LUCRAREA V

OSCILAŢII CUPLATE PE PERNA DE AER LINIARĂ

Obiectivele experimentului

- determinarea constantelor elastice k şi k_{12};
- determinarea perioadei modului fundamental $T_{1exp.}$;
- determinarea perioadei celui de-al doilea mod de oscilaţie $T_{2exp.}$;
- realizarea fenomenului bătăilor şi determinarea perioadei bătăilor T_{bexp}.

Teoria lucrării

Să analizăm ce se întâmplă cu caracteristicile mişcării periodice a unui oscilator armonic, dacă acesta se cuplează cu un al doilea, care poate avea proprietăţi identice sau diferite.

Notăm deplasările faţă de poziţia de echilibru cu x_1, respectiv x_2. Forţele elastice ce apar în fiecare resort ca rezultat al deformărilor sunt:

$$F_1 = -k_1 x_1 \tag{1}$$

$$F_2 = -k_2 x_2 \tag{2}$$

Deoarece corpurile sunt legate între ele printr-un resort, acesta va cupla mişcările. Deformarea resortului din mijloc va fi $x_1 - x_2$, fapt ce va determina apariţia unei forţe de revenire suplimentară, la cele două capete:

$$F_{12} = -F_{21} = k_{12}(x_2 - x_1) \tag{3}$$

Aplicând principiul II al dinamicii pentru mişcarea celor două corpuri, vom obţine un *sistem de ecuaţii diferenţiale*:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2x_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{4}$$

sau

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_{12})x_1 &= k_{12}x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_{12})x_2 &= k_{12}x_1 \end{aligned} \tag{5}$$

Constatăm că cele două ecuaţii diferenţiale nu sunt independente, ci ***cuplate***, în sensul că în ecuaţia diferenţială a unui oscilator apare ca variabilă elongaţia celuilalt oscilator.

Pentru rezolvare căutăm soluţii de forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ x_2 &= B\cos(\omega t + \rho) \end{aligned} \tag{6}$$

Înlocuind relaţiile (6) în relaţiile (5), se obţine un sistem algebric de ***ecuaţii liniare omogene*** cu necunoscutele A şi B:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_{12} - m_1\omega^2)A - k_{12}B &= 0 \\ -k_{12}A + (k_2 + k_{12} - m_2\omega^2)B &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Sistemul de ecuaţii (7) poate fi scris în funcţie de raportul amplitudinilor astfel:

$$q = \frac{B}{A} = \frac{k_1 + k_{12} - m_1\omega^2}{k_{12}} = \frac{k_{12}}{k_2 + k_{12} - m_2\omega^2} \tag{8}$$

Pentru a obţine soluţii diferite de zero, trebuie ca determinantul sistemului (7) să fie nul:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_{12} - m_1\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Această condiţie conduce la ecuaţia bipătrată:

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{12}}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1k_2 + k_1k_{12} + k_2k_{12}}{m_1m_2} = 0 \tag{10}$$

care are rădăcinile:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{12}}{m_2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \frac{k_2 + k_{12}}{m_2}\right)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1m_2}}\right\} \tag{11}$$

Din relaţia (11) se observă că expresia de sub radical este pozitivă, deci ambele valori ale lui ω^2 sunt reale. Prin rezolvarea ecuaţiei se obţin următoarele patru soluţii reale pentru ω^4 şi anume: $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$. Valorile negative ale frecvenţei nu dau soluţii diferite faţă de cele pozitive şi le vom neglija.

Cea mai mică dintre frecvenţele proprii, ω_1, se numeşte ***fundamentală***, iar următoarea frecvenţă, ω_2, se numeşte ***a doua frecvenţă naturală***.

Înlocuind valorile pătratelor frecvenţelor proprii în relaţia (8), se obţine:

$$q_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 + k_{12} - m_1\omega_1^2}{k_{12}} = \frac{k_{12}}{k_2 + k_{12} - m_2\omega_1^2} \qquad (12)$$

$$q_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{k_1 + k_{12} - m_1\omega_2^2}{k_{12}} = \frac{k_{12}}{k_2 + k_{12} - m_2\omega_2^2} \qquad (12')$$

Înlocuind în relaţiile (6), se obţin modurile proprii sau fundamentale de vibraţie ale sistemului:

***Primul mod propriu de vibraţie*:**

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad (13)$$

$$x_2 = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = q_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad (14)$$

Al doilea mod propriu de vibraţie:

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (15)$$

$$x_2 = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = q_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (16)$$

Soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare se obţine aplicând principiul superpoziţiei, ce constă în însumarea celor două soluţii particulare, reprezentate de modurile proprii de vibraţie:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (17)$$

$$x_2 = q_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + q_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (18)$$

Constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale referitoare la poziţie şi viteză.

Cazul particular care se foloseşte în această lucrare:

Se consideră $m_1 = m_2 = m$ şi $k_1 = k_2 = k$. Din relaţia (11) se obţin relaţiile (19):

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$
$$\omega_2^2 = \frac{k + 2k_{12}}{m} \qquad (19)$$

şi raportul amplitudinilor este egal cu ± 1.

În ***modul fundamental de vibraţie***, numit şi ***simetric***, ***corpurile oscilează în fază, cu amplitudini egale***, astfel că ***resortul de cuplaj nu este niciun moment deformat***:

$$x_1 = x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad (20)$$

În cel ***de-al doilea mod normal,*** numit și *antisimetric, oscilatorii sunt în antifază, **amplitudinile sunt egale ca mărime, dar opuse ca semn, astfel că mișcarea este simetrică, dar în sensuri contrare***:

$$x_1 = -x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{21}$$

În aceste condiții, ***resortul de cuplaj central*** este ***deformat,*** deformarea sa fiind dată de relația (22):

$$x_1 - x_2 = 2A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{22}$$

Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental folosit în această lucrare este format din două cărucioare identice de mase $m_1 = m_2 = m = 269\,\text{g}$ care sunt cuplate la capetele dispozitivului prin două resorturi identice de constante elastice $k_1 = k_2 = k$ și între ele printr-un resort diferit de celelalte, de constantă elastică k_{12}, ca în figura 1.

Perna de aer liniară este o incintă rigidă care are suprafața exterioară cu o planeitate foarte bună și care prezintă foarte multe orificii mici distribuite uniform. Se comprimă aer în incinta respectivă (cu ajutorul unei suflante) care va ieși prin orificiile din suprafața cutiei astfel încât jetul de aer format va determina ca mișcarea celor două cărucioare să se facă cu o frecare neglijabilă.

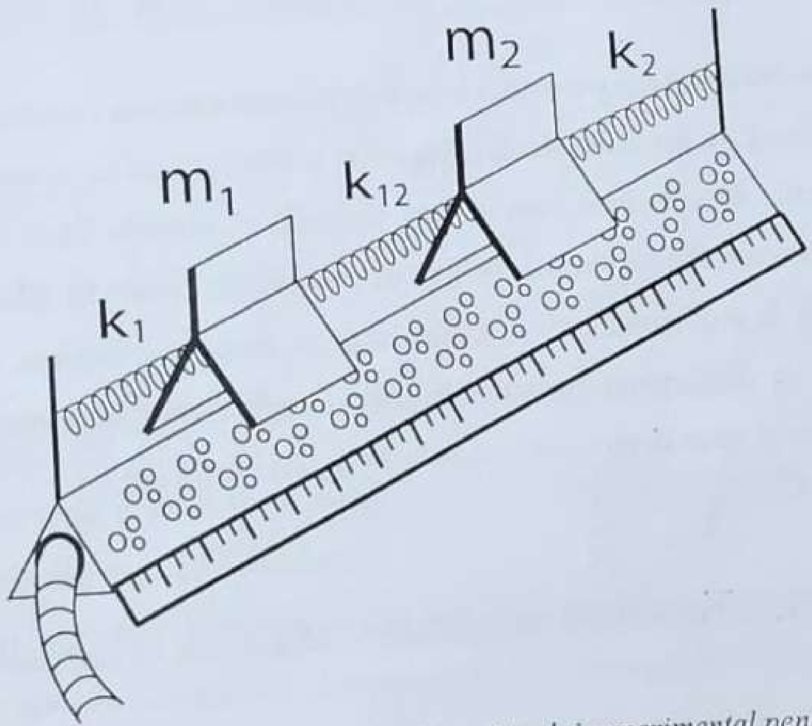

Fig. 1 Reprezentarea schematică a dispozitivului experimental pentru studiul oscilațiilor cuplate pe perna de aer liniară

Modul de lucru

Se vor determina pentru fiecare resort constantele elastice $k_1 = k_2 = k$ şi k_{12} prin metoda dinamică. Pentru aceasta, se scot resorturile din montaj şi se fixează cu un capăt pe un stativ. De capătul liber al fiecărui resort se suspendă pe rând câte două mase marcate m' şi m'' şi se pune sistemul în oscilaţie. Se cronometrează timpul t', respectiv t'' în care acesta efectuează N oscilaţii complete (minim 10 oscilaţii complete) pentru masa m', respectiv m''.

Se calculează perioada de oscilaţie T şi constanta elastică k, cu relaţiile (23):

$$T = \frac{t}{N}$$
$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \qquad (23)$$

Datele obţinute se trec într-un tabel de forma:

Resortul	m' (kg)	m'' (kg)	$T' = \frac{t'}{N}$ (s)	$T'' = \frac{t''}{N}$ (s)	$k' = \frac{4\pi^2 m'}{T'^2}$ (N/m)	$k'' = \frac{4\pi^2 m''}{T''^2}$ (N/m)	$\bar{k} = \frac{k' + k''}{2}$ (N/m)
1							
2							
1,2							

Pentru determinarea perioadei modului fundamental sau simetric, T_{1exp}, după crearea efectului de pernă de aer, cele două cărucioare se deplasează ***în acelaşi sens*** şi ***cu aceeaşi distanţă*** pe perna de aer, după care se lasă sistemul să oscileze liber. Pentru ca sistemul să oscileze cu frecvenţa fundamentală, cele două cărucioare trebuie să aibă aceeaşi amplitudine şi să fie în fază la momentul iniţial, astfel încât în timpul oscilaţiilor, resortul k_{12} să nu se deformeze. Se va cronometra timpul t în care se efectuează un număr N (minim 10) de oscilaţii complete şi se va determina perioada $T_{1\,exp}$ cu relaţia (24):

$$T_{1exp} = \frac{t}{N} \qquad (24)$$

Se vor face 2 determinări şi valoarea medie obţinută se va compara cu cea calculată cu relaţia (25):

$$\boxed{T_{1calc} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Datele obţinute se trec într-un tabel de forma:

t' (s)	t'' (s)	$T'_{1exp.} = \frac{t'}{N}$ (s)	$T''_{1exp.} = \frac{t''}{N}$ (s)	$T_{1exp.} = \frac{T'_{1exp.} + T''_{1exp.}}{2}$ (s)	$T_{1calc.} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (s)

În cadrul acestei secvenţe a lucrării, se observă că accelerația centrului de masă este egală cu accelerația fiecărui corp în parte, ceea ce înseamnă că fiecare corp oscilează ca şi când celălalt ar fi absent.

Pentru determinarea perioadei celui de-al doilea mod de oscilaţie sau antisimetric, $T_{2exp.}$, după crearea efectului de pernă de aer, cele două cărucioare se deplasează ***în sensuri opuse*** şi ***cu aceeaşi distanţă*** pe perna de aer, astfel încât să fie în opoziţie de fază şi să aibă amplitudini egale. Determinarea perioadei $T_{2exp.}$ se face analog cazului precedent când s-a determinat $T_{1exp.}$ şi se compară apoi valoarea obţinută cu cea calculată cu relaţia (26).

$$\boxed{T_{2calc.} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k + 2k_{12}}}} \qquad (26)$$

Datele obţinute se trec într-un tabel de forma:

t' (s)	t'' (s)	$T'_{2exp.} = \frac{t'}{N}$ (s)	$T''_{2exp.} = \frac{t''}{N}$ (s)	$T_{2exp.} = \frac{T'_{2exp.} + T''_{2exp.}}{2}$ (s)	$T_{2calc.} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k + 2k_{12}}}$ (s)

În această secvenţă a lucrării se observă că accelerația centrului de masă este zero, conform teoremei mişcării centrului de masă.

Transmiterea periodică a energiei între doi oscilatori cuplaţi şi efectul rezultant de modulare al amplitudinii de vibraţie a fiecărui oscilator se numeşte fenomen de bătăi.

Pentru realizarea fenomenului bătăilor, un cărucior este ţinut fix iar celălalt se îndepărtează sau se apropie de el cu o anumită distanţă, după care se lasă sistemul să oscileze liber. Se observă transferul de energie mecanică de la un cărucior la altul şi invers. Sistemul oscilează astfel încât, atunci când amplitudinea unui oscilator este maximă, amplitudinea celuilalt oscilator este minimă şi invers.

Prin ***perioada bătăilor*** se înţelege timpul înregistrat între două bătăi consecutive, adică între două momente de amplitudine maximă sau timpul după care sistemul îşi reia o anumită stare configurativă (cel mai uşor de observat este starea de repaus, astfel încât perioada bătăilor poate fi măsurată prin timpul după care se reia starea de repaus a aceluiaşi cărucior).

Perioada bătăilor determinată experimental, T_{bexp}, se va compara cu valoarea teoretică, dată de relaţia (27) şi de relaţia (28):

$$T_{bcalc} = \frac{T_{1calc} T_{2calc}}{\left| T_{1calc} - T_{2calc} \right|} \tag{27}$$

$$T_{bcalc} = \frac{T_{1exp} T_{2exp}}{\left| T_{1exp} - T_{2exp} \right|} \tag{28}$$