Compunerea oscilaţiilor armonice perpendiculare - Figuri Lissajous

O figură Lissajous este traiectoria unui punct ale cărui coordonate rectangulare (*x, y*) sunt oscilaţii armonice, sau analog, rezultanta a două oscilaţii armonice în direcţii perpendiculare:

$$x = a\cos(\omega_x t + \alpha) = a\cos(m\omega t + \alpha)$$
$$y = b\cos(\omega_y t + \beta) = b\cos(n\omega t + \beta) \,, \qquad (1)$$

unde ω, *a, b, m, n* sunt, în general numere reale pozitive.

Q1. Imaginaţi sisteme mecanice în care se obţine compunerea a două oscilaţii perpendiculare. In ce lucrare de laborator s-a obţinut compunerea oscilaţiilor perpendiculare?

Versiunea opto-mecanică a unui experiment de compunere a două oscilaţii armonice perpendiculare este descrisă în Fig. 1. O rază de lumină este trimisă pe o mică oglindă ataşată unui braţ al unui diapazon şi reflectată pe oglinda mică ataşată unui alt diapazon. În continuare raza de lumină este trimisă pe o lentilă optică care focalizează raza pe un ecran. Braţele celor două diapazoane sunt aşezate în plane perpendiculare. Când frecvenţele celor două diapazoane sunt rapoarte de numere prime, pe ecran apar curbe caracteristice, numite figuri Lissajous.

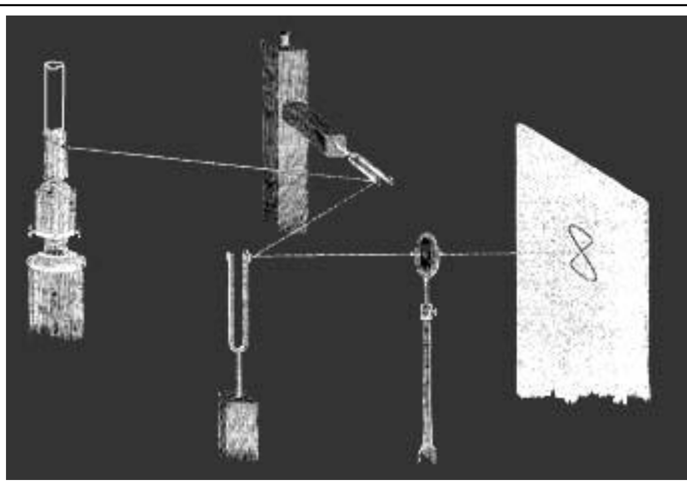


Fig. 1 Figuri Lissajous - versiune opto-mecanică
http://mathforum.org/mathimages/index.php/Image:LissajousFork.jpg

Se poate arăta că dacă $\omega_x / \omega_y = m/n$ şi *m* şi *n* sunt numere prime, traiectoriile obţinute sunt închise şi deschise (punctul acoperă o arie) în caz contrar.

A. De exemplu, pentru oscilaţii cu *aceeaşi frecvenţă,*

$$x = a\cos\left(\omega t + \alpha\right) = \cos\left(\omega t\right)\cos\left(\alpha\right) - \sin\left(\omega t\right)\sin\left(\alpha\right)$$
$$y = b\cos\left(\omega t + \beta\right) = \cos\left(\omega t\right)\cos\left(\beta\right) - \sin\left(\omega t\right)\sin\left(\beta\right) \qquad (2)$$

se calculează $\cos(\omega\tau)$, $\sin(\omega\tau)$ şi se utilizează $\cos(\omega\tau)^2 + \sin(\omega\tau)^2 = 1$. Se obţine ecuaţia generală a unei elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta)\ . \tag{3}$$

Se poate proceda si calculand radacinile ec. (2), astfel.

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\omega\tau + \alpha) \Rightarrow \omega t = \pm\arccos(x/a) - \alpha + 2k\pi \\ y &= b\cos(\omega\tau + \beta) \Rightarrow \omega t = \pm\arccos(y/b) - \beta + 2n\pi \end{aligned} \tag{4}$$

unde k si n sunt numere intregi; prin scadere, se obtine

$$\pm\left[\arccos(x/a) - \arccos(y/b)\right] = \alpha - \beta + 2(n-k)\pi\ . \tag{5}$$

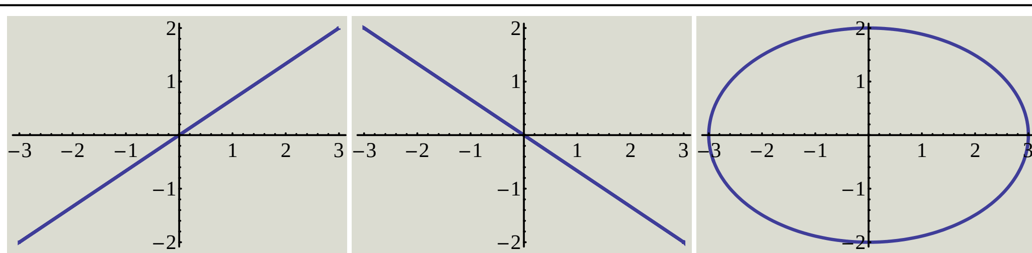
Se aplica cosinus ec. (5) si se obtine din nou ec. (3).

Q2. Efectuati calculele cu ec. (2) si (4) pentru a obtine ec. (3).

In functie de defazajul $\alpha - \beta$ traiectoria rezultată este (vezi Fig. 2):

$\alpha - \beta = 0, \pi$ => dreapta $\dfrac{y}{x} = \dfrac{b}{a}$, respectiv $\dfrac{y}{x} = -\dfrac{b}{a}$;

$\alpha - \beta = \pi/2, 3\pi/2$ => in general elipsă şi cerc dacă $a = b$.



a) b) c)

Fig. 2 Figuri Lissajous pentru oscilaţii cu frecvenţe egale cu defazajul $\alpha - \beta$: a) 0; b) π; c) $\pi/2, 3\pi/2$.

B. Pentru oscilaţii cu o *frecvenţe* multipli de numere naturale m si n prime intre ele,

$$\begin{aligned} x &= a\cos(m\omega t + \alpha) \\ y &= b\cos(n\omega t + \beta) \end{aligned} \tag{6}$$

Solutiile ec. (6) sunt

$$m\omega t = \pm\arccos(x/a) + 2k\pi - \alpha$$

$$n\omega t = \pm\arccos(y/b) + 2n\pi - \beta$$

de unde

$$\pm n\arccos(x/a) + 2kn\pi + \alpha n = \pm m\arccos(y/b) + 2kn\pi + \beta m\ . \tag{7}$$

Se aplica functia cosinus ec. (7) si rezulta

$$\cos\left[n\arccos(x/a) - m\arccos(y/b)\right] = \cos(\alpha n - \beta m) \tag{8a}$$

sau

$$\cos\left[\pm n\arccos(x/a) + \alpha n\right] = \cos\left[\pm m\arccos(y/b) + \beta m\right] \tag{8b}$$

Exemplul 1

Pentru *m*=1, *n*=2, $\alpha = \beta = 0$, cu ec. (8b) se obtine

$$\cos\left[2\arccos(x/a)\right] = (y/b) \tag{9}$$

sau

$$\cos^2\left[\arccos(x/a)\right] - \sin^2\left[2\arccos(x/a)\right] = (y/b), \tag{10}$$

sau

$$(x/a)^2 - 1 + \cos^2\left[\arccos(x/a)\right] = (y/b), \tag{11}$$

sau

$$2(x/a)^2 - 1 = (y/b). \tag{12}$$

Graficul ec. (12) (figura Lissajous) este reprezentat in Fig. 3, pentru $a = 1, b = 2$ (conform ec. (12), $x \in [-1, 1]$, $y \in [-2, 2]$).

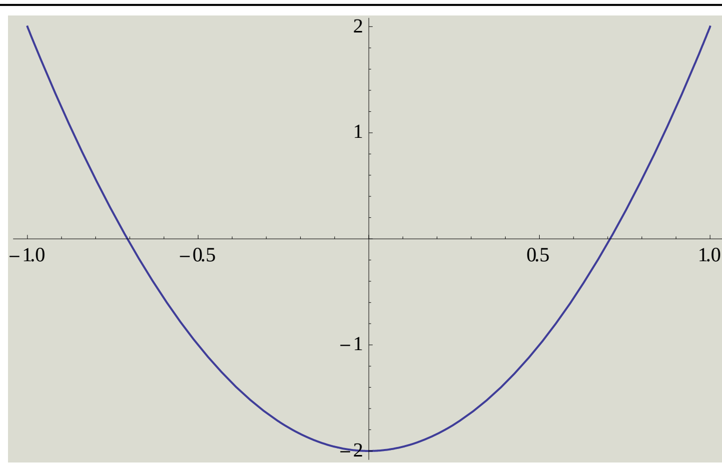


Fig.3

Exemplul 2

$$\begin{aligned} x &= \cos 2t \\ y &= \sin(3t + \pi/2) \end{aligned} \tag{13}$$

Cu ec. 8(b) se obtine

$$y = \pm\sqrt{\frac{4x^3 - 3x + 1}{2}}. \tag{14}$$

Graficul ec. (14) este reprezentat in Fig. 4.

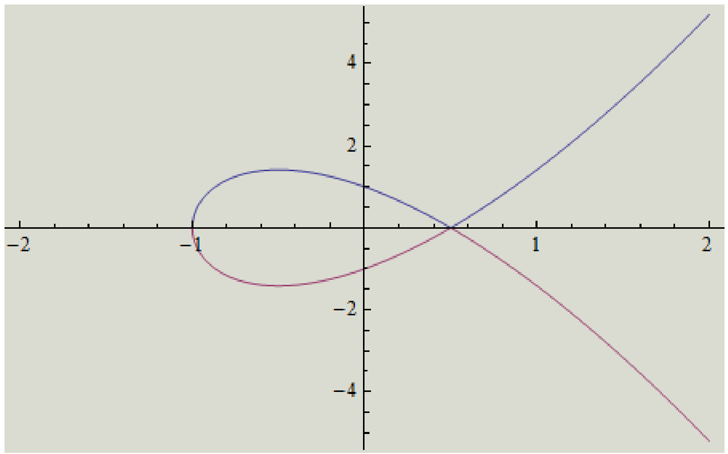
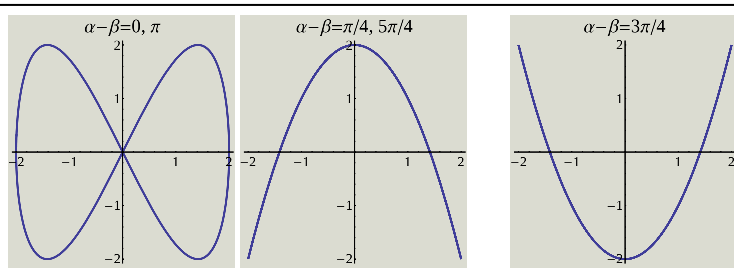


Fig.4

Ec. (13) are 3 radacini reale (2 identice), deci intersecteaza axa x de 3 ori si are 2 ramuri, una in cadranul superior si cealalta in cadranul inferior (daca graficul se intersecteaza cu o dreapta paralela cu ordonata, se obtin 2 intersectii). Raportul intersectiilor axelor verticale si orizontale este egal cu raportul frecventelor celor doua oscilatii.

Se poate arăta ca in general, în cazul traiectoriilor închise, raportul dintre numărul de intersecţii ale figurii Lissajous cu o dreaptă orizontală şi o alta verticală este egal cu raportul frecvenţelor celor două oscilaţii armonice perpendiculare.

În Fig. 5 sunt reprezentate câteva exemple de figuri Lissajous, pentru oscilaţii cu amplitudini egale la diferite defazaje, unde m/n reprezinta raportul frecvenelor.



$m/n=2$

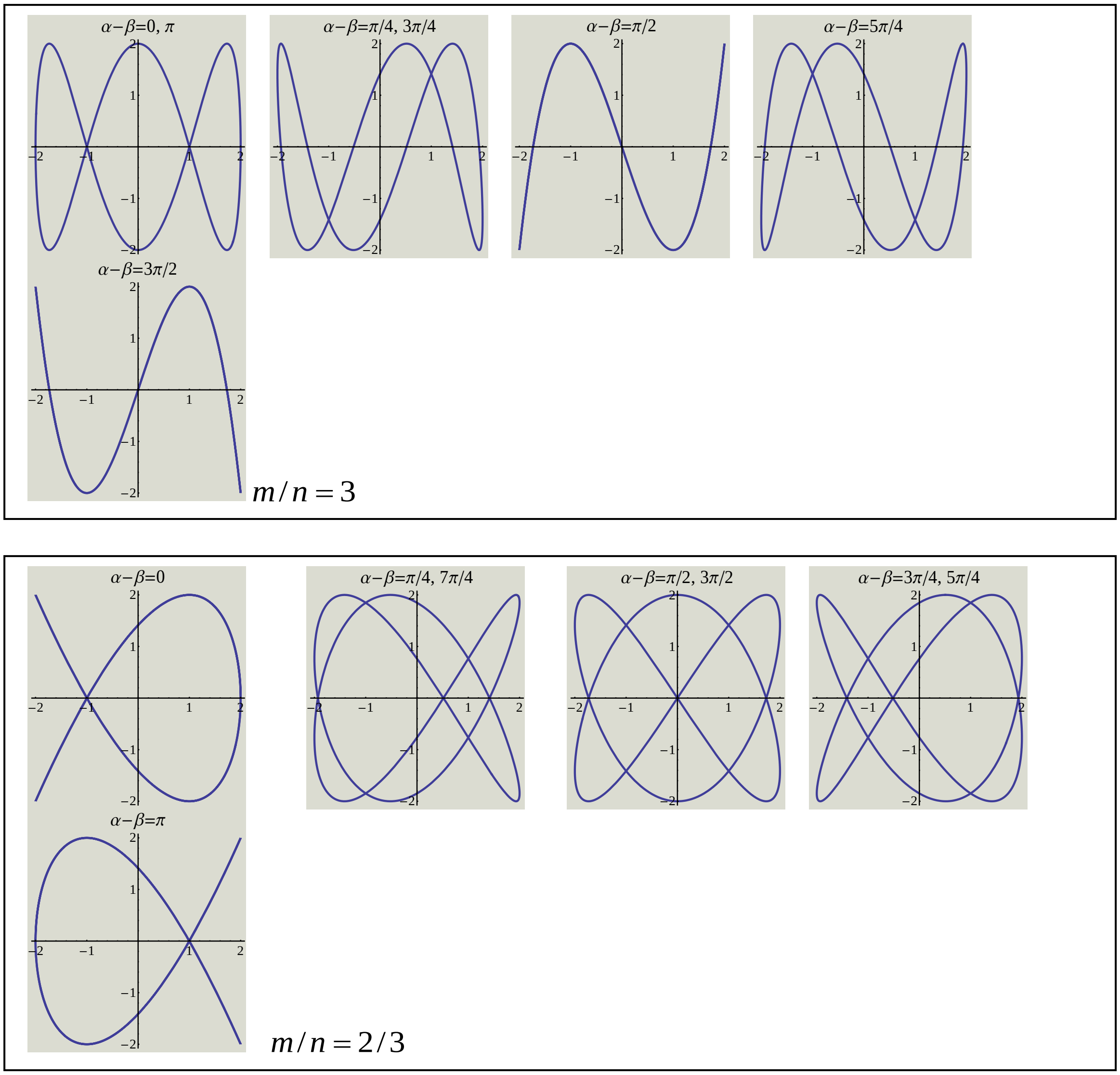


Fig.5 Figuri Lissajous