$$\ldots + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = \frac{x_3^2}{h^2} + \frac{(x_3-h)^2}{h^2} - \frac{2x_3(x_3-h)}{h^2}\cos\theta - \left(\frac{x_3-(x_3-h)}{h}\right)^2$$

$$= \frac{2x_3(x_3-h)}{h^2}\underbrace{(1-\cos\theta)}_{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 4\frac{x_3(x_3-h)}{h^2}\sin^2\frac{\theta}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{4}{h^2}\left[\left(x_3-\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{4}\right]\sin^2\frac{\theta}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{\left(x_3-\frac{h}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}h^2}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2} \underbrace{-1+\sin^2\frac{\theta}{2}}_{-\cos^2\frac{\theta}{2}} = 0.$$

$$\frac{x_1^2}{a^2\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{x_2^2}{b^2\cos^2\frac{\theta}{2}} - \frac{\left(x_3-\frac{h}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}h^2\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}} - 1 = 0$$

1) $\cos\frac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pi$

E, D sunt diametral opuse. $\sin\frac{\theta}{2} = 1$.

Orig $\Omega\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{\frac{1}{4}h^2} = 0$ con cu vf în Ω.

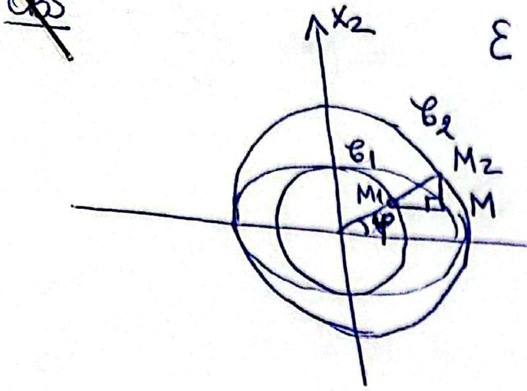
2) $\theta = 0$ $E = D$ coincid $HE \perp Ox_1x_2$ cilindru.

3) $\theta \neq 0, \theta \neq \pi \Rightarrow$ hiperboloid cu o pânză.

$c^2(1-e^2)$ $(a>0,\ b>0)$. toate punctele hiperbolei. nonicul

~~OBS~~

$\mathcal{E}: \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1$



$\mathcal{C}_1(0,b)$

$\mathcal{C}_2(0,a)$

$M_1(b\cos\varphi, b\sin\varphi)$

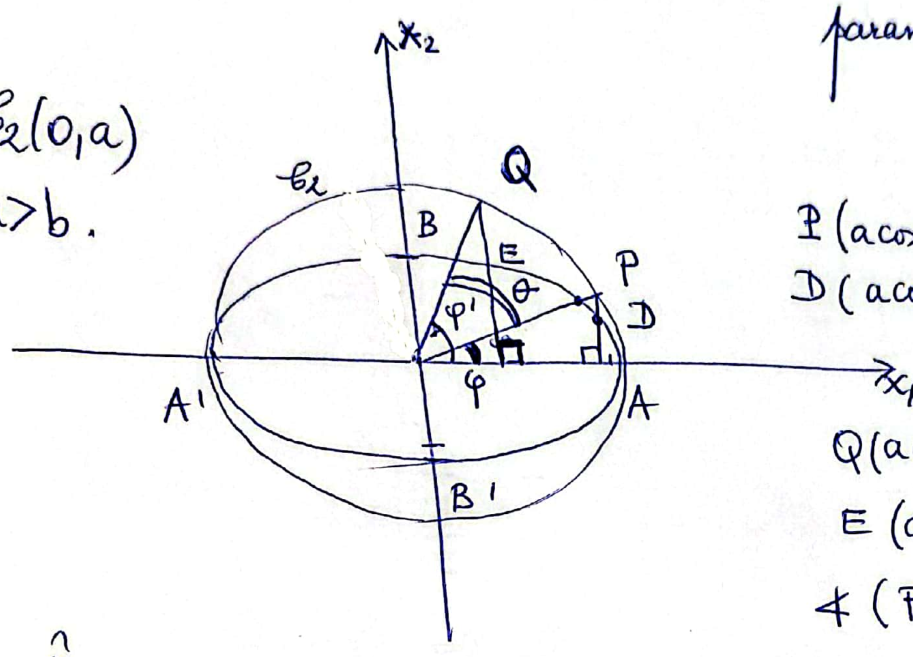
$M_2(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$

$M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)\in\mathcal{E}$

parametrizare.

$\mathcal{C}_2(0,a)$

$a>b$.



$P(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$

$D(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$

$Q(a\cos\varphi', a\sin\varphi')$

$E(a\cos\varphi', b\sin\varphi')$

$\sphericalangle(POQ)=\sphericalangle\theta=\varphi'-\varphi$

În sp. $E(a\cos\varphi', b\sin\varphi', 0)$, $D(a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$

H $\perp$ în D pe x_1Ox_2: $H(a\cos\varphi, a\sin\varphi, h)$

$$EH: \frac{x_1-a\cos\varphi}{a\cos\varphi'-a\cos\varphi}=\frac{x_2-a\sin\varphi}{b\sin\varphi'-b\sin\varphi}=\frac{x_3-h}{0-h}$$

$$x_1-a\cos\varphi=\frac{x_3-h}{-h}(a\cos\varphi'-a\cos\varphi)$$

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{a}=-\dfrac{(x_3-h)}{h}\cos\varphi'+\dfrac{x_3-h}{h}\cos\varphi+\cos\varphi=\dfrac{x_3}{h}\cos\varphi-\dfrac{x_3-h}{h}\cos\varphi'\\[2ex] \dfrac{x_2}{b}=\dfrac{x_3}{h}\sin\varphi-\dfrac{x_3-h}{h}\sin\varphi'\end{cases}$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{x_2}{b}\right)^2=\left(\frac{x_3}{h}\right)^2+\left(\frac{x_3-h}{h}\right)^2-2\cdot\frac{x_3}{h}\cdot\frac{x_3-h}{h}\overbrace{(\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi')}^{\cos\theta\ =\ \cos(\varphi'-\varphi)}$$

$$=\frac{x_3^2}{h^2}+\frac{(x_3-h)^2}{h^2}-2\,\frac{x_3(x_3-h)}{h^2}\cos\theta.$$

Scanat cu CamScanner

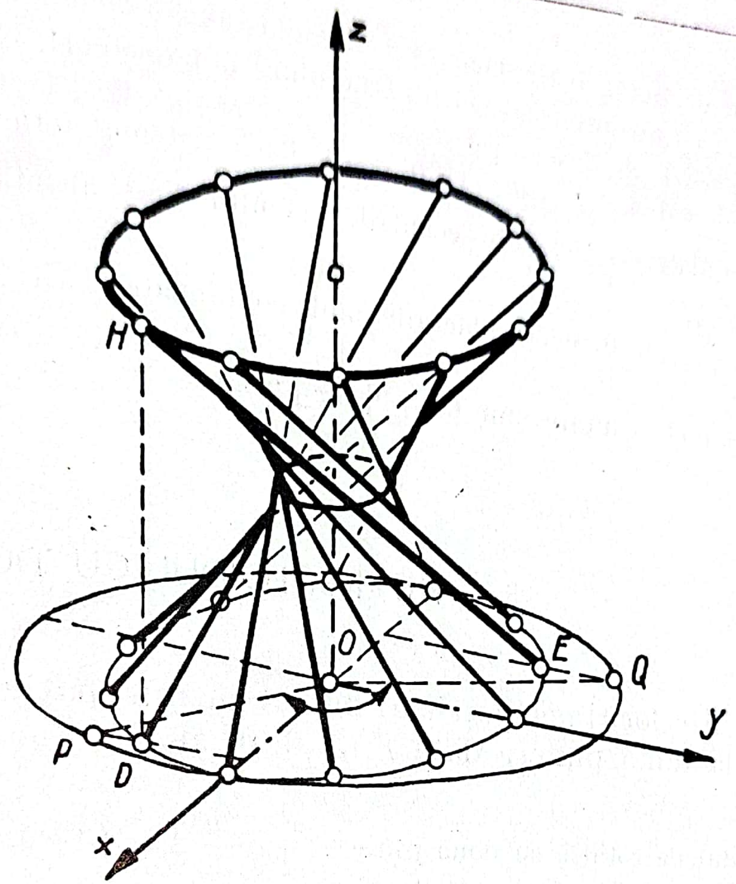


Fig. 15. 6.

R. Avem (fig. 6; s-a luat $a=3$, $b=2$, $h=4$, $POQ=150°$) $D(a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$, $E(a\cos\varphi', b\sin\varphi', 0)$, iar $H(a\cos\varphi, b\sin\varphi, h)$. Dreapta EH are ecuațiile $\frac{x}{a}=\frac{z}{h}\cos\varphi-\frac{z-h}{h}\cos\varphi'$, $\frac{y}{a}=\frac{z}{h}\sin\varphi-\frac{z-h}{h}\sin\varphi'$. Ridicînd la pătrat și adunîndu-le, obținem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{4z(z-h)}{h^2}\sin^2\frac{\theta}{2}-1=0$, $(\theta=\varphi-\varphi')$.

Dacă se ia originea în punctul $\Omega\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$, această ecuație devine $\frac{x^2}{a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}+\frac{y^2}{b^2\cos^2\frac{\theta}{2}}-\frac{z^2}{\frac{1}{4}h^2\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}}-1=0$, reprezentînd un hiperboloid cu o pînză raportat la axele sale.

31. Fie dreptele d_1: $2x-1=0$, $y-z=0$ și d_2: $2x+z=0$, $y-1=0$. Se cere: ... dreptele date sînt gene-

Dreapta a şi ... con cu vîrful în origine) şi ... suprafaţa caz contrar, suprafaţa este un con cu vîrful în origine) ... suprafaţa este un cilindru de axă Oz). Dacă $aq \neq bp$, atunci suprafaţa este un hiperboloid cu o pînză. Hiperboloidul are centrul în origine, dacă $ap+bq=0$. *Aplicaţie.* Sîntem în cazul observaţiei, condiţia ca centrul să fie în origine fiind satisfăcută. Se găseşte hiperboloidul cu o pînză

$$\frac{x^2+y^2}{25}-z^2-1=0.$$

30. Pe axa mare a unei elipse, ca diametru, se duce un cerc în care se iau două raze OP şi OQ făcînd între ele un unghi constant. Din punctele P şi Q se coboară perpendiculare pe axa mare a elipsei, care perpendiculare intersectează elipsa în punctele D şi E. Din punctul D se duce pe perpendiculara la planul elipsei un segment de lungime $DH=h$. Se uneşte extremitatea H cu E. Să se găsească locul descris de dreapta EH cînd unghiul constant POQ se roteşte în jurul vîrfului său.