[redacted]

Seminar 12 | AG[redacted]

1) Spații vectoriale euclidiene / Endomorfisme simetrice

Ex1

Fie $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r, $\dim E = 2$.

Fie $Q_k : E \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1,3}$, unde

$Q_1(x) = \langle x, x \rangle$, $Q_2(x) = \langle f(x), x \rangle$, $Q_3(x) = \langle f(x), f(x) \rangle$,

$\forall x \in E$ (forme fundamentale), $f \in Sim(E)$

Să se arate că:

$$Q_3(x) - Tr(A_f)\, Q_2(x) + \det(A_f)\, Q_1(x) = 0, \ \forall x \in E,$$

unde $A_f = [f]_{R,R}$, $\forall R$ reper ortonormat în E

Ex2 Fie $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $u = (1,-1,0)$.

Fie s = simetria ortogonală față de $\langle \{u\} \rangle^{\perp}$

p = proiecția ortogonală pe $\langle \{u\} \rangle^{\perp}$.

Să se determine s, p, utilizând:

$$s(x) = x - 2\frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

$$p(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u.$$

2) Geometrie analitică euclidiană

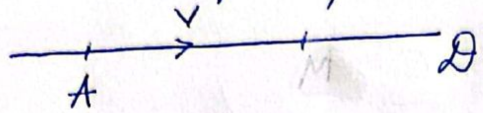
$(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, g_0), \varphi)$ sp. afin euclidian canonic

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(u,v) = v - u, \ \forall u, v \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{R}_0 = \{0; e_1, e_2, e_3\}$ reper cartezian ortonormat

(*) Ec. unei drepte afine

a)



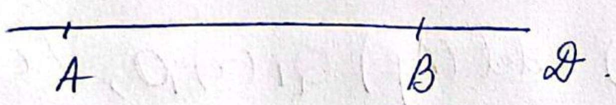
$V_{\mathcal{D}} = \langle \{v\} \rangle$

$\vec{OA} = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i, \ v = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i$

$\vec{OM} = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$

$$\mathcal{D} : \frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3} = t \iff x_i - a_i = t v_i, \ i = \overline{1,3}$$

b)



$V_{\mathcal{D}} = \langle \{\vec{AB}\} \rangle$

$$\mathcal{D} : \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}$$

$\vec{OA} = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i$

$\vec{OB} = \sum_{i=1}^{3} b_i e_i$

$\boxed{\text{OBS}}$ a) $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2 \iff \underset{\langle\{v\}\rangle}{V_{\mathcal{D}_1}} = \underset{\langle\{v'\}\rangle}{V_{\mathcal{D}_2}} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}$ aî $v' = \alpha v$

b) $\mathcal{D}_1 \nparallel \mathcal{D}_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &: x_i - a_i = t v_i \\ \mathcal{D}_2 &: x_i - b_i = t' v'_i \end{aligned} \quad i = \overline{1,3}$$

$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 : \ t v_i + a_i = t' v'_i + b_i, \ i = \overline{1,3}$

$$\left(\boxed{\begin{matrix} v_1 & -v_1' \\ v_2 & -v_2' \end{matrix}} \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} \\ \\ v_3 & -v_3' \end{matrix} \right) \left| \begin{matrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{matrix} \right.$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} v_1 & -v_1' & b_1 - a_1 \\ v_2 & -v_2' & b_2 - a_2 \\ v_3 & -v_3' & b_3 - a_3 \end{vmatrix}$$

1. $\Delta_c = 0$ drepte concurente (coplanare)
2. $\Delta_c \neq 0$ drepte necoplanare.

(**) Ec. unui plan afin

a) π $\left(A \in \pi,\ V_\pi = \langle \{u, v\} \rangle \right)$, $\{u,v\}$ SLI

$V_\pi = \{\overrightarrow{AM},\ M \in \pi\}$.

$\exists t, s \in \mathbb{R}$ a.î. $\overrightarrow{AM} = tu + sv$, $\overrightarrow{OA} = \sum_1^3 a_i e_i$, $\overrightarrow{OM} = \sum_1^3 x_i e_i$.

$x_i - a_i = t u_i + s v_i$, $i = \overline{1,3}$

$$\pi: \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad u = \sum_1^3 u_i e_i, \quad v = \sum_1^3 v_i e_i$$

$N = u \times v = (A_1, A_2, A_3)$

$\pi: A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2) + A_3(x_3 - a_3) = 0$

$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_0 = 0$

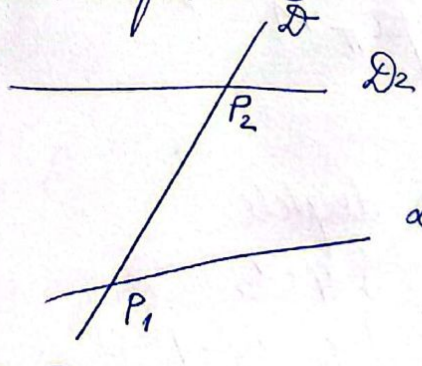
b) π $(A, B, C \in \pi)$ $V_\pi = \langle \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\} \rangle$

$\pi: x_i - a_i = t(b_i - a_i) + s(c_i - a_i)$ $\qquad \overrightarrow{OA} = \sum_1^3 a_i e_i$, $\overrightarrow{OB} = \sum_1^3 b_i e_i$, $\overrightarrow{OC} = \sum_1^3 c_i e_i$

$$\pi: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(***) $\perp$ comună a 2 drepte necoplanare

$\mathcal{D}_1: x_i - a_i = t v_i$
$\qquad i = \overline{1,3}$
$\mathcal{D}_2: x_i - b_i = t' v'_i$



$P_1(a_1 + t v_1, a_2 + t v_2, a_3 + t v_3)$

$P_2(b_1 + t' v'_1, b_2 + t' v'_2, b_3 + t' v'_3)$

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, v \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}, v' \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow t, t' \Rightarrow P_1, P_2.$$

Ex $(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, g_0), \varphi)$

$A(3,-1,3)$, $B(5,1,-1)$, $u = (-3,5,-6)$

a) Să se scrie ec. dreptei $\mathcal{D}$ a.î. $A \in \mathcal{D}$, $V_{\mathcal{D}} = \langle\{u\}\rangle$.

b) —//— AB.

c) Să se afle punctele de intersecție ale dreptei $\mathcal{D}$ cu planele de coordonate.

Ex Să se scrie ec dreptei $\mathcal{D}$ a.î. $A(2,-5,3) \in \mathcal{D}$ și $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$, unde $\mathcal{D}': \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 1 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 1 = 0 \end{cases}$

Ex Fie planul $\pi: x_1 + x_2 + x_3 = 1$, punctul $M(1,2,-1)$ și dreapta $\mathcal{D}: \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3}{3}$

a) Să se scrie ec. dreptei $\mathcal{D}'$ a.î. $M \in \mathcal{D}'$ și $\mathcal{D}' \perp \pi$

b) —//— planului π' a.î. $M \in \pi'$ și $\pi' \perp \mathcal{D}$

c) —//— planului π'' a.î. $M \in \pi''$ și $\mathcal{D} \subset \pi''$.

d) $pr_{\mathcal{D}} M = ?$, unde $M(1,2$

e) $pr_{\pi} M = ?$

Ex. Fie dreptele

$\mathcal{D}_1: \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - 1 = 0 \end{cases}$, $\mathcal{D}_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

a) Să se arate că $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sunt necoplanare

b) Să se afle ec $\perp$ comune a dreptelor $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$

c) Să se determine dist $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

Ex. Fie dreptele: $\mathcal{D}_1 : \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-2}{-1} = \frac{x_3+2}{2}$

$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 3 = 0 \end{cases}$$

a) Să se arate că $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ coplanare

b) Să se scrie ec. planului det. de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$

c) Să se afle dist $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$

Ex. Fie $\mathcal{D}_1 : \frac{x_1-1}{2} = \frac{x_2-1}{-1} = \frac{x_3}{3}$

$\pi_1 : x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

$\pi_2 : x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $M(1,2,-1)$

a) Să se det ec. dreptei $\mathcal{D}_2 = \pi_1 \cap \pi_2$

b) $\sphericalangle(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ ($\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ drepte orientate)

c) $\sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$ (π_1, π_2 plane orientate)

d) Să se afle coord. simetricului lui M față de π_1

Ex. $A(1,3,0)$, $B(3,-2,1)$, $C(\alpha,1,-3)$, $\Delta(7,-2,3)$

$\alpha = ?$ a.î. A, B, C, Δ = puncte coplanare.

Ex. Fie dreptele

$\mathcal{D}_1 : \frac{x_1-1}{-1} = \frac{x_2+2}{4} = \frac{x_3}{1}$, $\mathcal{D}_2 : \frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3-1}{2}$

a) Să se arate că $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ = necoplanare

b) Aflați ec $\perp$ comune a dreptelor $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$.

Ex. Fie $\mathcal{D}_1: \frac{x_1-1}{2} = \frac{x_2+1}{3} = \frac{x_3}{1}$, $\mathcal{D}_2: \frac{x_1-2}{4} = \frac{x_2}{6} = \frac{x_3+1}{\alpha}$

a) $\alpha = ?$ aî $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$. Aflați ec. planului π det. de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$

b) Calculați dist (M, π), $M(0,5,1)$

Ex Fie $\mathcal{D}: \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 = 0 \end{cases}$, $P(2,3,1)$

a) dist $(P, \mathcal{D})$

b) proiecția lui P pe $\mathcal{D}$.

Ex. $A(-1,0,1)$, $\pi: x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$

a) dist (A, π)

b) $pr_{\pi} A = A'$. Aflați coord. lui A'

Ex $M(1,1,1)$, $\mathcal{D}: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$

$\pi: x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0$

a) Să se scrie ec planului π_1 aî $\pi_1 \ni M$, $\pi_1 \parallel \pi$

b) —— $\mathcal{D}_1$ aî $\mathcal{D}_1 \ni M$, $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}$

c) Studiați poz. relativă a lui $\mathcal{D}$ față de π

Ex $\pi: x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0$, $A(0,1,3)$

$\mathcal{D}: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4 = 0 \end{cases}$

a) Ec. pl. care trece prin A și conține $\mathcal{D}$

b) —— conține $\mathcal{D}$ și este $\perp$ pe π

c) —— conține $\mathcal{D}$ și este $\parallel$ cu $\mathcal{D}'$, unde

$\mathcal{D}': \frac{x_1-1}{2} = \frac{x_2-2}{1} = \frac{x_3+2}{-1}$.