Compunerea oscilaţiilor armonice paralele – Fenomemul de bătăi

Considerăm că un punct oscilează sub acţiunea simultană a două oscilaţii armonice paralele

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \text{cu } \alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/2], \tag{1}$$

Aplicând principiul superpoziţiei, putem scrie că oscilaţia rezultantă este suma

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \tag{2}$$

Amplitudinea rezultantă se poate obţine prin adunare fazorială (vezi Fig. 1). Oscilaţia rezultantă, $x(t)$, este dată de proiecţia vectorului $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ pe axa x (conform ec. (1)); s-a notat $A_1 = |\mathbf{A}_1|$, $A_2 = |\mathbf{A}_2|$.

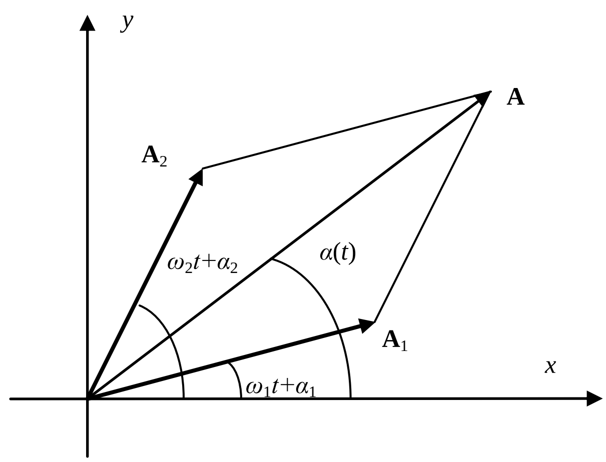


Fig. 1 Compunere fazorială a două oscilaţii paralele.

Fazorul rezultant are amplitudinea

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \alpha_1 - \alpha_2]}, \tag{3}$$

lent variabilă în timp dacă $\omega_1 \approx \omega_2$. $A(t)$ variază între valorile minimă şi maximă,

$$|A_1 - A_2| \leq A(t) \leq A_1 + A_2. \tag{4}$$

Se observă că

$$A(t) = A(t + T_b), \tag{5}$$

unde,

$$T_b = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega'_b} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad . \tag{6}$$

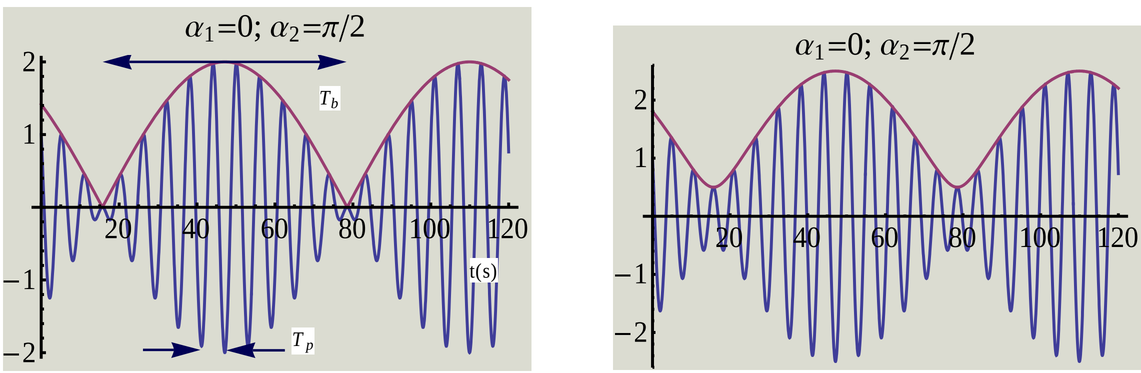
Fenomenul de variaţie a amplitudinii oscilaţiei rezultante este cunoscut sub numele de *bătăi*. Intervalul de timp dintre două momente la care amplitudinea este (de exemplu) minimă defineşte *perioada bătăii,* T_b. Faza oscilaţiei rezultante se poate obţine geometric din Fig. 1, observând că,

$$\alpha(t) = \arccos\frac{A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)}{A(t)} \qquad (7)$$

Astfel, oscilaţia rezultantă se scrie

$$x(t) = x_1(t)+x_2(t) = A(t)\cos[\alpha(t)]. \qquad (8)$$

Simularea bătăilor este reprezentată in Fig. 2, unde sunt reprezentate grafic $x(t)$ şi $A(t)$ pentru cazul $\omega_2 \approx \omega_1$.



a) b)

Fig. 2 Compunerea oscilaţiilor paralele. $x(t)$ - albastru şi $A(t)$ - violet pentru $\omega_1 = 1s^{-1}$, $\omega_2 = 1.1s^{-1}$ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$ şi: a) $A_1 = 1$, $A_2 = 1$; b) $A_1 = 1$, $A_2 = 1.5$. Semnalul modulator (violet) se obtine cu ec. (3) iar intregul semnal (albastru) cu ec. (8). Pentru cazul a), graficul se poate obtine deasemeni cu ec. (9) sau cu ec. (11) si (12) utilizand $x(t) = A(t)\cos[\alpha(t)]$.

Discuţie

Caz a) $A_1 = A_2 = A$ <=> oscilaţii armonice paralele cu *amplitudini egale*. Aplicând principiul superpoziţiei putem scrie că oscilaţia rezultantă este suma

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t)+x_2(t) = A\left[\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\right] \\ &= 2A\cos\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]\cos\left[\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right], \qquad (9) \\ &= 2A\cos\left[\omega'_b t+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]\cos\left[\omega_p t+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right] \end{aligned}$$

unde,

$$\omega'_b = (\omega_1-\omega_2)/2;\ \omega_p = (\omega_1+\omega_2)/2. \qquad (10)$$

Ecuaţia (9) arată că oscilaţia rezultantă este o oscilaţie 'purtătoare' de frecvenţă ω_p 'modulată' de un semnal cu frecvenţă unghiulară (mică) ω'_b.

Observaţie a)

Cu ec. (3) putem regăsi rezultatul din ec. (9), observând că,

$$A(t)=\sqrt{2}A\sqrt{1+\cos\left[\left(\omega_1-\omega_2\right)t+\alpha_1-\alpha_2\right]}=2A\left|\cos\left[\frac{\left(\omega_1-\omega_2\right)t}{2}+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]\right|,\quad(11)$$
$$=2A\left|\cos\left[\omega'_b t+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]\right|$$

şi că în ec. (7)

$$\cos\alpha(t)=\frac{A\cos\left(\omega_1 t+\alpha_1\right)+A\cos\left(\omega_2 t+\alpha_2\right)}{A(t)}$$
$$=\frac{2A\cos\left[\frac{\left(\omega_1-\omega_2\right)t}{2}+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]\cos\left[\frac{\left(\omega_1+\omega_2\right)t}{2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]}{2A\left|\cos\left[\frac{\left(\omega_1-\omega_2\right)t}{2}+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]\right|}\quad(12)$$

Folosind ec. (11) si (12), ec. (8) genereaza ec. (9).

Conform ec. (10) (vezi şi Fig. 2), perioada oscilaţiei purtătoare este

$$T_p=\frac{2\pi}{\omega_p}=\frac{4\pi}{\omega_2+\omega_1}\ .\quad(13)$$

Numărul de oscilaţii efectuate în perioada bătăilor este

$$N=\frac{T_b}{T_p}\ \Rightarrow\ N=\frac{\nu_1+\nu_2}{2\left|\nu_1-\nu_2\right|},\quad(14)$$

unde $\nu=\omega/(2\pi)$ este frecvenţa.

Caz b) $\omega_1=\omega_2=\omega$ <=> oscilaţii armonice paralele cu *frecvenţe unghiulare egale*. In acest caz amplitudinea oscilatiei este constanta, egala cu (vezi ec. (3))

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right)}\quad(15)$$

si paralelogramul din Fig. 1 se roteste cu viteza unghiulara constanta ω. Faza initiala α_0 este exprimata (vezi ec. (7)) prin

$$\cos\alpha=\frac{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}{A}\quad(16)$$

sau similar

$$\tan\alpha=\frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}\ .\quad(17)$$

Observaţie b)

Se poate arata ca utilizand ec. (7) adaptată acestui caz,

$$\cos[\alpha(t)]=\frac{A_1\cos\left(\omega t+\alpha_1\right)+A_2\cos\left(\omega t+\alpha_2\right)}{A}\quad(18)$$

se obţine

$$\cos[\alpha(t)] = \cos\left(\omega t + \arctan\frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}\right) \quad , \tag{19}$$

ceea ce conduce la concluzia că unghiul vectorului **A** cu axa *x* creste in timp dupa legea

$$\alpha(t) = \omega t + \arctan\left[\frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}\right]. \tag{20}$$

Ecuatia (19) se poate obtine astfel. Cu ec. (18) rezulta

$$\begin{aligned}\cos[\alpha(t)] &= \frac{A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)}{A} \\ &= \cos\omega t \, \frac{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}{A} - \sin\omega t \, \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A} \\ &= \cos\omega t \cos\alpha - \sin\omega t \sin\alpha = \cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

daca $\cos\alpha = \dfrac{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}{A}$ si $\sin\alpha = \dfrac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A}$, ceea ce este echivalent cu $\alpha = \arctan\dfrac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}$.
