S5

§1 Operatii cu subspatii vectoriale.

§2 Aplicatii liniare

§1.

① $(\underbrace{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}_{V}, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{A \in V \mid Tr(A) = 0\}$

$V_2 = \{A \in V \mid A = \alpha I_n, \alpha \in \mathbb{R}\}$

a) $V_1, V_2 \subset V$ subsp. vect

b) $V = V_1 \oplus V_2$

② $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +, \cdot)/\mathbb{C}$

a) $\mathcal{R} = \{ I_2, P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \}$ reper în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

(matrice PAULI)

b) $\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}$, $A = ?$, $\mathcal{R}_0$ = reperul canonic

c) Să se afle coord. lui $M = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & i \end{pmatrix}$ în raport cu $\mathcal{R}$.

d) $P_k^2 = I_2$, $\forall k = \overline{1,3}$, $P_a P_b = i\, \varepsilon_\sigma P_c$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \in S_3$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$

e) Dati exemple de subspatii vect. care verifică

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = V_1 \oplus V_2 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4.$

③ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$

$V_2 = \langle \{(1, -1, 2), (3, 1, 0)\} \rangle$

a) Să se descrie $V_2$ printr-un sistem de ec. liniare.

b) Precizati câte un reper în $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$

c) Este sumă directă $V_1 + V_2$ ?

(4) $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0\}$

$V_2 = \langle \{X, 2X^2+1, 3\} \rangle$.

Precizați câte o bază în $V_1$, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.

(5) $(V, +, \cdot)/\mathbb{R}$

Dem că $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n\} \rangle$

(6) $(\mathbb{R}^8, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$U, W \subset \mathbb{R}^8$ ssp vect aî $\dim U = 3$, $\dim W = 5$ și $\dim(U+W) = 8$.

Este sumă directă $U+W$?

(7) $(\mathbb{R}^9, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $U, W \subset \mathbb{R}^9$ ssp vect aî $\dim U = \dim W = 5$

Este $U+W$ sumă directă?

(8) $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}\right.$

a) Det. $V' \subset \mathbb{R}^4$ aî $V \oplus V' = \mathbb{R}^4$.

b) Precizați un reper $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \cup \mathcal{R}$ în $\mathbb{R}^4$ aî $\mathcal{R}$ reper în $V$ și $\mathcal{R}'$ reper în $V'$

c) Aflați coord. lui $x = (1, 2, -1, 3)$ în raport cu $\mathcal{R}$ și descompuneți $x$ în raport cu $\mathbb{R}^4 = V \oplus V'$

d) Generalizare pt un spațiu $n$-dim.

(9) $(\mathbb{R}_4[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$

$U = \langle \{1 + 2X + X^3, 1 - X - X^2\} \rangle$

$V = \langle \{X + X^2 - 3X^3, 2 + 2X - 2X^3\} \rangle$

Precizați câte o bază în $U \cap V$, $U + V$.

Verificați th. Grassmann.

§2.

① $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + x_2, -x_2)$

Dem că $f \in Aut(\mathbb{R}^2)$.

② $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3, -3x_1 - 7x_2 - 4x_3)$

a) $f$ liniară

b) $\ker f = ?$, $\operatorname{Im} f = ?$

Precizați câte un reper în $\ker f$, $\operatorname{Im} f$.

③ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (3x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$

a) $f$ liniară

b) $f$ inj

c) $\operatorname{Im} f = ?$

④ $f: \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P'$

a) $f$ liniară

b) $\dim \ker f$, $\dim \operatorname{Im} f$.

⑤ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

a) $f$ liniară

b) $\dim \ker f$, $\dim \operatorname{Im} f$.

c) $V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$

$f(V') = ?$

⑥ $f: V \to W$ liniară

a) dacă $\dim V < \dim W \Rightarrow f$ nu e surj.

Ex: $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$

b) dacă $\dim V > \dim W \Rightarrow f$ nu e inj

Ex: $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[X]$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (b+c)x + d$