Analiză 12 Curs

Teorema funcțiilor implicite Fie $\Delta = \Delta^{\circ} \subset \mathbb{R}^{n+m}$,

$f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1

($\exists$ f' pe Δ și f' este continuă) și $(a, b) \in \Delta$

$(a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m)$ a.î. $f(a, b) = 0$ și $\frac{\partial f}{\partial x}(a, x)$ să fie inversabilă

Atunci $\exists$ $\Delta_1 = \Delta_1^{\circ} \subset \mathbb{R}^n$ și $\Delta_2 = \Delta_2^{\circ} \subset \mathbb{R}^m$ a.î. $(a, b) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \subset \Delta$ și

să $(\exists)$ $\varphi : \Delta_2 \to \Delta_1$ a.î. $f(\varphi(y), y) = 0$. În plus $\varphi \in C^1$

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^2 + y^2 = 25$

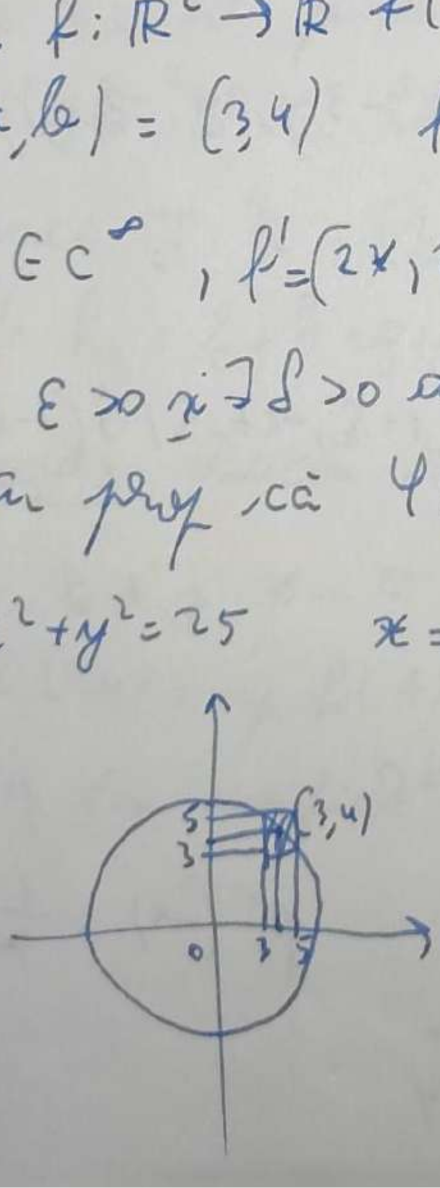
$(a, b) = (3, 4)$ $\quad f(3, 4) = 9 + 16 - 25 = 0$

$f \in C^{\infty}$, $f' = (2x, 2y)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) = 6 \neq 0 \Rightarrow$

$\exists$ $\varepsilon > 0$ și $\exists$ $\delta > 0$ a.î. $(\exists)$ $\varphi : (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon) \to (3 - \delta, 3 + \delta)$

cu prop. că $\varphi(y)^2 + y^2 = 25$

$x^2 + y^2 = 25$ $\quad x = \pm\sqrt{25 - y^2}$ $\quad \varphi_{\pm} : [-5, 5] \to \mathbb{R}$



$\varphi_{+}(y) = \sqrt{25 - y^2}$

$\varphi_{-}(y) = \sqrt{25 - y^2}$

Ex

$x = \varphi(y)$ $\quad \varphi^2(y) + y^2 = 25$

$2\varphi(y)\ \varphi'(y) + 2y = 0 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ $\quad \varphi(b) = a$

$\varphi'(y) = -\frac{y}{\varphi(y)}$ $\quad \varphi'(4) = -\frac{4}{3}$

$\varphi''(y) = \dfrac{\varphi(y) - y\varphi'(y)}{\varphi^2(y)}$

$\varphi''(4) = -\dfrac{13 - 4\left(-\frac{4}{3}\right)}{3^2}$ $\quad \varphi(4) = 3$

$\varphi'(4) = -\frac{4}{3}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3$ $\quad f(-1, 1) = 3$

$f(1, -1) = 1 - 1 + 3 = 3$

1) $f \in C^\infty$ $\quad$ 2) $f'(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, -1) = 6 \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ şi $\exists\, \delta > 0$ ai $(\exists!)\ \varphi : (1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon) \to (1 - \delta, 1 + \delta)$

ai $f(x, \varphi(x)) = 0$ $\quad \varphi \in C^1$

$x^3 + \varphi^3(x) - 3x\varphi(x) - 3 = 0$

$3x^2 + 3\varphi'(x) \cdot \varphi^2(x) - 3x\varphi'(x) = 0$

$x^2 + \varphi'(x)(\varphi^2(x) - (x)) = 0$ $\quad \varphi'(-1) = \frac{1}{2}$

$\varphi'(x) = \dfrac{-x^2}{\varphi(x) - x} = \dfrac{x^2}{x - \varphi^2(x)}$

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} \neq 0$$

Teorema Multiplicator Lagrange

(T.M.L)

Fie $D = D^\circ \subset \mathbb{R}^{n+m}$; $f : D \to \mathbb{R} \in C^1$, g $D = D^\circ \Rightarrow \mathbb{R}^m$ a.î.

$g \in C^1$ și $a \in D$

care să fie punct de extrem local pentru f pe

$A = \{ g(x) = 0 \}$ și rang $g'(a) = m$

Atunci $\exists\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ a.î. $h'_\lambda(a) = 0$

unde $h_\lambda = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$

metoda 1 Dacă A este închisă și mărginită

$\exists\ x_M \in A$ și $x_m \in A$ a.î.

$f(x_M) = \sup f(A) = \max f(A)$ și $f(x_m) = \inf f(A)$

x_M, x_m verifică $h'_\lambda(x_M) = 0$ și $h'_\lambda(x_m) = 0$

Metoda 2 $h_\eta = f + \eta_1 g_1 + \dots + \eta_m g_m$. Dacă h_η are un punct de extrem local pe $A \to h_\eta = f$ $\Rightarrow f$ are un punct de extrem local

$A = \{g(x) = 0\}$

Metoda 3 $\qquad n+m$

$d^2 h_\eta$ ..... forma pătratică

$dg(a) = 0$

Metoda 3 $\quad g(x,y) = 0 \;,\; y = \varphi(x)$ T.F.I

$t(x) = f(x, \varphi(x))$

Ex Extremele funcției $f(x,y) = x^3 + 2y^3$ pe $\{x^2 + y^2 = 1\}$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Ipoteza 1) $f, g \in C^\infty$

2) $g' = (2x, 2y)$

$g' = 0 \Rightarrow x = y = 0 \notin A$

$\Downarrow$ rang $g' = 0$

3) (x_0, y_0) este punct de extrem local funcției pe A

$\Rightarrow \exists\, \eta \in \mathbb{R}$ ai $h_\eta'(x_0, y_0) = 0$

unde $h_\eta = f + \eta g$

$h_\eta = x^3 + 2y^3 + \eta(x^2 + y^2 - 1)$

PAS i $\frac{\partial h_n}{\partial x} = 3x^2 + \eta 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2\eta}{3} \end{cases}$

$\frac{\partial h_n}{\partial y} = 6y^2 + \eta 2y = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{2\eta}{6} \end{cases}$

$x^2 + y^2 = 1$

C_1 $x = y = 0 \notin A$

C_2 $x = 0$; $y = \pm 1$

C_3 $y = 0$; $x = \pm 1$

C_4 $\frac{4\eta^2}{9} + \frac{4\eta^2}{36} = 1$, $4\eta^2\left(\frac{36+9}{36}\right) = 1$

$h_n = x^3 + 2y^3 + \eta(x^2 + y^2 - 1)$

$C_4)$ $\eta = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$ $x = \mp\frac{2}{\sqrt{15}}$ $y = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$

$f\left(\mp\frac{2}{\sqrt{5}}, \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \mp\left(\frac{8}{5\sqrt{5}} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\right) = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$

h1) $A = \{x^2 + y^2 = 1\} \Rightarrow |x| \leq 1, |y| \leq 1 \Rightarrow A$ este mărginită

$A = g^{-1}(\{0\})$ este închisă

f este continuă

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (x_M, y_M)$ a.i. $f(x_M, y_M) = \sup f(A)$

$\exists (x_m, y_m)$ a.i. $f(x_m, y_m) = \inf f(A)$

$(0, 1)$ - maxim global

$(0, -1)$ - minim global

(M2) $h''_{\eta} = \begin{pmatrix} 6x+2h & 0 \\ 0 & 12y+2h \end{pmatrix}$

<u>CAZ 3</u> $x = \pm 1 \quad 3 \pm 2\eta = 0 \quad \eta = \mp \frac{3}{2}$

$$h_{-\frac{3}{2}}(1,0) = \begin{pmatrix} 6-3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ punct şa}$$

$$h_{\pm\frac{3}{\sqrt{5}}}\left(\mp\frac{2}{\sqrt{5}}, \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \begin{pmatrix} \mp\frac{12}{\sqrt{5}} \pm \frac{6}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \mp\frac{12}{\sqrt{5}} \pm \frac{6}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
maxim local

$$= \begin{pmatrix} \mp\frac{6}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \mp\frac{6}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
minim local