SEM II -

Listă ex

① Fie a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Să se calculeze A^{-1}, utilizând Th. Hamilton-Cayley, respectiv algoritmul Gauss-Jordan.

② Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Să se determine forma eșalon (redusă). Precizați rg A

③ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Să se scrie polinomul caracteristic

b) calculați A^{100}, utilizând Th Hamilton-Cayley

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I_2$

Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$ ai $B = aA + bI_2$

5. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculați det A, utilizând Th. Laplace pentru $p=2$

l_2, l_3 fixate, resp c_1, c_2 fixate

⑥ Fie $A = \begin{pmatrix} a_1c_1 & a_2d_1 & a_1c_2 & a_2d_2 \\ a_3c_1 & a_4d_1 & a_3c_2 & a_4d_2 \\ b_1c_3 & b_2d_3 & b_1c_4 & b_2d_4 \\ b_3c_3 & b_4d_3 & b_3c_4 & b_4d_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$

Utilizând th Laplace pt $p=2$ și l_1, l_2 fixate, să se arate că $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix}$

⑦ Fie x_1, x_2, x_3 răd. ec. $x^3+px+q=0$

Calculați $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}^2$ în funcție de p și q.

⑧ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabile.

$\Rightarrow rg(A^{-1}+B^{-1}) = rg(A+B)$

Ind: Dacă $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile

$\Rightarrow rg(BAC) = rg A, \ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

⑨ Utilizând matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$,

arătați că $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$

⑩ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Calculați A^n, utilizând Th H-C

⑪ $X^{2024} = A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Precizați nr de soluții.

b) Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, care este nr de soluții

4975

EX12 $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^3 & -1 & 8 \\ 1 & x^2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ Să se rez ec. în $\mathbb{R}$

EX13 P, Q, R funcții de grad cel mult 2 și $a, b, c \in \mathbb{C}$ date

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} P(1) & Q(1) & R(1) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(1) & Q(1) & R(1) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(1) & Q(1) & R(1) \end{vmatrix}$$

Dacă $\Delta_0 = 1$, să se det $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$.

Ind. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{vmatrix} P(x) & Q(x) & R(x) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(x) & Q(x) & R(x) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(x) & Q(x) & R(x) \end{vmatrix}$$

$f(a) = f(b) = f(c) = \Delta_0 = 1$.

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

EX14 $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $AB = BA$

Dem că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

EX15 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $A^n \neq O_n$, at $A^k \neq O_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Ind: H-C: $A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n I_n = O_n \quad | \cdot A^{k-1} \Rightarrow \sigma_n = 0$

Pp abs $\exists k > n$ (min) a.î. $A^k = O_n$

Se repetă rat și $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 0 \Rightarrow A^n = O_n$.