Seminar 4 A.G.

Subspații vectoriale, repere, coordonate

mulțimea polinoamelor

④ $(\mathbb{R}_3[x], +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = 0\}$ $(P = \widehat{P})$

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = 0\}$

$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = 0\}$

ⓐ $V_i \subset \mathbb{R}_3[x]$ $\forall i = \overline{1,3}$ sunt subsp. vect

OBS!!! $V' \subset V$ subsp. vect. $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x, y \in V' \Rightarrow x + y \in V' \\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall x \in V' \Rightarrow a \cdot x \in V' \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ~~orice combin~~ $\left.\begin{array}{l} \forall x, y \in V' \\ \forall a, b \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow ax + by = 0$
$\Rightarrow x = y = 0$

$\left.\begin{array}{l} P, Q \in V_1 \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \end{array}\right| \Rightarrow aP + bQ = V_1$

$(aP + bQ)(0) = aP(0) + bQ(0) = 0 \Rightarrow aP + bQ \in V_1$

analog pentru V_2, V_3

ⓑ Precizați câte un reper $\mathcal{R}_i$ în $V_i, i = \overline{1,3}$

SLI - S este SLI $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x_1, \dots, x_n \in S \\ \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \text{ a.î. } a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \\ \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0_{\mathbb{K}} \end{array}\right.$

SLD - S este SLD $\Leftrightarrow$ $\exists x_1, .. x_n \in S$

$\exists a_1, ... a_n \in \mathbb{K}$, nu toți nuli o.?.

$a_1 x_1 + .. + a_n x_n = 0_V$

SG - ~~[illegible]~~ $V = \langle S \rangle \Leftrightarrow \forall x \in V, \exists x_1, .., x_n \in S \Rightarrow$

$\exists a_1, .., a_n \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow a_1 x_1 + ... + a_n x_n = x$

Bază - S bază $\Leftrightarrow$ 1) S S.L.I.
2) S S.G.

V sp. vect. finit generat
S bază
$\Rightarrow |S| = \dim_{\mathbb{K}} V$

$|S| = card(S)$

U.A.E.
(următoarele afirmații echivalente)

OBS! ~~[illegible]~~ $\left.\begin{array}{l} \dim V = n \\ S = \{x_1, .., x_n\} \\ |S| = n \end{array}\right\} \Rightarrow$ U.A.E.
S SLI
S SG
S bază

Definiție

Reper = bază ordonată

$R = \{e_1, \dots, e_n\}$

$\forall x \in V \; \exists! \; a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = x$

$R_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$ este reperul canonic în $\mathbb{R}_3[x]$

$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \; P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

(a_0, a_1, a_2, a_3) - coordonatele lui P în raport cu R_0

---

a) determinăm un reper în V_1

$P \in V_1 \Rightarrow P(0) = 0$

$P = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

Mulțimea $R_1 = \{x, x^2, x^3\}$ este ~~sistem~~ SG pentru V_1

Demonstrăm că R_1 S.L.I.

$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0, \; \forall x$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R_1 \text{ S.L.I} \\ R_1 \text{ SG} \end{array}\right\} \Rightarrow R_1$ bază

$R_1 = \{x, x^2, x^3\}$ este un reper în $V_1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V_1) = 3$

Determinăm un reper în V_2

$P \in V_2 \Rightarrow P(1)=0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$

~~$P = -a_1 - a_2 - a_3 + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 =$~~

$P = -a_1 - a_2 - a_3 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3)$ $\quad \mathcal{R}_2 = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$

$\mathcal{R}_2$ S.G.

Demonstrăm că $\mathcal{R}_2$ este S.L.I.

$a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow \text{SLI}$$

$\Rightarrow \mathcal{R}_2 = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$

$\Rightarrow \mathcal{R}_2$ este bază $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V = 3$

Determinăm un reper în V_3

$P \in V_3 = V_1 \cap V_2$

$a_0 = 0$

$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_3$

$\Rightarrow P = (-a_2 - a_3)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_2(-x+x^2) + a_3(-x+x^3)$

$\Rightarrow \mathcal{R}_3 = \{-x+x^2, -x+x^3\} \rightarrow$ S.G în V_3

Demonstrăm că $\mathcal{R}_3$ este S.L.I.

$a_2(-x+x^2)+a_3(-x+x^3)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}-a_2-a_3=0\\ a_2=0\\ a_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}_3$ SL.i

$\mathcal{B}_3=\{-x+x^2,-x+x^3\}$ reper in V_3

$\dim_{\mathbb{R}} V_3=2$

c) Aflați coordonatele lui   Coordonate

$P_1=x+2x^2+3x^3$ in raport cu $\mathcal{B}_1=\{x,x^2,x^3\}$

$(1,2,3) \to$ sunt coord lui P_1 in raport cu V_1

$P_2=1+2x^2-3x^2 \in V_2$, in raport cu $\mathcal{B}_2=\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\}$

$1+2x^2-3x^3=a(-1+x)+b(-1+x^2)+c(-1+x^3)$

$-a-b-c+ax+bx^2+cx^3 \Rightarrow a=0;\ b=2;\ c=-3$

$\Rightarrow (0,2,-3)$ coordonatele.

$P_3=x+3x^2-4x^3$

$a_2(-x+x^2)+a_3(-x+x^3)=a(-x+x^2)+b(-x+x^3)=(-a-b)x+ax^2+bx^3$

$(3,-4)$

coordonatele lui P_3 in raport cu V_3

d) Determinați câte un subspațiu complementar V_i' pt. $V_i, i=\overline{1,3}$

[illegible] $\Rightarrow R_3[x] = V_i \oplus V_i', i=\overline{1,3}$

OBS!!! $V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) [illegible] $V = V_1 + V_2$

$V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

$R_3[x] = V_1 \oplus V_1'$; $\mathcal{B}_1 = \{x, x^2, x^3\}$

$V_1' = <\{1\}>$

$R_3[x] = V_2 \oplus V_2'$, $\mathcal{B}_2 = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$

$$\begin{matrix} & \| & \| & \| \\ \text{S.L.i} & (-1,1,0,0) & (-1,0,1,0) & (-1,0,0,1) \end{matrix}$$

(trebuie să fie când adaugi baza)

$$rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \boxed{A} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \text{ max.} \qquad V_2' = <\{1\}>$$

$R_3(x] = V_3 \oplus V_3'$

$R_3 = \{-x+x^2, -x+x^3\}$

$$\begin{matrix} \| & \| \\ (0,-1,1,0) & (0,-1,0,1) \end{matrix}$$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \text{ max} \quad - \; V_3' = <\{x, 1\}>$$

la subspații complementare

e) $\mathbb{R}_3[x] = V_i \oplus V_j \oplus V_k$

$V_i = \langle \{1\} \rangle$

$V_j = \langle \{x\} \rangle$

$V_k = \langle \{x^2, x^3\} \rangle$

$\mathbb{R}_3(x) = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$

$U_1 = \langle \{1\} \rangle, \dots, U_4 = \langle \{x^3\} \rangle$

⑥ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \right\} = S(A)$

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right)$

a) Precizați o bază în V'

b) Precizați un subspațiu complementar V'' lui V'

$\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

c) Să se descompună $x = (1,1,2)$ în raport cu $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

$\dim V' = 3 - rg(A)$ $\quad rg(A) = 2 \Rightarrow \dim V' = 3 - 2 = 1$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = -4\alpha \end{cases}$ $\quad -8\alpha + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 8\alpha$

$S(A) = V' = \{(-4\alpha, 8\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\qquad \qquad \parallel$

$\qquad \alpha(-4, 8, 1)$

$\mathcal{R}' = \{(-4,8,1)\}$ este SG pt V'

$a_1(-4,8,1) = (0,0,0)$

$\left.\begin{array}{l} -4a_1 = 0 \\ 8a_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{R}'$ SLi.

$\Rightarrow \mathcal{R}'$ este repr în V

Dar $\dim V' = 1 = \text{card } \mathcal{R}'$

b) $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dim V' = 1 \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim V'' = 2$

$\mathcal{R}' = \{(-4, 8, 1)\}$ extindem $\mathcal{R}'$ la un reper la o bază

$$\Rightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -4 & a_1 & a_4 \\ 8 & a_2 & a_5 \\ 1 & a_3 & a_6 \end{pmatrix} = 3 \text{ maxim}$$ alegem $a_1, \dots, a_6$ corect

$$\Rightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \text{ max} \Rightarrow V'' = \langle \{(1,0,0), (0,0,1)\} \rangle$$

$\mathcal{R} = \{(-4, 8, 1), (1,0,0), (0,0,1)\}$ reper în $\mathbb{R}^3$

c) $$x = \underbrace{a(-4,8,1)}_{u \in V'} + \underbrace{b(1,0,0) + c(0,0,1)}_{v \in V''} \quad ; \; x = (1,1,2)$$

$(1,1,2) = (-4a+b, 8a, a+c)$

$\Rightarrow x = u + v$

$8a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

$-\frac{1}{4} + b = 1 \Rightarrow b = \frac{5}{4}$

$c + \frac{1}{8} = 2 \Rightarrow c = \frac{16}{8} - \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = c$

$u = \frac{1}{8}(-4, 8, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}\right)$; $v = \frac{3}{2}(1,0,0) + \frac{15}{8}(0,0,1)$