C8 AG 16 — 21.11.2024

Forme biliniare. Forme pătratice.

Def $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect.

$g: V\times V \to \mathbb{K}$ s.n. formă biliniară $\Leftrightarrow$ g este liniară în fiecare argument

i.e. $g(ax+by,z) = ag(x,z)+bg(y,z)$

$g(x, ay+bz) = ag(x,y)+bg(x,z)$, $\forall a,b\in\mathbb{K}$, $\forall x,y,z\in V$

Not $L(V,V;\mathbb{K})$ = mult. formelor biliniare pe V.

$(L(V,V;\mathbb{K}),+,\cdot)$ sp. vect.

Def $g: V\times V\to\mathbb{K}$ este formă simetrică $\Leftrightarrow g(x,y)=g(y,x)$

— " — antisimetrică $\Leftrightarrow g(x,y)=-g(y,x)$

OBS Dacă g este formă simetrică, liniară într-un argument, at este biliniară

$L^s(V,V;\mathbb{K})$ = mult. f. biliniare simetrice

$L^a(V,V;\mathbb{K})$ = mult f. biliniare antisimetrice.

$L^s(V,V;\mathbb{K}),\ L^a(V,V;\mathbb{K}) \subset L(V,V;\mathbb{K})$ subspații vect.

Matricea asociată unei forme biliniare

$g\in L(V,V;\mathbb{K})$, $R=\{e_1,..,e_n\}$ reper în V

$g(e_i,e_j)=g_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$ $\quad G=(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

este matricea asociată lui g în raport cu R

$R=\{e_1,..,e_n\} \xrightarrow{C} R'=\{e_1',..,e_n'\}$, $e_k'=\sum_{i=1}^{n} c_{ik}e_i$, $\forall k=\overline{1,n}$

Scanat cu CamScanner

$$g'_{rs} = g(e'_r, e'_s) = g\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ir} e_i, \sum_{j=1}^{n} c_{js} e_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_{ir} c_{js} \underbrace{g(e_i, e_j)}_{g_{ij}} \Rightarrow g'_{rs} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ir} g_{ij} c_{js}$$

$$\boxed{G' = C^T G \cdot C} \qquad R \xrightarrow{C} R', \quad C \in GL(n, \mathbb{K})$$

Prop rangul matricei asociate lui g este un invariant.

$$rg(G') = rg(C^T G C) = rg\, G = r \leq n.$$

Def $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ s.n. forma pătratică $\Leftrightarrow$

$\exists\, g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$ a.î. $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$

Prop Există o corespondență bijectivă între mult. formelor pătratice def. pe V și mult. formelor biliniare simetrice def. pe V! ($ch\,\mathbb{K} \neq 2$) $\quad 1+1 \neq 0$.

Dem

- Fie $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ formă bil. simetrică
  Construim $Q : V \to \mathbb{K}$, $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$ f. pătratică
- Fie $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ formă pătratică
  Construim $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ formă biliniară simetrică

$$g(x,x) = Q(x), \ \forall x \in V$$

$$Q(x+y) = g(x+y, x+y) = \underbrace{g(x,x)}_{Q(x)} + \underbrace{g(y,y)}_{Q(y)} + 2\underline{g(x,y)} \Rightarrow$$

$$g(x,y) = 2^{-1}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$$

forma polară asociată lui Q.

OBS $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V, $G=(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$g_{ij}=g(e_i,e_j)$, $\forall\, i,j=\overline{1,n}$

$$g(x,y)=g\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\Big)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j\overbrace{g(e_i,e_j)}^{g_{ij}}$$

$$g(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}x_iy_j \quad ; g:V\times V\to\mathbb{K} \text{ formă biliniară}$$

Dacă g este <u>simetrică</u>, atunci $g_{ij}=g_{ji}$, $\forall i,j=\overline{1,n}$
$\iff G=G^T$

$Q:V\to\mathbb{K}$ Q forma pătratică asociată

$$Q(x)=g(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}x_ix_j=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}g_{ii}x_i^2+\underbrace{\sum_{i<j}g_{ij}x_ix_j+\sum_{j<i}g_{ij}x_ix_j}_{2\sum_{i<j}g_{ij}x_ix_j}$$

OBS

$$G=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&4\\3&4&-1\end{pmatrix}\quad G=G^T$$
matricea în raport cu R_0
rep. canonic

$g:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,
$$g(x,y)=1\cdot x_1y_1+2x_1y_2+3x_1y_3+2x_2y_1+4x_2y_3+3x_3y_1+4x_3y_2-x_3y_3$$

$Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2-x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+8x_2x_3$

Def $g\in L^s(V,V;\mathbb{K})$

$\operatorname{Ker} g=\{x\in V \mid g(x,y)=0, \forall y\in V\}$

g nedegenerată $\iff \operatorname{Ker} g=\{0_V\}$

Scanat cu CamScanner

$$\begin{cases} g(x, e_1) = 0 \\ \vdots \\ g(x, e_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \circledast \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} g_{i1} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} g_{in} x_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} x_1 + \dots + g_{n1} x_n = 0 \\ \vdots \\ g_{1n} x_1 + \dots + g_{nn} x_n = 0 \end{cases}$$

$\circledast$ SLO cu necunosc. $x_1, \dots, x_n$.

SLO are sol unică nulă $\Leftrightarrow \det(G) \neq 0 \Leftrightarrow$

G nedegenerată (inversabila)

$\Leftrightarrow$ g nedegenerată.

<u>Def</u> $(V, +, \cdot) / \mathbb{R}$

$Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.

Q s.n. <u>pozitiv definită</u> $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1) \ Q(x) > 0, \ \forall x \in V \setminus \{0_V\} \\ 2) \ Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V \end{cases}$$

$g : V \times V \to \mathbb{R}$ formă bil. sim. s.n. <u>poz. definită</u> $\Leftrightarrow$ forma pătratică asociată este poz. def.

<u>Prop</u> $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$

g poz. def $\Rightarrow$ g nedegenerată

<u>Dem</u>

Dem că $\operatorname{Ker} g = \{0_V\}$.

Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x, y) = 0, \ \forall y \in V$

Considerăm $y = x$.

$$\underbrace{g(x, x)}_{Q(x)} = 0 \xRightarrow{Q \text{ poz def}} x = 0_V \Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\}$$

g nedegenerată.

Exemplu $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$R_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ reperul canonic. $\qquad g(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

a) $G=?$ matricea asociată lui g în raport cu R_0

b) $Q:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ forma pătratică asociată

c) Este Q poz. def?

SOL

a) $g(x,y)=\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}x_iy_j$, $\quad G=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

$g(e_i,e_j)=g_{ij},\ \forall i,j=\overline{1,3}$

$g_{11}=g(e_1,e_1)=g((1,0,0),(1,0,0))=1$

$g_{12}=g(e_1,e_2)=g((1,0,0),(0,1,0))=0$

$g_{13}=g(e_1,e_3)=0$. Analog restul

b) $Q:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$Q(x)=g(x,x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

c) $Q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2>0$
$\forall x\neq 0_{\mathbb{R}^3}$

$Q(x)=0\iff x_1=x_2=x_3=0_{\mathbb{R}}\iff x=0_{\mathbb{R}^3}$

Q este poz. def.

Problemă $Q:V\longrightarrow\mathbb{K}$ formă pătratică

$\exists\ R$ reper în V a.î. $G=(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}=\begin{pmatrix}a_1&&&&\\&\ddots&&&\\&&a_r&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\ 0\end{pmatrix}$

$(rg\,G=r)$?

i.e. $Q(x)=a_1x_1^2+\dots+a_rx_r^2$
o formă canonică.

Teorema Gauss

Fie $Q:V\longrightarrow\mathbb{K}$ formă pătratică

$\Rightarrow\exists$ un reper în V a.î. Q are o formă canonică.

Dem

1) Dacă $Q=0$, at Q are o f. canonică

2) Dacă $Q\neq 0$.

a) $g_{11} \neq 0$

b) Dacă $g_{11} = 0$, dar $\exists\, i \in \{2, .., n\}$ a.î. $g_{ii} \neq 0$,
at. ev. renumerotăm indicii (ef. o schimbare de reper)
și reducem la cazul a)

c) $g_{ii} = 0, \forall i = \overline{1,n}$

$Q \neq 0 \Rightarrow G \neq O_n \quad \exists\, g_{ij} \neq 0,\ i \neq j$

Considerăm sch. de reper:

$$\begin{cases} x_i' = x_i + x_j \\ x_j' = x_i - x_j \\ x_k' = x_k, \quad \forall k \in \{1, .., n\} \setminus \{i, j\} \end{cases}$$

$$x_i = \frac{1}{2}(x_i' + x_j')$$
$$x_j = \frac{1}{2}(x_i' - x_j')$$

$$Q(x) = 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j$$

$$2 g_{ij} x_i x_j = \frac{2}{4} g_{ij} (x_i' + x_j')(x_i' - x_j') = \frac{1}{2} g_{ij} (x_i'^2 - x_j'^2)$$

$$g_{ii}' = \frac{1}{2} g_{ij} \neq 0$$

Se reduce la cazul precedent

Dem prin ind. după nr de coordonate (sau componente) ale lui x, care apar în Q

- Dacă nr de comp $= 1$, at $Q(x) = g_{11} x_1^2$ este o f. canonică

Ip adev P_{k-1} : Dacă Q conține $k-1$ componente ale lui x, at $\exists$ un reper a.î. Q se poate aduce la o f. canonică

Dem P_k : Dacă Q conține k componente ale lui x, at $\exists$ un reper a.î. Q se poate aduce la o f. canonică.

$$Q(x) = g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1k} x_1 x_k + \underbrace{Q'(x)}_{\text{conține } x_2, .., x_k}$$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}}\left(g_{11}^2 x_1^2 + 2g_{12}g_{11}x_1x_2 + \ldots + 2g_{1k}g_{11}x_1x_k\right) + Q'(x)$$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}}\left(g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots + g_{1k}x_k\right)^2 + Q''(x)$$

$Q''(x)$ conține $x_2, \ldots, x_k$.

Fie schimbarea de reper.

$$\begin{cases} x_1' = g_{11}x_1 + \ldots + g_{1k}x_k \\ x_i' = x_i, \quad i = \overline{2,n} \end{cases}$$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} x_1'^2 + Q''(x)$$

$Q''(x)$ conține $x_2', \ldots, x_k'$

Aplicăm P_{k-1} pt $Q''(x) \Rightarrow \exists$ un reper în V a.î. Q'' are o formă canonică.

$$Q''(x) = a_2 x_2''^2 + \ldots + a_r x_r''^2$$

Fie $x_1'' = x_1'$, $a_1 = \frac{1}{g_{11}}$

$$Q(x) = a_1(x_1'')^2 + \ldots + a_r(x_r'')^2.$$

Def $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$ forma normală

$(p, r-p)$ s.n. signatura lui Q.

p — nr. "+", $r-p$ — nr. "−"

Teoremă $Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$\exists R$ un reper în V a.î. Q are forma normală.

Dem T.Gauss $\Rightarrow \exists$ un reper a.î. Q are o formă canonică

$Q(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2$ $\quad a_1, \ldots, a_p > 0$, $\quad a_{p+1}, \ldots, a_r < 0$

Eventual schimbăm indicii (sch. de reper) și considerăm

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} x'_1 = \sqrt{a_1}\, x_1 \\ \vdots \\ x'_p = \sqrt{a_p}\, x_p \\ x'_{p+1} = \sqrt{-a_{p+1}}\, x_{p+1} \\ \vdots \\ x'_r = \sqrt{-a_r}\, x_r. \\ x'_j = x_j,\ j=\overline{r+1,n} \end{cases} \Rightarrow Q(x) = x_1'^2 + \dots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 - \dots - x_r'^2.$$

<u>Teoremă (Sylvester)</u> $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.
Nr de „+" și nr „−" din forma normală reprezintă invarianți la sch. de reper.
(signatura este un invariant).

<u>OBS</u> $Q: V \to \mathbb{R}$ poz def $\Leftrightarrow$ signatura este $(n, 0)$

<u>Exemple</u>

1) $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ $g = ?$

b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f. pătratică asoc.

c) Este Q este poz def?

<u>SOL</u>

a) $G = G^T \Rightarrow g$ simetrică, dar g biliniară $\Rightarrow g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2.$

b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

$= (x_1+x_2)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 = (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 - x_3^2$

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 - x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

$Q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$

(2, 1) signatura

Q nu e poz def.

-9

-) $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_3 y_1 + 2x_1 y_3$

a) $G = ?$ (matricea asociată lui g în rap. cu rep. canonic)

b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

c) Să se aducă Q la forma normală.

SOL

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$! $g_{12} = 1 \neq 0$

b) $Q(x) = g(x,x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 =$

c) Fie sch. de reper

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x_1' + x_2') \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_1' - x_2') \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

$$Q(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}(x_1'^2 - x_2'^2) + 4 \cdot \frac{1}{2}(x_1' + x_2') \cdot x_3'$$

$$Q(x) = \underline{\frac{1}{2}x_1'^2} - \frac{1}{2}x_2'^2 + \underline{2x_1'x_3'} + 2x_2'x_3'$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}(\underline{x_1'^2 + 4x_1'x_3'}) - \frac{1}{2}x_2'^2 + 2x_2'x_3' =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1' + 2x_3')^2 - 2x_3'^2 \underline{- \frac{1}{2}x_2'^2 + 2x_2'x_3'} =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1' + 2x_3')^2 - \frac{1}{2}(x_2'^2 - 4x_2'x_3') - 2x_3'^2$$

$$= \frac{1}{2}(x_1' + 2x_3')^2 - \left(\frac{1}{2}\right)(x_2' - 2x_3')^2 + \cancel{2x_3'^2} - \cancel{2x_3'^2}$$

Fie sch de reper

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1' + 2x_3')\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2' - 2x_3') \\ x_3'' = x_3' \end{cases}$$

$Q(x) = x_1''^2 - x_2''^2$

$(1,1)$ signatura

Q nu e ~~poz~~. def.

$G'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Teoremă (met. Jacobi)

$Q : V \to \mathbb{R}$ f. pătratică reală.

Fie R un reper $\forall$ în V aî matricea G asociată lui Q verifică:

$\Delta_1 = \det(g_{11})$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}, \dots,$ $\Delta_n = \det G$.

sunt nenuli.

At $\exists$ un reper în V aî

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2.$$

Mai mult, dacă $\Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, at Q este ~~pz~~ def.

OBS

a) metoda Jacobi este restrictivă

b) metoda Gauss se poate aplica întotdeauna.

Ex

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

$\Delta_1 = 1 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$Q(x) = \frac{1}{1} x_1'^2 + \frac{1}{1} x_2'^2 + \frac{1}{-1} x_3'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2.$$

$(2,1)$