Curs Analiză

Notare

1 oficiu

2 activitate seminar |0,1 prezență|

3 teorie examen

5 exerciții

Curs

→ M. Babol

→ R. Miculescu

Analiza Mat Vol I și II

Def ① Un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ are limita $a\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n\geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$ și notăm $x_n\to a$

sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

② $x_n\to+\infty \Leftrightarrow \forall M$ a.î. $\forall\, n\geq n_M \Rightarrow x_n\geq M$

Ex ① $x_n=\frac{2n}{n+1} \overset{?}{\to} a=2$

$|x_n-a| = \left|\frac{2n}{n+1}-2\right| = \left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon}<n+1$; $\frac{2}{3}-1<n$; $n_\varepsilon=\left[\frac{2}{\varepsilon}-\cancel{1}\right]+\cancel{1}=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$

② $y_n=\frac{2n^2}{n^2+n+1}\to a=2$ $\quad |y_n-a| = \left|\frac{2n^2}{n^2+n+1}-2\right| =$

$= \frac{2n+2}{n^2+n+1} < \cancel{\varepsilon} < \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}<\varepsilon$

$\frac{4}{\varepsilon}<n \quad n_\varepsilon=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+1$

③ $\frac{n\sqrt{n}}{n+1}\to+\infty$; $\forall M>0\ \exists\, n_M$ a.î. $\forall\, n\geq n_M \Rightarrow x_n\geq M$

$\frac{n\sqrt{n}}{n+1}\geq M$

$$\frac{n\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{n\sqrt{n}}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2} \geq M$$

Def ① O mulțime $V \subset (\mathbb{R}(\overline{\mathbb{R}}))$ s.n. vecinătate pentru $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$

② $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ este o vecinătate a lui $+\infty$ dacă $\exists\, M \in \mathbb{R}$ a.î. $(M, +\infty] \subset V$

③ $\mathcal{V}_a = \{V \subset \mathbb{R}(\overline{\mathbb{R}}) \mid V$ este o vecinătate a lui $a\}$

④ $x_n \to a \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists\, n_V$ a.î. $\forall\, n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

OBS ① $a \in V \ \forall\, V \in \mathcal{V}_a$

② $V \in \mathcal{V}_a$ și $V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}_a$

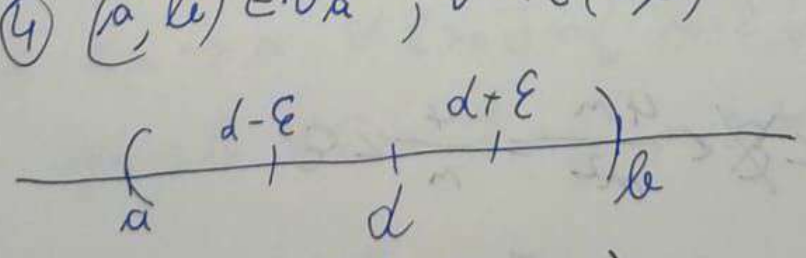
③ $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a$

dem $\Downarrow$

$\exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ a.î. $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1) \subset V_1$
$(a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2) \subset V_2$

Fie $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V_1 \cap V_2$

④ $(a, b) \in \mathcal{V}_a$, $\forall\, d \in (a, b)$



$\varepsilon = \min(b-d, d-a)$

⑤ $\forall\, V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists\, W$ a.î. $a \in W \subset V$ și $W \in \mathcal{V}_y$ $\forall\, y \in W$

OBS $x_n \to a$ cu $\varepsilon \Leftrightarrow x_n \to a$ cu vecinătate

$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \in V_a$

$\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Prop ① Orice șir convergent este mărginit

$(x_n = (-1)^n \quad |x_n| = 1 \quad x_{2n} = 1 \to 1$ și $x_{2n+1} \to -1)$

Dem $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ a. î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \to a$

$\varepsilon = 1 \quad \forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq |x_n - a| + |a| = |a| + 1$

$|x_n| \leq M = \text{maximul}\left\{|a|+1, \max_{k=1}^{n_1} |x_k|\right\}, \forall n \geq 1$

Prop ② Dacă $x_n \to a$ și $y_n \to b$, atunci

1) $x_n + y_n \to a + b$; 2) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$

3) $|x_n| \to |a|$; 4) dacă $x_n \leq y_n\ \forall n \geq 1 \Rightarrow a \leq b$

5) dacă $x_n \neq 0\ \forall n \geq 1$ și $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

$\left(\frac{y_n}{x_n} \to \frac{b}{a}\right)$

Dem 1) $x_n \to a\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n'_\varepsilon$ a. î. $\forall n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$y_n \to b\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n''_\varepsilon$ a. î. $\forall n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon), \ \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x_n + y_n) - (a+b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Dem 2) $|x_n y_n - a\cdot b| = |\underline{x_n} y_n - \underline{x_n} b + x_n \cdot \underline{b} - a\underline{b}| \le$

$\le \underbrace{|x_n||y_n - b|}_{\le \varepsilon} + \underbrace{|b||y_n - a|}_{\le \varepsilon} \le \varepsilon\left(|b| + |x_n|\right) \le \varepsilon\left(|b| + M\right)$

$x_n \to a \Rightarrow \exists M$ a.î. $|x_n| \le M \ \forall n \ge 1$

(T1) Orice șir monoton e convergent ($\forall$ șir monoton și mărginit e convergent)

(T2) Un șir mărginit admite subșir convergent

$\forall$ șir mărginit admite un subșir convergent

Dem 1 $(x_n)_{n\ge 1}$ crescător

$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \le M$

$a = \sup\limits_{n \ge 1} x_n$

$y_n = 1 - \frac{1}{n}$

$y_1 = 0;\ y_2 = \frac{1}{2};\ y_3 = \frac{2}{3} \le \ldots \le y_n = \frac{n-1}{n} \le 4 = M$

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ a.î. $a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$

$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le x_n \le a < a + \varepsilon$

$\nearrow$ ~~monotonia~~ monotonia; $a = \sup\limits_{n \ge 1} x_n$

$\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$x_n \to a$

distanță

Def 1) O funcție $d\ X\times X\to[0,+\infty)$ a. î.

i) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

ii) $d(x,y)=d(y,x)\ \forall x,y\in X$

iii) $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)\ \forall x,y,z\in X$

s.n distanță

2) (X,d) s.n. spațiu metric

3) $x_n\xrightarrow{d} a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ a. î. $\forall n\geq n_\varepsilon \Leftrightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$

$\Leftrightarrow d(x_n,a)\xrightarrow[n]{}0$

4) $B(a,r)=\{x\in X \mid d(x,a)<r\}$ unde $r>0$ și $a\in X$

5) $V\in \mathcal{V}_a \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon>0$ a. î. $B(a,\varepsilon)\subset V$

Ex 1) $(\mathbb{R},d)$ $\quad d(x,y)=|x-y|$

i) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$

ii) $d(x,y)=|x-y|=|y-x|=d(y,x)$

iii) $d(x,y)+d(y,z)=|x-y|+|y-z|\geq|x-y+y-z|=$

$=|x-z|$

$x_n\xrightarrow{d} a \Leftrightarrow x_n\to a$

$B(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

$d(x,y)=|x-y|$

Ex 2) $(\mathbb{C},d)$, $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$

$B(a,r)=\{z \mid |z-a|<r\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \|$

$\qquad\qquad\qquad\quad \sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}$

$a = b + ic$

$z = x + iy$

$(x-b)^2 + (y-c)^2 < r^2$

Ex $z_n = x_n + iy_n \to z = x + iy$

$\Leftrightarrow |z_n - z| = d(z_n, z) \to 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \to 0$ $\quad x_n \to x$, $y_n \to y$

$\quad \|$

$|x_n - x|$

$$\frac{2n+1}{3n+1} + i\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{2}{3} + ie$$

$\boxed{\overline{R} = R \cup \{-\infty, -\infty\}}$ $\quad \varphi : \overline{R} \to [-1, 1]$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = +\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in R \\ -1, & x = -\infty \end{cases}$$

$f|_R$

f pe mulțimea R

~~$d_\varphi : \overline{R} \times \overline{R} \in [0$~~ $\quad d_\varphi : \overline{R} \times \overline{R} \to [0, \infty)$

$d_\varphi(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$

Atunci 1) φ este bijectivă, crescătoare, $\varphi|_R$ este continuă și $\varphi^{-1}|_{(-1,1)}$ este continuă

2) $d\varphi$ este distanța 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ în $\overline{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d\varphi} a$

Def Fie (X, d) un spațiu metric
1) O mulțime $A \subset X$ s.n. mărginită dacă $\exists B(a, r) \subset X$ a.î. $A \subset B(a, r)$
2) Un șir $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ s.n. Cauchy $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, y_n) < \varepsilon$

Teoremă Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci
1) Un șir Cauchy este mărginit
2) Un șir convergent este Cauchy
3) Un șir convergent este mărginit
4) Un șir Cauchy, care are un subșir convergent este convergent

Ex $A = (0, 2) \subset \mathbb{R}$, (A, d) $d(x, y) = |x - y|$

$x_n = \frac{1}{n} \to 0$ în $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ este Cauchy în $\mathbb{R}$ (A), $0 \notin A$ $\Rightarrow$ nu e convergent

Ex $(\mathbb{R}, d)$ Fie $(x_n)_n$ un șir Cauchy $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ este mărginit $\Rightarrow \exists x_{n_k} \to a \Rightarrow x_n \to a \Rightarrow$ $\boxed{\text{Cauchy} \Leftrightarrow \text{mărginit în } \mathbb{R}}$

Def Un spațiu metric în care orice șir Cauchy este convergent s.n. complet

$(\mathbb{R}, d)$ = complet
$[0, 1), d)$ nu este complet

Dem 1) $(x_n)_{n\geq 1}$ este Cauchi $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î $\forall n,m\geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x_n, x_m)<\varepsilon$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \forall n\geq n_1\ d(x_n, x_{n_1})<1 \Leftrightarrow x_n\in B(x_{n_1},1)$

$r = 1 + \max\limits_{k=1}^{n_1} d(x_{n_1}, x_k) < +\infty$

$\Rightarrow x_n \in B(x_{n_1}, r)$

2) $x_n\to a$
$\forall \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î $\forall n\geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$
$n, m\geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$ și $d(x_m,a)<\varepsilon$
$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,a)+d(a,x_m)<2\varepsilon$

$1)+2)\Rightarrow 3)$ Teorema

$(x_n)_{n\geq 1}$ Cauchy $\forall \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î $\forall m,n\geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x_n, x_m)<\varepsilon$

$x_{n_k}\to a$ $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists\, k_\varepsilon$ a.î $\forall k\geq k_\varepsilon \Rightarrow$
$d(x_{n_k}, a)<\varepsilon$

Aleg k_0 a.î $k_0 > k_\varepsilon \Rightarrow n_{k_0}\geq n_\varepsilon \Rightarrow \forall n\geq n_\varepsilon\ d(x_{n_{k_0}}, x_n)<\varepsilon$

$d(x_n,a)\leq \underbrace{d(x_n,x_{n_k})}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x_{n_k},a)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$