II. ① $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $f(x) = (x_2+x_3, ax_1+x_3, x_1+x_2)$, $a \in \mathbb{R}$

a) $A = [f]_{R_0,R_0} = ?$. Este f inj / resp. surj ?

b) Pt $a=-1$ precizați câte un reper în Ker f, resp. Im f

c) Pt $a=1$ aflați valorile proprii și justificați dacă A este diagonalizabilă

d) Aflați A^{-1}, utilizând Th. Hamilton-Cayley, pt $a=1$.

② $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $U_1 = \left\{x\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}\right\}$

a) Aflați un reper în U_1

b) Dați un exemplu de subspațiu complementar U_2 (i.e $\mathbb{R}^3=U_1\oplus U_2$)

c) Fie $p_i, s_i: \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ proiecțiile pe U_i, resp. simetriile față de U_i, $i=\overline{1,2}$

Calculați $p_2\circ s_1(1,0,1)$

③ $(\mathbb{R}_1[X],+,\cdot)/\mathbb{R}$, $R_0=\{1,X\}$ reperul canonic

$R'=\{e_1'=1+X, e_2'=X\}$.

a) Arătați că R' este reper și aflați C, $R_0 \xrightarrow{C} R'$

b) Fie $f\in End(\mathbb{R}_1[X])$ și $[f]_{R',R'} = \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

Aflați $f(P)$, $\forall P\in\mathbb{R}_1[X]$, $P = a+bX$, $a,b\in\mathbb{R}$

I. ① $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $R_0=\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$ reperul canonic.

$R'=\{e_1'=(1,-2), e_2'=(0,1)\}$

a) Dem că R' e reper și aflați C, $R_0\xrightarrow{C}R'$

b) Fie $f\in End(\mathbb{R}^2)$, $f(x) = (2x_1+x_2, x_1+x_2)$

Aflați $[f]_{R',R'}$

② $(\mathbb{R}_2[X],+,\cdot)/\mathbb{R}$, $S=\{1-X+X^2, X+2X^2, -1+2X+X^2\}\subset \mathbb{R}_2[X]$

a) Extrageți S' un SLI maximal al lui S.

b) Fie $U_1=\langle S'\rangle$. Precizați un subspațiu complementar U_2 (i.e. $\mathbb{R}_2[X]=U_1\oplus U_2$)

c) Fie $p_i,s_i:\mathbb{R}_2[X]\longrightarrow\mathbb{R}_2[X]$ proiecțiile pe U_i, resp simetriile față de U_i, $i=\overline{1,2}$

Calculați $p_1\circ s_2(1+X)$

③ Fie $f\in End(\mathbb{R}^3)$, $f(x)=(x_2, x_1+ax_2+x_3, x_2)$, $a\in\mathbb{R}$.

a) $A=[f]_{R_0,R_0}=?$. Este f inj / resp surj?

b) Precizați câte un reper în Ker f, resp. Im f

c) Pentru $a=1$ aflați valorile proprii și justificați dacă A este diagonalizabilă.

d) Determinați $f(V')$, unde $V'=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}\right\}$