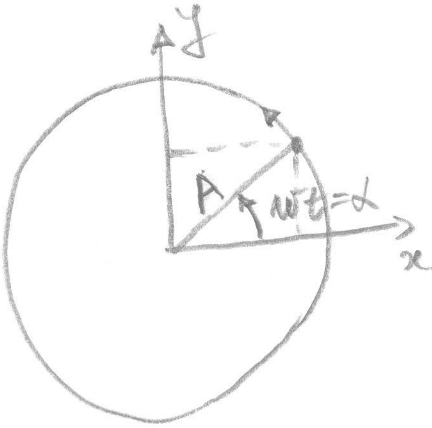
/

Oscilații mecanice - Curs 1 (1)

(1) Oscilatorul liniar armonic. Exemple

(2) Soluția oscilatorului liniar armonic

(1)



Mișcare pe cerc de rază A.

ω - viteză unghiulară

ω = constant

Condiții inițiale:

* la $t_0 = 0$, $x = A$, $y = 0$

$\Rightarrow \alpha = \omega t \rightarrow$ unghiul la centru descris în timpul t (1)

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = A\sin\omega t \end{cases}$$

x, y sunt f-cții de timp.

$$\begin{cases} x'(t) \equiv \dot{x} \equiv \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t \\ y'(t) \equiv \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = A\omega\cos\omega t \end{cases}$$ (2) viteza

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$ (3) accelerația

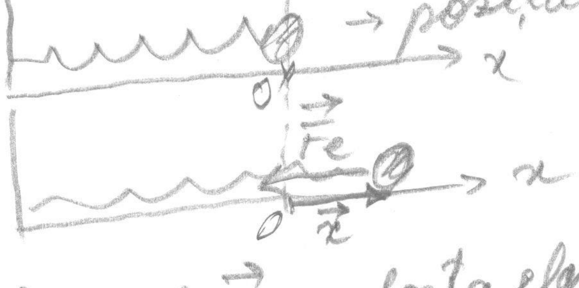
Comparând (1) cu (3) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 & (4a) \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 & 4(b) \end{cases}$$

Ec. (4a) sau (4b) represintă ecuația oscilatorului armonic liniar (OLA). Ecuția OLA este o ecuație diferențială de <u>ordinul 2</u> (x este dublu derivat la timp), <u>liniară</u> (nu apar puteri în x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ sau t) și <u>omogenă</u> (în dreapta semnului egal apare 0)

<u>Exemple fizice</u>

(1.1) <u>Resort + corp în plan orisontal</u>



* Forțele pe verticală își fac echilibru și nu sunt reprezentate
* Mișcarea se face fără frecare

(5) $\vec{F_e} = -k\vec{x}$ → forța elastică

$\vec{x}$ → vector de posiție față de posiția de echilibru

$\vec{F_e}$ tinde să aducă corpul de masă "m" către posiția de echilibru.

Legea a 2-a a mecanicii se scrie:

$$\vec{F_e} = m\vec{a} \quad (6)$$

$\vec{a}$ → vectorul accelerație

$\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$ prin definiție

Din (5) și (6) $\Rightarrow$

$$m\ddot{\vec{x}} + k\vec{x} = 0 \qquad (7)$$

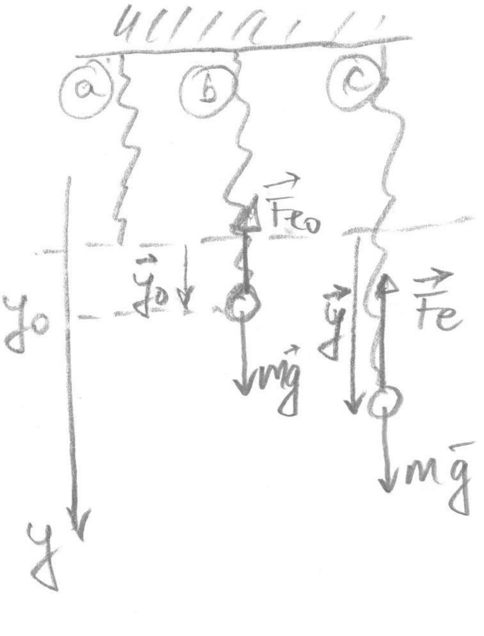
Renunțăm la scrierea vectorială și ec.(7) devine o ecuație pentru <u>componentele</u> vectorilor pe axa Ox. Componenta unui vector pe o axă este o mărime scalară (număr real) pozitivă (negativă) dacă proiecția vectorului pe axă și axa au același (opus) sens.

$\Rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \text{ mișcare de OLA}$$

$\frac{k}{m} = \omega^2$ → notație

(1.2) <u>Resort-corp în plan vertical</u>



ⓐ → resort nedeformat

ⓑ → corp + resort în poziția de echilibru

ⓒ → corp + resort în oscilație

La echilibru: $\vec{F}_{e0} + m\vec{g} = 0$

$$-k\vec{y}_0 + m\vec{g} = 0 \Rightarrow$$

$$-ky_0 + mg = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{mg}{k} \quad (8)$$

În oscilație: $\vec{F}_e + m\vec{g} = m\vec{a}$

$$-k\vec{y} + m\vec{g} = m\ddot{\vec{y}} \Rightarrow$$

$$m\ddot{y} + ky = mg \quad | : m$$

$$\ddot{y} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} y = g$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g \quad (9)$$

Ec. (9) este ec. diferențială, de ordinul 2, liniară și neomogenă.

Ec. (9) se poate transforma într-o ecuație omogenă cu substituția:

$$y = u + y_0 \quad (10)$$

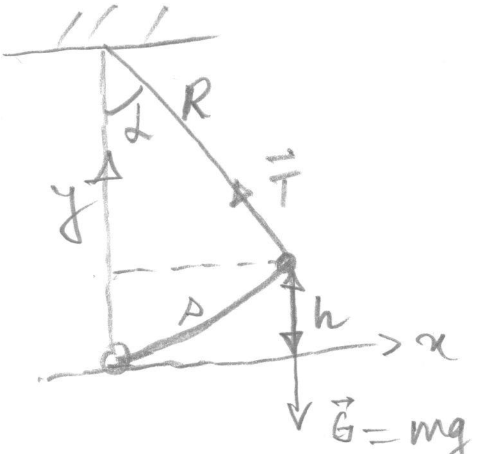
Introducem (10) în (9), y_0 este constant $\Rightarrow$

$$\ddot{u} + \omega^2 u + \omega^2 y_0 = g \quad (11)$$

Cu ec(8) & $\frac{k}{m} = \omega^2$ din (11) $\Rightarrow$

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (12)$$

(1.3) Pendulul matematic (gravitațional)



$\vec{G} + \vec{T} = m\vec{a}$

$\vec{T} \Rightarrow$ vectorul tensiune în fir

$R \rightarrow$ lungimea firului (inextensibil)

Neglijăm frecările $\Rightarrow$ energia OLA se conservă:

(14) $E = E_c + E_p$

E_c → energie cinetică

E_p → energie potențială

(15)
$$\begin{cases} E_c = \dfrac{mv^2}{2} \\ s = \alpha R \rightarrow \text{lungimea arcului} \Rightarrow \\ v = \dot{s} = \dot{\alpha} R \\ E_c = \dfrac{m}{2}\dot{\alpha}^2 R^2 \end{cases}$$

(16) $E_p = mgh = mgR(1 - \cos\alpha)$

(17) $E = E_c + E_p = \dfrac{m}{2}\dot{\alpha}^2 R^2 + mgR(1-\cos\alpha)$

Variația energiei E în timp este nulă (condiția de conservare a energiei) $\Longrightarrow$

$$\dot{E} = \frac{m}{2} 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}R^2 + mgR\dot{\alpha}\sin\alpha = 0 \quad (18)$$

$$\Rightarrow m\dot{\alpha}R^2\left(\ddot{\alpha} + \frac{g}{R}\sin\alpha\right) = 0 \quad (19)$$

sau

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \underbrace{\frac{g}{R}}_{\omega^2}\sin\alpha = 0 \\ \ddot{\alpha} + \omega^2\sin\alpha = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Pentru unghiuri $\alpha \leq 5^\circ$, $\sin\alpha \simeq \alpha \Rightarrow$

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0 \rightarrow \text{ecuație OLA} \quad (21)$$

(2) <u>Soluția ecuației OLA</u>

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (22)$$

Se formează ecuația <u>caracteristică</u> căutând soluții de forma $x = Ce^{kt}$ cu C și k constante $\Rightarrow$

$$\dot{x} = Cke^{kt}; \quad \ddot{x} = Ck^2e^{kt} \text{ și}$$

introducând în (22) $\Rightarrow$

$$Ce^{kt}(k^2 + \omega^2) = 0 \quad (23) \Rightarrow$$

$$k = \pm i\omega \quad (24)$$

Soluția ec. (22) este o combinație <u>liniară</u> a soluțiilor date de ec. caracteristică $\Rightarrow$

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (25)$$

Pentru a găsi C_1 şi C_2 sunt necesare condiţii iniţiale. Considerăm că la $t=0$:

$$x(0) = x_0 \quad \text{şi} \quad v(0) = v_0 \quad (26)$$

unde v este viteza, adică $v = \dot{x}$

Dar (26) =>

$$v = i\omega(C_1 e^{i\omega t} - C_2 e^{-i\omega t}) \quad (27)$$

Condiţiile iniţiale aplicate ec. (25) & (27) =>

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ \dfrac{v_0}{i\omega} = C_1 - C_2 \end{cases} \quad (28)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{v_0}{i\omega}\right) \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 - \dfrac{v_0}{i\omega}\right) \end{cases} \quad (29)$$

Introducem (29) în (25) =>

$$x = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{i\omega}\right)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{i\omega}\right)e^{-i\omega t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)x_0 + \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\frac{v_0}{\omega}$$

$$= x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \quad (30)$$

unde s-au folosit ec. Euler:

$$\begin{cases} \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} = \cos\alpha \\ \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \sin\alpha \end{cases} \qquad (31)$$

Ec. (30), $x = x_0 \cos\omega t + \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$,

se scrie deseori sub forma:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (32)$$

$$\begin{cases} A \to \text{amplitudine} \\ \omega \to \text{pulsatie} \\ \alpha \to \text{faza inițială} \end{cases} \qquad (33)$$

Def: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, T perioada (34)

Deci (32) $\Rightarrow$

$$x = A\cos\omega t\cos\alpha - A\sin\omega t\sin\alpha \qquad (35)$$

Comparăm (30) cu (35) $\Rightarrow$

$$(36)\ \begin{cases} x_0 = A\cos\alpha \\ v_0 = -\omega A\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0}{A} = \cos\alpha \\ \dfrac{v_0}{\omega A} = -\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Leftrightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad (37)$$ 9

și

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0} \qquad (38)$$

Obs: $x(0) \overset{(32)}{=} A\cos\alpha$

$$\begin{cases} v \overset{(32)}{=} \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha) \\ v(0) = v_0 = -\omega A \sin\alpha \end{cases} \qquad (39) \Rightarrow$$

Semnificația lui T:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A\cos[\omega(t+T)+\alpha] = \\ &= A\cos(\omega t + \omega T + \alpha) \overset{(34)}{=} \\ &= A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{T}T + \alpha) = \\ &= A\cos(\omega t + \alpha) = x(t) \end{aligned} \qquad (40)$$

Deci $x(t)$ și x la momentul $t+T$, adică $x(t+T)$ au aceeași valoare. Se spune că OLA are perioada T.

Energia OLA se conservă:

$$E = E_c + E_p$$

$$E_c = \frac{m}{2} v^2 \overset{(39)}{=} \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$E_p = k\frac{x^2}{2} \overset{(32)}{=} \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow$$

dar $\frac{k}{m} = \omega^2 \Rightarrow m\omega^2 = k$

$$E = \frac{m\omega^2}{2} A^2 \Big[\underbrace{\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha)}_{1}\Big] =$$

$$= kA^2 = \text{constant}$$