

LUCRAREA VII

COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE PERPENDICULARE (FIGURILE LISSAJOUS)

Obiectivele experimentului

- studiul compunerii oscilațiilor armonice perpendiculare de aceeași frecvență și de frecvențe diferite.

Teoria lucrării

Traietoriile descrise de un mobil în mișcarea rezultată din compunerea a două oscilații armonice perpendiculare de frecvențe diferite se numesc **figurile (curbele) lui Lissajous**.

1. Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare de aceeași frecvență

Considerăm un punct material M supus simultan la două oscilații armonice de aceeași frecvență ce se produc pe direcțiile OX și respectiv OY ale unui sistem de referință cartezian.

Traectoria mobilului este reprezentată parametric prin relația (1).

$$\begin{aligned}x &= A \sin \omega t \\y &= B \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}\tag{1}$$

unde A reprezintă amplitudinea oscilației armonice pe direcția OX, iar B reprezintă amplitudinea oscilației armonice pe direcția OY.

Eliminând timpul din relația (1), se obține, cu ajutorul identității trigonometrice $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, ecuația traiectoriei punctului material în coordonate carteziane.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi\tag{2}$$

Relația (2) reprezintă ecuația unei elipse așa încât rezultanta a două mișcări oscilatorii armonice de aceeași frecvență pe direcții perpendiculare între ele este în general o oscilație

eliptică. Elipsa obținută este înscrisă într-un dreptunghi de laturi $2A$ și $2B$ numit *dreptunghiul amplitudinilor*, dar nu este raportată la axele sale în sensul că axele elipsei fac un unghi în general nenul cu axele de coordonate (figura 1).

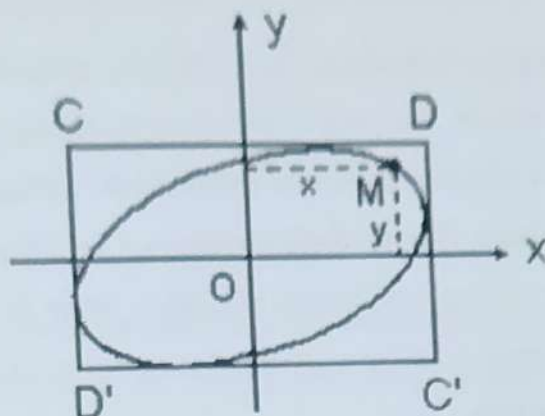


Fig. 1 Reprezentarea elipsei înscrisă în dreptunghiul amplitudinilor

Caracterul mișcării rezultante variază în funcție de valoarea diferenței de fază. Se consideră astfel câteva cazuri particulare.

a) Dacă diferența de fază este $\varphi = 2k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) oscilațiile sunt în fază, iar relațiile (1) și (2) devin:

$$x = A \sin \omega t, \quad y = B \sin \omega t \quad (3)$$

$$y = \frac{B}{A} x \quad (4)$$

Ecuția obținută este ecuația unei drepte care trece prin origine, cu panta B/A și coincide cu prima diagonală DD' a dreptunghiului amplitudinilor, astfel încât în acest caz elipsa degenerază în două drepte confundate. În concluzie prin compunerea a două mișcări oscilatorii armonice de aceeași frecvență care se execută în concordanță de fază pe direcții perpendiculare se obține o mișcare rezultantă oscilatorie armonică de-a lungul primei diagonale din dreptunghiul amplitudinilor. Se poate demonstra și reciproca acestei afirmații: orice mișcare oscilatorie armonică liniară se poate descompune în două mișcări oscilatorii armonice în concordanță de fază, pe direcții perpendiculare.

b) Dacă diferența de fază este $\varphi = (2k+1)\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) oscilațiile sunt în opoziție de fază, iar relațiile (1) și (2) devin:

$$x = A \sin \omega t, \quad y = -B \sin \omega t \quad (5)$$

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (6)$$

care reprezintă ecuația unei drepte ce trece prin origine având panta $-B/A$ și coincide cu cea de a doua diagonală CC' a dreptunghiului amplitudinilor, astfel încât și în acest caz elipsa degenerază în două drepte confundate. În concluzie, prin compunerea a două mișcări oscilatorii armonice de aceeași frecvență care se execută în opoziție de fază pe direcții perpendiculare, se obține o mișcare oscilatorie armonică de-a lungul celei de-a doua diagonale a dreptunghiului amplitudinilor. Este valabilă și reciproca acestei afirmații.

Prin urmare, orice mișcare oscilatorie armonică poate fi considerată ca rezultanta a două mișcări oscilatorii armonice, reciproc perpendiculare și cu aceeași frecvență executându-se în fază sau în opoziție de fază.

c) Dacă diferența de fază este $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(0,1,2,\dots)$ oscilațiile se mai numesc și în cuadratură, iar relația (2) devine

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (7)$$

care reprezintă ecuația unei elipse ale cărei axe coincid cu direcțiile de-a lungul cărora se efectuează oscilațiile componente (figura 2).

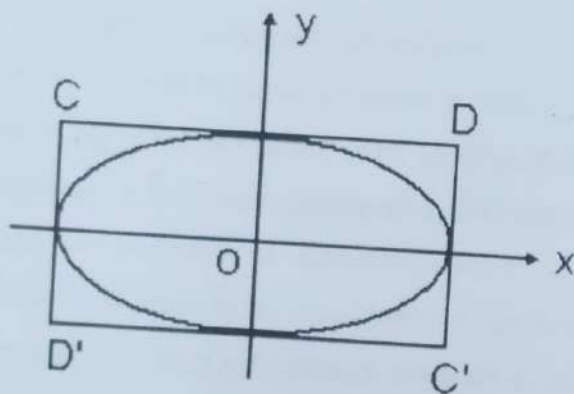


Fig. 2 Reprezentarea elipsei ale cărei axe coincid cu direcțiile de-a lungul cărora se efectuează oscilațiile componente

În particular dacă oscilațiile componente au aceeași amplitudine, $A=B$, rezultă $x^2 + y^2 = A^2$; elipsa devine un cerc. Orice mișcare circulară se poate descompune în două oscilații armonice liniare, perpendiculare, de amplitudini egale, având diferențe de fază $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

2. Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare de frecvențe diferite

Considerând oscilații perpendiculare

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega_x t) \\ y &= B \sin(\omega_y t + \varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

trajectoriile mișcării rezultante au o formă mai complicată. Dacă raportul frecvențelor este o fracție rațională, ca în relația (9)

$$\frac{\nu_y}{\nu_x} = \frac{n_x}{n_y} \quad (9)$$

adică n_x și n_y sunt numere întregi, aceste traectorii sunt închise și se numesc *figuri Lissajous*.

Figura Lissajous taie de n_x ori fiecare din cele două laturi ale dreptunghiului în care este înscrisă, paralele cu axa OX și de n_y ori fiecare din celelalte două laturi paralele cu axa OY. Orientarea figurilor Lissajous depinde de diferența de fază a oscilațiilor componente.

În figura 3 se prezintă o figură Lissajous pentru un raport al frecvențelor $1/2$.

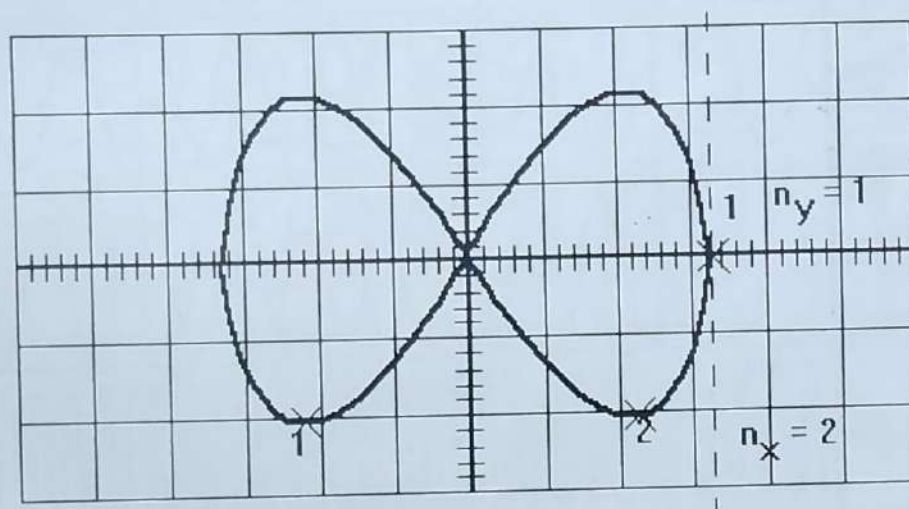


Fig. 3 Figura Lissajous pentru care $\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{1}{2}$

În figura 4 sunt reprezentate figurile Lissajous în cazul a două mișcări oscilatorii perpendiculare cu aceeași amplitudine și cu diferența de fază de $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ și π , pentru care raportul frecvențelor are valorile 1, 2, 3, 4 respectiv 10. În figura 5 sunt reprezentate figurile Lissajous pentru care raportul frecvențelor este un număr rațional.

Dacă raportul pulsațiilor nu este o fracție rațională, adică: $\frac{\omega_y}{\omega_x} \neq \frac{n_x}{n_y}$, curbele nu se mai

închid și figurile Lissajous nu se observă.

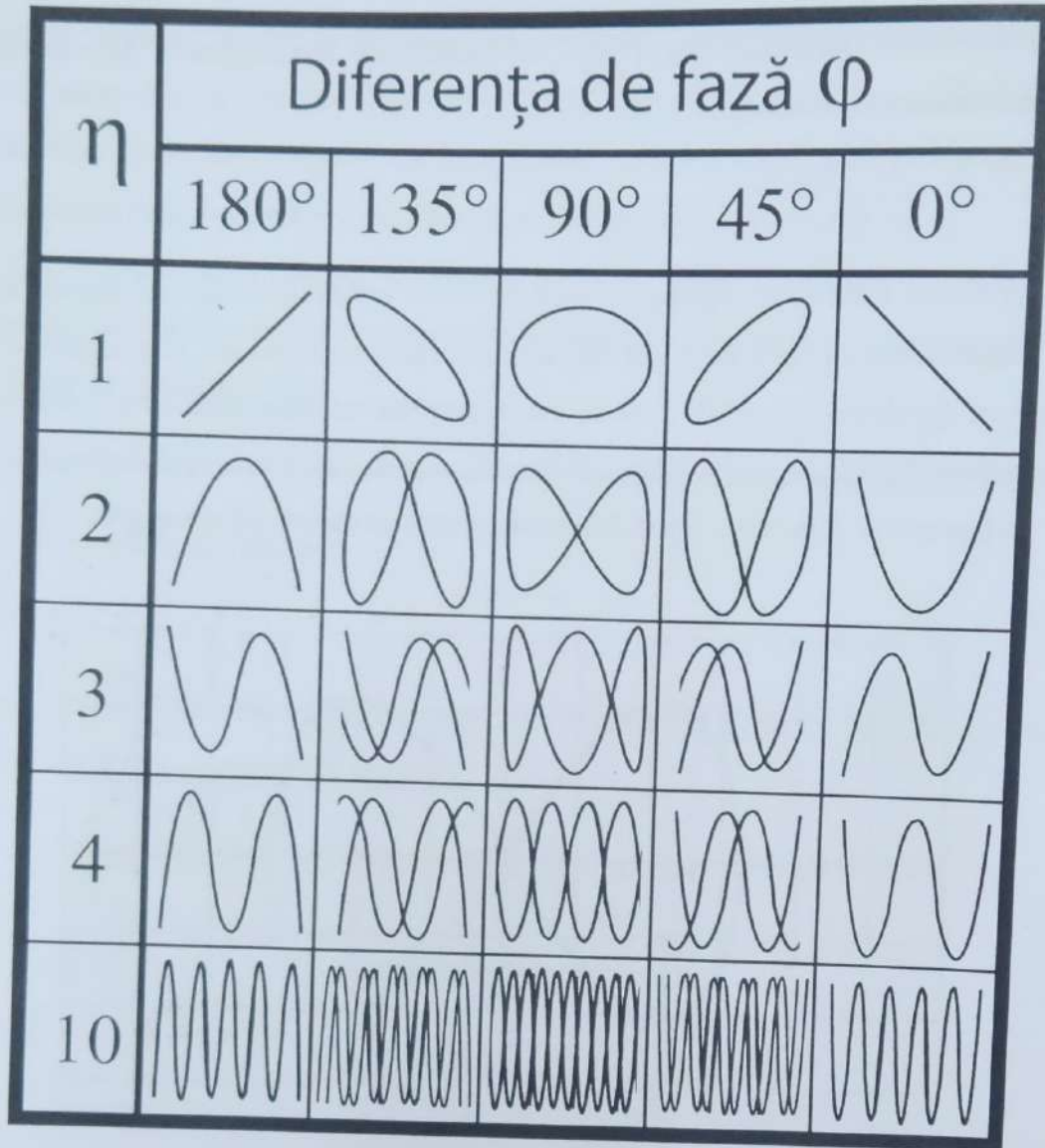


Fig. 4 Reprezentarea figurilor Lissajous

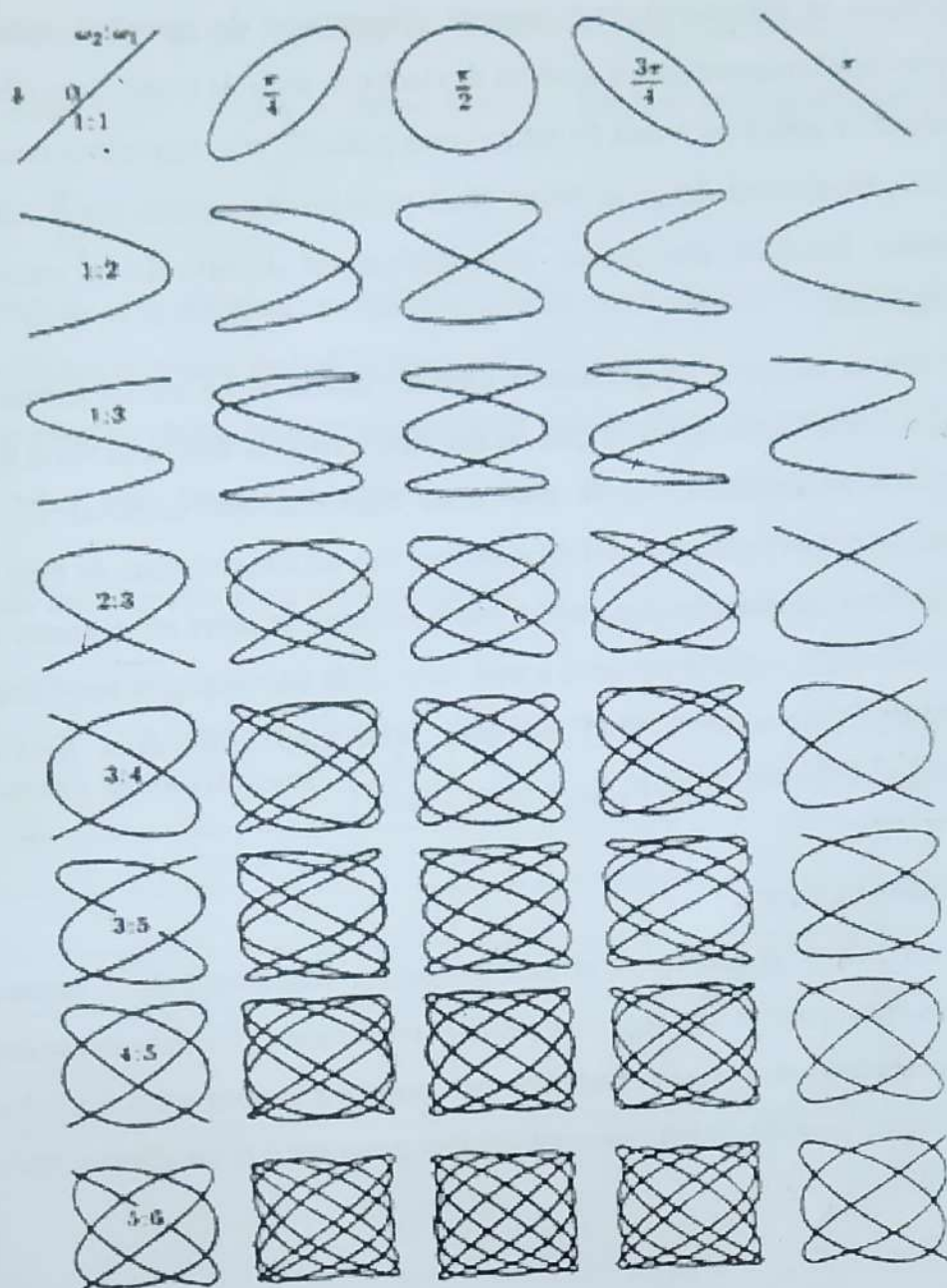


Fig. 5 Reprezentarea figurilor Lissajous pentru care raportul frecvențelor este un număr rațional

Dispozitivul experimental

În această lucrare se folosesc pentru compunere oscilații perpendiculare de natură electromagnetică, produse de două generatoare electronice de semnal, în domeniul audio – frecvențelor. Comportarea efectivă a oscilațiilor are loc pe ecranul unui osciloscop unde se vizualizează și se prelucrează figurile Lissajous obținute.

Osciloscopul catodic permite vizualizarea formei semnalelor în funcție de timp. Elementul principal al unui osciloscop este tubul catodic ce conține în interior două perechi de

plăci (verticale și orizontale) care datorită diferențelor de potențial aplicate, realizează deflexia (deviația) electrostatică a spotului de electroni, emis de catod. Semnalul care urmează a fi vizualizat se aplică pe borna de intrare care poate fi, prin acționarea unui comutator, în c.a. sau c.c. Atenuatorul fin și în trepte oferă posibilitatea reglării amplificării cu ajutorul comutatorului. Semnalul este preluat de amplificatorul de deflexie pe verticală și aplicat plăcilor orizontale.

Pentru ca imaginea de pe ecranul tubului catodic să fie stabilă trebuie ca frecvența semnalului devizualizat să fie egală (sau un multiplu întreg) cu frecvența bazei de timp.

Stabilitatea raportului dintre cele două frecvențe este asigurată de circuitele de sincronizare care injectează semnalul de vizualizat într-un punct al bazei de timp.

Cele două generatoare electronice sunt prevăzute la ieșire cu comenzi referitoare la gama de frecvențe, la reglarea continuă a unui interval de frecvențe și la amplificare.

Pentru obținerea unor figuri Lissajous prelucrabile, cele două frecvențe care se compun trebuie să fie comparabile.

Modul de lucru

Se conectează generatoarele și osciloscopul, se alimentează de la rețeaua de curent alternativ a laboratorului la 220 V și se reglează luminozitatea și focalizarea osciloscopului.

Se consideră convențional frecvența unui generator (exemplu cel din stânga conectat pe Ox) cunoscută și se determină frecvența celuilalt generator (cel din dreapta conectat pe Oy) cu relația (10).

$$v_y = \frac{n_x}{n_y} v_x \quad (10)$$

Se modifică frecvența v_y până când se obține o elipsă și se observă pozițiile prin care trece în mișcarea de rotație datorită variației defazajului în timp. Se urmărește stabilizarea orientării elipsei pentru a se putea număra tăieturile n_x și n_y pe direcțiile Ox respectiv Oy. În

acest caz, $\frac{n_x}{n_y} = 1$ și $v_y = v_x$.

În continuare se variază frecvența ν_y , fie în sens crescător, când $\nu_y > \nu_x$, fie în sens descrescător, când $\nu_y < \nu_x$, pentru a obține figurile Lissajous corespunzătoare rapoartelor $\frac{n_x}{n_y} > 1$, respectiv $\frac{n_x}{n_y} < 1$.

Se urmăresc și în acest caz pozițiile pe care le ocupă figurile Lissajous în rotație ca urmare a modificării diferenței de fază în timp.

Datele obținute pentru 10 figuri Lissajous se trec în tabelul de mai jos. Frecvențele $\bar{\nu}_x$ și $\bar{\nu}_y$ din tabel sunt frecvențele medii obținute în urma efectuării a 5 măsurători experimentale. În continuare se va verifica raportul $\frac{\bar{\nu}_y}{\bar{\nu}_x} = \frac{n_x}{n_y}$.

Nr. det.	Figura Lissajous obținută	ν_x (Hz)	$\bar{\nu}_x$ (Hz)	ν_y (Hz)	$\bar{\nu}_y$ (Hz)	n_x	n_y	$\frac{n_x}{n_y}$	$\frac{\bar{\nu}_y}{\bar{\nu}_x}$
1.									
2.									
...									
...									
10.									