Seminar 11 AG[redacted]

Transformări ortogonale

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r, $f \in End(E)$

- $f \in O(E)$ (transf. ortogonală) $\Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \Leftrightarrow$
  $\forall x, y \in E$

  $\Leftrightarrow \| f(x) \| = \|x\|, \forall x \in E$.

- $f \in O(E) \Leftrightarrow A = [f]_{R,R} \in O(n) \Leftrightarrow$ schimbare de repere ortonormate
  $\forall R =$ reper ortonormat.

- $f \in O(E) \Rightarrow$ val. proprii sunt ± 1

Clasificare

① $\dim E = 1 \Rightarrow O(E) = \{ id_E, -id_E \}$

② $\dim E = 2$ $\quad \exists R = \{e_1, e_2\}$ reper ortonormat a.î.

a) $\det A = 1$; $\quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

b) $\det A = -1$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $\dim E = 3$

a) $\det A = 1$, $\exists R = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper orton a.î.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \begin{cases} Tr A = 1 + 2\cos\varphi \\ \text{Axa: } f(x) = x \end{cases}$$

b) $\det A = -1$, $\exists R = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper orton a.î.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \begin{cases} Tr A = -1 + 2\cos\varphi \\ \text{Axa: } f(x) = -x \end{cases}$$

Ex1 $(\mathbb{R}^3, g_0)$ s.v.e.r, cu str euclidiană canonică

$f \in End(\mathbb{R}^3)$, $A = [f]_{R_0,R_0} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

R_0 = reperul canonic.

a) Să se arate că $f \in O(\mathbb{R}^3)$, de speța 2 i.e $f = s \circ R_\varphi$

b) Să se det. $\measuredangle$ de rotație φ și axa de simetrie

c) Să se det. un reper $R = \{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormat a.î.

$[f]_{R,R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Ex2 $(\mathbb{R}^3, g_0)$ s.v.e.r, $u = (1,1,0)$

a) $\langle\{u\}\rangle^\perp = ?$. Precizați un reper ortonormat.

b) Să se det transf. ortogonală, de speța 1, care este rotație de $\measuredangle$ orientat $\varphi = \frac{\pi}{2}$ și axa $\langle\{u\}\rangle$.

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ s.v.e.r

$f \in End(E)$

- $f \in Sim(E) \Leftrightarrow \langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle, \forall x, y \in E$.

$\Leftrightarrow A = [f]_{R,R}$ este simetrică $(A = A^T)$

$\forall R$ = reper ortonormat

(T) $f \in Sim(E) \Rightarrow \exists R$ reper ortonormat a.î. $[f]_{R,R}$ este diagonală.

- $f \in Sim(E) \Rightarrow \begin{cases} 1) \text{ toate răd. polin. caract sunt reale} \\ 2) \dim V_{\lambda_i} = m_i, \ i = \overline{1,r} \end{cases}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ val. proprii dist

$m_1 + \dots + m_r = n$

• $A = A^T$ → $f \in Sim(E)$ $f(x) = y$; $Y = AX$
→ $Q: E \to \mathbb{R}$ formă pătratică.

$\langle x, f(x)\rangle = Q(x) = X^T A X$.

Ex 3 $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $f \in End(\mathbb{R}^3)$

$$A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Dem că $f \in Sim(\mathbb{R}^3)$. Determinați f

b) Să se afle $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

c) Să se aducă Q la o formă canonică, efectuând o transformare ortogonală h (i.e. o schimbare de repere ortonormate)

Ex4 $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = g_0(x, u)\, u$,
unde $u = (1, -1, 2)$

a) Să se arate că $f \in Sim(\mathbb{R}^3)$; $f = ?$

b) Să se afle $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată. Să se aducă ~~Q~~ la o formă canonică, efectuând o transformare ortogonală h.

Ex5 $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ s.v.e.r, $u \in E$, $u \neq 0_E$

Fie $s \in End(E)$, s = simetria ortogonală față de hiperplanul $\langle\{u\}\rangle^\perp$ și

$p \in End(E)$, p = proiecția ortogonală pe $\langle\{u\}\rangle^\perp$.

Să se arate că:

a) $p(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, \ \forall x \in E$

b) $s(x) = s_{u^\perp}(x) = x - 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$

$(s = 2p - id_E)$

6 $F : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{2n-3}[X]$,

$F(P, Q) = P'''Q - P''Q' + P'Q'' - PQ'''$

unde $P', P'', P''', \ldots$ sunt polin. det de derivatele funcției polin. asoc. lui P.

a) F biliniară și antisimetrică?

b) Fie $Q = X^n$.

$f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{2n-3}[X]$

$f(P) = F(P, Q)$.

Precizați matricea aplicației liniare f în raport cu reperele canonice. Caz particular $n = 3$.

c) Este f endomorfism diagonalizabil ($n = 3$)?

7 Fie $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

respectiv

$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

Să se aducă la formă canonică, prin transformări ortogonale.

$(\mathbb{R}^3, g_0)$, $f \in End(E)$

a) $A = [f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = [f]_{R_0,R_0} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & -3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 & 6 \\ -2\sqrt{3} & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Să se arate că f reprezintă rotație.
Precizați unghiul α de rotație și axa.

9) $(\mathbb{R}^3, g_0)$ Fie planul $\pi: x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.
Să se determine rotația de $\measuredangle \frac{\pi}{3}$ și axa $\pi^\perp$

10) Calculați matricele R^x_φ, R^y_φ, R^z_φ ale rotațiilor de unghi φ în jurul axelor Ox, Oy, Oz

11) Fie $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $u = (1,2,3)$
$f \in End(\mathbb{R}^3)$, $f(x) = u \times x$
$f \in End(\mathbb{R}^3)$ antisimetric, nu se poate diagonaliza.