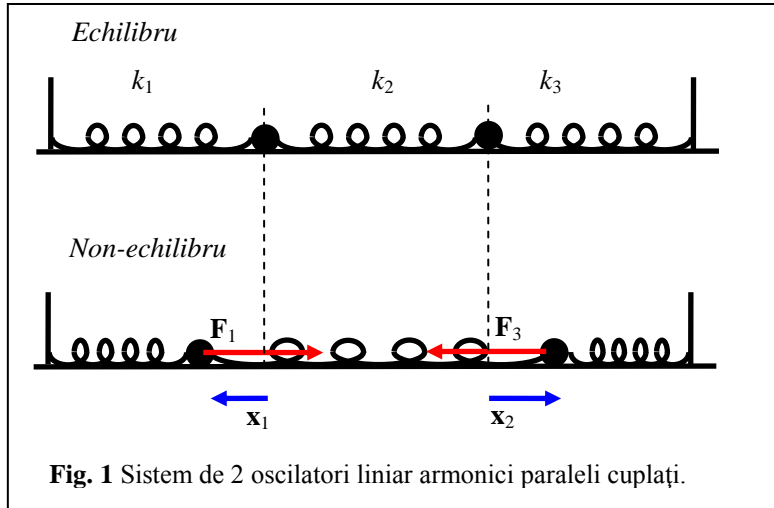


Oscilații cuplate pe perna de aer liniară

Considerăm un sistem de 2 oscilatori liniar armonici cuplați, schematizați în Fig. 1. Oscilațiile sistemului, cu *două* grade de libertate, sunt numite *paralele* deoarece forțele elastice sunt orientate pe o singură direcție, iar oscilațiile se fac pe această direcție. Resorturile cu constante elastice k_1, k_2, k_3 sunt considerate ideale (fără masă), iar deformările lor sunt în regim liniar (forța elastică este proporțională cu deformarea resortului). Masele celor două corpuri sunt m_1, m_2 , iar mișcarea se face fără frecare, de-a lungul axei Ox.



În consecință, legile de mișcare pentru cele două mase, conform principiului al doilea al mecanicii, se scriu:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= -k_1 \mathbf{x}_1 - k_2 (-\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 &= -k_3 \mathbf{x}_2 + k_2 (-\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (1)$$

unde $-k_1 \mathbf{x}_1$, $-k_2 (-\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1)$, $-k_3 \mathbf{x}_2$ sunt forțele elastice create în cele 3 resorturi, iar accelerația, de exemplu \mathbf{a}_1 este dubla derivată în raport cu timpul a coordonatei,

$$\mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{d^2 \mathbf{x}_1}{dt^2}.$$

Proiectăm e. (1) pe axa orizontală și obținem:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{k_2 + k_3}{m_2} x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Considerăm $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_3 = k$, $k_2 = k_c$, notăm

$$\begin{aligned} \frac{k_1 + k_2}{m_1} &= \frac{k + k_c}{m} = \omega_0^2 \\ \frac{k_2}{m_2} &= \frac{k_c}{m} = \omega_c^2 \end{aligned} \quad (3)$$

și sistemul de ecuații diferențiale (2) se scrie:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \omega_c^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \omega_c^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

Fără a face apel la teoria sistemelor de ecuații diferențiale, putem rezolva sistemul de ecuații diferențiale (4) ușor, observând că ecuațiile diferențiale cuplate ale sistemului se pot decupla adunând și scăzând cele două ecuații:

$$\begin{aligned}\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + (\omega_0^2 - \omega_c^2)(x_1 + x_2) &= 0 \\ \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)(x_1 - x_2) &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

Introducem noile variabile,

$$x_1 + x_2 = q_1, \quad x_1 - x_2 = q_2 \quad (6)$$

și sistemul de ecuații diferențiale (5) se scrie:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \underbrace{(\omega_0^2 - \omega_c^2)}_{\omega_1^2} q_1 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + \underbrace{(\omega_0^2 + \omega_c^2)}_{\omega_2^2} q_2 &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

Soluțiile fiecărei ecuații ale sistemului de ecuații diferențiale (7) sunt de forma:

$$q_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (8)$$

și conform notațiilor introduse în ec. (6), obținem:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)] \\ x_2(t) &= \frac{q_1 - q_2}{2} = \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)]\end{aligned}\quad (9)$$

unde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2} = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2} = \sqrt{(k + 2k_c)/m}$. Deci, în general, elogiile sunt combinații liniare ale două moduri cu frecvențe unghiulare ω_1 și ω_2 numite moduri *normale*. Numarul de moduri normale este identic cu numarul gradelor de libertate (vezi a doua propoziție a primului paragraf).

Cele două moduri normale se obțin cu următoarele condiții initiale:

a) Pentru frecvența unghiulară ω_1 se generează modul *simetric*, când cele două corpuri oscilează în *faza*; sistemul oscilează fără ca resortul de cuplaj să fie deformat. Condițiile initiale sunt $x_1(0) = A$; $x_2(0) = A$; $\dot{x}_1(0) = 0$; $\dot{x}_2(0) = 0$. Se introduc condițiile inițiale în sistemul (9) și obținem (se derivează la timp soluțiile (9) pentru a se obține vitezele):

$$\begin{aligned}2A &= A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 \\ 2A &= A_1 \cos \alpha_1 - A_2 \cos \alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \sin \alpha_1 + \omega_2 A_2 \sin \alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \sin \alpha_1 - \omega_2 A_2 \sin \alpha_2\end{aligned}\quad (10)$$

Soluția sistemului (10) este

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2 = 0 \\ A_1 &= 2A; A_2 = 0\end{aligned}\quad (11)$$

iar soluția finală este:

$$x_1(t) = x_2(t) = A \cos \omega_1 t = A \cos(t\sqrt{k/m}). \quad (12)$$

Perioada modului simetric este

$$T_s = T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow T_s = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}}. \quad (13)$$

b) Pentru frecvența unghiulară ω_2 se generează modul *antisimetric*, când cele două corpuri oscilează în *antifază*. Condițiile inițiale sunt $x_1(0) = A$; $x_2(0) = -A$; $\dot{x}_1(0) = 0$; $\dot{x}_2(0) = 0$. Se introduc condițiile inițiale în sistemul (9) și obținem (se derivează la timp soluțiile (9) pentru a se obține vitezele):

$$\begin{aligned}2A &= A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 \\ -2A &= A_1 \cos \alpha_1 - A_2 \cos \alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \sin \alpha_1 + \omega_2 A_2 \sin \alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \sin \alpha_1 - \omega_2 A_2 \sin \alpha_2\end{aligned}\quad (14)$$

Soluția sistemului (13) este

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2 = 0 \\ A_2 &= 2A; A_1 = 0\end{aligned}\quad (15)$$

iar soluția finală este:

$$x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega_2 t = A \cos(t\sqrt{(k+2k_c)/m}). \quad (16)$$

Perioada modului antisimetric este

$$T_a = T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow T_a = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k+2k_c}} < T_s.$$

Fenomenul de *bătăi* se obține respectând următoarele condiții inițiale $x_1(0) = A$; $x_2(0) = 0$; $\dot{x}_1(0) = 0$; $\dot{x}_2(0) = 0$, adică unul dintre corpuri este ținut pe loc, în poziția de echilibru, iar celălalt este deplasat la distanța A față de poziția de echilibru. Se introduc condițiile inițiale în sistemul (9) și obținem (se derivează la timp soluțiile (9) pentru a se obține vitezele):

$$\begin{aligned}2A &= A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 \\ 0 &= A_1 \cos \alpha_1 - A_2 \cos \alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \sin \alpha_1 + \omega_2 A_2 \sin \alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \sin \alpha_1 - \omega_2 A_2 \sin \alpha_2\end{aligned}\quad (17)$$

Soluția sistemului (11) este

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2 = 0 \\ A_1 &= A_2 = A\end{aligned}\quad (18)$$

iar soluția finală este:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} = A \cos(\omega'_b t) \cos(\omega_p t) \\ x_2(t) &= -A \sin \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} = -A \sin(\omega'_b t) \sin(\omega_p t) \end{aligned} \quad (19)$$

unde,

$$\begin{aligned} \omega'_b &= (\omega_2 - \omega_1)/2 = (\sqrt{k + 2k_c} - \sqrt{k})/(2\sqrt{m}), \\ \omega_p &= (\omega_1 + \omega_2)/2 = (\sqrt{k + 2k_c} + \sqrt{k})/(2\sqrt{m}). \end{aligned} \quad (20)$$

În Fig. 2 sunt reprezentate grafic aceste soluții în funcție de timp, pentru $A = 1$, $\omega_1 = 1s^{-1}$, $\omega_2 = 1.1s^{-1}$.

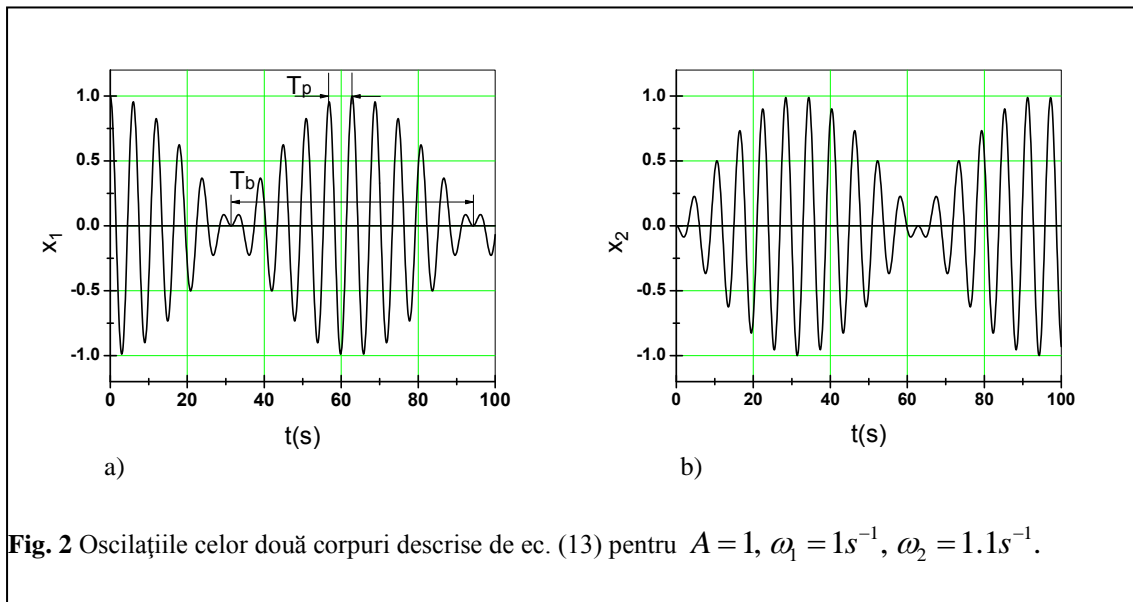


Fig. 2 Oscilațiile celor două corpuri descrise de ec. (13) pentru $A = 1$, $\omega_1 = 1s^{-1}$, $\omega_2 = 1.1s^{-1}$.

Se observă că oscilațiile celor două corpuri se fac astfel încât atunci când unul oscilează cu amplitudine maximă celălalt oscilează cu amplitudine minimă: cei doi oscilatori își transferă unul altuia energie prin intermediul resortului de cuplaj de constantă $k_2 = k_c$. Intervalul de timp dintre două momente în care unul dintre corpuri oscilează cu minimă amplitudine definește *perioada bătăii*, T_b . Conform Fig. 2a și ec. (20),

$$T_b = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega'_b} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \Rightarrow T_b = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k + 2k_c} - \sqrt{k}} \quad (21)$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1} \Rightarrow T_p = \frac{4\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k + 2k_c} + \sqrt{k}}. \quad (22)$$

Fenomenul de bătăi constă în obținerea unei oscilații de frecvență unghiulară ω_p (semnal *purtător*) a cărei amplitudine este *modulată* cu frecvența unghiulară ω'_b (vezi ec. (19)).

În funcție de perioada modurilor normale, cu ec. (21) perioada bătăilor se scrie:

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \Rightarrow T_b = \frac{T_s T_a}{T_s - T_a}, \quad (23)$$

iar perioada semnalului purtător, cu ec. (22) se scrie:

$$T_p = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1} \Rightarrow T_p = \frac{2T_s T_a}{T_s + T_a}. \quad (24)$$

Numărul de oscilații efectuate în perioada bătăilor este:

$$N = \frac{T_b}{T_p} \Rightarrow N = \frac{T_s + T_a}{2(T_s - T_a)}. \quad (25)$$