Subiecte examen (teorie) la Analiza matematica 2022-2023

1) Definiti : notiunile de vecinatate, limita a unui sir din R, sir convergent.

2) Definiti: notiunile de distanta, norma, spatiu metric, bila, sir convergent, sir Cauchy intr-un spatiu metric.

3) Enuntati propozitia care contine proprietatile sirurilor convergente si sirurilor Cauchy intr-un spatiu metric.

4) Definiti: notiunile de vecinatate, multime deschisa, inchisa, multimea punctelor de acumulare, frontiera, inchiderea si interiorul unei multimi, topologie intr-un spatiu metric si intr-un spatiu topologic.

5) Definiti: notiunile de limita superioara si inferioara + 2 caracterizari (sup (inf…) si cu epsilon).

6) Definiti: notiunea de functie continua, limita a unei functii si functie uniform continua. Enuntati teoremele privind marginirea si respectiv uniform continuitatea unei functii continue in R^n si teoremele privind proprietatile functiilor continue (legate de operatii).

7) Enuntati teorema privind caracterizarea continuitatii intr-un spatiu metric si teorema privind caracterizarea continuitatii intr-un spatiu topologic.

8) Definiti convergenta simpla si uniforma. Enuntati teoremele privind continuitatea, derivabitatea si integrabilitatea limitei unui sir de functii.

9) Enuntati teoremele: Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, Darboux, L'Hospital, Cauchy–Hadamard, Taylor (varianta locala), Taylor cu restul Lagrange, si cea privind natura extremelor locale. Definiti polinomul Taylor.

10) Definiti derivatele partiale (in functie de un vector sau o directie) si derivata (diferentiala) unei functii de mai multe variabile. Enuntati rezultatele care leaga continuitatea de derivabilitate si derivatele partiale.

11) Enuntati proprietatile privind operatiile cu functii derivabile (inclusiv T. de inversare locala).

12) Definiti derivata si derivatele partiale de ordin superior.

13) Enuntati teoremele lui Young, Schwarz si a multiplicatorilor lui Lagrange.

14) Enuntati criteriile de convergenta pentru serii.

Analiză - teorie pt examen

1)

→ limita unui șir din $\mathbb{R}$

• Fie $l \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita l dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, avem

$|x_n - l| < \varepsilon \iff l-\varepsilon < x_n < l+\varepsilon \iff x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

• Spunem că $(x_n)_n$ are lim ∞ dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n > \varepsilon$

• Spunem că $(x_n)_n$ are lim $-\infty$ dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n < -\varepsilon$

→ șir convergent

Spunem că șirul $(x_n)_n$ este convergent dacă $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

→ noțiunile de vecinătate

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A$.

$V \subseteq A$ s.n vecinătate a lui $x \iff \exists\, \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î.

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq V$

s.n $V_x = \{V \mid V$ vecinătate a $x\}$.

2)

→ distanță

Fie $X \neq \emptyset$, o mulțime. O funcție $d: X \times X \to [0,\infty)$ s.n distanță dacă verifică:

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$ $(\forall)\, x,y \in X$
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ $\forall\, x,y,z \in X$

→ normă

O fct $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ s.n normă dacă

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|a x\| = |a| \cdot \|x\|$, $(\forall)\, a \in \mathbb{R}$
- $\|x\| + \|y\| = \|x+y\|$

→ spațiu metric

(X,d) sp. metric = o mulțime și o distanță (funcție)

→ bilă

În $\mathbb{R}^n$ orice două norme sunt echivalente ⟺

$B(a,r)$ bilă de centru a și rază r , $a \in X$, $r \in (0,\infty)$

$B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$ bilă deschisă

$B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) \le r\}$ bilă închisă

→ șir convergent și șir Cauchy într-un spațiu metric

Fie (X,d) un sp metric. Un șir $(x_n)_n \subset X$ s.n șir Cauchy dacă $(\forall)$ șir conv = șir Cauchy, reciproca este falsă. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î $m,n \ge n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

- x_n convergent, deci $x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ a.î $\forall n \ge n_\varepsilon$ $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$
- Șir Cauchy, $(\forall)$ $m,n \ge n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ ⇒ șirul x_n este șir Cauchy.

3)

→ prop. șir Cauchy + șir conv în spațiu metric

Fie (X,d) sp. metric, atunci:

1. $(\forall)$ șir Cauchy din X este mărginit
2. orice șir conv din X este șir Cauchy
3. orice șir conv e mărginit
4. un șir cauchy care are un subșir conv este convergent.

4)

→ topologie

Fie $X \neq \emptyset$. O mulț. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ s.n topologie dacă

1) $\emptyset$, $X \subset \tau$

2) $\forall D_1, D_2 \subset \tau$, $D_1 \cap D_2 \in \tau$

3) $(\forall)(D_i)_{i\in I} \in \tau$, $\bigcup_{i\in I} D_i \in \tau$

→ spațiu topologic, mt. deschisă / închisă

Fie $X \neq 0$, $\tau \in \mathcal{P}(X)$ topologie pe X.

1) (X,τ) s.n. spațiu topologic

2) O mulțime $G \subseteq X$ s.n deschisă dacă $G \in \tau$

3) O mulțime $F \subseteq X$ s.n. închisă dacă $X \setminus F \in \tau$

→ vecinătate

$a \in X$: V s.n vecinătate a lui a dacă $\exists D \in \tau$ a.î $a \in D \subset V$

$x_n \to a$ $(\forall)$ $V \in \mathcal{V}_a$, $\exists n_V$ a.î $\forall n \ge n_V$, $x_n \in V$

→ definiții $\mathring{A}$, A', $\bar{A}$, $Fr(A)$, $Iz(A)$

$A \subset X$, $(X, \mathcal{T})$ sp. topologic

1. x pct interior al lui A dacă $\exists\ r>0$ a.î. $B(x,r) \subseteq A$

$\mathring{A} = \{x \in X \mid x \text{ pct interior}\}$

2. x pct aderent al lui A dacă $(\forall)\ r>0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\bar{A} = \{x \in X \mid x \text{ pct aderent}\}$ (închiderea lui A)

3. x pct de acumulare al lui A dacă $(\forall)\ r>0$, $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq 0$

$A' = \{x \in X \mid x \text{ pct de acumulare}\}$

4. x pct de frontieră al lui A dacă x pct aderent și x nu este punct interior

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

5. x pct izolat - aderent dar nu punct de acumulare

$Iz(A) = \bar{A} \setminus A'$

→ mult deschisă / închisă

$\mathring{A}$ - cea mai mare mt. deschisă

$\bar{A}$ - cea mai mică mt. închisă

5)

→ limita superioară / inferioară

Un element $a \in \mathbb{R}$ s.n. punct limită pentru un șir x_n dacă $\exists\ x_{n_k} \to a$.

$L = \{a \mid \exists\ x_{n_k} \text{ a.î. } x_{n_k} \to a\}$

limita superioară: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n = \sup L = \max L$

limita inferioară: $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \inf L = \min L$

6)

→ notiunea de funcție continuă

Fie (X_1, τ_1) și (X_2, τ_2) sp. topologice, $a \in X_1$, $f: X_1 \to X_2$

f. s.n continuă dacă $(\forall)\ V \in V_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in V_a$

→ limită a unei funcții

$*_1$ Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 pct de acumulare.
f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0)$

$*_2$ Fct f are lim L în pct a dacă $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $|f(x) - L| < \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A$, $x \neq a$ și $|x - a| < \delta$.

! obs: rețin ce pot $*_1$ sau $*_2$

→ funcție uniform continuă

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că f este uniform continuă dacă $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ a.î. $x_1, x_2 \in I$ cu
$|x_1 - x_2| < \delta$ avem $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

→ mărginirea și uniform continuitatea unei fct în $\mathbb{R}^n$

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ închisă și mărginită
$f: A \to \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ $\Big\} \Rightarrow f$ uniform continuă

→ Th: prop. fct cont (legate de operații)

① Fie (X, τ), $f, g: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$
Dacă fct f și g sunt continue în $a \Rightarrow f+g;\ f \cdot g$ cont în a

② Fie $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), (X_3, \tau_3)$ sp. topologice
$f: X_1 \to X_2$, $g: X_2 \to X_3$, $a \in X_1$
Dacă f e cont în a și g e cont în $f(a) \Rightarrow g \circ f$ cont în a

7)

→ Th: caract cont în sp metric

Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) sp. metrice $\Big\}$ UAE.
$f: X_1 \to X_2$, $a \in X_1$ $\Big\} \Rightarrow$

1) f cont în a $(\forall\ V \in V_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in V_a)$

2) $(\forall)\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(a, x) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon$

3) $\forall\ (x_n)_n$ a.î. $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

→ Th: caract cont în sp. topologic

Fie $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ sp topologice
$f: X_1 \to X_2$ UAE:

1) f cont pe X_1

2) $\forall\ D \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$

3) $\forall\ F \subset X_2$ închise $\Rightarrow f^{-1}(F)$ este închise

8)

→ convergență simplă

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_n \xrightarrow{\text{simplu}} f$ dacă $\forall x \in A, f_n(x) \to f(x)$

$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon,x}$ a.î. $\forall n > n_{\varepsilon,x}$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ convergență simplă

→ convergență uniformă

$f_n \xrightarrow{\text{uniform}} f$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$ nu depinde de x

→ continuitatea unui șir de funcții

Fie $A \subset \mathbb{R}$; $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ și $\exists\, c \in A$ a.î. f_n să fie cont în c, $\forall n \geq 1 \Rightarrow f$ cont în c.

→ derivabilitatea unui șir de funcții

$f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile a.î.

1) $\exists\, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f'_n \xrightarrow{u} g$.

2) $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $(f_n(c))_{n \geq 1}$ să fie convergent

atunci $\exists\, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f_n$ și $f' = g$.

9)

→ Fermat

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ un punct de extrem local dacă $\exists\, f'(c)$, atunci $f'(c) = 0$

→ Rolle

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, deriv pe (a,b), cont în a și în b $\Rightarrow$ f cont pe $[a,b]$ și $f(a) = f(b)$. Atunci $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$

→ Lagrange

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, deriv pe (a,b), cont în a și b. Atunci $\exists$ $c \in (a,b)$ a.î.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

→ Cauchy

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabile pe (a,b) și cont pe $[a,b]$ a.î. $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$

Atunci $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

→ Darboux

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ deriv pe (a,b). Atunci f' are proprietatea lui Darboux

→ L'Hospital

Fie $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ a.î.

$\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow b} g(x) \in 0$ sau $\pm\infty$.

Daca $\exists$ f', g' pe (a,b) a.î. $g'(x) \neq 0$ $(\forall)$ $x \in (a,b)$

și $\exists$ $l = \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

→ Cauchy – Hadamard

Fie $S(x)$ o serie de puteri $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ și $\rho = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ unde ρ = rază de convergență, $\rho \in [0, \infty]$

1) $\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} ; & \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty) \\ 0, & \lim = \infty \\ \infty, & \lim = 0 \end{cases}$

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n \text{ este conv}\}$ – mț de convergență

$(-\rho, \rho) \subset \Delta \subset [-\rho, \rho]$

2) pt $\forall$ $R \leq \rho$ seria este uniform convergentă pe $(-R, R) \subset (-\rho, \rho)$

3) $S_1 x = \sum\limits_{n \geq 0} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$, $\rho_1 = \rho \to$ o serie de puteri este derivabilă

4) $S' = S_1$ pe $(-\rho, \rho)$, $S'(0) = a_1$

S este deriv de orice ordin pe $(-\rho, \rho)$

$S \in C^k$ dacă $\exists$ $f^{(k)}$ și este continuă

→ Taylor

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $a, x \in I$, $a \neq x$, $m \in \mathbb{N}^*$ și $f: I \to \mathbb{R}$ o fct deriv de m ori. Atunci $\exists\ \gamma$ între a și x a.î.

1) $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(\gamma)}{n!}(x-a)^n + w(x)$

2) $\lim_{x \to c} w(x) = 0$

→ Taylor cu rest Lagrange

Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$ a.î. $\exists\ f^{(n+1)}$ pe (a,b). Atunci $\forall\ x \in (a,b)\ \exists\ \alpha = \alpha_x$ între x și c ($\alpha \in (x,c)$ sau $\alpha \in (c,x)$) a.î.

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinom Taylor}}}{T_{f,n,c}(x)} + \underbrace{\frac{f^{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{R_{f,n,c}(x)}$$

$n = 0 \Rightarrow$ Th Lagrange

→ Polinom Taylor

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ compusă a.î. $\exists\ f^{(n)}$ pe (a,b) și $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = (f')^{(n)}$ și $\exists\ f^{(n+1)}(c)$ s.n polinom Taylor de ordin n+1 asociat fct f în pct. c.

$$T_{f,n+1,c}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

10)

→ derivata în raport cu un vector

$f: B(a,r) \to \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

→ derivata unei funcții de mai multe variabile

→ continuitate și derivabilitate

Fie $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$, $f: B(a,r) \to \mathbb{R}^m$ a.î. $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}$ pt $B(a,r)\ \forall\ i = \overline{1,m}$. Atunci:

1) $\exists\ M_a$ a.î. $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq m$, $\forall\ x \in B(a,r) \Rightarrow f$ cont în a

2) $\frac{\partial f}{x_i}$ cont în a $(\forall)\ i = \overline{1,n} \Rightarrow f$ e derivabilă

→ derivate parțiale

$D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ și $f: D \to \mathbb{R}$.

Spunem că f este derivabilă parțial în rap cu x în pct $(a,b) \in D$ dacă $\exists$ și este finită $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$

11)

→ propietățile operațiilor cu funcții derivabile

Fie $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ și $f,g: B(a,r) \to \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

Atunci:

1) Dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial v}$ și $\frac{\partial g}{\partial v}(a) \Rightarrow$

i) $\exists \frac{\partial (f+g)}{\partial v}(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(a)$

ii) $\exists \frac{\partial (\alpha f)}{\partial v}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}(a)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Dacă $\exists$ $f'(a)$ și $g'(a) \Rightarrow$

i) $\exists (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii) $\exists \alpha f'(a) = f'(\alpha a)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

12)

→ derivată - definiție

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

→ derivate parțiale de ordin superior.

Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ deriv de $(n-1)$ ori pe (a,b) și $c \in (a,b)$ a.î. $\exists f^{(n)}(c)$.

$$T_{f,n,c}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$ - Polinom Taylor.

13)

→ Teorema lui Young.

Dacă f are derivate parțiale de ordin I f'_x, f'_y într-o vecinătate V a lui (a,b)

f'_x, f'_y diferențiabile în (a,b), atunci $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$.

→ Teorema lui Schwartz

Dacă fct $f(x,y)$ are deriv. parțiale mixte f''_{xy} și f''_{yx} într-o vecinătate V a unui pct $(a,b) \in E$, f''_{xy} și f''_{yx} cont în (a,b), atunci $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$.

→ Teorema multiplicatorilor lui Lagr.

Fie $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ și a un pct de extrem al fct f pe mt $g(x) = 0$.

Dacă $f, g \in C^1$ și rang $g' = m$ (maxim) $\Rightarrow \exists\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ a.î. $h'_\lambda(a) = 0$, unde $h_\lambda = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$

---

14) Criterii de convergență pt serii

→ criteriul zero (0):

$\sum_{n \geq 1} x_n$ e conv $\Rightarrow x_n \to 0$ $(x_n = y_n - y_{n-1} \to \ell - \ell = 0)$

→ criteriul comparației:

$\sum_{n\geq 1} a_n \sim \sum_{n \geq 1} b_n$ $(a_n, b_n > 0)$ dacă $\lim \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$

$\sum_{n\geq 1} a_n \sim \sum_{n\geq 1} b_n$ → convergentă $\Leftrightarrow \alpha > 1$; → divergentă $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

→ criteriul raportului

$\sum_{n\geq 1} a_n$. Dacă $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ și → $\ell > 1 \Rightarrow$ serie divergentă; → $\ell < 1 \Rightarrow$ serie convergentă

→ criteriul radicalului

Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$, $x_n \geq 0$. Atunci:

1) Dacă $\exists\ \alpha < 1$ și $\exists\ n_0$ a.î. $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} < \alpha \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ e conv.
$(\Leftrightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} < 1)$

2) Dacă $\forall\ n \exists\ m \geq n$ a.î. $\sqrt[m]{x_m} \geq 1 \Rightarrow$ serie div
(dacă $\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} > \alpha > 1$)

→ Crit R-D:

$\sum_{n \geq 1} a_n$. $\ell = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Dacă $\ell > 1 \Rightarrow$ s este conv
$\ell < 1 \Rightarrow$ s este div.

→ Crit. Cauchy:

Serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ e conv $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon$ a.î. $n \geq n_\varepsilon$ și $p \geq 1 \Rightarrow$

$\left(y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \to |x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$

$\to$ criteriul pt serii alternate

$a_n \searrow \Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ este convergent.