

LUCRAREA VI

STUDIUL OSCILAȚIILOR AMORTIZATE ȘI AL OSCILAȚIILOR FORȚATE CU PENDULUL POHL

Obiectivele experimentului

Pendulul de torsiune Pohl este folosit pentru studiul oscilațiilor amortizate, respectiv forțate. În această lucrare se va studia:

A. În cazul mișcării oscilatorii libere:

- perioada și frecvența proprie a oscilatorului în regim neamortizat;
- perioada și frecvența proprie a oscilatorului în prezența amortizării;
- coeficientul de amortizare;
- decrementul logaritm.

B. În cazul mișcării oscilatorii forțate:

- trasarea curbelor de rezonanță ale amplitudinii pentru diferite amortizări;
- coeficientul de amortizare.

Teoria lucrării

A. Oscilații amortizate

În cazul unui pendul de torsiune, momentul de torsiune M_1 este proporțional cu unghiul de răsucire:

$$M_1 = -C\varphi \quad (1)$$

unde C este constanta de torsiune. Momentul rezistiv (de frânare) este:

$$M_2 = -\Gamma \dot{\varphi} \quad (2)$$

unde Γ este un factor de amortizare. Amortizarea este controlată de o frână electromagnetică, ce are la bază curenții Foucault care apar ca urmare a mișcării discului de cupru într-un câmp magnetic uniform. Acești curenți generează un câmp magnetic de polaritate opusă câmpului magnetic aplicat. Rezultă o forță de rezistență proporțională cu viteza de mișcare a discului.

Se obține următoarea ecuație de mișcare:

$$I \ddot{\varphi} + \Gamma \dot{\varphi} + C\varphi = 0 \quad (3)$$

unde I este momentul de inerție al pendulului față de axa de rotație. Împărțind prin I rezultă:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Gamma}{I} \dot{\varphi} + \frac{C}{I} \varphi = 0 \quad (4)$$

Se notează:

$$\frac{\Gamma}{I} = 2b, \quad \omega_0^2 = \frac{C}{I} \quad (5)$$

unde b este coeficientul de amortizare iar ω_0^2 este frecvența oscilațiilor proprii în absența amortizării. Rezultă ecuația caracteristică:

$$\rho^2 + 2b\rho + \omega_0^2 = 0 \quad (6)$$

Cazul I

Dacă amortizarea este slabă $b < \omega_0^2$, rădăcinile $\rho_{1,2}$ sunt complexe, iar soluția ecuației (4) este:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \alpha) \quad (7)$$

unde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ reprezintă **pseudopulsatia**, respectiv:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \quad (8)$$

este **pseudoperioada**. Oscilațiile amortizate sunt de tip sinusoidal dar cu amplitudinea descrescătoare exponențial (fig. 1).

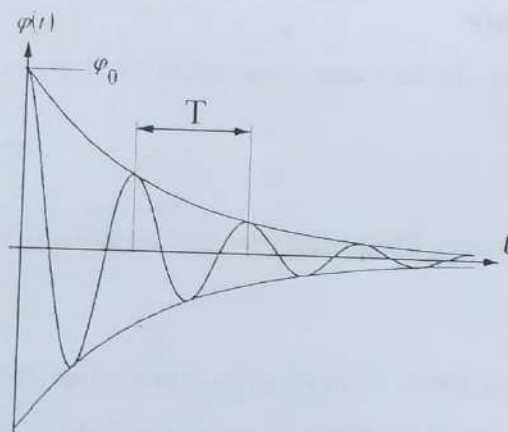


Fig. 1 Dependența elongației unghiulare în funcție de timp în cazul oscilațiilor amortizate pseudoperiodice

Raportul elongațiilor la un interval de timp T este:

$$K = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} = e^{bT} \quad (9)$$

Logaritmul natural al acestui raport se numește *decrement logarithmic*:

$$D = bT = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \quad (10)$$

Având în vedere că $[b]_{SI} = s^{-1}$ putem defini timpul de viață $\tau = 1/b$ astfel încât pentru $t = \tau$ amplitudinea scade de $e = 2,718$ ori. Atunci decrementul logarithmic se mai scrie:

$$D = bT = \frac{T}{\tau} \quad (11)$$

și deci inversul decrementului logarithmic:

$$\frac{1}{D} = \frac{\tau}{T} = N_e \quad (12)$$

reprezintă numărul de oscilații până la care amplitudinea se reduce de e ori.

Cazul II

În cazul $b > \omega_0$ rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale și negative, iar soluția ecuației (4) este:

$$\varphi(t) = e^{-bt} (c_1 e^{-\omega t} + c_2 e^{\omega t}) \quad (13)$$

Mișcarea se numește *amortizată aperiodică* (fig. 2), iar pendulul se întoarce asimptotic către poziția sa de echilibru.

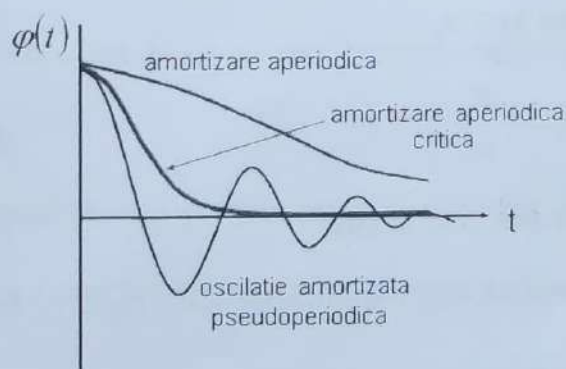


Fig. 2 Mișcarea aperiodică

Cazul III

În cazul $b = \omega_0$ rădăcinile coincid și:

$$\varphi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-bt} \quad (14)$$

iar mișcarea este *aperiodică critică* (fig. 2) iar pendulul tinde spre poziția de echilibru în timpul cel mai scurt.

B. Oscilații forțate

Dacă asupra pendulului acționează un moment extern $M_{ex} = M_0 \cos \Omega t$ ecuația (4) devine:

$$\ddot{\varphi} + 2b\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = F_0 \cos \Omega t \quad (15)$$

unde $F_0 = \frac{M_0}{I}$. În regim permanent soluția ecuației (15) este:

$$\varphi(t) = \varphi_a \cos(\Omega t + \alpha) \quad (16)$$

unde

$$\varphi_a(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}} \quad (17)$$

și

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (18)$$

Dependența $\varphi_a = \varphi_a(\Omega)$ poartă numele de *curba de rezonanță*. Analizând relațiile (17) și (18) se constată că:

➤ la frecvențe mici $\Omega \leq \omega_0$

$$\varphi_a(0) = \frac{F_0}{\omega_0^2} \quad (19)$$

iar forța exterioară și deplasarea sunt în fază.

➤ la frecvențe mari $\Omega \geq \omega_0$, amplitudinea scade rapid cu frecvența

$$\varphi_a(\Omega \geq \omega_0) = \varphi_a(0) \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$$

iar deplasarea este în opoziție de fază cu forța exterioară.

- pentru F_0 dat amplitudinea φ_a are un maxim pentru:

$$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \quad (20)$$

iar diferența de fază între deplasare și forță este $\pi/2$.

- cu cât b este mai mare, cu atât amplitudinea oscilațiilor forțate este mai mică, iar frecvența de rezonanță se deplasează spre frecvențe mai mici.

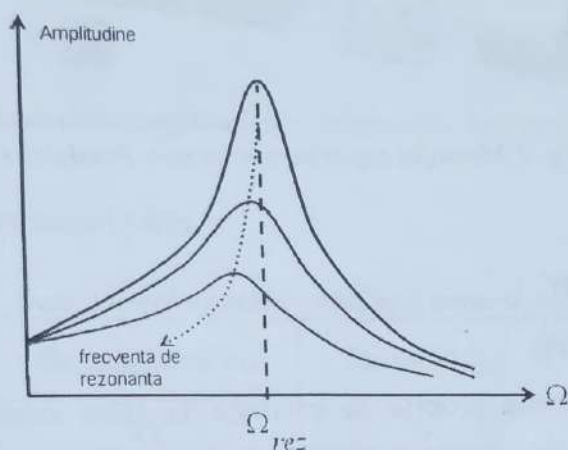


Fig. 3 Curbele de rezonanță pentru diferite amortizări

Dispozitivul experimental

Principalele componente ale pendulului Pohl sunt:

1. un disc de cupru ce se poate roti în jurul unui ax ce trece prin centru legat de un resort sub formă de spirală, ce tinde să aducă discul în poziția de echilibru. Pe disc este fixat un pointer ce permite măsurarea amplitudinilor unghiulare pe o scală circulară aflată în spatele discului;
2. un motor legat printr-o tijă de resort care permite obținerea de oscilații forțate cu o frecvență reglabilă;
3. o frână electromagnetică care permite reglarea efectului de amortizare prin curenți Foucault ca urmare a mișcării discului într-un câmp magnetic uniform generat de un electromagnet.

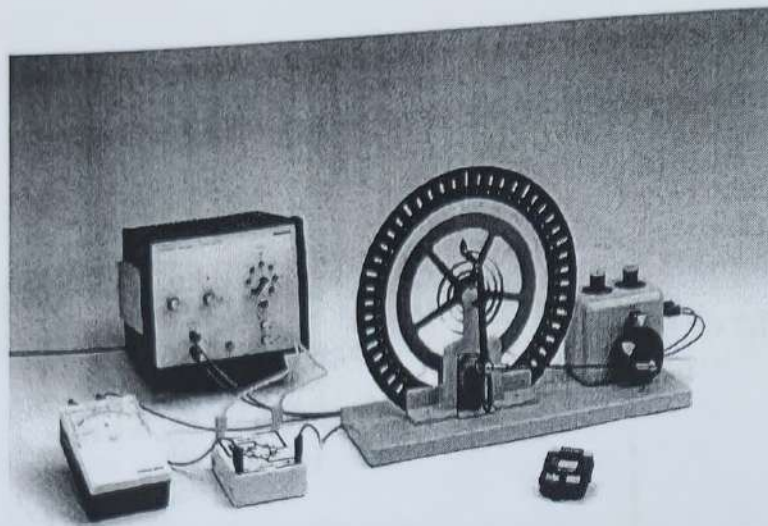


Fig. 4 Montajul experimental pentru Pendulul Pohl

Modul de lucru

A. Oscilații amortizate

1. Se determină perioada proprie de oscilație T_0 (fără amortizare, $I_B = 0A$). Pentru aceasta, pendulul este rotit până la capătul scării gradate și lăsat liber. Se măsoară cu ajutorul unui cronometru intervalul de timp în care se efectuează 10 oscilații complete. Valoarea medie obținută în cadrul experimentului este: $T_0 = (1.817 \pm 0.017)s$, respectiv $\omega_0 = (3.46 \pm 0.03)s^{-1}$.
2. Se determină pseudopulsatia și pseudoperioada pentru diferite grade de amortizare. Sursa de tensiune generează un curent prin bobina electromagnetului în funcție de tensiunea furnizată. Se vor folosi următoarele intensități ale curentului prin bobină:

$$I_B \approx 0,25 A, \quad U_- = 4V$$

$$I_B \approx 0,40 A, \quad U_- = 6V$$

$$I_B \approx 0,55 A, \quad U_- = 8V$$

$$I_B \approx 0,9 A, \quad U_- = 12V$$
3. Pentru o valoare dată a curentului prin bobină se va reprezenta grafic elongația unghiulară în funcție de timp. Pentru aceasta, pendulul este rotit complet într-o parte a poziției de echilibru, apoi lăsat liber; se citesc cu ajutorul pointerului de pe disc amplitudinile unghiulare ale oscilațiilor complete succesive în timp de aceeași parte a poziției de echilibru (fig. 5). Pseudoperioada se determină ca fiind intervalul de timp între amplitudinile unghiulare succesive de aceeași parte a poziției de echilibru.

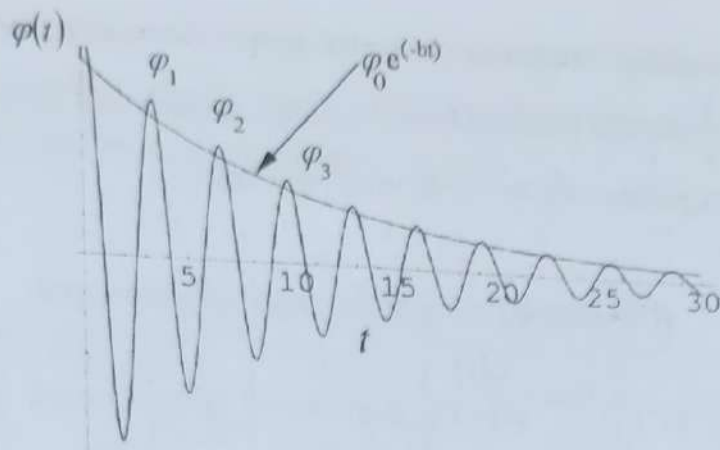


Fig. 5 Dependența amplitudinilor unghiulare succesive de timp

Datele se trec în următorul tabel:

Tabelul 1

Date experimentale - oscilații amortizate

Curentul I_B (A)	Nr. amplitudinii	Timpul t (s)	Amplitudinea oscilației (unități arbitrare)
	φ_0	0	
	φ_1	T	
	φ_2	$2T$	
	φ_3	$3T$	

În figura 6 sunt prezentate graficele experimentale $\varphi = \varphi_0 e^{-bt}$ pentru diferite amortizări.

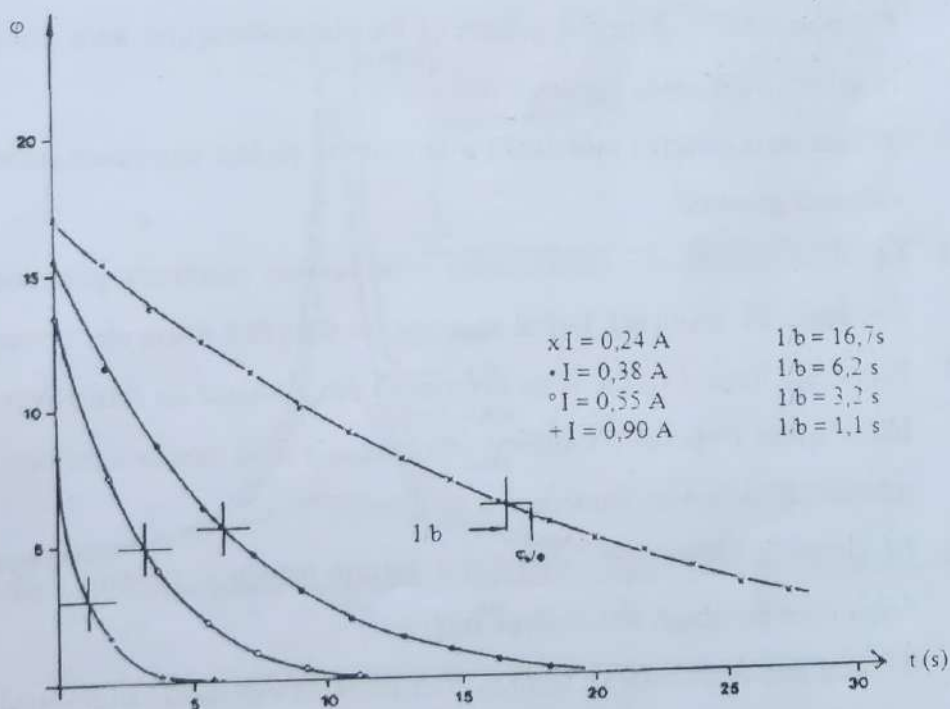


Fig. 6 Dependența amplitudinii $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-bt}$ pentru constante de amortizare diferite

4. Din graficele astfel obținute se determină timpul de viață τ corespunzător lui φ_0/e .
 Rezultă $b = \frac{1}{\tau}$, iar din relația (11) se determină decrementul logaritmic.

Rezultatele experimentale se trec în următorul tabel:

Tabelul 2

Rezultate experimentale – oscilații amortizate

I_B (A)	T (s)	$\omega = \frac{2\pi}{T}$ (s ⁻¹)	$K = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)}$	τ (s)	$b = \frac{1}{\tau}$ (s ⁻¹)	$D = bT$	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ (s ⁻¹)

În Tabelul 3 sunt prezentate date experimentale obținute:

Tabelul 3

Valori caracteristice mișcării oscilatorii amortizate

I (A)	1/b (s)	b (s ⁻¹)	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ (s ⁻¹)	K	D
0.25	16.7	0.06	3.46	1.1	0.12
0.40	6.2	0.16	3.45	1.4	0.31
0.55	3.2	0.31	3.44	1.9	0.64
0.90	1.1	0.91	3.34	5.6	1.72

B. Oscilații forțate

1. Potențiometrele de reglaj grosier și fin ale motorașului sunt poziționate inițial la valoarea minimă, respectiv medie.
2. Se ajustează puterea motorașului la maxim, fixând tensiunea sursei continue la valoarea maximă.
3. Se alege o valoare a curentului prin bobina electromagnetului (o anumită constantă de atenuare). Inițial se alege $I = 0A$ (fără frâna electromagnetică).
4. Frecvența forței externe Ω se determină din numărul de ture efectuate de discul motorașului (reperul considerat este săgeata albă marcată pe disc). Timpul se măsoară folosind un cronometru electronic.
5. Se citește amplitudinea oscilațiilor forțate pentru o valoare dată a frecvenței forței externe (după stabilizarea mișcării).
6. Se modifică frecvența Ω în pași mici folosind butoanele motorașului.

7. Se reprezintă grafic dependența amplitudinii oscilațiilor forțate în funcție de frecvența forței externe pentru diferite constante de atenuare.
8. Se va completa următorul tabel:

Tabelul 4

Date experimentale - oscilații forțate

Nr. det.	Curent de amortizare I_B (A)	Perioada oscilațiilor forțate	Pulsatia Ω (s ⁻¹)	Amplitudinea oscilațiilor forțate φ_a

9. Din frecvența de rezonanță se va determina coeficientul de amortizare b .
10. Se va observa defazajul dintre elongație și forță la frecvențe mici, respectiv frecvențe mari în raport cu frecvența de rezonanță.

În figura 7 sunt reprezentate curbele experimentale $\varphi_a = f(\Omega)$, pentru diferite constante de amortizare.

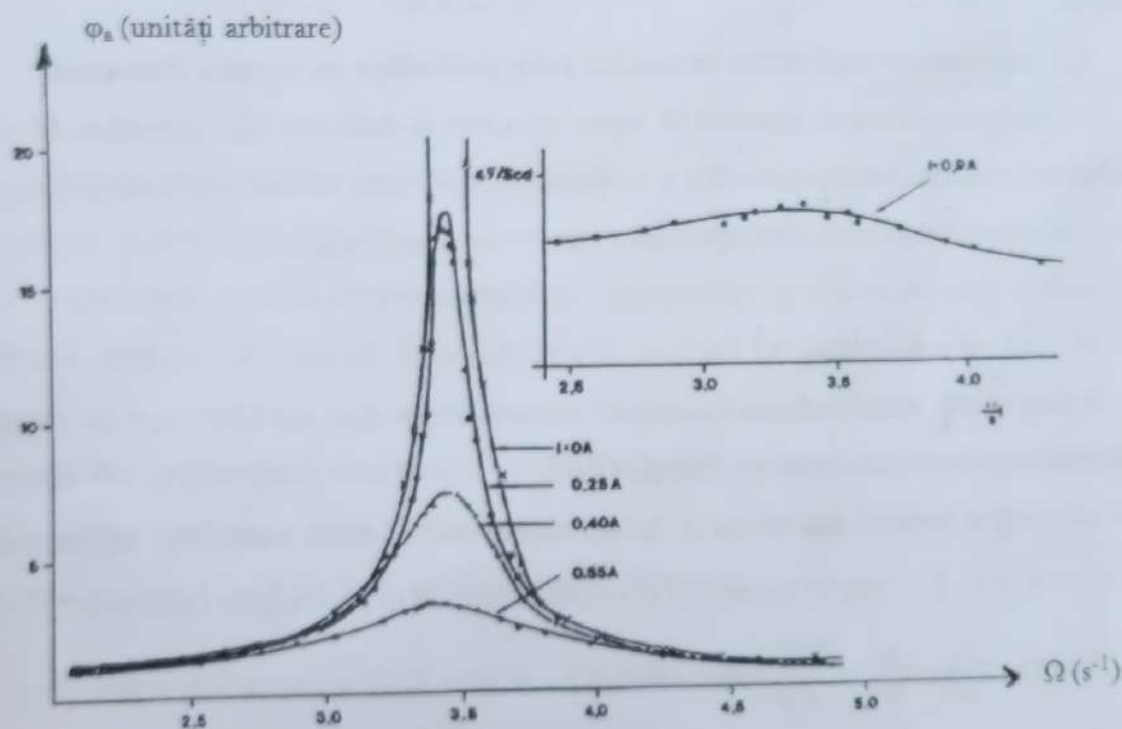


Fig. 7 Curbele de rezonanță pentru diferite constante de amortizare