Funcții uniform continue

Analiză curs 7

Def Fie (X,d) și $f: X \to \mathbb{R}$, f este continuă pe X $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0$ a.î. $d(x,a) < \delta_{\varepsilon,x} \Rightarrow$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

f un ~~ ~~ uniform continuă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d(x,y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Ex $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{arctg}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$a < b$ T. L. pe $[a,b] \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ a.î. $f(b) - f(a) =$
$= f'(c)(b-a) = \frac{1}{1+c^2}(b-a)$ $\leq$
$\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq |b-a|$

$\delta_\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow |b-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(b) - f(a)| < \varepsilon$

OBS Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata mărginită. Atunci f este uniform continuă

$a < x < y < b$

$|f'(t)| \leq M \ \forall t \in (a,b)$

T.L pentru f pe $[x,y] \Rightarrow \exists c$ a.î.
$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(y) - f(x)| < |f'(c)||y-x| \leq M|y-x|$

$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M+1}$ $|y-x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq M|y-x| =$
$= M \frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon$

Ex $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$

$x, y = x+h$

$|f(y)-f(x)| = |f(x+h)-f(x)| = |x^2+2h+h^2-x^2| \geq 2hx$

$x>0$ $h>0$

$h=\frac{1}{x} \Rightarrow \left|f\left(x+\frac{1}{x}\right)-f(x)\right| \geq 2$ $\qquad |f(y_n)-f(x_n)|\geq 2$

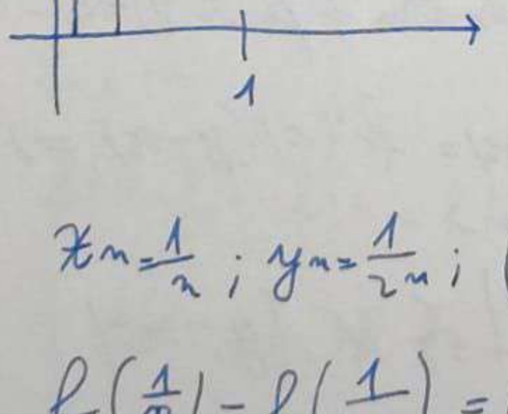
$x_n = n$; $y_n = n+\frac{1}{n}$; $|y_n-x_n| = \frac{1}{n} \to 0$

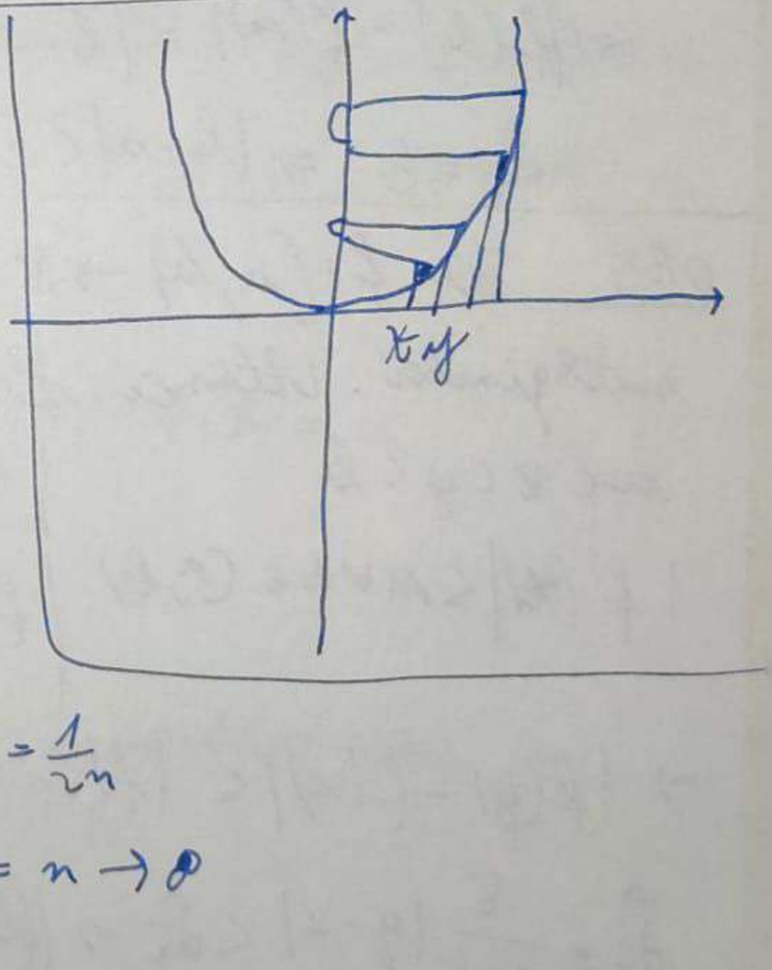
f nu e uniform continuă (U.C) $\Leftrightarrow$ $\exists\, x_n, y_n \subset X$ ai $d(x_n,y_n)\to 0$

și $|f(y_n)-f(x_n)| \geq \varepsilon > 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon > 0$

Ex $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$





$x_n=\frac{1}{n}$; $y_n=\frac{1}{2n}$; $|x_n-y_n| = \frac{1}{2n}$

$f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2n}\right) = (n-2n) = n \to \infty$

Teoremă Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ închisă și mărginită și $f : A \to \mathbb{R}$ continuă pe A. Atunci f este uniform continuă.

Avem f U.C. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ cu $x, y \in A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Pp că f nu este U.C. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ a.î. $\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists x_\delta, y_\delta \in A$ a.î. $d(x_\delta, y_\delta) < \delta$ și $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon$

$\to \delta = \frac{1}{n}$ $t_n = x_{\frac{1}{n}}$; $z_n = y_{\frac{1}{n}} \Rightarrow d(t_n, z_n) \leq \frac{1}{n}$ și

$|f(t_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$

$(z_n)_n \subset A \Rightarrow$ este mărginit $\overset{t}{\Rightarrow} \exists z_{n_k} \to c \Rightarrow c \in A$

$A = \bar{A}$ (A închisă)

$d(t_n, z_n) \to 0 \Rightarrow t_{n_k} \to c$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(t_{n_k}) - f(z_{n_k}) = f(c) - f(c) = 0$

$z_{n_k} \to c$

$f(t_{n_k}) - f(z_{n_k}) \to 0$

$|f(t_{n_k}) - f(z_{n_k})| > \varepsilon \ \forall k$ contradicție $\cancel{\delta}$

Ex $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$\forall\ \varepsilon>0$ f este U.C. pe $[\varepsilon,+\infty)$ $\varepsilon=1$ f este U.C. pe $[1,+\infty)$ $\Rightarrow$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este continuă $\Rightarrow$ f este U.C. pe $[0,1]$

f este U.C. pe $[0,+\infty)$

Def Fie $(X,\mathcal{T})$ și $K\subset X$, K s.n. compactă dacă $\forall$ $(D_i)_{i\in J}\subset\mathcal{T}$ a.î. $K\subset\bigcup_{i\in J}D_i\Rightarrow\exists\ J_0\subset J$ finită a.î.

$K\subset\bigcup_{i\in J_0}D_i$

Prop O mulțime $A\subset\mathbb{R}^n$ este compactă $\Leftrightarrow$ este închisă și mărginită

$(\mathbb{N},d)$ $d(n,m)=\begin{cases}0 & n=m\\ 1 & n\neq m\end{cases}\Rightarrow B(n,r)=\begin{cases}\{n\}, & r\leq 1\\ \mathbb{N} & r>1\end{cases}$

$\mathbb{N}$ - mărginită în d $\qquad\mathbb{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B(n,\frac{1}{2})$

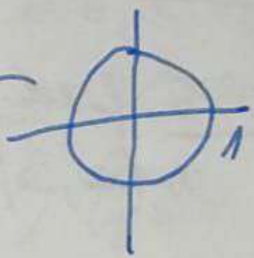
$\emptyset,\mathbb{N}\in\mathcal{T}\Rightarrow\emptyset,\mathbb{N}$ închise $\qquad\mathbb{N}$ nu este compactă

Teoremă Fie (X_1, τ_1) și (X_2, τ_2) spații topologice și $f: X_1 \to X_2$ a.î. U.A.S.E.

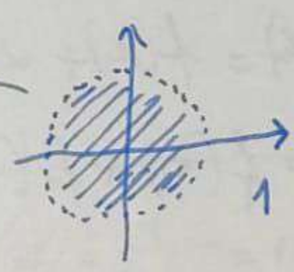
1) f este continuă pe
2) $\forall D \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$
3) $\forall F \subset X_2$ închisă $\Rightarrow f^{-1}(F)$ este închisă

Ex $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$

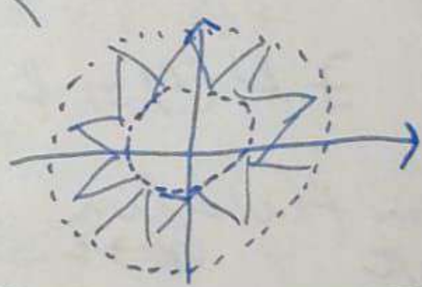
$A = f^{-1}(\{1\}) = \{x^2 + y^2 = 1\}$ închisă



$f^{-1}((-1,1)) = \{x^2 + y^2 < 1\} = B(0,1)$



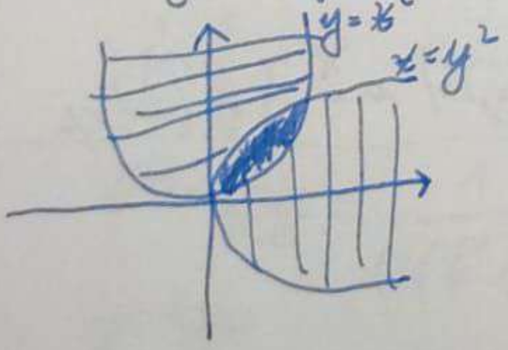
$f^{-1}((1,4)) = \{1 < x^2 + y^2 < 4\}$ = deschisă



$A = \{x^2 \le y \le \sqrt{x},\ x \ge 0\}$ Ex

$x^2 = y \quad y^2 = x \quad x \ge 0$

$\Rightarrow x^4 \le x \Rightarrow x \in [0,1]$
$\Rightarrow y \in [0,1]$



$A = \{x^2 \le y\} \cap \{y^2 \le x\}$

$g, h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad g(x,y) = y - x^2 \quad h(x,y) = x - y^2$

$A = \underbrace{g^{-1}([0,+\infty))}_{\text{închisă}} \cap \underbrace{h^{-1}([0,+\infty))}_{\text{închisă}} \to$ închisă

Derivabilitate

Def Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ şi $c\in(a,b)$. Funcţia f este derivabilă în c dacă $\exists \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\in\mathbb{R}$

şi notăm $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

OBS $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \Leftrightarrow 0=\lim\limits_{x\to c}\underbrace{\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{x-c}}_{w(x)}$

OBS f este derivabilă în $c \Leftrightarrow \exists\, \alpha\in\mathbb{R}\ (\alpha=f'(c))$ şi $w:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î.

$$f(x)=f(c)+\alpha(x-c)+(x-c)w(x)$$

$y=f(c)+f'(c)(x-c)$ - ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în c

OBS $\exists f'(c) \Rightarrow f$ este continuă în c

$$\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c} f(c)+\alpha(x-c)+\alpha(x-c)w(x)=f(c)$$

Prop Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ şi $c\in(a,b)$ a.î. $\exists f'(c)$ şi $\exists g'(c)$. Atunci:

1) $\exists (f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)$

2) $\exists (f\cdot g)'(c)=f'(c)\cdot g(c)+f(c)\cdot g'(c)$

dacă $g(x)=\alpha \Rightarrow (\alpha f)'(x)=\alpha f'(x)$

3) dacă $f(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists \left(\frac{1}{x}\right)'(c) = \frac{f'(c)}{f^2(c)}$

<u>Prop</u> Fie $f:(a,b) \to (c,d)$, $g:(c,d) \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a,b)$ a.î. $\exists f'(x_0)$ și $\exists g'(f(x_0))$

Atunci $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

<u>Prop</u> Fie $f:(a,b) \to (c,d)$ bijectivă și $x_0 \in (a,b)$ aî $\exists x_0 \in (a,b)$ aî $\exists f'(x_0) \neq 0$ și f^{-1} să fie continuă în $f(x_0) = y_0$. Atunci $\exists (f^{-1})(y_0) =$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(x^{-1}(y_0))}$$

<u>Ex</u> $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ $f(x) = tg\, x$ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x > 0$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $f^{-1}(x) = arctg\, x$

f este continuă și strict crescătoare $\Rightarrow$

f^{-1} este continuă și strict cresc.

$$(arctg\, y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + tg^2 \underbrace{arctg\, y}_{x}} = \frac{1}{1+y^2}$$

$y = tg\, x$

Teoremele fundamentale

$\boxed{\text{T. Fermat}}$ Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ şi $c\in(a,b)$ a.î. $\exists$ $f'(c)$ şi c este un punct de extrem local pentru $f \Rightarrow f'(c)=0$

Dem c este un minim local $\Rightarrow \exists \varepsilon>0$ a.î. $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

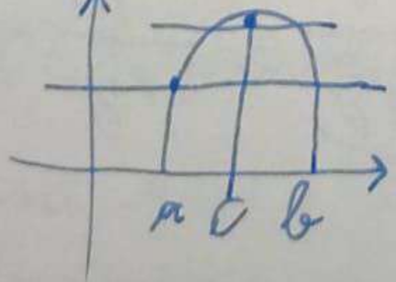
$\Rightarrow f(x)\geq f(c)$

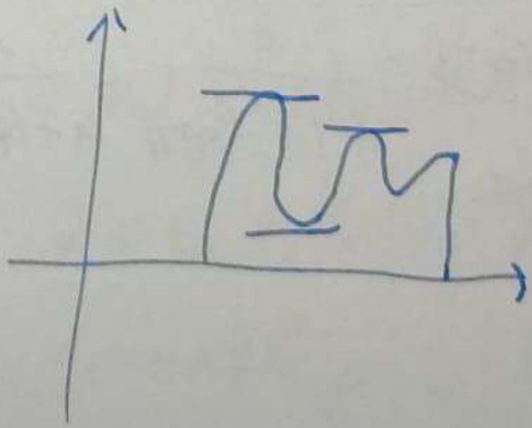
$$\left.\begin{array}{l} \underline{C_1}\ x<c \Rightarrow f(x)-f(c)\geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0 \Rightarrow f'(c)\leq 0 \\ \qquad\qquad x-c<0 \\ \underline{C_2}\ x>c \Rightarrow f(x)-f(c)\geq 0 \Rightarrow f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\underbrace{\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{\geq 0}\geq 0 \\ \qquad\qquad x-c>0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(c)=0$

$\boxed{\text{T. Rolle}}$ Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă în a şi b, derivabilă pe $(a,b) \Rightarrow f$ continuă pe $[a,b]$ şi $f(a)=f(b)$

Atunci $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$

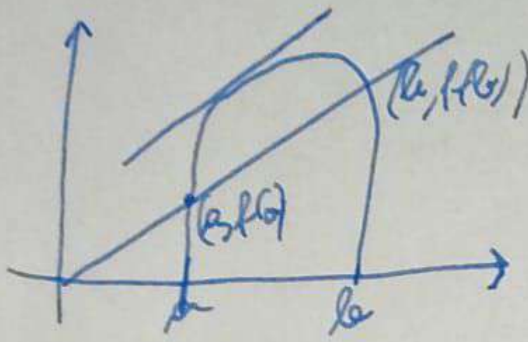




T. Lagrange Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b). Atunci $\exists\, c \in (a, b)$ a.î.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dacă $f(a) = f(b) \Rightarrow$ T. Rolle



OBS $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilă. Atunci:

1) f constantă $\Rightarrow f' = 0$
2) f crescătoare $\Rightarrow f' \geq 0$
3) f descresc $\Rightarrow f' \leq 0$

OBS Fie $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilă

1) dacă $f'(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow f$ este const
2) dacă $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ este cresc
3) dacă $f'(x) \geq 0$ și $\mathrm{Int}\{x \mid f'(x) = 0\} = \emptyset \Rightarrow f$ este str cresc

T. Cauchy Fie $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ a.î. f și g să fie continue pe $[a, b]$, derivabil pe (a, b) și $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$

Atunci $g(a) \neq g(b)$ și $\exists\, c \in (a, b)$ a.î. f și g să fie continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) și $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$

atunci $g(a) \neq g(b)$ și $\exists\, c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad (g(x) = x \Rightarrow \text{T. Lagrange})$$