznego wzdłuż linii przesyłowej (tzw. *równanie telegrafistów*). Transformacja tego układu do postaci całkowej i nadanie mu interpretacji probabilistycznej pozwala na bezpośrednie użycie metody MC, jak to pokazano w publikacji [2]. W realizowanym projekcie inżynierskim wykorzystano zmodyfikowany algorytm MC, w którym dzięki wykorzystaniu naturalnej dla rozważanego problemu rekurencji krzyżowej (układ dwóch równań całkowych), możliwe było jego uproszczenie dające większą elastyczność w jego praktycznym wykorzystaniu. Ponieważ każda modyfikacja dowolnego algorytmu MC może powodować nieco inne jego działanie, w pracy przedstawiono także testy rozwiązań generowanych metodą MC. Przeanalizowano również zmodyfikowany algorytm pod kątem jego wydajności.

Rozdział 1

Wstęp teoretyczny

1.1 Metoda Monte Carlo.

Wiele problemów naukowych można sprowadzić do zagadnienia wyznaczania wartości całki [3]:

$$I = \int_D g(x) dx, \quad (1.1)$$

gdzie D jest obszarem przestrzeni wielowymiarowej, a $g(x)$ jest określoną funkcją. Jeśli da się wylosować niezależne i identycznie rozłożone próbki $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ równomiernie w D (z pomocą komputera), całkę I można przybliżyć następująco:

$$\hat{I} = \frac{1}{m} \left\{ g(x^{(1)}) + \dots + g(x^{(m)}) \right\}. \quad (1.2)$$

Prawo wielkich liczb stanowi, że średnia wielu niezależnych zmiennych losowych o wspólnej wartości oczekiwanej i skończonych wariancjach ma tendencję do stabilizowania się wokół wspólnej średniej:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{I}_m = I, \quad (1.3)$$

z prawdopodobieństwem równym 1.

Tempo zbieżności można oszacować przy użyciu *centralnego twierdzenia granicznego*:

$$\sqrt{m} (\hat{I}_m - I) \rightarrow N(0, \sigma^2), \quad (1.4)$$

gdzie $\sigma^2 = \text{var}\{g(x)\}$. Stąd *wyraz błędu* tego przybliżenia Monte Carlo to $O(m^{-\frac{1}{2}})$, niezależnie od wymiaru x . To jest podstawą metodologii MC w nauce i statystyce.

W najprostszym przypadku (dla $D = [0, 1]$ i $I = \int_0^1 g(x) dx$), całkę I można przybliżyć następująco:

$$\hat{I}_m = \frac{1}{m} \{g(b_1) + \dots + g(b_m)\}, \quad (1.5)$$

gdzie $b_j = \frac{j}{m}$. Ta metoda nosi nazwę *sumy Riemanna*. Kiedy g jest dość gładkie, suma Riemanna generuje błąd $O(m^{-1})$, czyli mniejszy niż metoda MC. Jednakże, fatalną wadą metod deterministycznych jest zła skalowalność wraz ze wzrostem liczby wymiarów D . Na przykład w przestrzeni 10-wymiarowej ($D = [0, 1]^{10}$) trzeba wyliczyć $O(m^{10})$ punktów siatki aby otrzymać dokładność $O(m^{-1})$ przy pomocy sumy Riemanna. Dla kontrastu, w najprostszej metodzie Monte Carlo, w której losuje się $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ równomiernie z D , błąd wynosi $O(m^{-\frac{1}{2}})$ niezależnie od liczby wymiarów (przynajmniej teoretycznie).

Pomimo tego, stosując metodę MC napotykamy dwa problemy:

- kiedy obszar D w przestrzeni wielowymiarowej jest duży, wariancja σ^2 która mierzy *jednolitość* funkcji g w obszarze D może być bardzo duża,
- wygenerowanie równomiernych próbek w arbitralnym obszarze D nie zawsze jest możliwe.

Aby pokonać powyższe trudności, można użyć *próbkiowania ważonego*, w którym generowane są losowe próbki $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ z niejednorodnego rozkładu $\pi(x)$, w których większe prawdopodobieństwo mają *ważniejsze* części obszaru D (tj. dające większy wkład do wartości całki). Wtedy całkę I można przybliżyć następująco:

$$\hat{I} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{g(x^{(j)})}{\pi(x^{(j)})}. \quad (1.6)$$

Wtedy wariancja jest równa $\sigma_{\pi}^2 = \text{var}_{\pi} \left\{ \frac{g(x^{(j)})}{\pi(x^{(j)})} \right\}$.

Potrzeba próbkiowania z niejednorodnego rozkładu występuje w problemach z zakresu bioinformatyki, chemii obliczeniowej, fizyki, biologii strukturalnej, statystyki i tym podobnych. Wtedy potrzebny rozkład prawdopodobieństwa $\pi(x)$ pochodzi od podstawowych praw fizyki i wnioskowania statystycznego.

W niektórych przypadkach optymalizacja może być sformułowana jako problem próbkiowania Monte Carlo. Przypuśćmy, że interesuje nas minimum pewnej funkcji $h(x)$. Problem sprowadza się wtedy do znalezienia maksimum innej funkcji $q_T(x) = e^{-\frac{h(x)}{T}}$ ($T > 0$). Jeśli funkcja $q_T(x)$ jest całkowalna dla każdego $T > 0$ (co zdarza się najczęściej), można stworzyć rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa:

$$\pi_T(x) \propto e^{-\frac{h(x)}{T}}, T > 0. \quad (1.7)$$

Jeśli możliwe jest uzyskanie próbki z $\pi_T(x)$ dla wystarczająco małego T , otrzymane losowania będą skupione wokół globalnego minimum $h(x)$.

1.2 Wybrane zastosowania algorytmu Monte Carlo.

Fizyka statystyczna - model Isinga.

Model Isinga służy do modelowania zachowania próbek magnetycznych. W tym modelu każda z cząsteczek magnesu ma spin pozytywny lub negatywny, co jest reprezentowane przez zmienną losową x_{σ} , która może przyjmować wartość $+1$ lub -1 . Ponieważ oddziaływanie dwóch sąsiednich spinów zależy od wzajemnego ułożenia oraz temperatury otoczenia, modelowanie takich układów wymaga zastosowania metod statystycznych. Również z powodu istnienia ogromnej liczby równoważnych rozwiązań, jedyną sensowną metodą ich poszukiwań przy użyciu komputerów jest metoda MC.

Modelowanie zachowania gazów i cieczy oraz wyznaczanie ich charakterystyk.

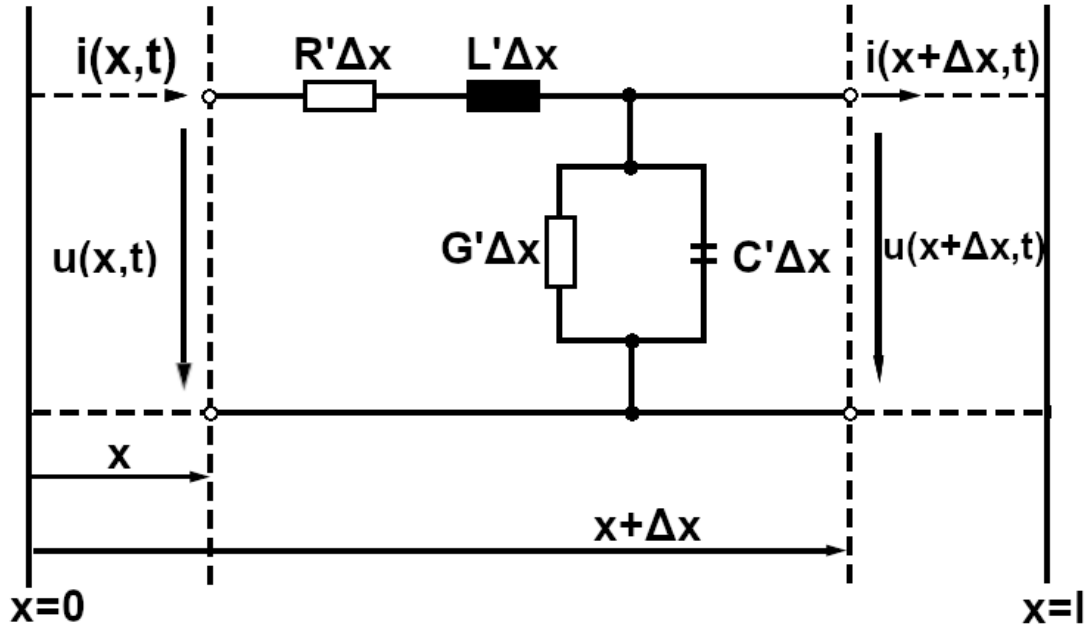
Dla układu dwóch oddziałujących cząsteczek gazu lub cieczy można zapisać ich równania ruchu i je rozwiązać. Jednakże, w przypadku układów o dużej liczbie cząstek (np. $N = 10^2, 10^3$ i więcej), ruch cząstek w dłuższej perspektywie czasowej staje się przypadkowy (chaotyczny) i jedynym sposobem opisu układu jest rozwiązanie sprzężonych ze sobą różniczkowych równań ruchu metodą dynamiki molekularnej, co może być czasochłonne ze względu na długi proces termalizacji. Alternatywą jest zastosowanie metody MC.

Nieliniowy system dynamiczny.

Modelowanie dynamiczne stosowane jest między innymi w analizie danych finansowych, komunikacji mobilnej, systemach radarowych i sonarnych. Taki system musi w czasie rzeczywistym przetwarzać informacje o jego charakterystykach. Głównym wyzwaniem jest znalezienie wydajnych algorytmów do filtrowania informacji. Przykładem takiego filtrowania może być śledzenie celu w mocno zaburzonym środowisku (na przykład na morzu).

1.3 Równanie telegrafistów.

Dana jest długa linia o stałych właściwościach elektrycznych w kierunku propagacji (jednorodna) [4].



Rysunek 1.1: Fragment linii przesyłowej z zaznaczonymi parametrami charakteryzującymi tę linię.

Opór R , indukcyjność L , pojemność C i konduktancja G bieżącej pętli złożonej z dwóch przewodników są wyrażone w jednostkach na długość jednostkową. Na przykład dla oporu:

$$R' = \frac{\Delta R}{\Delta l} \quad (1.8)$$

i analogicznie dla pozostałych parametrów.

Niech fragment Δx będzie krótki. Wtedy zależne od czasu wielkości $u(t)$ (napięcie) i $i(t)$ (natężenie) są niezależne od położenia w tym niewielkim fragmencie. To pozwala na quasi-statyczne zachowanie zgodne z prawami Kirchhoffa.

Z prawa napięcia $\sum U = 0$ (suma napięć źródeł i spadków napięć na elementach jest równa zero):

$$R' \Delta x i(x, t) + L' \Delta x \frac{di(x, t)}{dt} + u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = 0. \quad (1.9)$$

Dzielimy obustronnie przez Δx .

$$R' i(x, t) + L' \frac{di(x, t)}{dt} + \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = 0. \quad (1.10)$$

Kiedy Δx zmierza do zera:

$$\Delta x \rightarrow 0 : R' i(x, t) + L' \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (1.11)$$

$$R' i(x, t) + L' \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (1.12)$$

Z prawa natężenia $\sum I = 0$ (zasada ciągłości ładunku: suma prądów wpływających do węzła i z niego wypływających musi być równa zeru):

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) - G' \Delta x u(x + \Delta x, t) - \mathbb{C}' \Delta x \frac{du(x + \Delta x, t)}{dt} = 0. \quad (1.13)$$

Dzielimy przez Δx .

$$\frac{i(x, t) - i(x + \Delta x, t)}{\Delta x} - G' u(x + \Delta x, t) - \mathbb{C}' \frac{du(x + \Delta x, t)}{dt} = 0. \quad (1.14)$$

Kiedy Δx zmierza do zera:

$$\Delta x \rightarrow 0 : -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G' u(x, t) + \mathbb{C}' \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (1.15)$$

$$G' u(x, t) + \mathbb{C}' \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x}. \quad (1.16)$$

Otrzymaliśmy równania na dwie niewiadome $u(x, t)$ i $i(x, t)$. Różniczkując jedno z równań względem położenia a drugie względem czasu i podstawiając je do siebie nawzajem, wyeliminujemy u oraz i . W ten sposób otrzymamy kompletne równania linii transmisyjnej w dziedzinie czasu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L' \mathbb{C}' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (R' \mathbb{C}' + L' G') \frac{\partial u}{\partial t} + R' G' u, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L' \mathbb{C}' \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + (R' \mathbb{C}' + L' G') \frac{\partial i}{\partial t} + R' G' i. \quad (1.18)$$

Dzięki tym równaniom oraz przyjętym warunkom początkowym lub brzegowym można wyliczyć $u(x, t)$ i $i(x, t)$. Ograniczenie do pobudzenia sinusoidalnego (domeny częstotliwości) pozwala na zapisanie równań w dziedzinie liczb zespolonych, które przez częściowe różniczkowanie upraszczają się do zwykłych równań różniczkowych. Ponieważ wszystkie wyrażenia zawierają czynnik $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ (gdzie j jest jednostką urojoną, $j^2 = -1$), można wyeliminować zależność od czasu.

Podstawiając:

$$u(x, t) \rightarrow U(x, \omega); i(x, t) \rightarrow I(x, \omega); \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j \cdot \omega; \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dx} \quad (1.19)$$

równania linii transmisyjnej w domenie czasu stają się równaniami linii transmisyjnej w domenie częstotliwości:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = L' \mathbb{C}' (j \cdot \omega)^2 U + j \cdot \omega (R' \mathbb{C}' + L' G') U + R' G' U, \quad (1.20)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = L' \mathbb{C}' (j \cdot \omega)^2 I + j \cdot \omega (R' \mathbb{C}' + L' G') I + R' G' I. \quad (1.21)$$

Dalej:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = (R' + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G' + j \cdot \omega \cdot \mathbb{C}) \cdot U = \gamma^2 U, \quad (1.22)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = (R' + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G' + j \cdot \omega \cdot \mathbb{C}) \cdot I = \gamma^2 I. \quad (1.23)$$

Rozwiązanie równań linii transmisyjnej można uzyskać, używając ogólnego rozwiązania d'Alemberta:

$$U(x) = A_1 e^{+\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}. \quad (1.24)$$

Uzyskujemy:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \gamma^2 A_1 e^{+\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} = \gamma^2 U. \quad (1.25)$$

Zespolona stała propagacji na jednostkę długości γ jest w postaci:

$$\gamma = \sqrt{(R' + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G' + j \cdot \omega \cdot \mathbb{C}')}, \quad (1.26)$$

lub prościej:

$$\gamma = \alpha + j \cdot \beta, \quad (1.27)$$

gdzie α jest stałą tłumienia na jednostkę długości, a β - stałą fazy.

Z równania:

$$-\frac{dU}{dx} = R'I + j\omega L'I \quad (1.28)$$

oraz rozwiązania ogólnego napięcia $U(x)$, otrzymujemy rozwiązanie ogólne natężenia:

$$I(x, \omega) = \frac{-\gamma}{R' + j \cdot \omega \cdot L'} \cdot (A_1 e^{+\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}). \quad (1.29)$$

Współczynnik:

$$\frac{R' + j \cdot \omega \cdot L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j \cdot \omega \cdot L'}{G' + j \cdot \omega \cdot C'}} = Z_0 \quad (1.30)$$

jest nazywany *impedancją charakterystyczną* linii transmisyjnej. Zespólone współczynniki A_1 i A_2 są wyliczane z warunków początkowych:

$$x = l : U(x) = U_2; I(x) = I_2. \quad (1.31)$$

Stąd:

$$U(x, \omega) = \frac{1}{2} \cdot (U_2 + I_2 \cdot Z_0) \cdot e^{+\gamma(l-x)} + \frac{1}{2} \cdot (U_2 + I_2 \cdot Z_0) \cdot e^{-\gamma(l-x)}, \quad (1.32)$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{U_2}{Z_0} + I_2 \right) \cdot e^{+\gamma(l-x)} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{U_2}{Z_0} + I_2 \right) \cdot e^{-\gamma(l-x)}. \quad (1.33)$$

Wymnażając i zamieniając miejscami odpowiednie wyrażenia, otrzymujemy rozwiązania:

$$U(x, \omega) = U_2 \cdot \cosh \gamma(l-x) + I_2 \cdot Z_0 \cdot \sinh \gamma(l-x), \quad (1.34)$$

$$I(x, \omega) = I_2 \cdot \cosh \gamma(l-x) + \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh \gamma(l-x). \quad (1.35)$$

1.3.1 Transformacja równania telegrafistów do postaci całkowej z uwzględnieniem warunku początkowego.

Poniższe rozwiązania dotyczą przypadku, gdzie nie ma warunku brzegowego.

Układ równań różniczkowych cząstkowych:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - R \cdot I \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} - G \cdot U \quad (1.37)$$

o rozwiązaniu $U = U(x, t)$, $I = I(x, t)$ transformujemy, podstawiając:

$$f(x, t) = \frac{1}{2}(U + R_0 \cdot I), \quad (1.38)$$

$$b(x, t) = \frac{1}{2}(U - R_0 \cdot I), \quad (1.39)$$

gdzie

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.40)$$

W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie poruszające się *do przodu* (f) i rozwiązanie poruszające się *do tyłu* (b). Układ RRCz dla $f(x, t)$ i $b(x, t)$ przyjmuje postać:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot b - (\lambda + \mu) \cdot f, \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = c \frac{\partial b}{\partial x} + \lambda \cdot f - (\lambda + \mu) \cdot b, \quad (1.42)$$

gdzie:

$$c = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}, \quad (1.43)$$

$$\mu = \frac{G}{C}, \quad (1.44)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right). \quad (1.45)$$

Warto zauważyć, że dla $\lambda = \mu = 0$ oba równania mają postać równania adwekcji. Oznacza to, że rozwiązując je metodą różnic skończonych (np. RK4) musimy stosować się do kryterium Couranta $U \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \leq 1$, które narzuca ograniczenia na ∂t i ∂x .

Układ RRCz (1.36), (1.37) można przekształcić do postaci całkowej:

$$f(x, t) = f_0(x - c \cdot t) e^{-(\lambda + \mu)t} + \lambda \int_0^t dS e^{-(\lambda + \mu)S} b(x - c \cdot S, t - S), \quad (1.46)$$

$$b(x, t) = b_0(x + c \cdot t) e^{-(\lambda + \mu)t} + \lambda \int_0^t dS e^{-(\lambda + \mu)S} f(x + c \cdot S, t - S), \quad (1.47)$$

gdzie $f_0(y)$, $b_0(y)$ to warunek początkowy dla f i b oraz $t = 0$.

Powyższe równania stanowią układ dwóch sprzężonych równań całkowych. Aby rozwiązać $f(x, t)$ musimy znać $b(x, t)$ i vice versa.

Takie równanie można rozwiązać bezpośrednio tylko przy konkretnych założeniach (opisanych w poniższej sekcji). Dla ogólnego przypadku możliwe jest znalezienie rozwiązania przybliżonego przy pomocy metod numerycznych.

Rozwiązanie analityczne równania telegrafistów bez warunku brzegowego.

Jeśli:

- jako warunek początkowy dla funkcji f i b przyjmujemy rozkład delty Diraca ($f(x, 0) = b(x, 0) = \delta(x)$),
- w równaniach (1.41) i (1.42) parametr μ będzie równy 0,

możliwe będzie uzyskanie rozwiązania dokładnego [5].

Ma ono następującą postać:

$$f(x, t) = \frac{e^{-\lambda \cdot t} \cdot \lambda}{2 \cdot c \cdot S(x, t)} \left[I_0 \left(\frac{\lambda \cdot s(x, t)}{c} \right) \cdot S(x, t) + I_1 \left(\frac{\lambda \cdot s(x, t)}{c} \cdot (x + c \cdot t) \right) \right], \quad (1.48)$$

$$b(x, t) = \frac{e^{-\lambda \cdot t} \cdot \lambda}{2 \cdot c \cdot S(x, t)} \left[I_0 \left(\frac{\lambda \cdot s(x, t)}{c} \right) \cdot S(x, t) + I_1 \left(\frac{\lambda \cdot s(x, t)}{c} \cdot (c \cdot t - x) \right) \right], \quad (1.49)$$

gdzie: $S(x, t) = \sqrt{c^2 \cdot t^2 - x^2}$, a $I_0(y), I_1(y)$ to modyfikowane funkcje Bessela.

Rozwiązanie równania telegrafistów bez warunku brzegowego metodą Rungego - Kuty 4. rzędu.

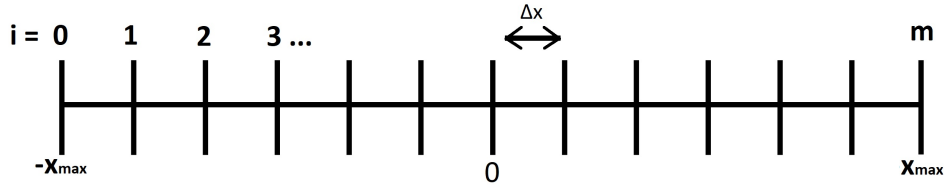
RRCz ma postać:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot b - (\lambda + \mu) \cdot f = F(x, t, f, b), \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = c \frac{\partial b}{\partial x} + \lambda \cdot f - (\lambda + \mu) \cdot b = B(x, t, f, b). \quad (1.51)$$

Prawe strony układu zależą od x , t oraz obu rozwiązań.

Wprowadzamy siatkę przestrzenną: gdzie



Rysunek 1.2: Siatka przestrzenna w metodzie RK4.

$$\Delta x = \frac{2 \cdot x_{max}}{m}. \quad (1.52)$$

Wprowadzamy wektory \vec{y} (wektor rozwiązań) i \vec{Y} (prawych stron):

$$\vec{y} = [f(x, t), b(x, t)], \quad (1.53)$$

$$\vec{Y} = [F(x, t, f, b), B(x, t, f, b)]. \quad (1.54)$$

Szukamy rozwiązania w kolejnej chwili czasowej $(n + 1)$ w wektorach określonych na siatce przestrzennej:

$$\vec{y}_{n+1}(x) = \vec{y}_n(x) + \frac{\Delta t}{6} \left(\vec{k}_1 + 2 \cdot \vec{k}_2 + 2 \cdot \vec{k}_3 + \vec{k}_4 \right), \quad (1.55)$$

gdzie:

$$\vec{k}_1 = [F(x, t_n, f_n, b_n), B(x, t_n, f_n, b_n)], \quad (1.56)$$

$$\vec{k}_2 = \left[F \left(x, t_n + \frac{\Delta t}{2}, \vec{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \vec{k}_1 \right), B \left(x, t_n + \frac{\Delta t}{2}, \vec{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \vec{k}_1 \right) \right], \quad (1.57)$$

$$\vec{k}_3 = \left[F \left(x, t_n + \frac{\Delta t}{2}, \vec{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \vec{k}_2 \right), B \left(x, t_n + \frac{\Delta t}{2}, \vec{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \vec{k}_2 \right) \right], \quad (1.58)$$

$$\vec{k}_4 = \left[F \left(x, t_n + \Delta t, \vec{y}_n + \Delta t \cdot \vec{k}_3 \right), B \left(x, t_n + \Delta t, \vec{y}_n + \Delta t \cdot \vec{k}_3 \right) \right]. \quad (1.59)$$

Do liczenia pochodnych przestrzennych wykorzystujemy ilorazy centralne (poza węzłami $i = 0$ i $i = m$):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}. \quad (1.60)$$

Zakładamy, że jeśli $x_{max} < c \cdot t_{max}$, to do tych węzłów fala jeszcze nie dotarła.

Rozwiązanie równania telegrafistów bez warunku brzegowego metodą Monte-Carlo (algorytm iteracyjny).

Nie jest możliwe dokładne zamodelowanie delty Diraca numerycznie, więc zdecydowano na jej przybliżenie funkcją Gaussa.

Warunek początkowy:

$$f_0(x) = b_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.61)$$

Zauważmy, że całki są w postaci:

$$\frac{1}{D} \int_0^t dS D \cdot e^{-(\lambda+\mu)S} \cdot b(x - c \cdot S, t - S), \quad (1.62)$$

gdzie $D \cdot e^{-(\lambda+\mu)S}$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa (fgp) o stałej normalizacyjnej D , a $b(x - c \cdot S, t - S)$ - właściwą funkcją podcałkową. Dodatkowo:

$$\int_0^t D \cdot e^{-(\lambda+\mu)S} dS = 1. \quad (1.63)$$

Aby wyznaczyć $b(x - c \cdot S, t - S)$ nie znając wartości funkcji b , musimy skorzystać z drugiego równania na $b(x, t)$, w którym $f(x + c \cdot S, t - S)$ przybliżymy za pomocą pierwszego równania i tak dalej.

Cofając się w czasie przechodzimy przez chwile czasowe:

$$(t - S_1 - S_2 - S_3 - \dots - S_n) > 0. \quad (1.64)$$

Kiedy warunek początkowy przestaje być spełniony, przerywamy obliczenia.

Definiujemy generator G1:

$$\int_0^T e^{-\alpha t} dt = \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \Big|_0^T = \frac{e^{-\alpha T} - 1}{-\alpha} = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} = c. \quad (1.65)$$

Wiedząc, że $\int_0^T g(t) dt = 1$, unormowana funkcja gęstości prawdopodobieństwa wynosi:

$$g(t) = \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha T}} \cdot e^{-\alpha t}. \quad (1.66)$$

Dystrybuanta:

$$F(y) = \int_0^y g(t) dt = -\frac{e^{\alpha T} - 1 - e^{-\alpha y} \cdot e^{\alpha T} + e^{-\alpha y}}{(e^{\alpha T} - 1) \cdot (e^{-\alpha T} - 1)}. \quad (1.67)$$

Podstawiamy:

$$M = (e^{\alpha T} - 1) \cdot (e^{-\alpha T} - 1). \quad (1.68)$$

Wtedy:

$$F(y) = \frac{1 - e^{\alpha T} + e^{-\alpha y} \cdot (e^{\alpha T} - 1)}{M} = X \in U(0, 1), \quad (1.69)$$

gdzie $U(0, 1)$ jest zmienną losową z przedziału $(0, 1)$ o rozkładzie jednorodnym. Mnożymy obie strony przez M i przekształcamy dalej:

$$e^{-\alpha y} \cdot (e^{\alpha T} - 1) = M \cdot X - 1 + e^{\alpha T} \Big| : (e^{\alpha T} - 1) \quad (1.70)$$

$$e^{-\alpha y} = \frac{M \cdot X - 1 + e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} - 1} \Big| \ln(\quad) \quad (1.71)$$

$$-\alpha y = \ln \frac{M \cdot X - 1 + e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} - 1} \Big| : (-\alpha) \quad (1.72)$$

$$y = -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{M \cdot X - 1 + e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} - 1}. \quad (1.73)$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$\lambda + \mu = \alpha, \quad (1.74)$$

$$G(t) = D \cdot e^{-\alpha t}, \quad (1.75)$$

gdzie $G(t)$ to funkcja gęstości prawdopodobieństwa, a $D = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha T}}$ - czynnik normalizacyjny. Wiedząc, że:

$$\int_0^T C \cdot g(t) dt = 1, \quad (1.76)$$

wprowadzamy unormowaną funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

$$G(t) = D \cdot g(t) = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha T}} \cdot e^{-\alpha t}. \quad (1.77)$$

Podstawiamy do równań (1.46), (1.47), otrzymując wartości oczekiwane E:

$$\int_0^t dSG(S) \cdot b(x - c \cdot S, t - S) = E[b(x - c \cdot S, t - S)], \quad (1.78)$$

$$\int_0^t dSG(S) \cdot f(x + c \cdot S, t - S) = E[f(x + c \cdot S, t - S)]. \quad (1.79)$$

Uwzględniamy warunek początkowy:

$$f(x, t) = f_0(x - c \cdot t) \cdot g(t) + E[b], \quad (1.80)$$

$$b(x, t) = b_0(x + c \cdot t) \cdot g(t) + E[f]. \quad (1.81)$$

Całkowanie należy zamienić na sumowanie:

$$\int_0^t dSG(S) b(x - c \cdot S, t - S) = S_b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b(x - c \cdot S_i, t - S_i). \quad (1.82)$$

Konstruujemy algorytm. w każdym kroku losujemy zmienną $S_n \in G : 0 \leq S_n \leq t$. Wyliczamy:

$$f(x_n, t_n) = f_0(x_n - c \cdot t_n) \cdot g(t_n) + \frac{\lambda}{D} \cdot b(x - c \cdot S_n, t - S_n), \quad (1.83)$$

$$b(x_n, t_n) = b_0(x_n + c \cdot t_n) \cdot g(t_n) + \frac{\lambda}{D} \cdot f(x + c \cdot S_n, t - S_n). \quad (1.84)$$

Szukamy kolejnych rozwinięć f i b do momentu, aż wystąpi warunek:

$$S_{n+1} > t_n \quad (1.85)$$

i przerywamy obliczenia.

Wiedząc, że $x_{n+1} = x - c \cdot S_n$, $t_{n+1} = t - S_n$, sumę tego ciągu możemy zapisać w postaci wzoru:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) &= f_0(x - c \cdot t) \cdot g(t) + \frac{\lambda}{D} \cdot b(x - c \cdot S_0, t - S_0) = \\ &\left(\frac{\lambda}{D}\right)^0 f_0(x - c \cdot t) g(t) + \left(\frac{\lambda}{D}\right)^1 b_0(x_1 + c \cdot t_1) g(t_1) + \\ &\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 f_0(x_2 - c \cdot t_2) g(t_1) + \left(\frac{\lambda}{D}\right)^3 b_0(x_3 - c \cdot t_3) g(t_3) + \\ &\dots + \\ &\left(\frac{\lambda}{D}\right)^{n-1} f_0(x_{n-1} - c \cdot t_{n-1}) g(t_{n-1}) + \left(\frac{\lambda}{D}\right)^n b_0(x_n - c \cdot t_n) g(t_n). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Pojedynczy łańcuch $\tilde{f}(x, t)$ jest tylko przybliżeniem. Aby wynik był poprawny, konieczne jest wygenerowanie wielu takich łańcuchów i uśrednienie wyniku.

$$E[f(x, t)] = \frac{1}{N} \sum_{\nu} \tilde{f}^{(\nu)}. \quad (1.87)$$

Algorytm 1 Algorytm iteracyjny do wyznaczania rozwiązania $f(x, t)$ w równaniu telegrafistów z samym warunkiem początkowym za pomocą metody MC. [2]

```
1 MC_iterative_f(N, x_init, t_max) {
2   suma_f = 0.0;
3   for(i = 1; i ≤ N; i++){
4     t = t_max;
5     k = 0;
6     x = x_init;
7     while(t > 0){
8       p = k % 2;
9       if (p == 0)
10        suma_f +=  $\left(\frac{\lambda}{D}\right)^k \cdot f_0(x - c \cdot t) \cdot g(t)$ ;
11      else
12        suma_f +=  $\left(\frac{\lambda}{D}\right)^k \cdot b_0(x + c \cdot t) \cdot g(t)$ ;
13      losujemy:  $S \in G(t_{max})$ ;
14      t = t - S;
15      x = x +  $(-1)^{p+1} \cdot c \cdot S$ ;
16      k++;
17    }
18  }
19  return  $\frac{suma_f}{N}$ ;
20 }
```

W analogiczny sposób konstruujemy algorytm dla rozwiązania b .

Algorytm 2 Algorytm iteracyjny do wyznaczania rozwiązania $b(x, t)$ w równaniu telegrafistów z samym warunkiem początkowym za pomocą metody MC. [2]

```
1 MC_iterative_b(N, x_init, t_max) {
2   suma_b = 0.0;
3   for(i = 1; i ≤ N; i++){
4     t = t_max;
5     k = 0;
6     x = x_init;
7     while(t > 0){
8       p = k % 2;
9       if (p == 0)
10        suma_b +=  $\left(\frac{\lambda}{D}\right)^k \cdot b_0(x + c \cdot t) \cdot g(t)$ ;
11      else
12        suma_b +=  $\left(\frac{\lambda}{D}\right)^k \cdot f_0(x - c \cdot t) \cdot g(t)$ ;
13      losujemy:  $S \in G(t_{max})$ ;
14      t = t - S;
15      x = x +  $(-1)^p \cdot c \cdot S$ ;
16      k++;
17    }
18  }
19  return  $\frac{suma_b}{N}$ ;
20 }
```

Algorytmy 1 i 2 mają bardzo podobną konstrukcję do algorytmu przedstawionego w publikacji [2]. Został on jednak rozbity na dwie osobne procedury, aby umożliwić ich łatwiejsze przekształcenie do postaci rekurencyjnej (algorytm 3 przedstawiony w dalszej części), która ma jeszcze prostszą strukturę. Warto zwrócić uwagę na niektóre jego aspekty.

Ponieważ nie wiadomo z góry jaką liczbę kroków czasowych należy wykonać (proces stochastyczny), użyto funkcji while(). Z analizy metody wiemy także, że odwołując się do funkcji podcałkowej np. $f(x, t)$ wywołujemy funkcję $b(x, t)$ przesuniętą w czasie i przestrzeni, dlatego do zmiany wywoływanej funkcji użyto dzielenia modulo 2 dającej wynik 0 (funkcja b) lub 1 (funkcja f). Funkcja $G(t)$ obsługuje losowanie zmiennej S z generatora G .

Rozwiązanie równania telegrafistów bez warunku brzegowego metodą Monte-Carlo (algorytm rekurencyjny).

Warunek początkowy jest losowany z prawdopodobieństwem $P[x > t_{max}]$, a cała z prawdopodobieństwem $P[x < t_{max}]$. Zamiast generatora o fgp $G(S)$ $\int_0^t G(S)ds = 1$ użyjemy generatora dla $t \rightarrow \infty$. Dzięki temu zabiegowi losując zmienną czasową, generowane mogą być znacznie większe wartości. To sprawia, że średnia długość pojedynczego łańcucha ulega skróceniu.

Generator 2:

$$\int_0^\infty D_2 e^{-(\lambda+\mu) \cdot S} dS = 1, \quad (1.88)$$

gdzie $D_2 = (\lambda + \mu)$.

Dystrybucja:

$$F(y) = \int_0^y (\lambda + \mu) \cdot e^{-(\lambda+\mu) \cdot S} dS = 1 - e^{-(\lambda+\mu) \cdot y} = X \in U(0, 1). \quad (1.89)$$

Zmienną losową o rozkładzie jednorodnym zamieniamy na zmienną losową o rozkładzie $e^{-(\lambda+\mu) \cdot t}$ dla $t \in [0, \infty]$.

$$y = -\frac{1}{\lambda + \mu} \cdot \ln(1 - X). \quad (1.90)$$

W celu wyznaczenia $f(x, t)$:

1. Losujemy $S_0 \in G_2(S)$, $S_0 \in [0, \infty]$.
2.
 - Jeśli $S_0 > t$, to $\tilde{f}^{(\nu)} = f_0(x - c \cdot t)$ i kończymy łańcuch.
 - Jeśli $S_0 \leq t$, to wyznaczamy:

$$\frac{\lambda}{D_2} \cdot b(x - c \cdot S_0, t - S_0) = \frac{\lambda}{D_2} \cdot b(x_1, t_1). \quad (1.91)$$

Losujemy $S_1 \in G_2(S)$.

- – Jeśli $S_1 > t_1$, to $b(x_1, t_1) = b_0(x_1 - c \cdot t_1)$.
- Jeśli $S_1 \leq t_1$, to $b(x_1, t_1) = \frac{\lambda}{D_2} \cdot f(x_1 + c \cdot S_1, t_1 - S_1)$.

Losujemy: $S_2 \in G_2(S)$.

\vdots

Postępujemy w ten sposób aż do momentu, gdy $t_n < 0$.

Implementację zmodyfikowanego algorytmu można uprościć, stosując naprzemienną (krzyżową) rekurencję funkcji f i b wywołujących siebie nawzajem.

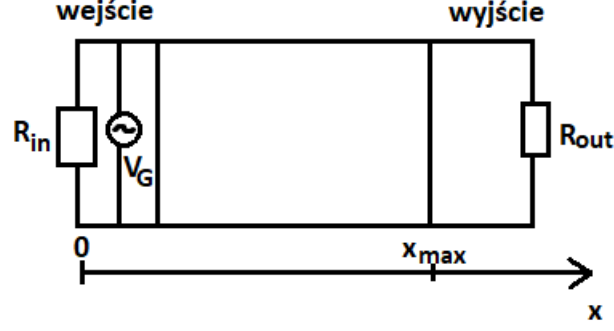
Algorytm 3 Algorytm rekurencyjny do rozwiązywania równania telegrafistów z samym warunkiem początkowym za pomocą metody MC. [2]

```

1 recursive_f(x, t){
2   if (t < 0)
3     return 0; // koniec lancucha
4   else{
5     losujemy: S ∈ G2(S);
6     if (S > t) return f0(x - c · t); // warunek początkowy
7     else return  $\frac{\lambda}{D_2} \cdot \text{recursive\_b}(x - c \cdot S, t - S)$ ; //rekurencja
8   }
9 }
10
11 recursive_b(x, t){
12   if (t < 0)
13     return 0;
14   else{
15     losujemy: S ∈ G2(S);
16     if (S > t) return b0(x + c · t);
17     else return  $\frac{\lambda}{D_2} \cdot \text{recursive\_f}(x + c \cdot S, t - S)$ ; //rekurencja
18   }
19 }
20
21 MC_recursive(x, t, N){
22   sum_f = 0;
23   sum_b = 0;
24   for (i = 1; i ≤ N; i++){
25     xx = x;
26     tt = t;
27     sum_f = sum_f + recursive_f(xx, tt);
28     xx = x;
29     tt = t;
30     sum_b = sum_b + recursive_b(xx, tt);
31   }
32   sum_b =  $\frac{\text{sum\_b}}{N}$ ; // rozwiązanie b(x,t)
33   sum_f =  $\frac{\text{sum\_f}}{N}$ ; // rozwiązanie f(x,t)
34   return [sum_f, sum_b];
35 }

```

1.3.2 Równanie telegrafistów w postaci całkowej z uwzględnieniem warunku brzegowego.



Rysunek 1.3: Schemat układu.

Źródło napięcia V_G zaczyna na wejściu generować falę $f(x, t)$ poruszającą się w prawo. Po odbiciu od prawego brzegu (x_{max}) fala zamienia się w $b(x, t)$, przemieszczającą się w lewo. Dociera ona do lewego brzegu, gdzie odbijając się od niego wraz z generowanym sygnałem V_G daje przyczynek do funkcji $f(0, t)$.

Wprowadzamy warunki brzegowe.

Na prawym brzegu odbicie ze zmianą amplitudy:

$$b(x_{max}, t) = \Gamma_{out} \cdot f(x_{max}, t), \quad (1.92)$$

Na lewym brzegu odbicie ze zmianą amplitudy oraz sygnał generowany przez źródło:

$$f(0, t) = \xi \cdot V_G(t) + \Gamma_{out} \cdot b(0, t). \quad (1.93)$$

Kolejno: Współczynniki konwersji sygnału f na b :

Współczynnik konwersji sygnału na oporze na prawym brzegu:

$$\Gamma_{out} = \frac{R_{out} - R_0}{R_{out} + R_0}. \quad (1.94)$$

Współczynnik konwersji sygnału na lewym brzegu:

$$\Gamma_{in} = \frac{R_{in} - R_0}{R_{in} + R_0}. \quad (1.95)$$

Współczynnik uwzględniający opór wewnętrzny źródła napięcia i opór wejściowy układu:

$$\xi = \frac{R_0}{R_0 + R_{in}}, \quad (1.96)$$

gdzie

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.97)$$

Szukane rozwiązanie u jest sumą rozwiązań f i b .

$$u(x, t) = f(x, t) + b(x, t) \quad (1.98)$$

Po dodaniu warunku brzegowego układ równań całkowych (1.46), (1.47) uzyskuje postać:

$$\begin{aligned}
f(x, t) = & f_0(x - c \cdot t) \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot H(x - c \cdot t) \\
& + \lambda \cdot \int_0^t dS e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot b(x - c \cdot S, t - S) \cdot H(x - c \cdot S) \\
& + \int_0^t dS e^{-(\lambda+\mu)t} \delta(c \cdot S - x) \cdot f(0, t - S) \cdot H(c \cdot t - x),
\end{aligned} \tag{1.99}$$

$$\begin{aligned}
b(x, t) = & b_0(x + c \cdot t) \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot H(c \cdot t + l - x) \\
& + \lambda \cdot \int_0^t dS e^{-(\lambda+\mu)S} \cdot f(x + c \cdot S, t - S) \cdot H(x_{max} - x - c \cdot S) \\
& + \int_0^t dS e^{-(\lambda+\mu)S} \delta(c \cdot S + x - x_{max}) \cdot b(x_{max}, t - S) \cdot H(c \cdot t + x - x_{max}),
\end{aligned} \tag{1.100}$$

gdzie $H(x)$ jest funkcją skokową Heaviside'a, a $\delta(x)$ - deltą Diraca.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}. \tag{1.101}$$

Rozwiązanie analityczne równania telegrafistów z warunkiem brzegowym.

Problem wymaga wykorzystania transformacji Fouriera. Przyjmujemy, że sygnał ze źródła ma postać:

$$V_G(t) = \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma_0^2}\right]}, \quad (1.102)$$

gdzie $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$ to częstość źródła, a f_0 - częstotliwość sygnału źródła.

Transformata Fouriera sygnału:

$$\mathcal{F}[V_G(t)] = V_G(\omega) = \sqrt{\frac{\Pi}{2}} \cdot \sigma_0 \cdot \left\{ e^{\left[-\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega) \cdot (\omega_0 \cdot \sigma_0^2 + \omega \cdot \sigma_0^2 + 2 \cdot j \cdot t_0)\right]} + e^{\left[\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 - \omega) \cdot (-\omega_0 \cdot \sigma_0^2 + \omega \cdot \sigma_0^2 + 2 \cdot j \cdot t_0)\right]} \right\} \quad (1.103)$$

gdzie j jest jednostką urojoną ($j^2 = -1$).

Wtedy rozwiązanie dane jest wzorem [2]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2 \cdot \Pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.104)$$

Całkę zamieniamy na sumę:

$$u(x, \omega) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, \omega). \quad (1.105)$$

Kolejno:

$$u_0(x, \omega) = \xi(\omega) \cdot V_G(\omega) \left[e^{-j \cdot k(\omega) \cdot x} + \Gamma_{out}(\omega) \cdot e^{-j \cdot k(\omega) \cdot (2 \cdot x_{max} - x)} \right]. \quad (1.106)$$

Sygnał po i -tym odbiciu:

$$u_i(x, \omega) = u_0(x, \omega) \cdot (\Gamma_{in})^i \cdot (\Gamma_{out})^i \cdot e^{-2 \cdot j \cdot k(\omega) \cdot i \cdot x_{max}}, \quad (1.107)$$

$$k(\omega) = -\frac{j}{c} \sqrt{\left(j \cdot \omega + \frac{R}{L}\right) \cdot \left(j \cdot \omega + \frac{G}{C}\right)}, \quad (1.108)$$

$$\Gamma_{out}(\omega) = \frac{Z_{out}(\omega) - Z_0(\omega)}{Z_{out}(\omega) + Z_0(\omega)}, \quad (1.109)$$

$$\Gamma_{in}(\omega) = \frac{R_{in} - Z_0(\omega)}{R_{in} + Z_0(\omega)}. \quad (1.110)$$

Γ_{in} oraz Γ_{out} mogą być zespolone.

Dalej:

$$Z_{out} = R_{out}, \quad (1.111)$$

$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{G + j\omega C}}, \quad (1.112)$$

$$\xi(\omega) = \frac{Z_0(\omega)}{Z_0(\omega) + R_{in}}. \quad (1.113)$$

Amplituda u_i zmniejsza się wraz z wzrostem indeksu i . Dlatego rozwiązanie zapisane w postaci sumy jest szeregiem zbieżnym. Jego wartość można obliczyć z dobrym przybliżeniem, sumując kilkadziesiąt-kilkaset pierwszych wyrazów. To wystarczy, bo $(\Gamma_{out})^{100} \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$.

Korzystając z powyższych wzorów, konstruujemy algorytm.

Algorytm 4 Algorytm do wyznaczania rozwiązania analitycznego w równaniu telegrafistów z warunkiem brzegowym. [2]

```

1 WB_analytic(t, n_x, x_max, n_omega, sigma_0) {
2   Delta_x = x_max / (n_x + 1);
3   if (f_0 > 0) {
4     omega_0 = 2 * pi * f_0;
5     Delta_omega = (2 * omega_0) / n_omega;
6   }
7   if (f == 0) {
8     omega_0 = 0;
9     omega_max = 2 / sigma_0;
10    Delta_omega = (2 * omega_max) / n_omega;
11  }
12  for (x = Delta_x; x <= x_max - Delta_x; x += Delta_x) {
13    wynik = 0;
14    for (omega = -(Delta_omega * n_omega); omega <= (Delta_omega * n_omega); omega += Delta_omega) {
15      // wyznacz kolejno:
16      Z_0(omega);
17      xi(omega);
18      Z_out(omega);
19      Gamma_in(omega);
20      Gamma_out(omega);
21      k(omega);
22      V_G(omega);
23      u_0(x, omega);
24
25      for (i = 0; i <= 100; i++) {
26        u_i(x, omega);
27        suma_u = suma_u + u_i(x, omega);
28      }
29      wynik = wynik + (1 / (2 * pi)) * suma_u * e^(j * omega * t) * Delta_omega;
30    }
31  }
32  return Re(wynik);
33 }
```

Dwie pierwsze instrukcje warunkowe *if* wykorzystywane są do określenia parametrów całkowania. W pierwszej pętli *for* inicjalizowany jest wynik ($u(x, t)$) w danym położeniu. Następnie dla każdej częstotliwości obliczane są współczynniki Z_0 (wzór 1.112), ξ (1.113), Z_{out} (1.111), Γ_{in} (1.110), Γ_{out} (1.109), k (1.108), sygnał wejściowy V_G (1.102) i jego wkład do rozwiązania u_0 (1.106).

Teraz sumujemy sto pierwszych wyrazów u_i (1.106) sumy 1.105. Po opuszczeniu pętli po scałkowaniu sumy metodą prostokątów otrzymujemy gotowy wynik dla danej częstotliwości, który dodawany jest do wyniku całkowego.

Interesuje nas tylko część rzeczywista wyniku (będącego liczbą zespoloną).

Rozwiązanie równania telegrafistów z warunkiem brzegowym metodą Monte-Carlo.

Delty Diraca nie da się przedstawić numerycznie, więc należy ją przybliżyć. Wiedząc że λ i μ są duże (rzędu 10^6), możemy przyjąć:

$$\delta(x) = \begin{cases} \lambda + \mu, & -\frac{1}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \leq x \leq \frac{1}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \\ 0, & x < -\frac{1}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \vee x > \frac{1}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \end{cases}. \quad (1.114)$$

Modyfikujemy algorytm 3 (rekurencyjny Monte Carlo) w celu uwzględnienia warunku brzegowego:

- Zakładamy, że $f_0(x) = b_0(x) = 0$, a sygnał generowany jest ze źródła $V_G(t)$.
- Losujemy $S \in G_2(S)$, $S \in (0, \infty)$.
- Dla $f(x, t)$:
 1. jeśli $x - c \cdot S > 0$, to szukamy $b(x - c \cdot S, t - S)$,
 2. jeśli $x - c \cdot S < 0$, to liczymy chwilę przejścia przez lewy brzeg $S = \frac{x}{c}$ i przybliżamy całkę (fgp dla generatora G_2):

$$\begin{aligned} \int_0^t dS e^{-(\lambda + \mu)S} (\lambda + \mu) \delta_{c \cdot S, x} \cdot f(0, t - S) = \\ = E[\delta_{c \cdot S, x} \cdot f(0, t - S)] = E[(\delta_{c \cdot x} \cdot (\xi \cdot V_G(t - S) + \Gamma_{in} \cdot b(0, t - S))], \end{aligned} \quad (1.115)$$

gdzie $\delta_{c \cdot x}$ jest deltą Kroneckera.

- Dla $b(x, t)$:
 1. jeśli $x + c \cdot S < x_{max}$, to szukamy $f(x + c \cdot S, t - S)$,
 2. jeśli $x + c \cdot S > x_{max}$, to liczymy chwilę przejścia przez prawy brzeg $S = \frac{x_{max} - x}{c}$ i przybliżamy całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^t dS e^{-(\lambda + \mu)S} (\lambda + \mu) \delta_{x_{max}, x + c \cdot S} \cdot b(x_{max}, t - S) = \\ = E[\delta_{x_{max}, x + c \cdot S} \cdot b(x_{max}, t - S)] = E[(\delta_{x_{max}, x + c \cdot S} \cdot \Gamma_{out} \cdot f(x_{max}, t - S))]. \end{aligned} \quad (1.116)$$

S losujemy generatorem G_2 dla $S \in (0, \infty)$. Duże wartości S nie stanowią problemu, bo wówczas zachodzi zależność $x - c \cdot S < 0$ i dokonujemy renormalizacji S oznaczającego przejście przez brzeg. Każda wartość $S \in G_2$ daje wkład do rozwiązania.

Aby znaleźć rozwiązanie $f(x, t)$ i $b(x, t)$ metodą MC z wbudowanym warunkiem brzegowym, użyjemy algorytmu 3 ze zmodyfikowanymi funkcjami rekurencyjnymi.

Algorytm 5 Algorytm rekurencyjny do rozwiązywania równania telegrafistów z warunkiem brzegowym za pomocą metody MC. [2]

```

1 recursive_f_WB(x, t){
2   if (t < 0)
3     return 0; // koniec lancucha
4   else{
5     losujemy: S ∈ G2(S);
6     if ((x - c · S) > 0){
7       return  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \text{recursive\_b\_WB}(x - c \cdot S, t - S)$ ;
8     }
9     else{
10      S =  $\frac{x}{c}$ ; // nowe S
11      return  $\Gamma_{in} \cdot \text{recursive\_b\_WB}(x - c \cdot S, t - S) + \xi \cdot V_G(t - S)$ ;
12    }
13  }
14 }
15
16 recursive_b_WB(x, t){
17   if (t < 0)
18     return 0;
19   else{
20     losujemy: S ∈ G2(S);
21     if ((x + c · S) < xmax){
22       return  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \text{recursive\_f\_WB}(x + c \cdot S, t - S)$ ;
23     }
24     else{
25       S =  $\frac{x_{max} - x}{c}$ ; // nowe S
26       return  $\Gamma_{out} \cdot \text{recursive\_f\_WB}(x + c \cdot S, t - S)$ ;
27     }
28   }
29 }
30
31 MC_recursive_WB(x, t, N){
32   sum_f = 0;
33   sum_b = 0;
34   for (i = 1; i ≤ N; i++){
35     xx = x;
36     tt = t;
37     sum_f = sum_f + recursive_f_WB(xx, tt);
38     xx = x;
39     tt = t;
40     sum_b = sum_b + recursive_b_WB(xx, tt);
41   }
42   sum_b =  $\frac{\text{sum\_b}}{N}$ ; // rozwiązanie b(x,t)
43   sum_f =  $\frac{\text{sum\_f}}{N}$ ; // rozwiązanie f(x,t)
44   return sum_b + sum_f; // rozwiązanie u(x,t)
45 }

```

Modyfikacja funkcji f i b w stosunku do poprzedniej wersji (algorytm 3) polega na dodaniu warunku sprawdzającego wyjście poza rozważany obszar.

W funkcji f sprawdzamy, czy rozwiązanie nie wychodzi poza prawy brzeg, a w funkcji b - poza lewy. W momencie wykrycia takiego przypadku, parametr czasowy S jest renormalizowany do wartości, dla której rozwiązanie lokalizuje się bezpośrednio na lewym lub prawym brzegu. Generuje się w ten sposób odpowiednia ilość (parametr N) łańcuchów Markowa dla rozwiązań f i b . Należy je uśrednić i dodać do siebie, aby uzyskać $u(x, t)$.

Rozdział 2

Równanie telegrafistów dla układu nieograniczonego przestrzennie.

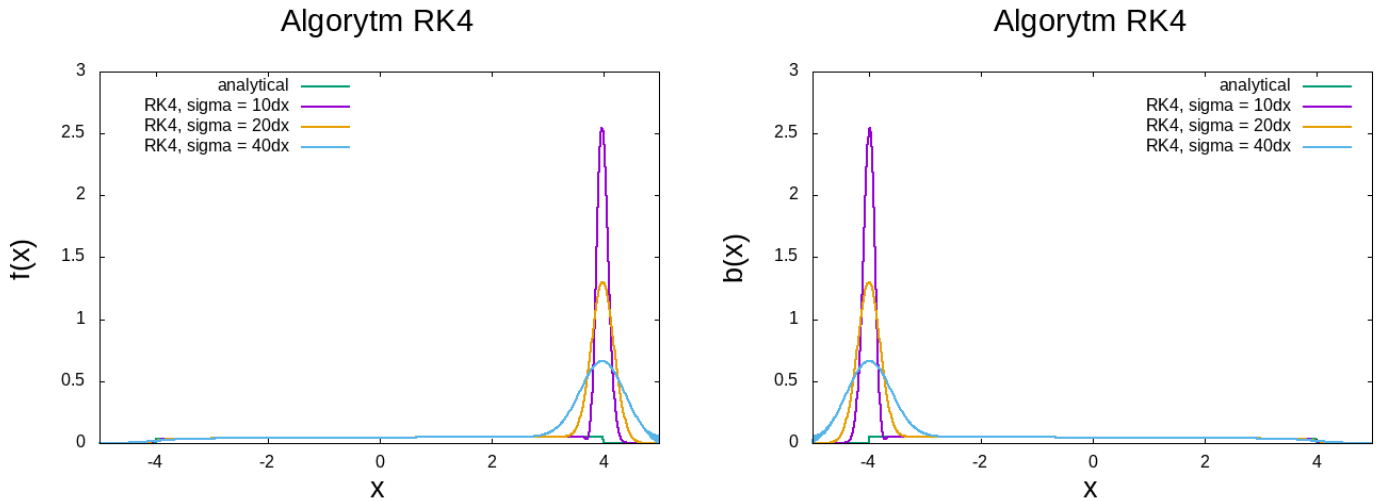
Równanie telegrafistów tylko dla warunku początkowego rozwiązano numerycznie przy użyciu metody MC (algorytmy 1, 2 i 3) oraz metody RK4. Dokładność uzyskanych rozwiązań numerycznych określono poprzez porównanie ich z rozwiązaniem analitycznym. Oprócz jakości rozwiązania analizie poddana będzie także wydajność metody MC w stosunku do metody RK4.

2.1 Parametry użyte w symulacjach.

Mimo że obszar obliczeniowy jest skończony (wymaga tego RK4), to fala poruszająca się w prawo i w lewo nie dociera do jego granicy. Z tego powodu nie jest konieczne uwzględnianie warunku brzegowego.

Obszar symulacji	x	$[-5, 5][m]$
Czas trwania symulacji	t_{max}	$20 \cdot 10^{-9}[s]$
Prędkość fali	c	$\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2 \cdot 10^8 [\frac{m}{s}]$
	λ	$(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}) = 22.5 \cdot 10^6 [\frac{1}{s}]$
Odległość między węzłami siatki w metodzie RK4	Δx	$\frac{2 \cdot x_{max}}{10^4} = 10^{-3}[m]$

2.2 Algorytm Rungego-Kutty 4. rzędu – porównanie z wynikami analitycznymi.



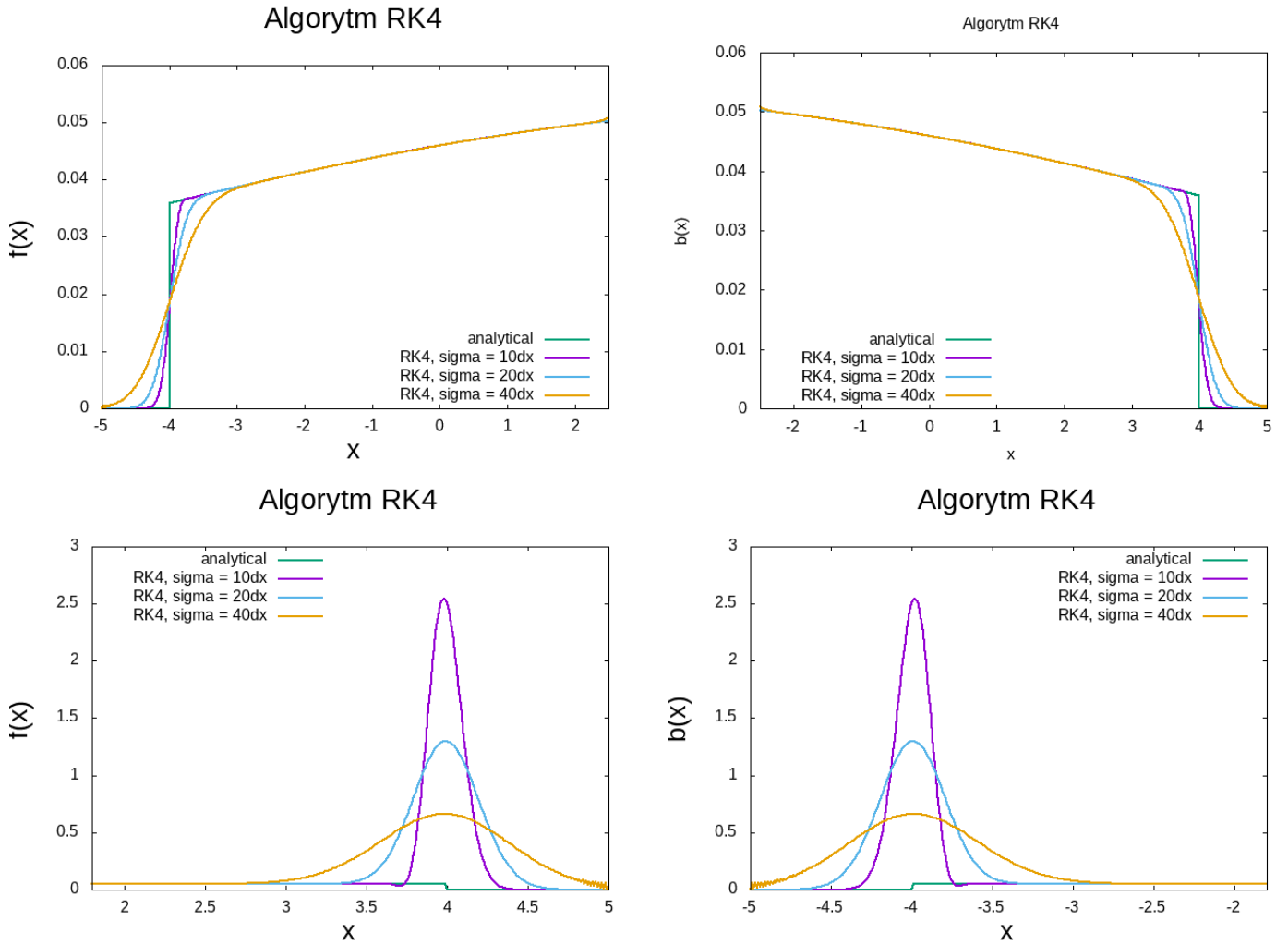
Rysunek 2.1: Rozwiązanie propagujące się do przodu ($f(x)$) oraz do tyłu ($b(x)$) dla $\mu = 0 \left[\frac{1}{s} \right]$.

Wartości σ wynoszą odpowiednio: $10 \cdot \Delta x = 0.01m$, $20 \cdot \Delta x = 0.5m$, $40 \cdot \Delta x = 0.25m$.

Zaburzenie, które dla $t = 0$ było skupione wokół $x = 0$ po czasie równym t_{max} dotarło do punktów $x = 4$ i $x = -4$.

Warto zauważyć, że mimo że funkcja $f(x, t)$ opisuje propagację pakietu w prawo, posiada ona niezerowe rozwiązanie także dla $x < 0$. Wynika to z faktu, że równania różniczkowe dla f i b są sprzężone, więc pakiet $b(x, t)$ poruszający się w lewo ($x < 0$) produkuje także rozwiązania dla $f(x, t)$ w tym obszarze.

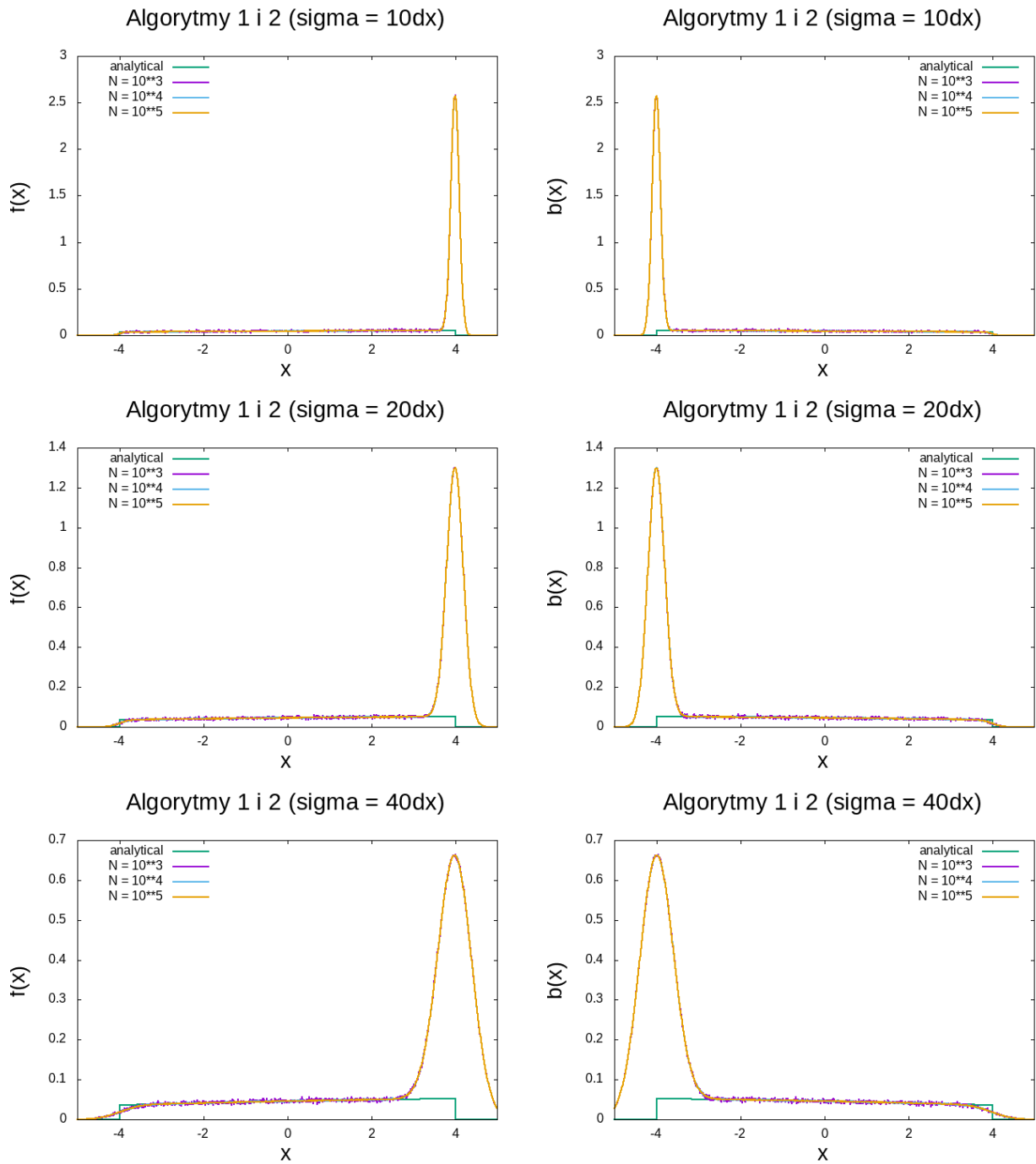
Widać jednak, że początkowy pakiet (w postaci funkcji Gaussa) przesunął się w prawo dla $f(x, t)$ oraz w lewo dla $b(x, t)$. Jest to zachowanie zgodne z oczekiwaniami: rozwiązania równanie falowego powinny przemieszczać się bez zmiany kształtu (brak dyspersji) wzdłuż kierunku określonego przez prędkość (f - w prawo, b - w lewo). Rozwiązanie numeryczne uzyskane przy pomocy metody RK4 pokrywa się z analitycznym w środkowym obszarze niezależnie od wartości początkowego rozmycia pakietu σ . Aby lepiej to zobrazować, na kolejnym rysunku podzielono obszar symulacji na część pomijającą, oraz zawierającą pik gaussowski.



Rysunek 2.2: Rozwiązania $f(x, t_{max})$ i $b(x, t_{max})$ uzyskane metodą RK4.

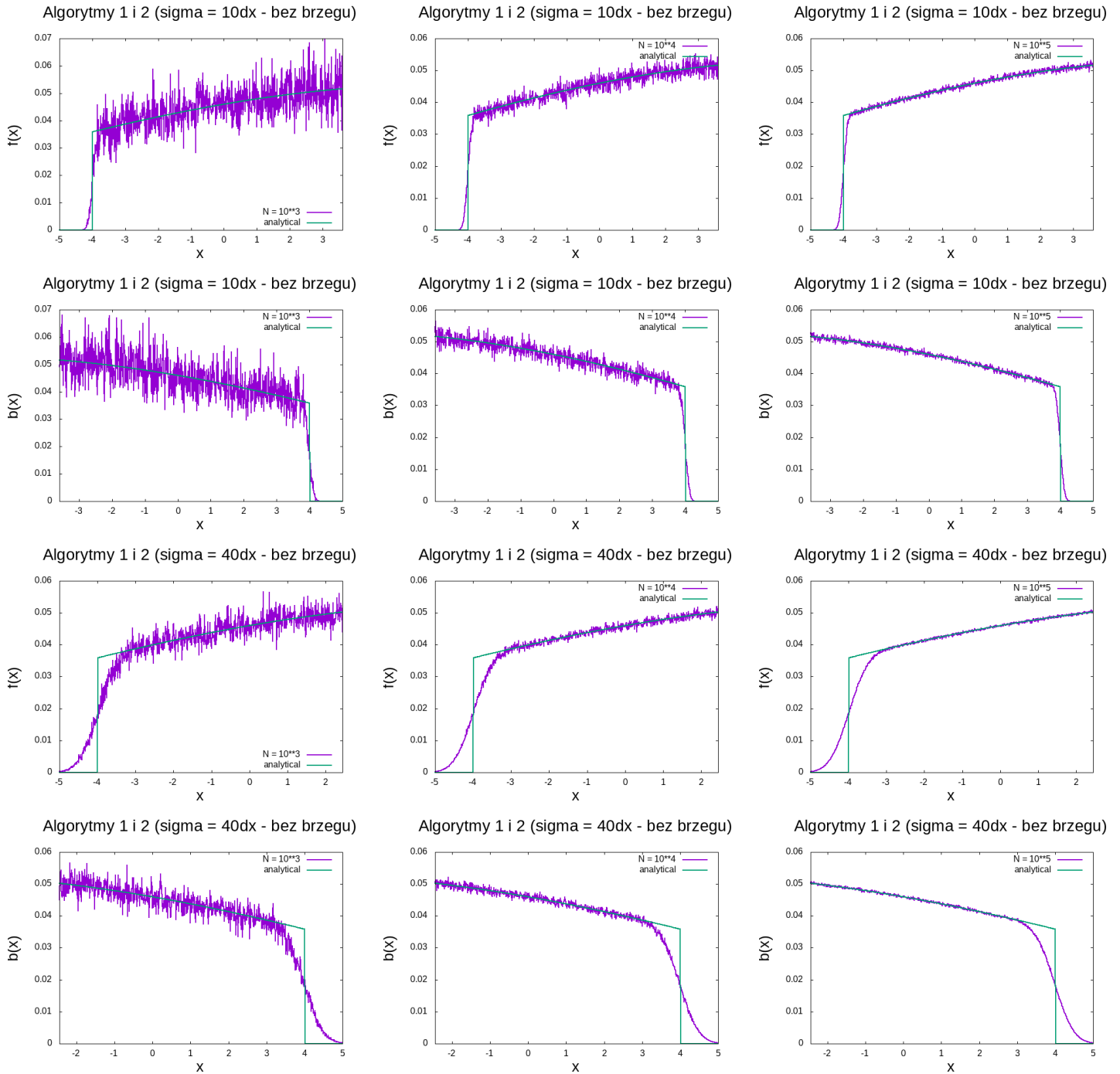
Parametr σ nie tylko wpływa na kształt piku, ale również na brzeg linii. Wraz ze wzrostem σ , zamiast skokowy wzrost/spadek obserwowany w algorytmie analitycznym przechodzi w coraz mniej stromą krzywą. Wyniki jednoznacznie wskazują, że metoda RK4 generuje poprawne wyniki w środkowym obszarze ograniczonym z obu stron poprzez pierwotne rozmycie funkcji gaussowskiej, czyli dla $[-c \cdot t + 2 \cdot \sigma, c \cdot t - 2 \cdot \sigma]$. Jest to istotny wniosek, ponieważ dla $\mu > 0$ nie można uzyskać rozwiązania dokładnego: wtedy wyniki uzyskane metodą MC będą porównywane z metodą RK4. Dla $\sigma = 40$ zaburzenie dotarło do granicy obszaru, co spowodowało nakładanie się fal, a w efekcie oscylacje. Nie ma to wpływu na wyniki w pozostałym obszarze.

2.3 Algorytm Monte Carlo (1/2 - iteracyjny) – porównanie z wynikami analitycznymi.



Rysunek 2.3: Wyniki iteracyjnego algorytmu MC (alg. 1 i 2) w porównaniu z wynikami analitycznymi (dla $\mu = 0 \left[\frac{1}{s} \right]$).

Podobnie jak poprzednio, wyniki MC dość dobrze pokrywają się z rozwiązaniem analitycznym w środkowej części obszaru. Widoczne są jedynie niewielkie fluktuacje statystyczne wynikające ze stochastycznego przebiegu symulacji MC. Ponieważ aktualna skala nie pozwala określić amplitudy tych fluktuacji, na kolejnym rysunku przedstawiono fragment rozwiązania z pominięciem obszaru zawierającego pik gaussowski.

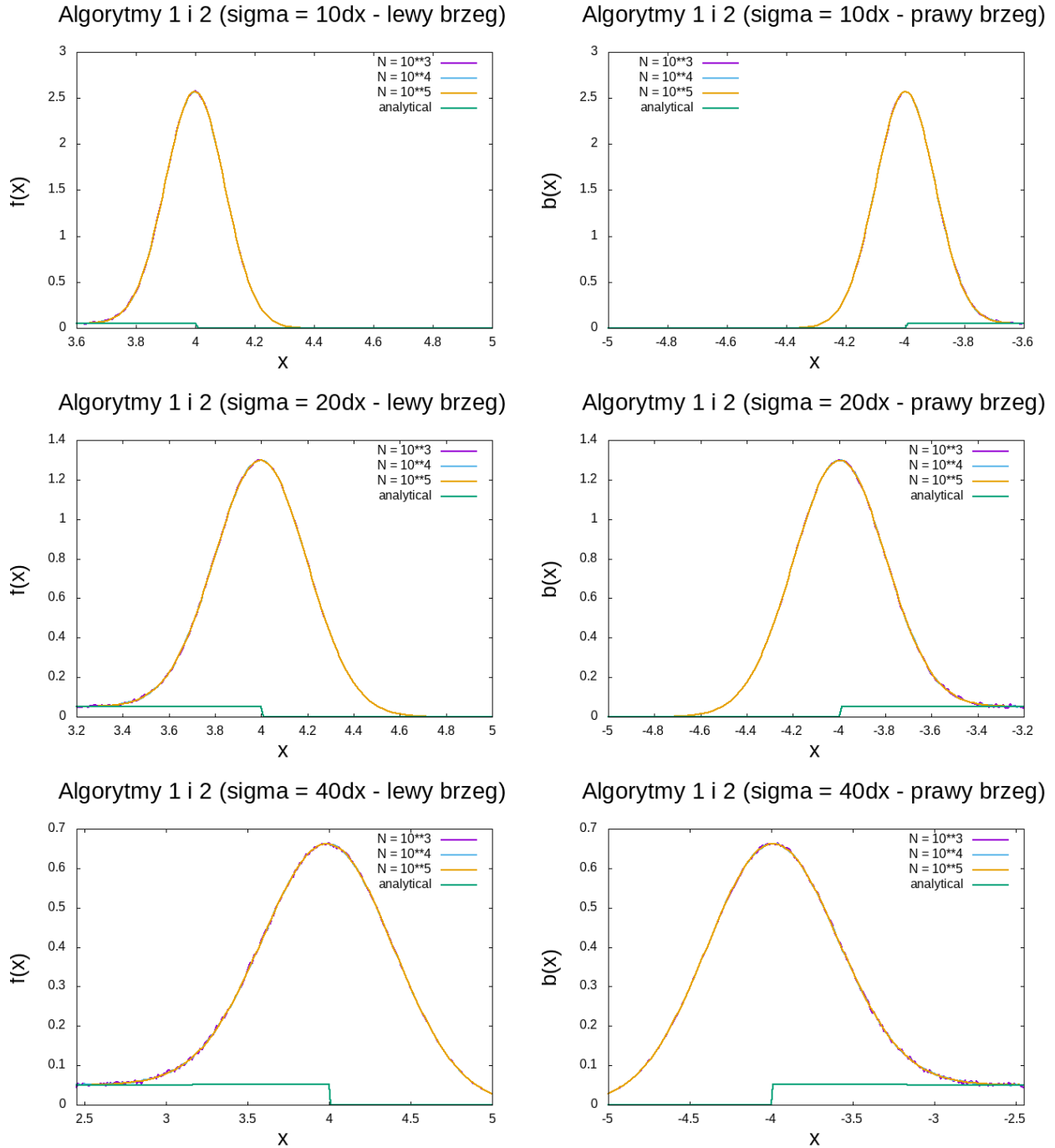


Rysunek 2.4: Wyniki iteracyjnego algorytmu MC (alg. 1 i 2) w porównaniu z wynikami analitycznymi (dla $\mu = 0 \left[\frac{1}{s} \right]$) - bez obszaru pików. Wyniki w kolumnach 1, 2 i 3 odpowiadają wartościom $N = 10^3, 10^4$ i 10^5 .

We wszystkich przedstawionych przypadkach widać fluktuacje statystyczne skupione wokół rozwiązania dokładnego.

Amplituda oscylacji największa jest dla małej liczby losowań (lewa kolumna: $N = 10^3$) i maleje wraz ze wzrostem tej liczby. Jest to zachowanie oczekiwane, ponieważ w MC błąd powinien się skalować jak $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Mniej oczywistym jest natomiast fakt, że błędy stają się mniejsze gdy rozmycie funkcji gaussowskiej rośnie. Widać to szczególnie wyraźnie w lewej kolumnie: dla $\sigma = 10 \cdot \Delta x$ błędy są około 1.5-2 razy większe niż dla $\sigma = 40 \cdot \Delta x$. Wyjaśnieniem takiego zachowania jest to, że w metodzie MC cofamy się skokowo w czasie aż do chwili, w której $t < 0$ i przerywamy wtedy obliczenia. Jeśli w chwili poprzedzającej ($t > 0$) zakończenie łańcucha zmienna x nie znajdzie się w pobliżu maksimum funkcji gaussowskiej, taki łańcuch nie wnosi wkładu do rozwiązania (co wzmacnia fluktuacje). W przypadku bardziej rozmytej funkcji ($\sigma = 40 \cdot \Delta x$) natrafienie z przedostatnim położeniem x na niezerowe wartości funkcji gaussowskiej jest bardziej prawdopodobne niż dla bardziej skupionej w przestrzeni ($\sigma = 10 \cdot \Delta x$).

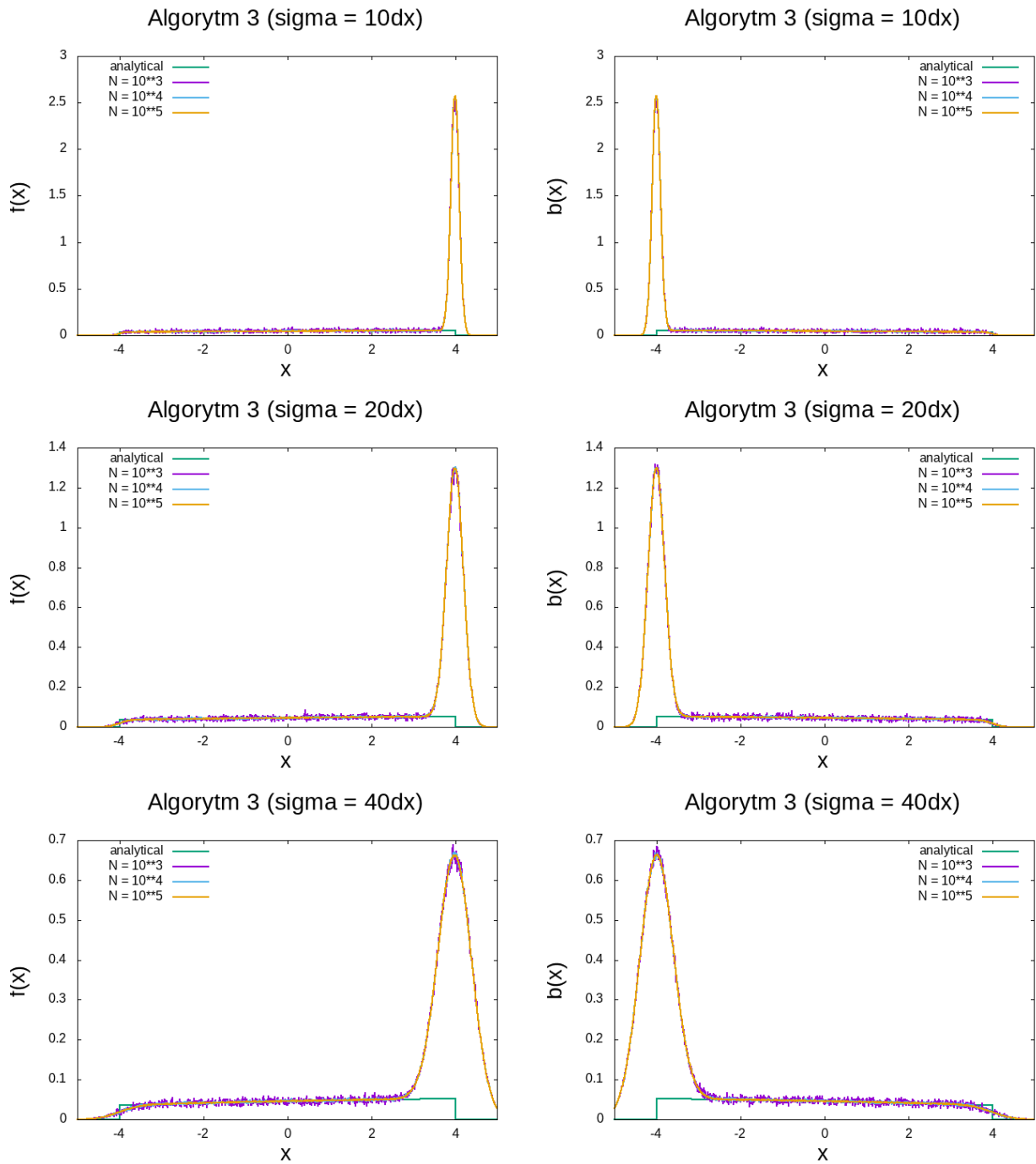


Rysunek 2.5: Wyniki iteracyjnego algorytmu MC (alg. 1 i 2) w porównaniu z wynikami analitycznymi (dla $\mu = 0 \left[\frac{1}{s} \right]$) - obszar piku.

W obszarze piku (maksimum funkcji f i b) wpływ fluktuacji na rozwiązanie jest minimalny. Ich wpływ wydaje się silniejszy od strony z której przybył pakiet (dla f - lewej, dla b - prawej). Ponadto, w odróżnieniu od wyników RK4, pakiety które dotarły do granicy pudła obliczeniowego nie są w żaden sposób zdeformowane. Można odnieść wrażenie, że pakiet osiąga barierę $x = \pm 5$ i znika.

Tak różne zachowanie rozwiązania w metodach RK4 i MC wynika z faktu, że w RK4 na granicy obszaru pierwszy/ostatni węzeł nie ma lewego/prawego sąsiada. Aby pakiet zniknął w tych punktach, konieczna była by głęboka modyfikacja algorytmu, bazująca na przykład na zastosowaniu bezodbiciowych warunków brzegowych. W metodzie MC ten problem nie występuje, ponieważ operacje różniczkowania po współrzędnej przestrzennej zastąpiono całkowaniem. To zapobiega odwoływaniu się do punktów leżących poza obszarem symulacji.

2.4 Algorytm Monte Carlo (3 - rekurencyjny) – porównanie z wynikami analitycznymi.



Rysunek 2.6: Wyniki rekurencyjnego algorytmu MC dla $\mu = 0 \left[\frac{1}{s} \right]$.

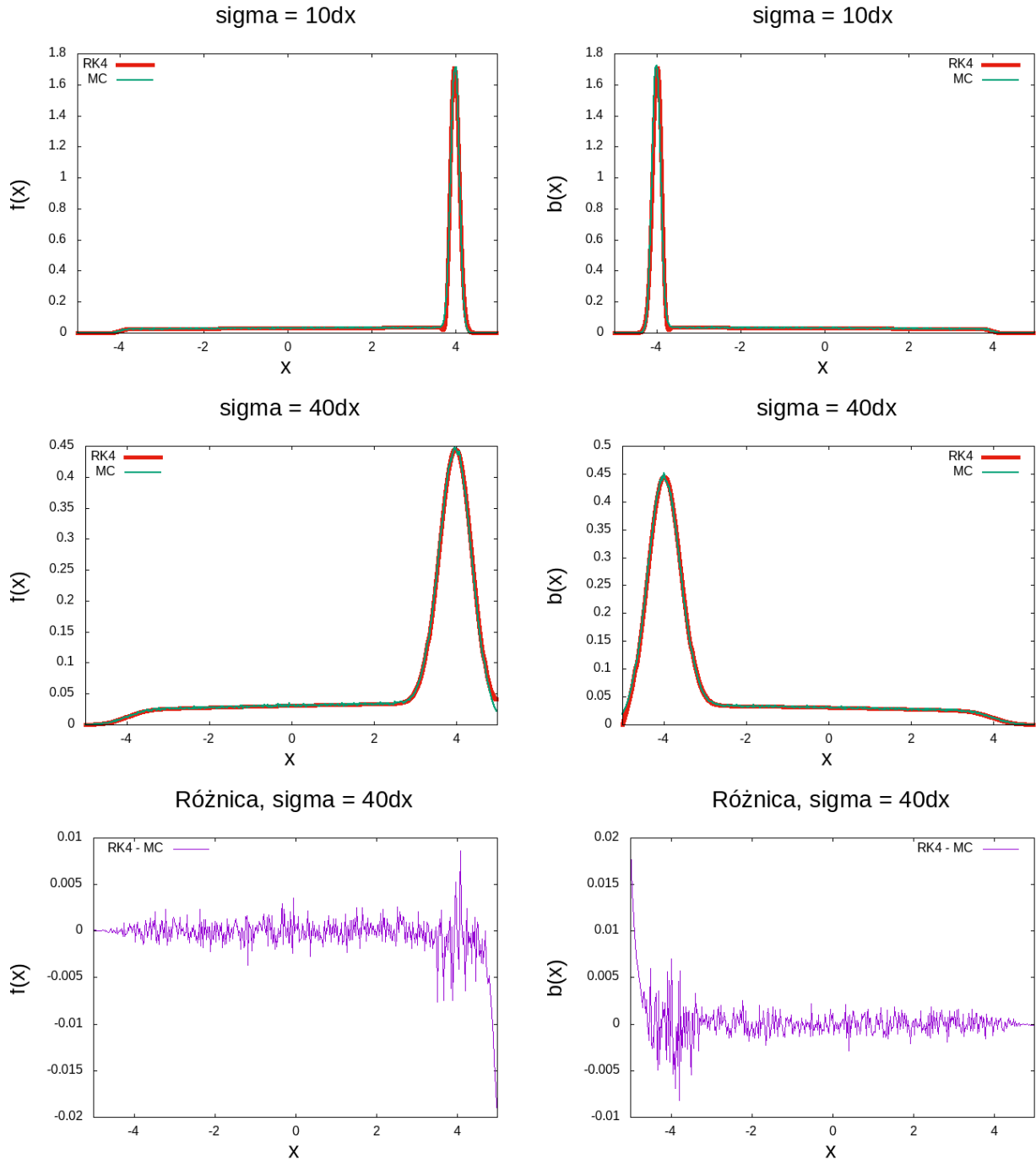
Zgodnie z oczekiwaniami, wyniki bardzo zbliżone do iteracyjnego algorytmu Monte Carlo. W związku z tym nie będę prezentował więcej wykresów prezentujących działanie algorytmu rekurencyjnego dla tego zestawu parametrów.

Błędy numeryczne wydają się nieznacznie większe niż w algorytmie iteracyjnym. Obserwacja zostanie zweryfikowana podczas szczegółowej analizy ilościowej.

2.5 Porównanie wyników uzyskanych metodą RK4 i rekurencyjnego MC dla niezerowego μ .

Jak już wcześniej wspomniano, wyniki analityczne są możliwe do uzyskania wyłącznie, gdy $\mu = 0$. Dla niezerowej wartości tego parametru możliwe jest jednak porównanie metod RK4 i MC. Wyniki RK4 traktujemy jako referencyjne dla MC.

Aby lepiej zobrazować przestrzenne zmiany fluktuacji statystycznych w MC, zamieszczono również wykres różnicy między algorytmami dla danego momentu (dla $\sigma = 40\Delta x$, ostatni wiersz).



Rysunek 2.7: Wyniki dla $\mu = 2 \cdot 10^6 \left[\frac{1}{s} \right]$ oraz $N = 10^4$.

W skali pokazanej na rysunku (dopasowanej do wysokości przemieszczającego się piku gaussowskiego) wyniki są bardzo zbliżone.

Fluktuacje metody MC są największe w tej części obszaru, gdzie funkcje f i b mają maksima (dla piku gaussowskiego). Jest to zrozumiałe, gdyż statystycznie wielkość błędu w MC jest zawsze uzależniona od wielkości rozwiązania. Zgodnie z tym rozumowaniem oczywistym staje się fakt, że błąd jest najmniejszy w pobliżu drugiego krańca pokazanego obszaru (lewego dla f , prawego dla b). Tam wartości funkcji szybko maleją do zera. W środkowej części amplituda fluktuacji utrzymuje się na podobnym poziomie.

2.6 Analiza jakościowa (algorytmy Monte Carlo)

W tej tabeli przedstawiono największe odchylenie od wartości analitycznej w zakresie nieobejmującym piku $([-2.45, 2.45])$. Symulacje wykonano, przyjmując $\mu = 0$.

Kolorami zaznaczono wartości maksymalne (**czerwony**) i minimalne (**niebieski**) dla obu rozwiązań.

algorytm	sigma	N	odchylenie f(x)	odchylenie b(x)
iteracyjny	$10 \cdot \Delta x$	10^3	0.018838	0.017391
iteracyjny	$10 \cdot \Delta x$	10^4	0.0059341	0.0055491
iteracyjny	$10 \cdot \Delta x$	10^5	0.0017809	0.0019801
iteracyjny	$20 \cdot \Delta x$	10^3	0.012237	0.013775
iteracyjny	$20 \cdot \Delta x$	10^4	0.0036419	0.0038784
iteracyjny	$20 \cdot \Delta x$	10^5	0.0014033	0.0012505
iteracyjny	$40 \cdot \Delta x$	10^3	0.0075944	0.010966
iteracyjny	$40 \cdot \Delta x$	10^4	0.002638	0.002678
iteracyjny	$40 \cdot \Delta x$	10^5	0.00076837	0.0008074
rekurencyjny	$10 \cdot \Delta x$	10^3	0.039263	0.036497
rekurencyjny	$10 \cdot \Delta x$	10^4	0.012953	0.010945
rekurencyjny	$10 \cdot \Delta x$	10^5	0.003805	0.0035849
rekurencyjny	$20 \cdot \Delta x$	10^3	0.02376	0.02748
rekurencyjny	$20 \cdot \Delta x$	10^4	0.0089225	0.0082752
rekurencyjny	$20 \cdot \Delta x$	10^5	0.0024524	0.0024557
rekurencyjny	$40 \cdot \Delta x$	10^3	0.016596	0.017372
rekurencyjny	$40 \cdot \Delta x$	10^4	0.0049695	0.0051075
rekurencyjny	$40 \cdot \Delta x$	10^5	0.0016917	0.0023851

Tablica 2.1: Wartości maksymalne różnic $|f_{MC} - f_{RK4}|$ oraz $|b_{MC} - b_{RK4}|$ dla środkowego fragmentu obszaru $[-2.45, 2.45]$.

Maksymalny błąd maleje wraz ze wzrostem N w tempie $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Algorytm rekurencyjny (3) używa innego generatora (dla $t = \infty$), natomiast algorytmy 1-2 generatora dla $t = t_{max}$. Z tego powodu średnia długość łańcucha w algorytmie 3 jest krótsza niż dla 1-2. Jak widać w wynikach, powoduje to dwukrotne zwiększenie błędu.

2.7 Analiza wydajności algorytmów MC i metody RK4.

W tej tabeli przedstawiono czas wykonania każdego algorytmu. Symulacje wykonano, przyjmując $\mu = 0$.

algorytm	sigma	N	czas działania
analityczny	(nie dotyczy)	(nie dotyczy)	0.000514 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$10 \cdot \Delta x$	10^3	1.5598 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$10 \cdot \Delta x$	10^4	13.801 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$10 \cdot \Delta x$	10^5	138.915 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$20 \cdot \Delta x$	10^3	1.2652 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$20 \cdot \Delta x$	10^4	12.6263 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$20 \cdot \Delta x$	10^5	126.81 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$40 \cdot \Delta x$	10^3	1.213 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$40 \cdot \Delta x$	10^4	12.632 s
Monte Carlo (iteracyjny)	$40 \cdot \Delta x$	10^5	121.826 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$10 \cdot \Delta x$	10^3	0.3268 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$10 \cdot \Delta x$	10^4	3.2702 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$10 \cdot \Delta x$	10^5	33.4058 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$20 \cdot \Delta x$	10^3	0.2904 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$20 \cdot \Delta x$	10^4	2.9051 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$20 \cdot \Delta x$	10^5	30.7024 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$40 \cdot \Delta x$	10^3	0.28601 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$40 \cdot \Delta x$	10^4	2.6722 s
Monte Carlo (rekurencyjny)	$40 \cdot \Delta x$	10^5	26.7239 s
Rungego-Kutty 4. rzędu	$10 \cdot \Delta x$	(nie dotyczy)	11.1565 s
Rungego-Kutty 4. rzędu	$20 \cdot \Delta x$	(nie dotyczy)	11.4916 s
Rungego-Kutty 4. rzędu	$40 \cdot \Delta x$	(nie dotyczy)	11.4938 s

Tablica 2.2: Wydajność algorytmów MC i RK4 dla równania z warunkiem początkowym.

Wnioski jakie można wysnuć, analizując dane w tabeli 2.2 są następujące:

- Zgodnie z oczekiwaniami, czas działania algorytmu MC rośnie wprost proporcjonalnie do parametru N .
- Rekurencyjny algorytm MC jest średnio 4 razy szybszy od iteracyjnego.
- Dla obranych parametrów wydajność algorytmu RK4 jest porównywalna do iteracyjnego MC ze średnią ilością iteracji ($N = 10^4$). Jednak zwiększenie rozmiaru układu wymusiłoby zwiększenie liczby węzłów w algorytmie RK4, aby zachować dokładność rozwiązania. Zwiększenie rozmiarów obszaru obliczeniowego wydłuży także czas działania metody MC, ponieważ wzrośnie średnia długość łańcuchów podczas cofania się na osi czasu od t_{max} do $t = 0$. Wzrost ten jednak może być znacząco mniejszy niż w przypadku RK4, gdzie mała odległość między węzłami jest wymagana przez wzgląd na ograniczenie błędu dyskretyzacji pochodnej przestrzennej.

Rozdział 3

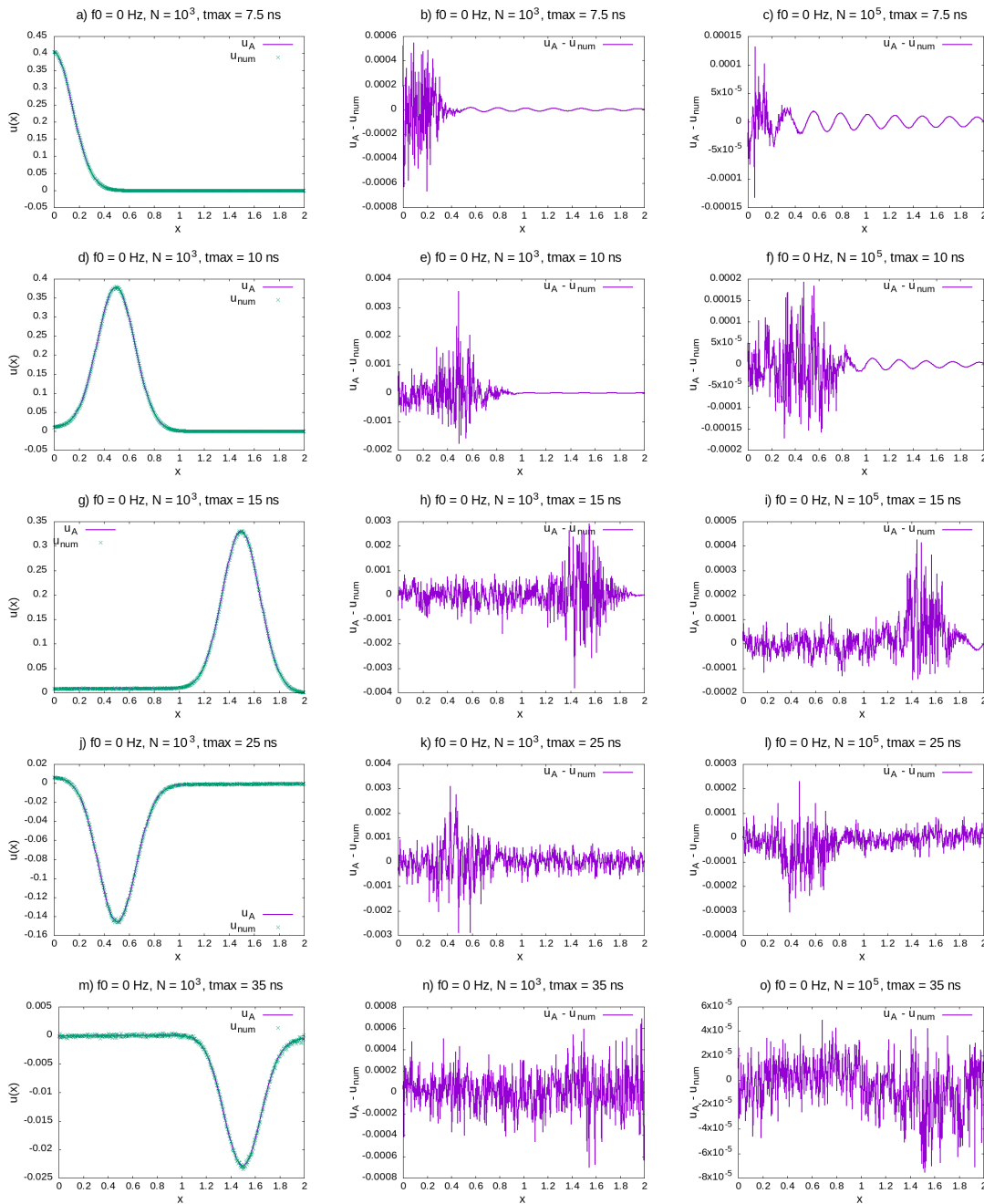
Równanie telegrafistów z warunkiem brzegowym.

Rozważany jest układ skończony przestrzennie. Konieczne jest uwzględnienie warunków brzegowych wynikających z prawa Kirchoffa. Równanie telegrafistów z warunkiem brzegowym rozwiązano numerycznie przy użyciu metody MC (algorytm 5). Dokładność rozwiązań określono poprzez porównanie z rozwiązaniem analitycznym (algorytm 4).

3.1 Parametry użyte w symulacjach.

Położenie maksimum sygnału $V_G(t)$	t_0	$7.5 \cdot 10^{-9}[s]$
Rozmycie sygnału źródłowego	σ_0	$0.75 \cdot 10^{-9}[s]$
Obszar symulacji	x	$[0, 2][m]$
Indukcyjność	L	$0.25 \cdot 10^{-6} \left[\frac{H}{m} \right]$
Pojemność	C	$100 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right]$
Opór układu	R	$12.5[\Omega]$
Konduktancja układu	G	$0.5 \cdot 10^{-3}[S]$
Opór źródła napięcia	R_{in}	$7.5[\Omega]$
Opór na wyjściu	R_{out}	$12.5[\Omega]$
Prędkość fali	c	$\frac{1}{\sqrt{LC}} \left[\frac{m}{s} \right]$
Odległość między węzłami siatki	Δx	$\frac{2 \cdot x_{max}}{10^4} = 4 \cdot 10^{-4}[m]$
Rozmycie funkcji gaussowskiej w algorytmie MC	σ	$20 \cdot \Delta x = 2 \cdot 10^{-3}[m]$
	λ	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)$

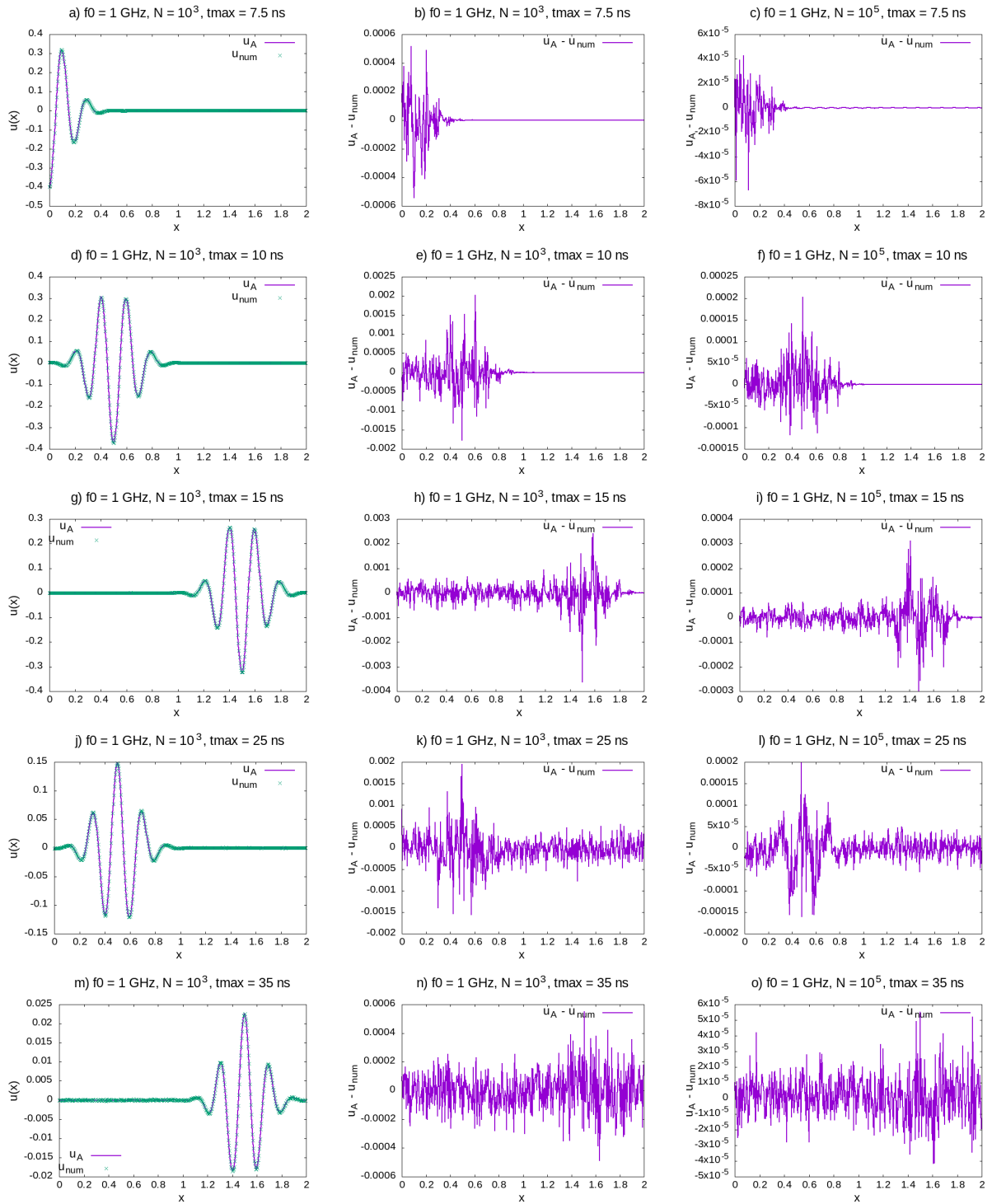
3.2 Porównanie wyników analitycznych i numerycznych (rekurencyjny algorytm MC).



Rysunek 3.1: Wyniki dla $f_0 = 0\text{ Hz}$. Wykres $u(x) = f(x) + b(x)$ dla $N = 10^3$ (kolumna 1), wykres błędu dla 10^3 i 10^5 (kolumny 2 i 3).

Mamy pik gaussowski, który przemieszczając się początkowo w prawo obniża swoją wysokość ze względu na dyssypację energii. Dla $t \approx 15\text{ ns}$ pakiet dociera do prawego brzegu i odbija się. Powoduje to dwa efekty: odwrócenie znaku pakietu (zmiana fazy) oraz dwukrotne zmniejszenie amplitudy odbicia (por. rysunki g oraz j). Na rysunkach a, d, g i j widać, że rozwiązanie dostarczane przez MC jest bardzo zbliżone do analitycznego. Ze względu na amplitudę sygnału, wielkość fluktuacji statystycznych jest praktycznie niedostrzegalna. Dopiero dla $t = 35\text{ ns}$, gdy amplituda stała się bardzo mała (poniżej 0.025), wpływ błędów na wynik staje się bardziej znaczący.

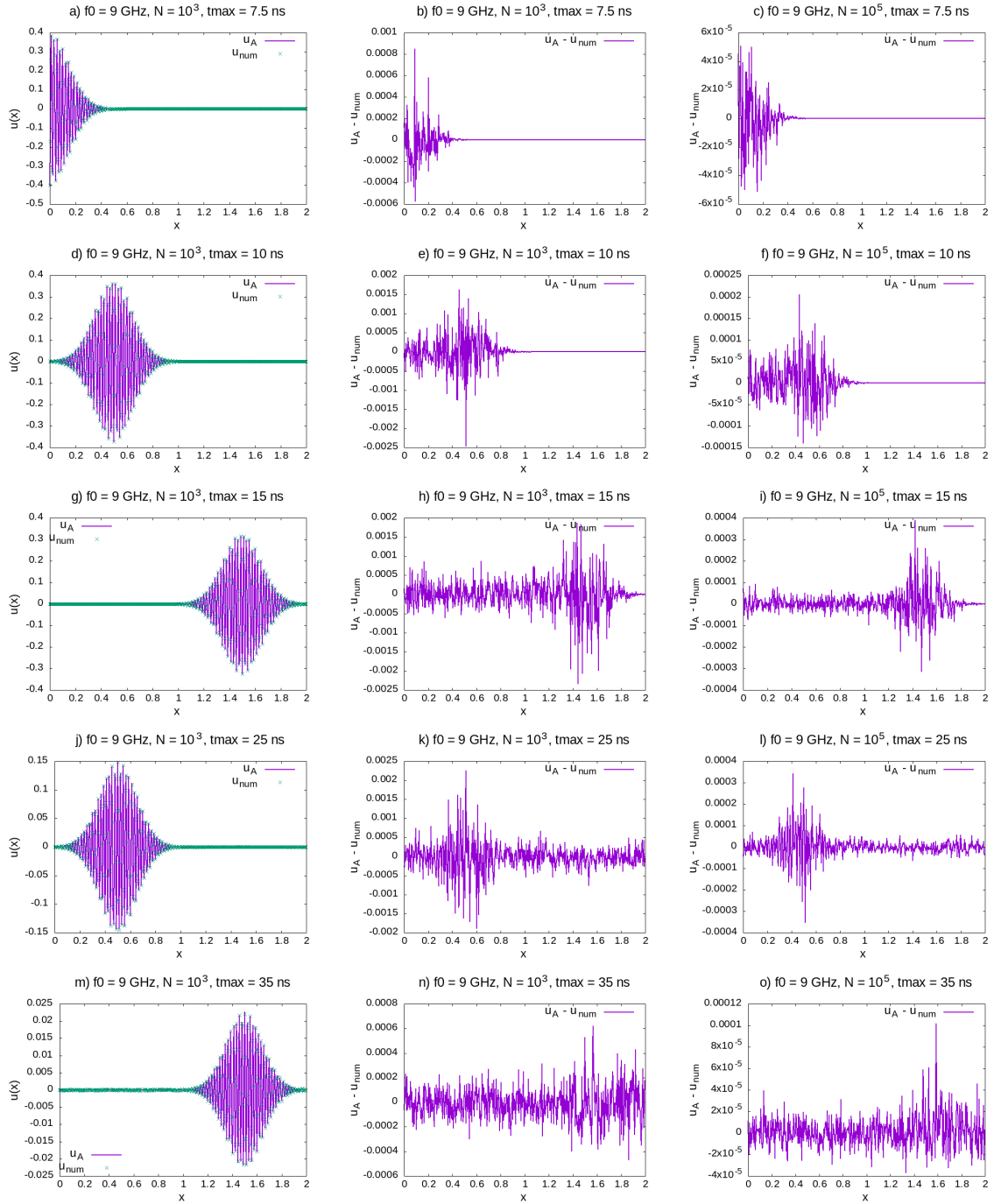
Zmiana ilości iteracji z 10^3 (druga kolumna) na 10^5 (trzecia kolumna) powoduje obniżenie amplitudy błędu o jeden rząd wielkości.



Rysunek 3.2: Wyniki dla $f_0 = 1\text{GHz}$. Wykres $u(x) = f(x) + b(x)$ dla $N = 10^3$, wykres błędów dla 10^3 i 10^5 .

Oprócz wyników z $f_0 = 0$ wykonano dodatkowe symulacje dla $f_0 = 1, 9$ i 27 GHz w celu sprawdzenia, czy dla sygnału wysokoczęstotliwościowego metoda MC równie dobrze odtworzy prawidłowe rozwiązanie. Na rysunku 3.2 przedstawiono wyniki dla $f_0 = 1\text{GHz}$.

Zgodność wyników MC i analitycznego dla wybranych chwil czasowych jest równie dobra jak poprzednio. Analizując błędy MC zauważamy, że wielkość błędów jest dwukrotnie większa w miejscach, w których rośnie również wielkość sygnału, nadając błędom lokalny oscylujący charakter. Dla dłuższych czasów ($t = 35\text{ns}$) oscylacyjny charakter błędów zdaje się zanikać, mimo że sygnał nadal zachowuje swój pierwotny kształt (rys. m).



Rysunek 3.3: Wyniki dla $f_0 = 9GHz$. Wykres $u(x) = f(x) + b(x)$ dla $N = 10^3$, wykres błędów dla 10^3 i 10^5 .

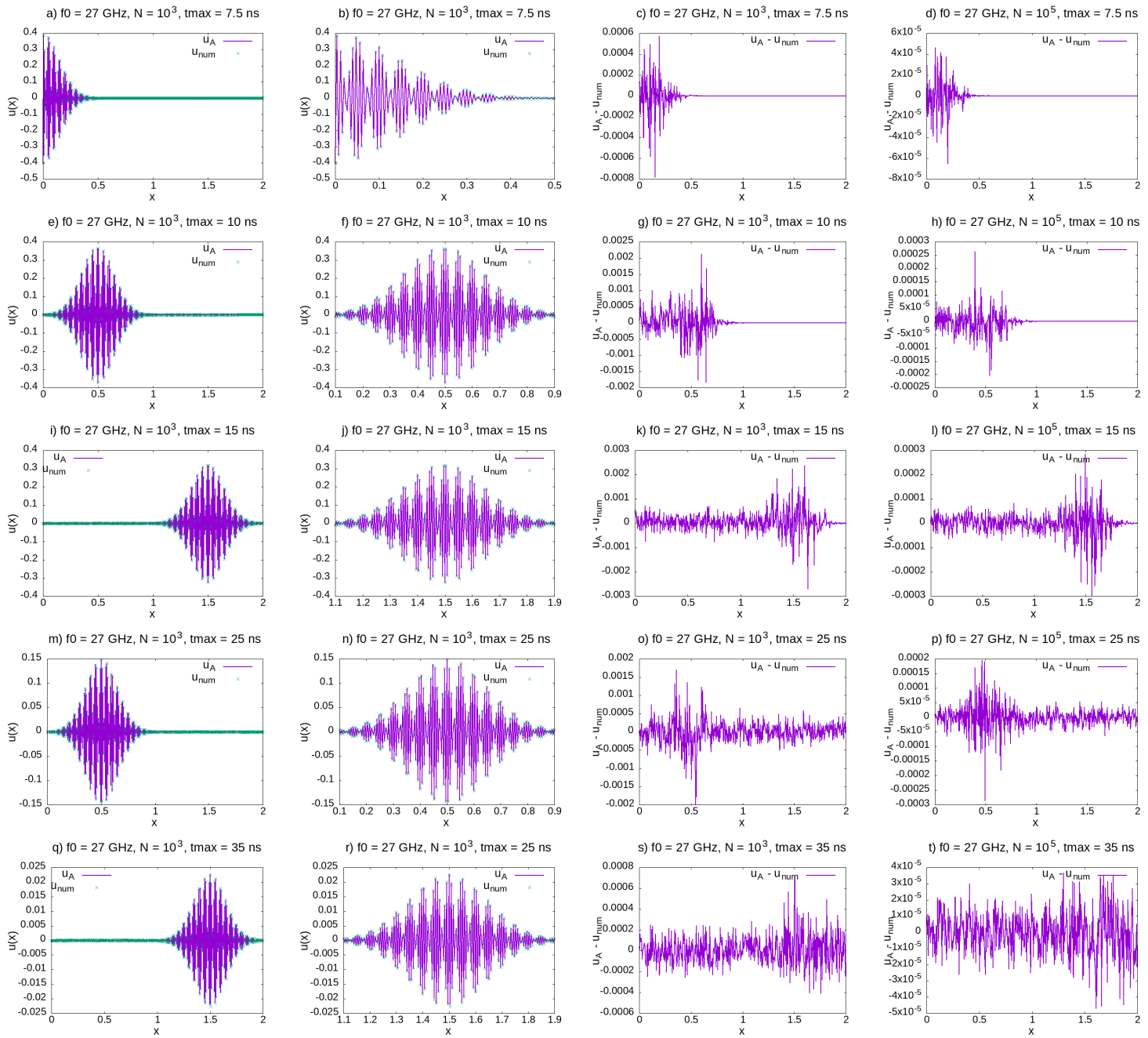
Dla $f_0 = 9$ i $27GHz$ konieczne stało się zwiększenie parametru n_ω podczas całkowania w rozwiązaniu analitycznym do wartości 10000.

Wynika to z faktu, że dla $f_0 > 0$ transformata sygnału V_G w przestrzeni częstotliwości ω posiada dwa maksima położone symetrycznie względem $\omega = 0$, które ze zwiększaniem f_0 oddalają się od 0.

Dla $f_0 = 9GHz$ bezpośrednie porównanie wyników MC i analitycznych staje się problematyczne z uwagi na szybkozmienne oscylacje przestrzenne (por. rysunki a, d, g, j, m).

Jedyne co można zaobserwować, że obwiednia obejmująca dolną i górną część rozwiązania MC zawiera w sobie rozwiązanie analityczne. W tym przypadku błędy rozwiązania MC stają się bardzo przydatne. Okazuje się, że zwiększenie częstotliwości nie wpływa w znaczący sposób na błąd.

W porównaniu do dwóch poprzednich przypadków ($f_0 = 0, 1GHz$) widoczne stają się pewne istotne różnice. Dla krótkiego czasu symulacji ($t = 7.5ns$) błędy dla $N = 10^3$ i $N = 10^5$ są zbliżone. Ponadto, widoczna jest korelacja przestrzenna błędów z aktualnym rozwiązaniem. W miejscach, w których rozwiązanie oscyluje, błędy także mają charakter oscylacyjny. Dla kolejnych chwil czasowych zauważamy, że błąd dla $N = 10^3$ rośnie do wartości maksymalnej (około 0.003), podczas gdy dla $N = 10^5$ maleje od 0.0008 do 0.0002.



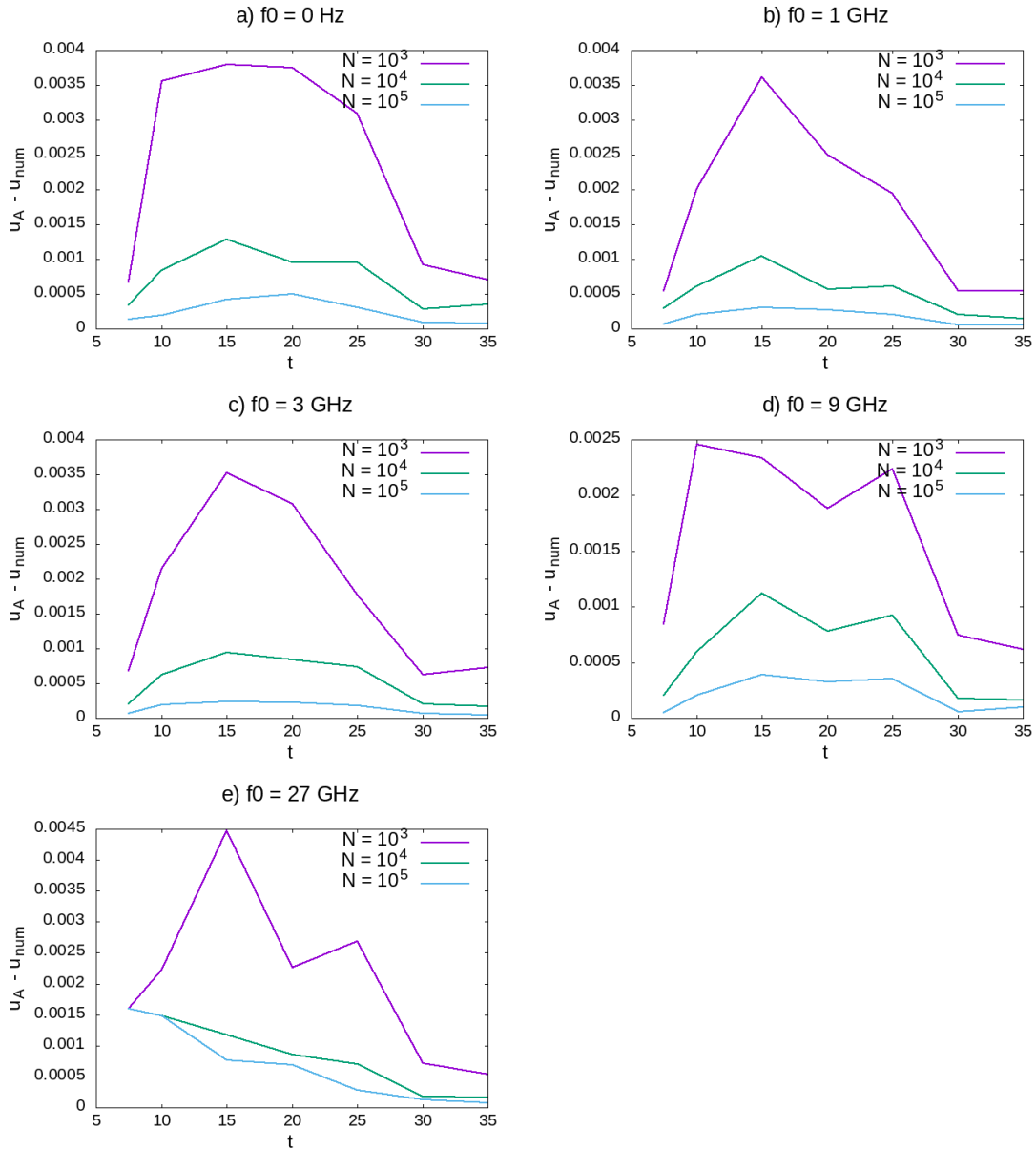
Rysunek 3.4: Wyniki dla $f_0 = 27\text{GHz}$. Wykres $u(x) = f(x) + b(x)$ dla $N = 10^3$ (w całym przedziale x oraz w obszarze oscylacji). Wykres błędu dla $N = 10^3$ i $N = 10^5$.

Dla tak dużych oscylacji obserwacja sygnału jest praktycznie niemożliwa. Z tego powodu w drugiej kolumnie pokazano przybliżenie na ten fragment obszaru, w którym znajduje się pakiet.

Wszelkie obserwacje z poprzedniego przypadku ($f_0 = 9\text{GHz}$) mają zastosowanie również dla $f_0 = 27\text{GHz}$.

3.3 Analiza ilościowa rozwiązań.

Na kolejnych wykresach przedstawiono analizę porównawczą maksymalnej wielkości błędów dla $N = 10^3, 10^4, 10^5$ oraz $f_0 = 0, 1, 3, 9, 27GHz$.



Rysunek 3.5: Największe odchylenia od wartości analitycznych dla danych wartości N i f_0 w danej chwili t .

Zwiększenie liczby iteracji nie zmienia położenia ekstremów, ale znacząco spłaszcza wykres, efektywnie polepszając jakość rozwiązań. Ponadto, w początkowym etapie symulacji błąd zmienia się w trzech etapach, niezależnie od wartości f_0 :

- Dla $t < 10ns$ rozwiązanie MC daje względnie mały błąd, pomimo dużej amplitudy właściwego rozwiązania.
- Pomędzy 10ns a 30 ns mimo że amplituda rozwiązania maleje ze względu na straty energii (opór linii), to błąd zachowuje się inaczej. Początkowo narasta, po czym maleje, osiągając maksimum w środku.
- Dla $t > 30ns$ amplituda sygnału staje się na tyle mała, że wymusza zmniejszenie wartości bezwzględnej amplitudy błędu.

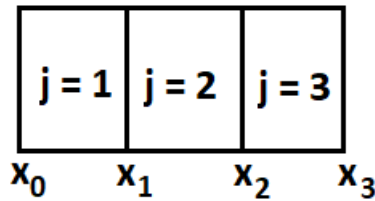
Jakość rozwiązania (dokładność) uzyskiwanego przy pomocy MC wydaje się niezależna od częstotliwości. Jest to cenną zaletą, gdyż nadaje tej metodzie wymiar uniwersalności. Gdyby użyta została metoda RK4, potrzebne by było odtworzenie silnych oscylacji przestrzennych poprzez dobór małych kroków na siatce przestrzennej (Δx). Takie postępowanie byłoby problematyczne w przypadku linii znacznie dłuższych, niż rozpatrywana w niniejszej pracy.

Rozdział 4

Równanie telegrafistów w układzie o zmiennej charakterystyce przestrzennej parametrów linii

Rozpatrywany jest układ skończony, w którym wyróżnione są trzy podobszary różniące się parametrem L (indukcyjnością). Wpływa to na prędkość rozchodzenia się zaburzenia, więc przejście przez granice sąsiednich obszarów będzie się wiązać z częściowym odbiciem.

Tę zmianę należy wprowadzić do modelu jako dodatkowy, wewnętrzny warunek brzegowy.



Rysunek 4.1: Części obszaru symulacji.

W każdym z podobszarów określamy parametry linii (indukcyjność L_j , pojemność \mathbb{C}_j , opór $R_{0,j}$ oraz konduktancję G_j). Określamy wielkości zależne:

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{L_j \cdot \mathbb{C}_j}}, \quad (4.1)$$

$$\mu_j = \frac{G_j}{\mathbb{C}_j}, \quad (4.2)$$

$$\lambda_j = \frac{1}{2} \left(\frac{R_j}{L_j} - \frac{G_j}{\mathbb{C}_j} \right), \quad (4.3)$$

$$R_{0,j} = \sqrt{\frac{L_j}{\mathbb{C}_j}}. \quad (4.4)$$

4.1 Parametry użyte w symulacjach.

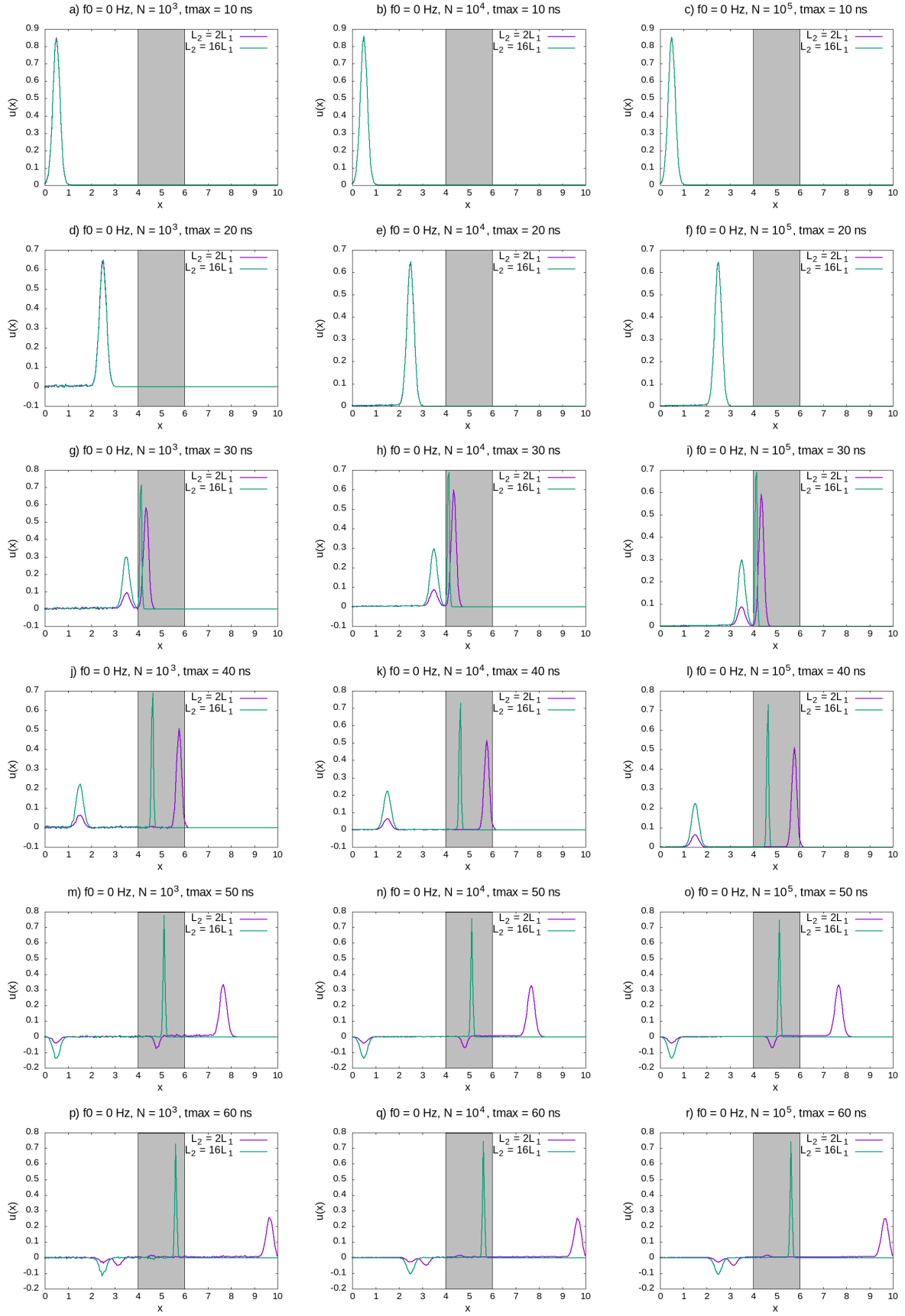
Obszar symulacji	$x \in [0, 10][m]$
Granice podobszarów	$x_0 = 0, x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 10$
Chwila czasowa na początku symulacji	$t_0 = 7.5 \cdot 10^{-9}[s]$
Rozmycie sygnału źródłowego	$\sigma_0 = 0.75 \cdot 10^{-9}[s]$
Indukcyjność w niezmiennych częściach obszaru	$L_1 = L_3 = 0.25 \cdot 10^{-6} [\frac{H}{m}]$
Pojemność w częściach obszaru	$C_1 = C_2 = C_3 = 100 \cdot 10^{-12} [\frac{F}{m}]$
Opór w częściach obszaru	$R_1 = R_2 = R_3 = 12.5[\Omega]$
Konduktancja w częściach obszaru	$G_1 = G_2 = G_3 = 0.5 \cdot 10^{-3}[S]$
Opór źródła napięcia	$R_{in} = 5[\Omega]$
Opór na wyjściu	$R_{out} = 10[\Omega]$
Wsp. uwzgl. opór wewn. źródła napięcia i opór wejściowy układu	$\xi = \frac{R_{0,1}}{R_{0,1}+R_{in}}$
Strata energii na oporze wejściowym	$\Gamma_{in} = \frac{R_{in}-R_{0,1}}{R_{in}+R_{0,1}}$
Strata energii na oporze wyjściowym	$\Gamma_{out} = \frac{R_{out}-R_{0,3}}{R_{out}+R_{0,3}}$

Równanie zostało rozwiązane wyłącznie przy użyciu rekurencyjnego algorytmu MC.

Dla układu, w którym następuje zmiana parametrów linii (w tym przypadku indukcyjności), bardzo trudno jest skonstruować rozwiązanie analityczne. Dlatego, wykorzystując analizę poprzednich rozwiązań MC, można stwierdzić, że daje ono dobre przybliżenie równania telegrafistów dla dużych wartości N .

Nie mając do dyspozycji rozwiązania analitycznego, test zbieżności bazować będzie na stabilizacji rozwiązania przy wzrastającym N . Jeśli dla dwóch dużych N wyniki nie różnią się od siebie (w granicach błędów statystycznych), możemy uznać, że otrzymane rozwiązanie jest bliskie dokładnemu.

4.2 Wyniki MC dla $f_0 = 0$ i $f_0 = 3GHz$.

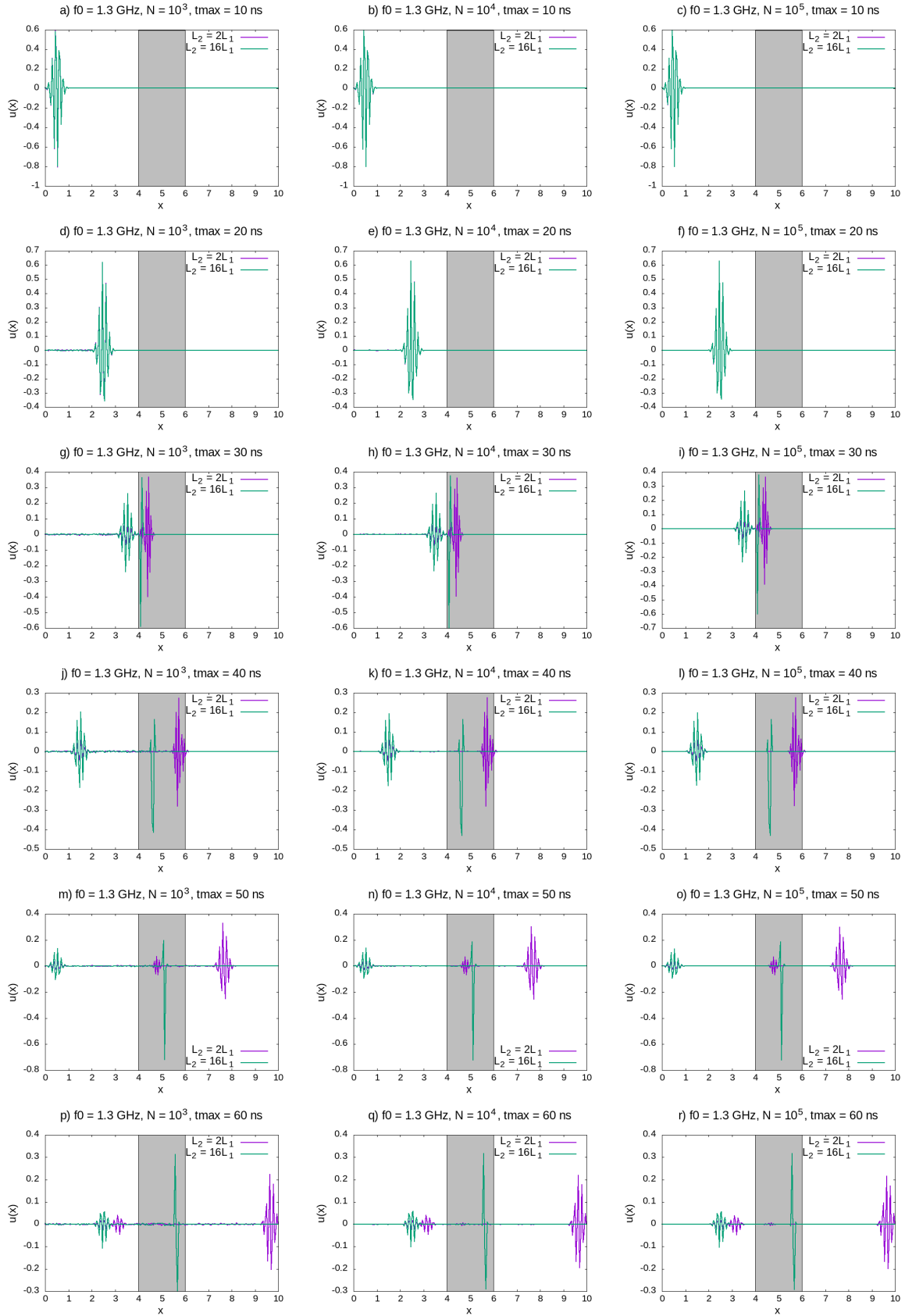


Rysunek 4.2: Wyniki dla $f_0 = 0$ oraz dwóch wartości L_2 : $L_2 = 2 \cdot L_1$ oraz $L_2 = 16 \cdot L_1$.

W skali pokazanej na rysunku, wpływ błędów na wyniki dla $N = 10^4$ i $N = 10^5$ jest minimalny. Z kolei dla $N = 10^3$ widoczne są wyraźne fluktuacje w obszarze, przez który przemieściło się rozwiązanie. W lewej części wykresów widać szum w obszarze, w którym amplituda sygnału jest bliska zeru. Pomimo to, można uznać, że rozwiązanie dla $N = 10^3$ również stanowi dobre przybliżenie rozwiązania dokładnego.

Na granicy obszarów 1 i 2. następuje skokowa zmiana indukcyjności. Powoduje to zmianę prędkości rozchodzenia się sygnału w obszarze 2. To sprawia, że owa granica stanowi swego rodzaju *barierę* dla sygnału: sygnał, przechodząc do obszaru 2., zwalnia. Doganiająca go pozostała część interferuje z czołem fali i odbija się wstecz. Skutek odbicia na granicy tych obszarów widać na rysunkach g, h, i. Dla $L_2 = 16 \cdot L_1$ tylko niewielka część pakietu przechodzi do obszaru drugiego. Następuje tam kompresja fali i wzrost amplitudy funkcji f . Sygnał odbity ma większe rozmycie przestrzenne i mniejszą amplitudę, odbija się też bez zmiany fazy. Gdy różnica między L_1 a L_2 wynosi tylko 2 (zielona krzywa), różnica prędkości pomiędzy obszarami wynosi $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$. Odbicie jest o wiele słabsze, a większa część pakietu dochodzi do obszaru 2. i propaguje się dalej.

Na granicy tych dwóch obszarów dochodzi również do częściowego odbicia od barier i zachodzi zmiana fazy (fioletowa krzywa na rys. m, n, o.). Pakiet dla $L_2 = 16 \cdot L_1$ porusza się w drugim obszarze czterokrotnie wolniej, więc nawet dla $t = 60ns$ sygnał nie dociera do granicy obszarów 2. i 3. Nie widać odbicia wstecznego (rys. p, q, r).



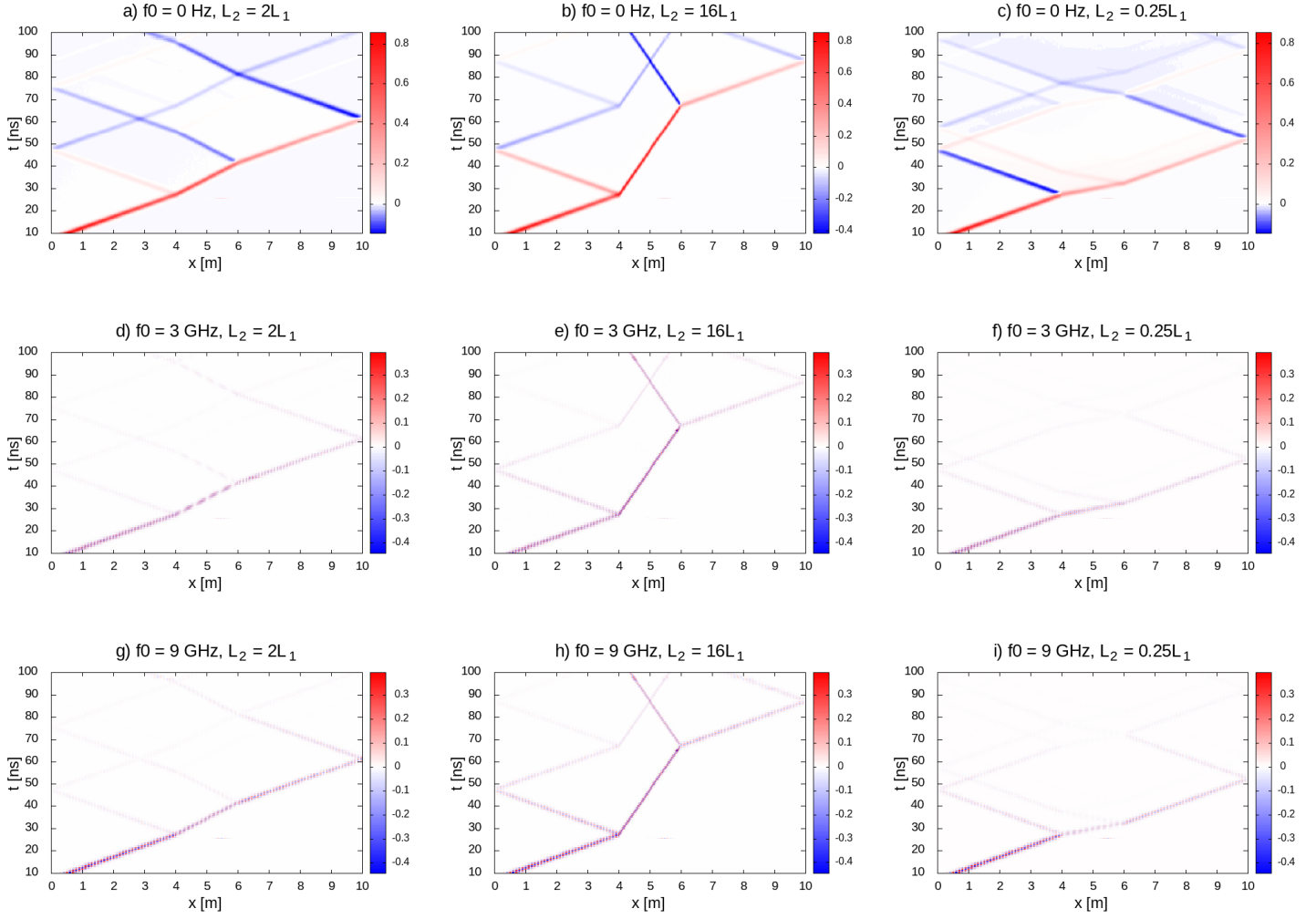
Rysunek 4.3: Wyniki dla $f_0 = 1.3\text{GHz}$ oraz dwóch wartości L_2 : $L_2 = 2 \cdot L_1$ oraz $L_2 = 16 \cdot L_1$.

W obszarze 1. pakiety poruszają się w obu przypadkach identycznie (z tą samą prędkością). Rozdzielają się dopiero na granicy obszarów 1. i 2.

Dla $L_2 = 2 \cdot L_1$ znaczna część pakietu przechodzi do obszaru drugiego, a dla $L_2 = 16 \cdot L_1$ - znaczna część pakietu ulega odbiciu.

Sytuacja jest podobna jak dla $f_0 = 0$. Dalsza ewolucja oscylującego pakietu jest bardzo podobna, lecz odbicia od brzegów zachodzące ze zmianą fazy są mniej zauważalne, ze względu na przestrzenną skalę rysunków.

Aby lepiej unaocznic zmiany jakościowe w sposobie rozchodzenia się zaburzenia w linii z przestrzennymi zmianami wartości jej parametrów, wykonano mapy $u(x,t)$ dla $L_2 = \frac{1}{4}, 2, 16 \cdot L_1$. en Prezentowane mapy



Rysunek 4.4: Wyniki dla $N = 10^5$. Kolorem zaznaczono wartość u .

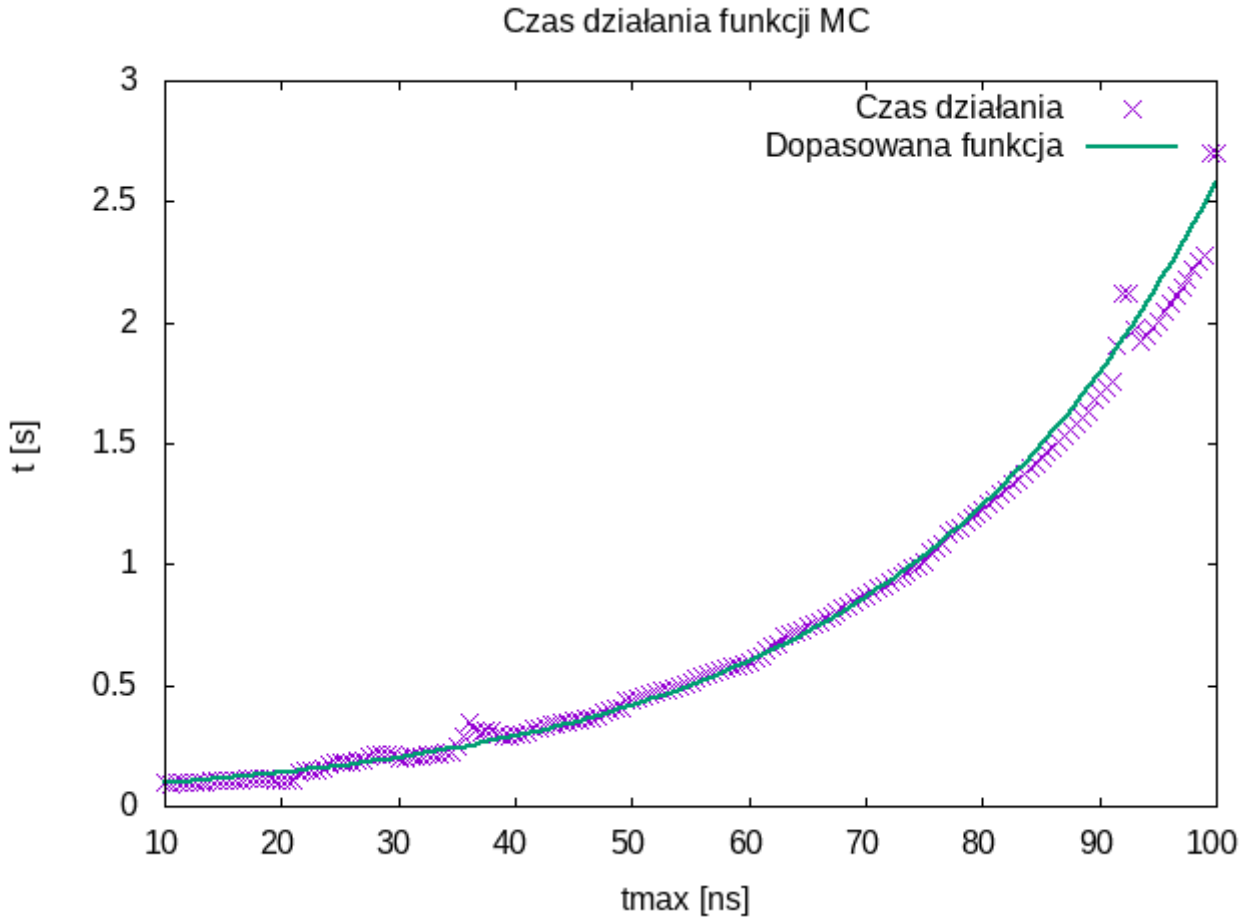
składają się z odcinków prostych. Nachylenie każdego odcinka jest odwrotnością prędkości w danym obszarze. Porównując rysunki a, b, c widać, że nachylenie jest najmniejsze dla $L_2 = \frac{1}{4} \cdot L_1$, a największe dla $L_2 = 16 \cdot L_1$. Ponieważ kolor linii określa jej znak (czerwony - dodatni, niebieski - ujemny), widać że dla $L_2 > L_1$ odbicie od granicy obszarów 1. i 2. następuje bez zmiany fazy (kolor czerwony przed i po odbiciu). Z kolei dla $L_2 = \frac{1}{4} \cdot L_1$, odbicie na granicy 1. - 2. zachodzi ze zmianą fazy (zmiana koloru z czerwonego na niebieski).

Sytuacja ulega odwróceniu na granicy 2. - 3. Tam dla $L_2 > L_3$ (rys. a i b) odbicie zachodzi ze zmianą fazy, a dla $L_2 < L_3$ (rys. c) - bez zmiany. Ze względu na stratny (silnie dyssypatywny) charakter rozważanej linii przesyłowej, intensywność linii symbolizującej amplitudę staje się coraz słabsza. Z tego powodu kolorystyka górnej części rysunków jest dużo mniej nasycona.

Wykresy d, e, f pokazują analogiczne wyniki dla $f_0 = 3GHz$, a g, h, i - dla $f_0 = 9GHz$. Wzory utworzone przez krzyżujące się linie są identyczne jak dla $f_0 = 0$, natomiast mniejsza jest ich intensywność. To wynika z nakładania się kolorów niebieskiego i czerwonego, wynikającego z silnych oscylacji przestrzennych.

4.3 Analiza wydajności algorytmu MC.

W tej tabeli przedstawiono czas działania jednego przejścia algorytmu dla każdego t_{max} . W każdym przypadku $x = 5m$, $N = 10^5$, $f_0 = 0Hz$, $L_2 = 2L_1$.



Rysunek 4.5: Czas wykonania symulacji (w sekundach) w funkcji maksymalnego czasu ewolucji czasowej (w nanosekundach).

Czas działania zależy od chwili czasowej t_{max} i rośnie wraz z nią. Wydajność algorytmu MC maleje w tempie eksponencjalnym (dopasowano funkcję $y = 6.7 \cdot 10^{-2} \cdot e^{x \cdot 3.65 \cdot 10^7}$).

Jest to zachowanie oczekiwane, ponieważ algorytmy zatrzymują się, gdy $t < 0$. W każdym przejściu algorytmu dokonywane jest odejmowanie $t - S$, gdzie S jest wygenerowaną zmienną losową. Im t jest mniejsze, tym łańcuchy Markowa są krótsze (większe prawdopodobieństwo, że w wyniku odejmowania otrzymamy liczbę ujemną).

Podsumowanie

W niniejszej pracy rozwiązano równanie telegrafistów (zarówno z samym warunkiem początkowym, jak i z warunkiem brzegowym). Poprawność wyników sprawdzono, rozwiązując problem analitycznie (gdy było to możliwe) oraz metodą Rungego-Kutty 4. rzędu. Analiza powyższych wyników potwierdza użyteczność metody Monte Carlo. Zgadza się one z teoretycznymi z dokładnością do fluktuacji statystycznych, charakterystycznych dla metod stochastycznych. Metoda MC działa niezależnie od przyjętych parametrów (nie ma ograniczenia $\mu = 0$ charakterystycznego dla rozwiązania analitycznego), a jej wydajność nie spada znacznie wraz z wzrostem długości linii (co jest wadą metody RK4).

Dodatkową zaletą jest możliwość ustalania stosunku jakości do wydajności, dobierając odpowiednio liczbę iteracji w algorytmach. Gdy zależy nam na dokładności rozwiązania, należy zwiększyć parametr N . Jeśli ważniejszy jest czas, należy zmniejszyć liczbę iteracji kosztem dokładności.

Cel pracy postawiony na początku (przeanalizowanie działania zmodyfikowanego algorytmu MC) można uznać za osiągnięty. Algorytm ten, bazujący na krzyżowej rekurencji, działa poprawnie. Jego prosta konstrukcja pozwala w łatwy sposób go modyfikować.

Wszystkie obliczenia i implementacje algorytmów przeprowadzono w języku C . Do rysowania wykresów i map posłużył program *Gnuplot*.

Bibliografia

- [1] T. Chwiej, “Całkowanie metodą Monte Carlo.” http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/mc_1819.pdf (dostęp 04.01.2021).
- [2] M. A. R. Juan A. Acebrón, “A Monte-Carlo method for solving the one-dimensional telegraph equations with boundary conditions,” *Journal of Computational Physics*, vol. 305, pp. 29–43, 2016.
- [3] J. S. Liu, *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing (rozdział 1. Introduction and Examples)*. Springer, 2004.
- [4] A. J. Schwab, *Field theory concepts (rozdział 7. Transmission line equations)*. Springer, 1988.
- [5] E. Orsingher, “Probability law, flow function, maximum distribution of wave-governed random motions and their connections with Kirchoff’s laws,” 1987.