Curs Analiză 8
L'Hospital. Prop lui Darboux

<u>Teoremă</u> Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b). Atunci f' are proprietatea lui Darboux.

<u>dem</u> Fie $x,y\in(a,b)$ aî $a<c<d<b$ şi $\alpha=f(c)$ şi $\beta=f(d)$

Presupunem că $\alpha<\beta$ Fie $\gamma\in(\alpha,\beta)$

Considerăm $g(a,b)\to\mathbb{R}$ $g(x)=f(x)-\gamma x \Rightarrow$

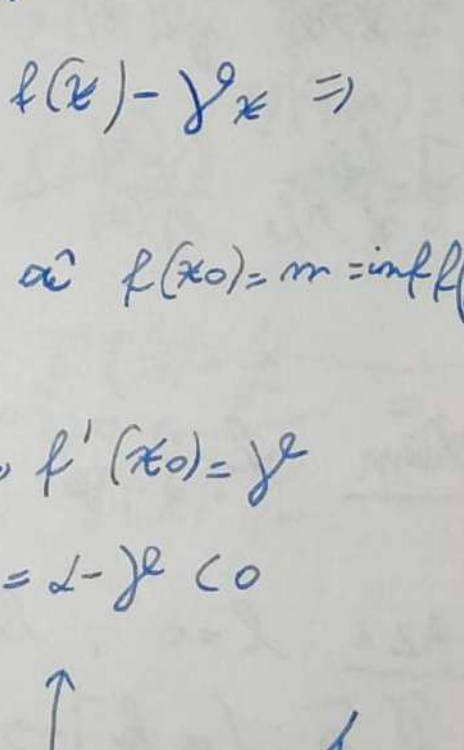
$\Rightarrow \exists\, g'(x)=f'(x)-\gamma$

Fie $m=\inf\limits_{x\in[c,d]} f(x) \Rightarrow \exists\, x_0\in[c,d]$ aî $f(x_0)=m=\inf f([c,d])$

<u>CAZ 1</u> $x_0\in(c,d) \Rightarrow g'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=\gamma$

<u>CAZ 2</u> $x_0\neq c$ $g'(c)=f'(c)-\gamma=\alpha-\gamma<0$

$g'(d)=\beta-\gamma>0$



$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=g'(c)=\alpha-\gamma<0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ aî $\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}<0\ \forall\, x\in(c,c+\varepsilon)$

$\Rightarrow g(x)<g(c)\ \forall\, x\in(c,c+\varepsilon)$

$\Rightarrow x_0\neq c$

CAZ 3 $x_0 \neq \alpha$

T. l'hospital Fie $f, g \in (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists f'$ și $\exists g'$ pe (a,b) și $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$

Ip. ca $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} g(x) = l \in \{0, +\infty\}$ și

$\exists \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ Atunci

$\exists \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Dem $l \begin{cases} \nearrow 0 \\ \searrow +\infty \end{cases}$ $b \begin{cases} \nearrow \in \mathbb{R} \\ \searrow +\infty \end{cases}$ $L \begin{cases} \nearrow \in \mathbb{R} \\ \searrow \pm\infty \end{cases}$

CAZ 1 $l = 0$; $b < +\infty$

$\tilde{f}, \tilde{g} : (a, b] \to \mathbb{R}$ $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ 0 & , x = b \end{cases}$ și

$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & , x \in (a,b) \\ 0 & , x = b \end{cases}$

$\tilde{f}$ continue $x \in (a,b)$. Aplicăm T. Cauchy pentru $\tilde{f}, \tilde{g}$ pe $[x, b] \Rightarrow \exists c_x \in (x, b)$ a.î.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(b)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(b)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

$x \to b \Rightarrow c_x \to b$

$c_x \in (x, b)$

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y \to b} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

<u>CAZ 2</u> $b = +\infty$ $a > 0$ $(a, +\infty) \xrightarrow{\varphi} (0, \frac{1}{a})$ $\varphi(x) = \frac{1}{x}$

$\varphi(+\infty) = 0$

$F, G : (0, \frac{1}{a}) \to \mathbb{R}$ $F(x) = f(\frac{1}{x}) = f \circ \varphi(x)$ $G(x) = g(\frac{1}{x})$

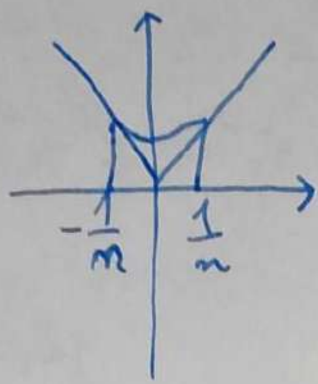
$$\lim_{y \searrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cancel{\frac{1}{x^2}}}{g'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cancel{\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

<u>OBS</u> $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă $\Rightarrow \exists$ $P_n \in \mathbb{R}[X]$ a.î.

a.î. $P_n \xrightarrow{u} f$ pe $[a, b]$

Ex



$f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = (x)$

$$f_n(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq \frac{1}{n} \\ a_n x^2 + b_n & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

f_n față $2a_n x$

$f_n'(\frac{1}{n}) = 1 \qquad 2a_n \cdot \frac{1}{n} = 1; \ a_n = \frac{n}{2}$

f_n sunt derivabile și f_n nu este derivabilă în 0

$a_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x| \leq \frac{1}{n}} |f_n(x) - |x|| = \sup_{|x| \leq \frac{1}{n}} ||x| - a_n x^2 - b_n|$

$\leq \frac{1}{n} + \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{2}{n} \to 0$

<u>Teoremă</u> Fie $f_n, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ ($a < b \in \mathbb{R}$) a.î. $\exists f_n' \ \forall n \geq 1$, $f_n' \xrightarrow{u} g$ pe (a,b) și $\exists c \in (a,b)$ a.î. $(f_n'(c))_{n \geq 1}$ să fie convergent. Atunci există $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $f' = g$

<u>Teoremă</u> Fie $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile a.î. $s(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ să fie convergentă și $s_1(x) = \sum_{n \geq 1} f_n'(x)$ să fie uniform convergentă. Atunci $s' = s_1$

Def O serie $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ s.n. normal convergentă dacă $\exists\ a_n \geq 0$ a.î.

$$\sup_{x \in (a,b)} |f_n(x)| \leq a_n \text{ și } \sum_{n \geq 1} a_n < +\infty$$

Prop O serie normal convergentă de funcții este (absolut) uniform convergentă

Ex Fie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} e^{nx} \; x \in (-2,-1)$; $f_n(-2,-1)$ $f_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{nx}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow s \text{ este normal con. } (1)$$

$$nx < 0 \quad e^{nx} \leq 1$$

$$s_1(x) = \sum_{n \geq 1} f_n'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} e^{\frac{x}{n}}$$

$$|f_n'| \leq \frac{1}{n^3} \quad \sum \frac{1}{n^3} < +\infty \Rightarrow s_1 \text{ este normal con. } (2)$$

$$\Rightarrow (1) \text{ și } (2) \quad (s' = s_1)$$

$$s_2(x) = \sum_{n \geq 1} f_n''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} e^{\frac{x}{n}}$$

$$\sup_{x \in (-2,-1)} |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^4} \quad \sum \frac{1}{n^4} < +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow s_2$ este normal conv. $\Rightarrow s_1' = s_2 \Rightarrow s'' = s_2$

s_1 ——— " ———

$$s_k(x) = \sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2+k}} e^{\frac{x}{n}}$$

$$\sup_{x\in(-2,-1)} |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$\Rightarrow s_k$ este normal conv $\forall k\geq 0 \Rightarrow s_k' = s_{k-1}$

$\Rightarrow s^{(k)} = s_k$

$|s^{(k)}| = |s_k| \leq \sum \frac{1}{n^2}$

Dirichlet 1) $f_n \downarrow^{u} 0$

2) $\left|\sum_{k=1}^{n} g_k\right| \leq M \; \forall n\geq 1$ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n g_n$ este u conv.

Crit Abel 1) $a_n \downarrow 0$

2) $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq M \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n b_n$ este conv.

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+x} \qquad f_n \downarrow^{u} 0 \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\right| \leq 1$$

$x > 0$ $f_n = \frac{1}{n+x}$; $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $g_n(x) = (-1)^n$

$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} 0$ $f_n \geq f_{n+1}$

Def O serie $s(x)=\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ s.n. serie de puteri $\boxed{\rho=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}}$ - raza de convergență

$D=\{x\in\mathbb{R} \mid s(x)$ este con.$\}$ domeniul de con.

T. Cauchy-Hadamard Fie serie $s(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ Atunci:

1) a) dacă $\rho=+\infty \Rightarrow D=\mathbb{R}$ b) dacă $\rho=0\Rightarrow$
$\Rightarrow D=\{0\}$ și c) dacă $0<\rho<+\infty \Rightarrow$

$$(-\rho,\rho)\subset D\subset[-\rho,\rho]$$

2) Dacă s este normal conv. pe $[-R,R]$ $\forall R<\rho$

3) Fie $s_1(x)=\sum_{n\geq 1} a_n\cdot n\cdot x^{n-1}$ atunci $\rho_1(=\rho_{s_1})=\rho$ și $s'=s_1$

4) Fie $s_k(x)=\sum_{n\geq k} a_n \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}}_{(x^n)^{(k)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_k=\rho \Rightarrow s^{(k)}=s_k$ $\quad s^k(0)=a_k k!$ $\quad a_k=\frac{s^{(k)}(0)}{k!}$

Dem Crit $\sqrt{\ }$ $\sigma=\sum_{n\geq 1} b_n$

1) $\overline{\lim}\sqrt[n]{b_n}<1\Rightarrow \sigma$ este con.

2) $\overline{\lim}\sqrt[n]{b_n}>1\Rightarrow \sigma$ div.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim}\, |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\rho} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $|x| < \rho$ s. conv

$|x| > \rho$ s. div

$|x| < R < \rho$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq \frac{R}{\rho} < \alpha < 1$$

$n \geq n_0$ $|a_n x^n| < \alpha^n \Rightarrow |a_n x^n| \leq c\,\alpha^n$ $\forall n \geq 1$

$|x| \leq R$

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = s(x) \quad s'(x) = s(x)$$

<u>Def</u> Fie $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$ f este derivabilă în $c \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ și $\exists\, \omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.

$$f(x) = \underbrace{f'(c) + \alpha(x-c)}_{f''(c)} + (x-c)\,\omega(x) \quad \text{și } \lim_{x \to c} \omega(x) = 0$$

$Tf_{1,c}(x)$