Curs 6 Analiză

Mulțimea de spații topologice

Def O mulțime $\tau \subset P(X)$ s.n. topologie dacă

① $\emptyset, X \in \tau$; ② $D_1, D_2 \in \tau \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \tau$

③ $(D_i)_{i\in J} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in J} D_i \in \tau$ (X, τ) s.n. spațiu topologic.

O mulțime $D \in \tau$ s.n. deschisă

O mulțime $F \subset X$ s.n. închisă dacă $X \setminus F \in \tau$.

$V \subset X$ s.n. vecinătate a lui $a \in X$ dacă $\exists D \in \tau$ a.î.

$a \in D \subset V$. $\mathcal{V}_a = \{V \subset X \mid V$ este o vecinătatea lui $a\}$.

$x_n \to a \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists n_V$ a.î. $\forall n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

Ex1 (X, d) $\tau_d = \{D \subset X \mid \forall x \in D \Rightarrow r_x > 0$ a.î.

$B(x, r_x) \subset D$ $(D = \bigcup_{x\in B} B(x, r_x))\}$

Ex2 $(X, \tau = \{\emptyset, X\})$ 1) $\emptyset, X \in \tau$ 2)

$\cap$	$\emptyset$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X

3) $(D_i)_{i\in J} \subset X$

(1) dacă $\exists i \in J$ a.î. $D_j = X \Rightarrow \bigcup_{i\in J} D_i = X$

(2) $D_i = \emptyset\ \forall i \in J \Rightarrow \bigcup_{i\in J} D_i = \emptyset$

$\mathcal{F} = \{X, \emptyset\}$ m. închise

$\mathcal{V}_a = \{V \subset X \mid \exists D \in \mathcal{T}$ ai $a \in \underset{X}{\underset{\downarrow}{x}} \subset V\} \Rightarrow \mathcal{V}_a = \{X\}$

$x_n \to a$ $\forall V \in \underset{\{X\}}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{V}_a}}$ $\exists n_V$ ai $\forall n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

$x_n \in X$

$x_n \to a$ $\forall (x_n) \subset X$ $\forall a \in X$

Ex 3 $(X, \mathcal{T} = P(X))$ ① $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. ② $D_1, D_2 \subset X \Rightarrow D_1 \cap D_2 \subset X$

③ $(D_i)_{i \in J} \subset P(X) \Rightarrow \bigcup_{i \in J} D_i \subset X$

$\mathcal{T} = P(X)$ $\mathcal{V}_a = \{V \subset X \mid \exists D \in \mathcal{T}$ ai $a \in D \subset V\} = \{V \subset X \mid a \in V\}$

$x_n \to a$ $\forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists n_V$ ai $\forall n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

$V = \{a\} \Rightarrow x_n \in \{a\}$ $n > n_0 \Rightarrow \boxed{x_n = a \ \ n > 0}$

Ex 35 $d : X \times X \to [0, \infty)$

$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ $B(a, \frac{1}{2}) = \{a\} \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}_d = P(X)$

$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

Ex 4 $\mathbb{R}$ $\mathcal{T} = \{(a, +\infty) \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\}$

① $a = +\infty$ $(+\infty, +\infty) = \emptyset \in \mathcal{T}$ ② $(a, +\infty) \cap (b, +\infty) =$

$a = -\infty$ $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ $= (\max(a, b), +\infty)$

③ $\bigcup_{i \in J} (a_i, +\infty) = (\inf_{i \in J} a_i, +\infty) \in \mathcal{T}$

$b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V}b = \{V \subset \mathbb{R} \mid \exists\, a > 0$ a.î. $b \in (a, +\infty) \subset V\} =$
$= \{V \subset \mathbb{R} \mid \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $(b - \varepsilon, +\infty) \subset V\}$

$x_n \to a$ $\forall V \in \mathcal{V}a \Rightarrow \exists\, n_V$ a.î. $\forall n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

$V \to (a - \varepsilon, +\infty)$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n \in$
$\in (a - \varepsilon, +\infty) \Leftrightarrow x_n > a - \varepsilon \Leftrightarrow \lim x_n \geq a$

<u>Teoremă</u> Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice,
$f : X_1 \to X_2$ și $a \in X_1$ AUASE (toate afirm. sunt echiv.)

1) $\forall V \in \mathcal{V}f(a) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}a$

1') $\forall V \in \mathcal{V}f(a) \Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{V}a$ a.î. $\forall x \in W \Rightarrow$
$f(x) \in V$ $\quad (f(W) \subset V \Leftrightarrow W \subset f^{-1}(V))$

2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in X$ cu prop. că
$d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

2') $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in B_{d_1}(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in B_{d_2}(f(a), \varepsilon)$

3) $\forall x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

$\boxed{Ex_1}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; $a = 2$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $|x-2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |x-2| \cdot |x+2|$

$\delta_\varepsilon < 1 \Rightarrow |x-2| < 1 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow x \in (-3, 3)$

$\Rightarrow |f(x) - f(2)| < |x-2| \, 5 < \varepsilon$

$|x-2| \Rightarrow \delta_\varepsilon = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\} \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

$\boxed{Ex_2}$ $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x + \sqrt{x}$, $a = 4$

$|f(x) - f(4)| < \varepsilon$?

$|f(x) - f(4)| = |x + \sqrt{x} - 4 - 2| \leq |x-4| + |\sqrt{x} - 2| =$

$= |x-4| + \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \leq |x-4| \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{=\frac{3}{2}} < \varepsilon$

$\delta_\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{3}$

<u>Propoziție</u> Fie (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) și (X_3, τ_3) spații topologice, $f: X_1 \to X_2$, $g: X_2 \to X_3$ și $a \in X_1$. Dacă f este continuă în a și g este continuă în $f(a)$ $\Rightarrow$

$g \circ f$ este continuă în a

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 & \xrightarrow{g} & X_3 \\ \cup & & \cup & & \cup \\ a & & f(a) & & g \circ f(a) \end{array}$$

$g \circ f$

<u>Dem</u> $\left.\begin{array}{l} V \in \mathcal{V}_{g \circ f(a) = g(f(a))} \\ g \text{ este continuă în } f(a) \end{array}\right| \Rightarrow g^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{f}$

f cont în $a \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{V}_a$

$(g \circ f)^{-1}(V)$

(X_1, d_1); (X_2, d_2); (X_3, d_3) spații metrice

$\left.\begin{array}{l} x_n \to a \underset{\Rightarrow}{} f(x_n) \to f(a) \\ f \text{ cont în } a \quad g \text{ cont în } f(a) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} g(f(x_n)) \to g(f(a)) \\ (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a) \end{array}$

Def Fie (X_1, τ_1) și (X_2, τ_2) două spații topologice, $f: X_1 \to X_2$ și $a \in X_1$

f este continuă în $a \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

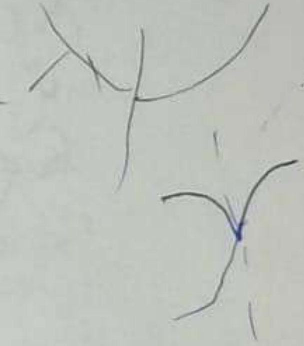
Prop Fie (X, τ) și (Y, d), $f: X \to Y$ continuă în a

Atunci f este local mărginită în a

$V = B(f(a), 1) \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow W = f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

$x \in W \Rightarrow f(x) \in B(f(a), 1)$

$f(W) \subset B(f(a), 1)$



Prop Fie (X, d), $f, g: X \to \mathbb{R}$ continue în a.

Atunci funcțiile $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$ sunt continue în a. Dacă $f(x) \neq 0$ $\forall x \in X \Rightarrow \frac{1}{f}$ este continuă în a

$x_n \to a$

$(f \cdot g)(x_n) = f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$

f, g cont în a

Ex $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\in A \\ x^2 & x\notin A \end{cases}$

a) $A=[0,1]$ b) $A=[0,1]\cup(3,4)$

c) $A=\mathbb{Q}$ d) $A=\mathbb{Q}\cup(3,4)$ e) $A=\left\{\frac{1}{n} \mid n\geq 1\right\}$

$\mathbb{Q}'=\mathbb{R}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})'\ni a$ A' e densă???

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{x\to a} x^3=a^3$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\notin\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{x\to a} x^2=a^2$

$f(a)\in\{a^2,a^3\}$

f este continuă în a $\Leftrightarrow a^3=a^2$ $\Leftrightarrow a\in\{0,1\}$

$a\notin\{0,1\}\Rightarrow f$ desc în a $\Rightarrow$ nu este der în a

$a=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-0}{x-0}=0$

$\lim\limits_{x\to 0;\, x\notin\mathbb{Q}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$

$\Rightarrow f'(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 1,\, x\in\mathbb{Q}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$ $\nexists f'(1)$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$; $f=(f_1,f_2)$ f este continuă în a

f_1 şi f_2 sunt continue în a

$f_1 = \begin{cases} x^3; & x\in\mathbb{Q}\\ x^2; & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ f_1 este cont în $x \iff x^3=x^2 \iff x\in\{0,1\}$

$f_2 = \begin{cases} -x^3; & x\in\mathbb{Q}\\ x^2; & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ f_2 este cont în $a \iff -x^3=x^2 \iff x\in\{0,-1\}$

$x^3+x^2=0$

$x^2(x+1)=0$

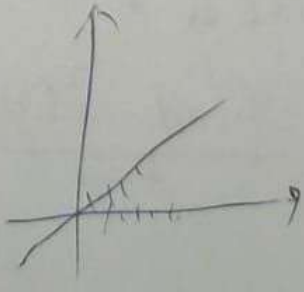
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

f este continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$...

$x_n=y_n=\frac{1}{n}$ $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$

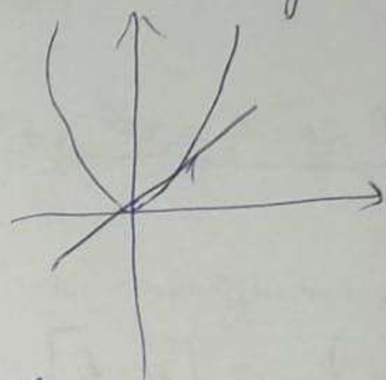
$\Rightarrow$ f este discont în $(0,0)$

$x_n=\frac{1}{n}$ $y_n=0$ $f\left(\frac{1}{n},0\right)=0\to0$



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,ax) = \lim_{x\to 0} \frac{x-ax}{x^2+a^2x} = \frac{a}{1+a^2}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & y=x^2\neq 0 \\ 0 & \text{rest} \end{cases}$$



$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to 0$$

$$f\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)=1\to 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax}} f(x,y)=0$$

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad g(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

$$|g(x,y)-g(0,0)| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y| \leq |y| \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0$$

$$\leq \frac{|xy|}{x^2+y^2}\cdot|x| \leq \frac{1}{2}|x| \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0$$

$$x^2+y^2 \geq 2(xy)$$

Teoremă Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci $\exists\, c\in[a,b]$ a.î. $f(c)=\sup f(x)$ $x\in[a,b]$

Dem Fie $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ PAS 1 $M<+\infty$

PP că $M=+\infty$ $\quad +\infty=\sup\limits_{x\in[a,b]}(f(x))$ $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in[a,b]$ a.î. $f(x_n)\geq n \Rightarrow f(x_n)\to+\infty$

$(x_n)_n\subset[a,b]$, $\exists\, x_{n_k}\to d$ $\quad f(x_{n_k})\to f(d)\in\mathbb{R}$

este mărginit

PAS 2 $M<+\infty$

$M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \Rightarrow \forall\,\varepsilon>0\ \exists\, x_\varepsilon\in[a,b]$ a.i. $M-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\leq M$

$\varepsilon=\frac{1}{n}$ $\quad y_n=x_{\frac{1}{n}} \Rightarrow M-\frac{1}{n}<f(y_n)\leq M \Rightarrow f(y_n)\to M$

$(y_n)_n\subset[a,b]\Rightarrow\exists\, y_{n_k}\to c\in[a,b]$ $\Rightarrow f(y_{n_k})\to f(c)$

f este cont în $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow M=f(c)$

OBS Dacă $A \subset \mathbb{R}$ deschisă și mărginită și $(x_n)_n \subset A$

$\Rightarrow \exists\ x_{n_k} \to a \in A$

A mărginită $\Rightarrow \exists\ x_{n_k} \to a$

A închisă $\Rightarrow a \in A$

A închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (x_n)_n \subset A;\ x_n \to a\}$

OBS $A \subset \mathbb{R}^n$ Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ închisă și mărginită și

$f: A \to \mathbb{R}$ continuă

Atunci $\exists\ c \in A$ a.î. $f(c) = \sup f(A)$