Recapitulare
Curs 14 Analiză

Serii

Ex 1 $\sum_{n\geq 1} x^n \frac{a(a+2)\dots(a+n)}{(n+4)!}$; $x>0$; $a>0$

crt raport
crt radic
după
crt raportului
crt R.H.

Crt Raportului

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{x^{n}}\, x}{\cancel{x^n}} \cdot \frac{\cancel{a(a+2)\dots(a+2n)}(a+2n+2)}{\cancel{a(a+2)\dots(a+2n)}} \cdot \frac{\cancel{(n+4)!}}{\cancel{(n+4)!}(n+5)} = x \cdot \frac{a+2n+2}{n+5} \to 2x$$

(I) Dacă $2x>1$ $(x>\frac{1}{2})$ s. divergentă — div 1

(II) Dacă $2x<\frac{1}{2}$ $(x<\frac{1}{2})$ s. convergentă — con 2

(III) $x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{a(a+2)\dots(a+2n)}{2^n\,(n+4)!}$

Crt R.H

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{2(n+5)}{a+2n+2}-1\right) = n\left(\frac{8-a}{a+2n+2}\right) \to \frac{8-a}{2}$$

$\frac{8-a}{2}>1 \Leftrightarrow 6>a$ s. convergentă — invers con 1

$\frac{8-a}{2}<1 \Leftrightarrow 6<a$ s. divergentă — div 2

$$a=6 \quad \sum_{n\geq 1} \frac{6\cdot 8\cdot\dots\cdot(6+2n)}{2^n\,(n+4)!} = \sum_{n\geq 1} \frac{6\cdot 8\cdot\dots\cdot(6+2n)}{(2n+8)!!} =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\cdot 4\,(2n+8)} \text{ divergentă} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

Convergență divergentă — (simplă) (uniformă)

Ex 2 Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^4 n^5}{x^{10}+n^{10}}$ c.s și c.u (c = convergență)

c.s $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^4 n^5}{x^{10}+n^{10}}=0=f$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ f(x)=0 \Rightarrow \boxed{f_n \xrightarrow{s} f}$ $\boxed{f_n \text{ converge simplu la } f}$

c.u $a_n=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|$ $(a_n\to 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{u} f)$

$$a_n=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in\mathbb{R}}f_n(x)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{x^4\cdot n^5}{x^{10}+n^{10}}$$

$$f_n'(x)=\frac{4x^3\cdot n^5\,(x^{10}+n^{10})-x^4\cdot n^5\,(10x^9+n^{10})}{(x^{10}+n^{10})^2}=$$

$$=\frac{-6x^{13}n^5+4x^3n^{15}}{(x^{10}+n^{10})^2}=\frac{2x^3n^5(-3x^{10}+2n^{10})}{(x^{10}+n^{10})^2}=0$$

$x=0$ 3 soluții

$2n^{10}=3x^{10}\Rightarrow x=\boxed{\pm n\cdot\sqrt[10]{\frac{2}{3}}=x}$

$x_1=+n\sqrt[10]{\frac{2}{3}}\ ;\ x_2=-n\sqrt[10]{\frac{2}{3}}$

x^3	- - - x_2 - - 0 + + + x_1 + + +
$-3x^{10}+2n^{10}$	- - 0 + + + + + 0 - - - -
f'	+ + 0 - - - - 0 + + + 0 - - - -

x	$-\infty$		$-n\sqrt[10]{\frac{2}{3}}$		0		$n\sqrt[10]{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
f_n'		$+ + + + +$	0	$- - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - - - -$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$a_n = f_n\left(n\sqrt[10]{\tfrac{2}{3}}\right) = \frac{n^4\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot n^5}{\frac{2}{3}n^{10} + n^{10}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$$

$\boxed{\text{fn converge uniform la f}}$

serii de funcții

Ex 3 $s(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \sin nx \quad \in C^2 (C^\infty)$

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1}{2^n} \sin nx$

T1 Fie $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue a.î. $s(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ să fie uniform convergentă. Atunci s este continuă

T2 Fie $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile a.î. ① $s(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ să fie convergentă și ② $s_1(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ să fie uniform convergentă

; Atunci $s' = s_1$

Def $\sum_{n\geq 1} f_n$: $\exists\, a_n$ a.î. ① $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x$ și ② $\sum_{n\geq 1} a_n < +\infty \Rightarrow$; Atunci $\sum_{n\geq 1} f_n$ s.n. normal conv. $(\Rightarrow)$ uniform conv.

$$\left| f_n(x) \right| = \left| \frac{1}{2^n} \sin nx \right| \le \frac{1}{2^n}$$

$\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} < +\infty \Rightarrow s$ este normal conv. | $\overset{+1}{\Rightarrow}$ s. este. cont.

f_n. continuă |

$\boxed{\text{tot Ex 3}}$

$$s_1(x) = \sum_{n \geq 1} f_n'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} \cos x$$

$$|f_n'(x)| \le \frac{n}{2^n} \qquad \underbrace{\sum \frac{n}{2^n}}_{\substack{\parallel \\ a_n}} < +\infty \quad i \Leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{\cancel{2^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \to$$

$\to \frac{1}{2} < 1$

s este normal conv

s_1 ——— || ——— $\Rightarrow s' = s_1$

$$s_k(x) = \sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^k}{2^n} \sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| \le \frac{n^k}{2^n} \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{n^k}{2^n} < +\infty \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \to \frac{1}{2} \right)$$

$\Rightarrow s_k$ este normal convergentă $\forall k \geq 0 \Rightarrow s_k' = s_{k+1}$ $\forall k \Rightarrow s^{k} = s_k$

$$\left| s_1^{(k)} \right| \le \sum_{n \geq 1} \frac{n^k}{2^n} \le C_1 \, k! \, n^k$$

derivabilitatea și continuitatea

Ex 5

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{Q} \cup (3,4) \\ x^2 & \text{rest} \end{cases}$

$A = \mathbb{Q} \cup (3,4) \qquad A' = \mathbb{R} \qquad A^\circ = (3,4)$

$B = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup (3,4)) \quad B' = \mathbb{R} \setminus (3,4) = (-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$

$B^\circ = \emptyset$

$f|_{A^\circ = (3,4)} = x^4 \Rightarrow f$ continuă și derivabilă pe $(3,4)$

mulțime deschisă

$a \in \mathbb{R} \setminus (3,4) \Rightarrow a \in A' \cap B'$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x^4 = a^4$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

$f(a) \in \{a^2, a^4\}$

f este continuă în $a \Leftrightarrow$

$a^2 = a^4 \Leftrightarrow a \in \{-1, 0, 1\}$

$a \in \mathbb{R} \setminus ((3,4) \cup \{-1,0,1\}) \Rightarrow$

f este deriv. în $a \Rightarrow \nexists f'(a)$

$a \in \{-1, 0, 1\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x \to a} 4x^3 = 4a^3$

$; \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x \to a} 2x = 2a$

f este derivabilă în $a \iff 4a^3 = 2a \iff a \in \{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

$a \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow a = 0$ - derivabilă

$a = \pm 1 \Rightarrow$ nu este derivabilă

<u>Ex 6</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6 y^5}{x^{10}+y^{10}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

(a) cont. lui f în $(0,0)$

(b) $\exists$ + cont $\frac{\partial f}{\partial x}$

(c) derivabilitatea în $(0,0)$

(a) cont în $(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y = ax}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^6 \cdot a^5 x^5}{x^{10}+a^{10}x^{10}} = \lim_{x\to 0} x \frac{a^5}{1+a^{10}} = 0$$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x^6 y^5|}{x^{10}+y^{10}} = \left|\frac{x^5 y^5}{x^{10}+y^{10}}\right| |x| \le \frac{1}{2}|x| \to 0$$

$(x^{10}+y^{10} \geq 2|x^5y^5|)$ metoda mai simplă în acest caz

$$\left|\frac{x^6 y^5}{x^{10}+y^{10}}\right| \le \left|\frac{x^{10}}{x^{10}+y^{10}}\right|^{\frac{6}{10}} \cdot \left(\frac{y^{10}}{x^{10}+y^{10}}\right)^{\frac{5}{10}} (x^{10}+y^{10})^{\frac{6}{10}+\frac{5}{10}-1} \le$$

$$\le (x^{10}+y^{10})^{\frac{1}{10}} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$ metoda generală

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{6x^5y^5(x^{10}+y^{10}) - x^6y^5 10x^9}{(x^{10}+y^{10})^2} = \frac{-4x^{15}y^5 + 6x^5y^{15}}{(x^{10}+y^{10})^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=0}} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{-6x^{15}a^5x^5 + 4x^5a^{15}x^{15}}{(x^{10}+a^{10}x^{10})^2} =$

I $y = ax$ sau

$x_n = y_n = \frac{1}{n}$ II

(de obicei I)

$= \frac{-6a^5 + 4a^{15}}{(1+a^{10})^2}$ => nu este continuă în $(0,0)$

(c) f este derivabilă în $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a.î.

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - T(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$T(x,y) = ax + by \quad a = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$b = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \Rightarrow T = 0$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^6y^5}{(x^{10}+y^{10})\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6 a^5 x^5}{(x^{10}+a^{10}x^{10}) \cdot x\sqrt{1+a^2}}$

$$= \frac{a^5}{1+a^{10}} \Rightarrow \nexists\, f'(0,0)$$

3 cazuri ca să fie mai greu

3 variabile

(1, 0) punctul

$x^{10} + y^{20}$ (nu puteri egale) $y = a\sqrt{x}$ $x = a y^2$

$x = a\, y^{\frac{20}{10}}$

Ex 7 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

PAS 1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = -y & y = -x^2 \\ y^2 = -x & x^4 = -x \quad x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

I $x = y = 0$

II $x = y = -1$

PAS 2

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix} \quad f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f''(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Este matricea pozitivă?

Metoda 1

Δ_1 Δ_2 ...... Δ_n

\+ minim

\+ + ... maxim

\- + ...

altceva s.a $\Delta_k = 0 \; \forall k$

PAS 3

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = -9$

$\Delta_1 = -6$

$\Delta_2 = 36 - 9 = 27$

Metoda 2 Valori proprii

$\lambda_1 > 0 \dots \lambda_n > 0$ minim

$\lambda_1 < 0 \dots \lambda_n < 0$ maxim

$\vdots$

$\lambda_1 > 0 \; \lambda_2 > 0 \dots$ şa

în problemă $\lambda_1 \lambda_2 = 9$ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$\Rightarrow$ şa

$$f'' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad d f^2 = a(dx)^2 + 2b\,dx\,dy + c(dy)^2$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Să se determine extremele locale ale funcţiei

$f(x,y) = xy$ pe $A = \{x^2 + y^2 \le 1\}$

$g(x,y) = x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow A = g^{-1}([0,1]) \Rightarrow A$ închisă

A este mărginită $\Leftrightarrow |x| \le 1$ şi $|y| \le 1$

f continuă $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ are puncte de maxim

şi minim global pe A

(x_0, y_0) punct de extrem global pentru f pe A

1) $(x_0, y_0) \in A^\circ = B(0,1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 < 1$ (extrem local pt f)

2) $(x_0, y_0) \in \partial B(0,1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 1$ (extrem cu legătură)

$\boxed{T.M.L}$

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$ $\Rightarrow x = y = 0$

$f'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = 0$ $\Delta_2 = -1$

$\Rightarrow$ punct șa

e_2) T.M.L ① $f, g \in C^1$ $(\in C^\infty)$

② rang $g' =$ max rang $g' = 1$ $g' = (y \; x)$

pt rang $g' > 0 \Rightarrow$

$x = y = 0 \notin A$ ③ (x_0, y_0) este un punct de extrem pentru f pe A

$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $h'_\alpha(x_0, y_0) = 0$ $h_\alpha = f + \alpha g = xy + \alpha(x^2 + y^2 - 1)$

PAS1

$\frac{\partial h_\alpha}{\partial x} = y + 2\alpha x = 0$

$\frac{\partial h_\alpha}{\partial y} = x + 2\alpha y = 0$

$x^2 + y^2 = 1$

1) $x = y = 0 \notin A$

2) $\begin{vmatrix} 2\alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha \end{vmatrix} = 0$

$(2\alpha)^2 = 1$

$2\alpha = \pm 1$

$2\lambda = 1$ $x + y = 0$ $x = -y$ / $2x^2 = 1$

$x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\lambda = -1$

$x - y = 0$ / $x = y$; $2x^2 = 1$; $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

C_1 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

C_2 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

PAS 2 $B = \text{Fr} A$ Metoda topologică

$x = y = 1 \Rightarrow x = y = -1$ maxim

$x = 1;\ y = -1 \,\|\, x = -1;\ y = 1$ minim

Metoda 2 h_α

$$h''_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

$\alpha > 0$ minim

$\alpha < 0$ maxim

$h_\alpha = f$ pe A