Unde elastice

Fenomenul de propagare a unei perturbaţii se numeşte *undă*. Undele care se propagă printr-un mediu se numesc unde *mecanice*. Pentru ca o undă să se poată propaga, mediul trebuie să aibă proprietăţi elastice, astfel încât după perturbare să existe forţe care să tindă să readucă mediul în starea de nedeformare. Astfel, undele mecanice se numesc şi unde *elastice*. Dacă oscilaţia mediului se face în direcţia de propagare a undei, unda se numeşte *longitudinală*. Dacă oscilaţia mediului se produce în direcţie perpendiculară direcţiei de propagare a undei, unda se numeşte *transversală*. Exemple de unde elastice longitudinale: undele care se propaga de-a lungul unui resort (vezi Fig.1a), undele sonore (mediu de propagare-aer). Exemple de unde elastice transversale: undele care se propaga de-a lungul unui resort (vezi Fig.1b), valurile (mediu de propagare-apa). Undele seismice (mediu de propagare-Pamânt) pot fi atât longitudinale cât şi transversale.

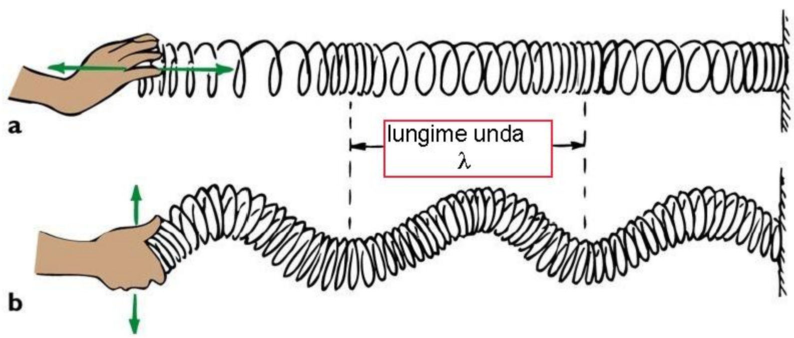


Fig. 1 Undă: a) transversală, b) longitudinală, într-un resort.

Locul geometric al punctelor mediului care oscilează în fază (la fel) definesc *suprafaţa de undă*. În funcţie de forma suprafeţei de undă, undele pot fi *plane*, *sferice*.

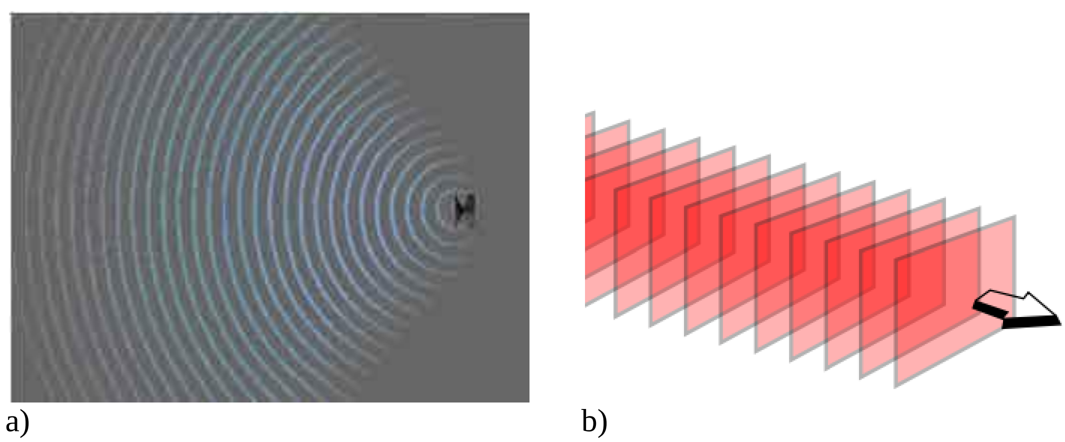


Fig. 2 Unda sferică: a) secţiune printr-un plan care conţine sursa; b) forma suprafeţelor de undă este plană, la distanţă suficient de mare de sursă.

1.Unde plane monocromatice

Undele plane monocromatice au o singură frecvenţă de oscilaţie. Să considerăm *S*, sursă a undelor, locul în care se crează perturbaţia. Punctele mediului aflate în *S* oscilează, considerând de exemplu o undă longitudinală de-a lungul axei *x*, după o lege de forma:

$$\xi(0,t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi\nu t = A\cos 2\pi\frac{t}{T}, \qquad (1)$$

unde $\xi(0,t)$ este *elongaţia* (depărtarea punctelor mediului faţă de poziţia de echilibru), *A* se numeşte *amplitudine*, ω se numeşte *pulsaţie*, ν se numeşte frecvenţă, iar *T* se numeşte *perioadă*. Un punct *P*(*x*) al mediului în care perturbaţia se propagă în mod ideal, fără disipări de energie, oscilează la momentul *t* la fel cum oscilau punctele mediului în *S* la momentul $t-\tau = t - x/c$, unde *c* este *viteza* cu care perturbaţia se propagă în mediu. Deci, considerând o propagare în sensul axei ($x>0$, o asemenea undă se numeşte *progresivă*), putem scrie:

$$\begin{aligned}\xi_+(x,t) &= A\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) = A\cos\left(\omega t-\frac{\omega x}{c}\right) = A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi x}{Tc}\right)\\ &= A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\cos\left(\omega t-kx\right)\end{aligned} \qquad (2)$$

unde λ se numeşte *lungime de undă*, iar *k* se numeşte *număr de undă*. Pentru o undă *regresivă* (propagare în sens invers axei, $x<0$), putem scrie:

$$\xi_-(x,t) = A\cos\omega\left(t+\frac{x}{c}\right) = A\cos\left(\omega t+kx\right). \qquad (3)$$

Unda plană monocromatică este periodică în timp şi spaţiu:

$$\xi_\pm(x,t) = \xi_\pm(x,t+T), \qquad (4)$$

$$\xi_\pm(x,t) = \xi_\pm(x+\lambda,t), \qquad (5)$$

astfel că distanţa minimă dintre două puncte ale mediului, care oscilează în fază este egală cu λ (vezi, Fig.1).

2. Ecuatia undelor

Pentru o unda plana monocromatica care se propaga in directia *x* putem scrie relatia

$$\xi(x,t) = \xi(0,t-\frac{x}{c}) \equiv f(t-\frac{x}{c}) = f(u(t,x)),\ \text{cu}\ u(t,x) = t-\frac{x}{c},$$

unde functia f este introdusa pentru o prelucrare matematica convenabila. Obtinem[1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2},$$

[1] Notatia pentru derivata partiala de ordin *n* a functiei *f* in raport cu o variabila *u* se scrie, de regula, $\frac{\partial^n f}{\partial u^n}$. Poate fi utilizata insa si notatia $\frac{\partial^n f}{\partial^n u}$, daca se specifica semnificatia acesteia (ca reprezentand derivata partiala de ordin *n* a functiei).

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{-1}{c},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{-1}{c}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{c^2},$$

si combinand derivatele partiale de ordinul 2 putem scrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{1}{c^2}=0$$

Aceasta ultima ecuatie este *ecuatia undelor* plane pentru propagarea intr-o directie, x.Verificati ca $\xi_{\pm}(x,t)=A\cos\left(\omega t\mp kx\right)$ verifica ecuatia undelor. Pentru propagare in spatial 3D, se poate arata ca ecuatia undelor se scrie

$$\Delta f-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{1}{c^2}=0,$$

unde Δ este operatorul Laplace

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

3. Interferenţa

Fenomenul de compunere a undelor se numeşte interferenţă. Două unde plane de frecvenţă egală se pot compune într-un punct din mediu. În urma compunerii apar puncte ale mediului care oscilează cu minim sau maxim de amplitudine. Fenomenul se poate explica cu următorul model. Fie S_1 si S_2 puncte considerate surse de oscilaţie (unde), care generează oscilaţii de pulsaţie ω. Într-un punct din spaţiu P, aflat la distanţa r_1 faţă de S_1 şi r_2 faţă de S_2 oscilaţia este caracterizată de elongaţiile:

$$\xi_1(r_1,t)=A_1\cos\left(\omega t-kr_1\right) \tag{6}$$

$$\xi_2(r_2,t)=A_2\cos\left(\omega t-kr_2\right) \tag{7}$$

Ele vor genera o oscilaţie rezultantă:

$$\xi(r\ ,t)=\xi_1(r_1,t)+\xi_1(r_1,t), \tag{8}$$

a cărei amplitudine este

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos k(r_1-r_2)}\ . \tag{9}$$

Amplitudinea este minimă dacă:

$$k(r_1-r_2)=k\Delta r=(2n+1)\pi,\ n\subset Z\ \Leftrightarrow\ \Delta r=(2n+1)\frac{\lambda}{2} \tag{10}$$

şi maximă dacă:

$$k(r_1-r_2)=k\Delta r=2n\pi,\ n\subset Z\ \Leftrightarrow\ \Delta r=2n\frac{\lambda}{2} \tag{11}$$

În Fig.3 este prezentat schematic un dispozitiv în care sursele S_1 si S_2 se obţin ca surse secundare ale unei surse S, care este delimitată în mediu printr-un ecran în care sunt practicate două deschideri (fante). Punctul P va oscila cu minimă (maximă) amplitudine dacă este îndeplinită condiţia (10) ((11)).

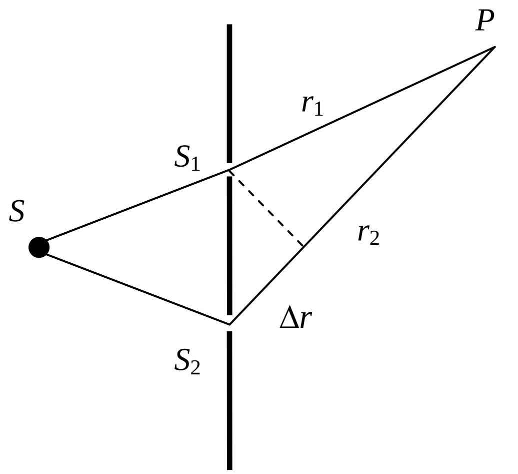


Fig. 3 Interferenţa- schema

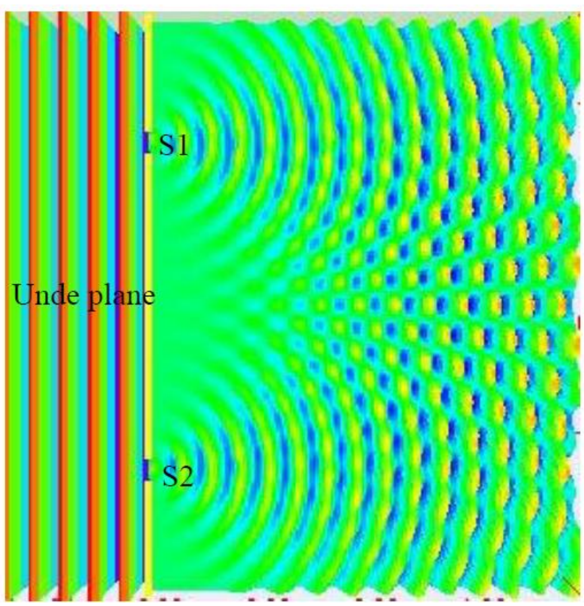


Fig. 4 Interferenţa undelor la suprafata apei

3.Unde staţionare

Să considerăm o undă plană progresivă incidentă care se propagă în lungul axei Ox şi se reflectă pe un plan *rigid* aflat la distanţa L faţă de S (care coincide cu originea axei Ox), devenind undă regresivă (vezi Fig. 2). Cele două unde, progresivă şi regresivă, *interferă* şi elongaţia undei rezultate într-un punct x este:

$$\begin{aligned}\xi(t,x) &= \xi_+(t,x) + \xi_-(t,x) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx + \alpha) \\ &= 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(kx + \alpha/2)\end{aligned} \qquad (4)$$

unde α este *faza* undei reflectate, o mărime care înglobează diferenţa de drum dintre unde. Punctele mediului aflate la distanţa L sunt în contact cu planul rigid şi nu oscilează. Ele se află într-un *plan nodal* şi

$$\xi(t,L) = 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(kL + \alpha/2) = 0\,, \qquad (5)$$

deci,

$$kL + \alpha/2 = (2n+1)\pi/2,\; n \in Z\,. \qquad (6)$$

În S, elongaţia este:

$$\xi(t,0) = 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(\alpha/2). \qquad (7)$$

Dacă oscilaţia în S are maximă amplitudine (se formează un *anti-nod* (*ventru*)), atunci, $|\xi(t,0)|$ atinge valori maxime pentru $\cos(\alpha/2) = \pm 1$, adică,

$$\alpha/2 = 2m\pi/2,\; m \in Z\,. \qquad (8)$$

Combinând ec. (6, 8) se obţine (cu condiţia L>0),

$$kL = (2n+1-2m)\pi/2 = (2i+1)\pi/2,\; i \in N\,. \qquad (9)$$

Maximele de oscilaţie se obţin pentru:

$$L = (2i+1)\pi/(2k) = (2i+1)\lambda/4 = (2i+1)c/(4\nu)\,. \qquad (10)$$

Pentru o lugime L dată tubul oscilează pe frecvenţele:

$$\nu = (2i+1)c/(4L)\,. \qquad (11)$$

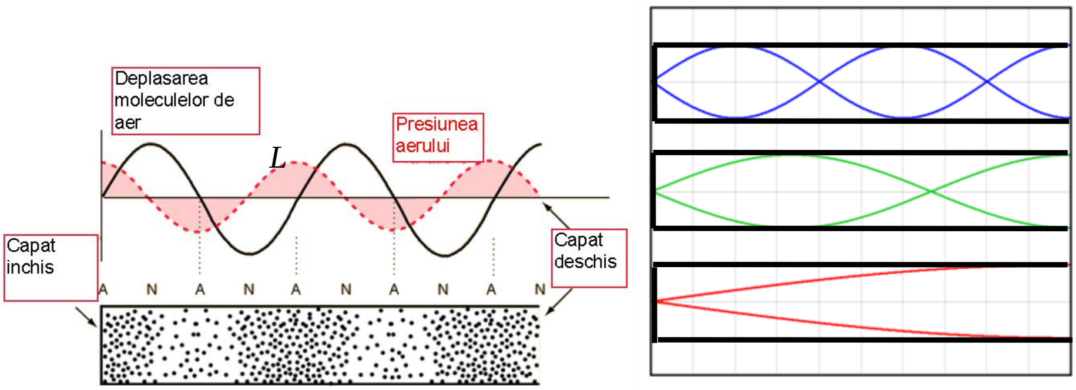
Cea mai mică frecvenţă corespunde *modului fundamental*,

$$\nu_f = c/(4L)\,. \qquad (12)$$

iar celelalte (i>0) *armonicelor*. Frecvenţa fundamentală şi armonicele se numesc frecvenţe proprii.

În Fig. 4[2, 3] este prezentată schematic oscilaţia moleculelor de aer într-un tub închis la un capăt. Oscilaţia moleculelor de aer are loc de-a lungul tubului, unde apar zone cu variaţie maximă a presiunii şi zone în care presiunea nu variază. Moleculele de la capătul deschis oscilează cu maximă amplitudine, iar cele de la capătul închis nu oscilează.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_frequency#/media/File:F0leftclosed.gif
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Overtone



a) b)

Fig. 4 a) Oscilaţia moleculelor de aer (reprezentate prin punctele negre) are loc în direcţia tubului. Moleculele de la capătul liber oscilează cu maximă amplitudine iar cele de la capătul închis stau pe loc. A-antinod(ventru), N-nod; b) Modul fundamental (culoare roşie) şi următoarele două armonice.

După excitarea aerului din tub, oscilaţia moleculelor de aer este rapid *amortizată* şi sunetul dispare. Dacă însă tubul sonor (în exemplul nostru, închis la un capăt) este excitat la capătul deschis de o perturbaţie externă *continuă* care are o frecvenţa egală cu una din frecvenţele proprii ale tubului, atunci se formează o unda staţionară întreţinută, iar intensitatea sunetului din tub este maximă. La capătul deschis al tubului se formează un ventru care este perceput de un observator, în afara tubului, ca un sunet întărit.

4. Unde sonore

Variaţiile bruşte ale presiunii aerului într-o regiune din atmosferă generează perturbaţii locale ale mediului care se propagă, iar undele asociate acestei perturbaţii se numesc *unde sonore*. Propagarea sunetului este posibilă datorită propietăţilor elastice ale aerului. Oscilaţia moelculelor de aer, statistic, se face în direcţia de propagare a undei sonore, aceasta fiind caracteristica undelor longitudinale. Unda sonoră este numită şi sunet, întrucât ajunsă la ureche este percepută/auzită (organul auditiv transformă oscilaţia aerului în impuls nervos, care creaza senzaţia de auz). Undele sonore sunt *unde sferice*, dar pe o porţiune mică, la distanţe suficient de mari de sursă, ele pot fi considerate *unde plane* (vezi Fig. 1). *Rezonatorul acustic* este un sistem în care aerul oscilează cu o mai mare amplitudine pentru anumite frecvenţe, numite *frecvenţe de rezonanţă*. Instrumentele muzicale de suflat, de exemplu, sunt asemenea rezonatori acustici. Tuburile sonore se înscriu în categoria rezonatorilor acustici de formă cilindrică. Ele pot fi deschise la unul sau ambele capete.

O modelare simplă a fenomenelor acustice care se petrec în tuburi sonore se bazează pe conceptul de *undă staţionară.* Undele staţionare sunt undele la care oscilaţia într-un punct al mediului prin care se propagă perturbaţia se face cu amplitudine constantă.

Q1. In ce lucrare de laborator s-a obţinut fenomenul de rezonanţă acustică?

5. Coarda vibranta

Consideram o coarda cu proprietati elastic fixata la ambele capete si o portiune infinitezimala a acesteia, pentru care scriem legea dinamicii.

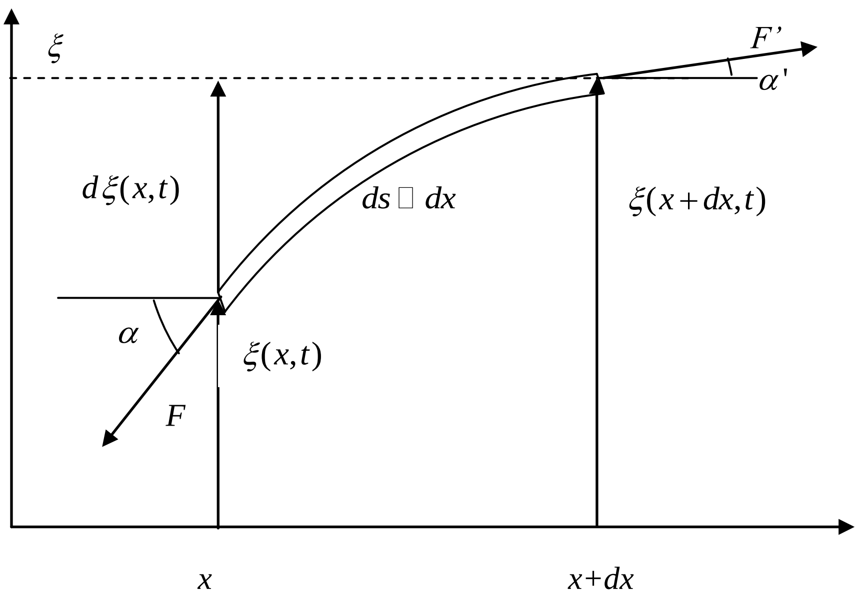


Fig 6 Segment de coarda infinitezimal de lungime $ds \approx dx$ la un moment dat in timpul oscilatiei.

Unghiurile α si α' sunt mici (sub 5°), deci, conform interpretatii geometrice a derivatei, $\tan\alpha = \partial\xi/\partial x \equiv \xi'(x,t)$, $\tan\alpha' = \xi'(x+dx,t)$. In consecinta, lungimea segmentului infinitezimal de coarda (SIC) se scrie

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\xi^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2} \equiv dx\sqrt{1+\xi'(x,t)^2}\,dx\,, \qquad (13)$$

unde in a treia egalitate am neglijat variatia temporala in scrierea diferentialei $d\xi(x,t)$.
SIC nu se deplaseaza in directia *x*, deci aplicand legea a 2-a a mecanicii obtinem

$$F\cos\alpha = F'\cos\alpha' \qquad (14)$$

si pentru ca unghiurile α si α' sunt mici, $\cos\alpha \approx \cos\alpha' \approx 1$, deci, cu buna aproximatie

$$F = F', \qquad (15)$$

adica tensiunea in coarda este practic constanta. Pentru directia verticala aplicand legea a 2-a a mecanicii pentru SIC ($\ddot{\xi}(x,t) = \frac{\partial\xi^2(x,t)}{\partial t^2}$ este acceleratia) obtinem

$$F'\tan\alpha' - F\tan\alpha = dm\ddot{\xi}(x,t) \qquad (16)$$

sau, cu $dm = \rho S dx$ (unde ρ este densitatatea materialului din care este confectionata coarda, iar *S* este aria sectiunii transversal a coardei) si aproximatiile $\sin\alpha \approx \tan\alpha$, $\sin\alpha' \approx \tan\alpha'$ obtinem (cu ec. (15))

$$F\left(\tan\alpha' - \tan\alpha\right) = F\left[\xi'(x+dx,t) - \xi'(x,t)\right] = \rho S dx\ddot{\xi}(x,t)\,. \qquad (17)$$

Dezvoltam Taylor $\xi(x+dx,t)$ pana la termenul de ordinul intai in *x* si obtinem

$$\xi(x+dx,t) \approx \xi(x,t) + \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}dx \tag{18}$$

In consecinta, derivata partiala la *x* a elongatiei $\xi(x+dx,t)$ se scrie cu buna aproximatie

$$\begin{aligned}\xi'(x+dx,t) &\approx \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\xi'(x,t)dx\right] = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \xi^2(x,t)}{\partial x^2}dx \\ &\equiv \xi'(x,t) + \frac{\partial \xi^2(x,t)}{\partial x^2}dx\end{aligned} \tag{19}$$

Penultima egalitate in ec. (19) este obtinuta considerand

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[\xi'(x,t)dx\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}dx\right] = \frac{\partial \xi^2(x,t)}{\partial x^2}dx + \frac{\partial dx}{\partial x}\xi'(x,t) \\ &\approx \frac{\partial \xi^2(x,t)}{\partial x^2}dx\end{aligned} \tag{20}$$

Cu ec. (19, 20), cu buna aproximatie, ec. (17) se scrie

$$F\frac{\partial \xi^2(x,t)}{\partial x^2}dx = \rho S dx \ddot{\xi}(x,t) \tag{21}$$

sau, simplificand,

$$\frac{\partial \xi^2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\frac{F}{\rho S}}\frac{\partial \xi^2(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{22}$$

Comparam ec. (20) cu ecuatia undelor si gasim ca viteza de propagare a undelor in coarda este

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \tag{23}$$

In modul fundamental (vezi Fig. 7) lungimea coardei de chitara, *L*, este egala cu jumatate de lungime de unda, deci

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu}, \text{ sau } \nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\rho S}} \tag{24}$$

Obtinem ca frecventa modului fundamental (cel care se aude cel mai puternic cand coarda vibreaza in aer) creste cu tensiunea din coarda si scade cu grosimea acesteia.

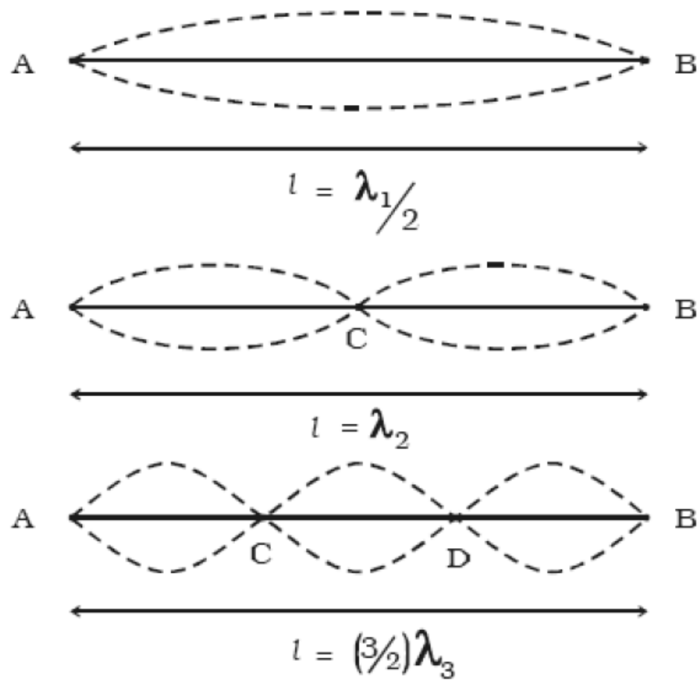


Fig. 7 Moduri de vibratie ale coardei de chitara: modul fundamental al coardei (randul de sus) si armonice.