Listă exerciții
2

① Fie $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$ și $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic.
Considerăm $R' = \{e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3,\ e_2' = e_1 + 7e_2 + e_3,\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3\}$

a) Să se arate că R' este reper în $\mathbb{R}^3$.
$R_0 \xrightarrow{A} R'$ $A = ?$ (matricea de trecere)

b) Să se afle coordonatele vectorului $x = (3, 2, 1)$ în raport cu reperul R'.

② Fie $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$, $R_0 = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$ reperul canonic.
Fie $R' = \{-1 + 2X + 3X^2, X - X^2, X - 2X^2\}$

a) Să se arate că R' este reper în $\mathbb{R}_2[X]$.
$R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$

b) Să se afle coordonatele lui $P = 3 - X + X^2$ în raport cu R'.

③ Fie $(V, +, \cdot)/\mathbb{R}$ sp. vect. 3-dim.
Fie $R = \{v_1, v_2, v_3\}$ reper în V și
$R' = \{v_1' = v_1,\ v_2' = v_1 + v_2,\ v_3' = v_1 + v_2 + v_3\} \subset V$.

a) Să se arate că R' e reper în V; $R \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$

b) Dacă $v \in V$ are coordonatele (x_1, x_2, x_3) în raport cu reperul R, atunci care sunt coordonatele (x_1', x_2', x_3') în raport cu reperul R'

4 Fie $(\mathbb{R}_3[X],+,\cdot)/\mathbb{R}$ și

$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0)=0\}$

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$

$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0)=P(1)=0\}$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, $\forall i=\overline{1,3}$ subspații vectoriale

b) Precizați câte un reper $\mathcal{R}_i$ în V_i, $i=\overline{1,3}$

c) Aflați coordonatele lui

$P_1 = X+2X^2+3X^3$ în raport cu $\mathcal{R}_1$

$P_2 = 1+2X^2-3X^3$ —ıı— $\mathcal{R}_2$

$P_3 = X+3X^2-4X^3$ —ıı— $\mathcal{R}_3$

d) Determinați câte un subspațiu complementar V_i' lui V_i, $i=\overline{1,3}$

i.e. $\mathbb{R}_3[X] = V_i \oplus V_i'$, $i=\overline{1,3}$

e) Să se scrie $\mathbb{R}_3[X]$ ca suma directă 3 subspații vectoriale, respectiv 4 subspații vectoriale.

5 **Def** $(V,+,\cdot)/\mathbb{R}$.

a) $[v,w] = \{x \in V \mid x=(1-t)v+tw,\ t\in[0,1]\}$

b) $C \subseteq V$ subm. convexă $\Leftrightarrow [\forall v,w \in C \Rightarrow [v,w]\subseteq C]$

a) $\forall V' \subset V$ subsp. vect $\Rightarrow V'$ mulțime convexă

b) $\{v_0,\dots,v_k\} \subset V$ sistem finit de vectori din V

$\Rightarrow C = \{v = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i,\ \sum_{i=0}^{k}\lambda_i = 1\}$ convexă.

Prop $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$S(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AX=0\} \subset \mathbb{R}^n$ subspațiu vect

și $\dim_{\mathbb{R}} S(A) = n - rg(A)$

(6) $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \} = S(A)$

a) Precizați o bază în V'.

b) Precizați un subspațiu complementar V'' lui V' i.e. $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

c) Să se descompună $x = (1,1,2)$ în raport cu $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$.

(7) $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-2t=0\}$

$V'' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-2z+t=0\}$.

PR Să se arate că $\mathbb{R}^4 = V' + V''$.

Justificați că suma nu este directă

PROP Fie $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ spațiu vect n-dim. și $V' \subset V$ subsp. vect.
Dacă $\dim_{\mathbb{K}} V' = n$, atunci $V' = V$.

(8) Fie $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)/\mathbb{R}$ și $V' = \langle\{(1,2,-1,0), (1,0,0,3)\}\rangle$

a) Să se descrie V' printr-un sistem de ec. liniare

b) $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$, $V'' = ?$.

Să se descrie V'' printr-un sistem de ec. liniare.

(9) $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \langle\{u, v, w\}\rangle$, $V'' = \langle\{u', v', w'\}\rangle$,
unde $u = (2,3,11,5)$, $v = (1,1,5,2)$, $w = (0,1,1,1)$,
$u' = (2,1,3,2)$, $v' = (1,1,3,4)$, $w' = (5,2,6,2)$

a) Să se arate că $V' \oplus V'' = \mathbb{R}^4$.

b) Descrieți V', V'' printr-un sist de ec. liniare.

10) Fie $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

și $V' = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid AX = 0\}$

a) $\dim_{\mathbb{R}} V' = ?$ Precizați o bază în V'.

b) Să se scrie $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$

c) Descompuneți $x = (1, 2, 1, 2)$ ca sumă dintre un vect din V' și unul din V''.

Ex1. $S = \{ v_1 = (-1,1,0), v_2 = (2,1,-1), v_3 = (0,-1,-1),$
$v_4 = (1,1,1), v_5 = (-1,0,1) \} \subset \mathbb{R}^3$

Stabiliți nr. maxim de baze ce se pot construi cu vectorii din S și precizați aceste baze.

Ex2 $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ $S_1 = \{ f_1 = (1,1,0,0), f_2 = (0,1,1,0), f_3 = (0,0,1,1) \}$
$S_2 = \{ g_1 = (1,0,1,0), g_2 = (0,2,1,1), g_3 = (1,2,1,2) \}$

a) $\dim S_k$, $k = \overline{1,2}$

b) Precizați câte o bază în S_1, S_2, $S_1 + S_2$, $S_1 \cap S_2$.

Ex3 $S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$
$S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 + 2x_4 = 0 \}$.

a) $\dim S_1$, $\dim S_2$, $\dim(S_1 + S_2)$, $\dim(S_1 \cap S_2)$

b) Precizați câte o bază în fiecare.

Ex4 $L_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

$L_i(x) = (x-a_1)(x-a_2) \cdot \ldots \cdot (x-a_{i-1})(x-a_{i+1}) \ldots (x-a_n)$

a) $L_i(a_j) = ?$, $1 \le i,j \le n$

b) $\{L_i\}_{i=\overline{1,n}}$ SLI

c) $\{L_i\}_{i=\overline{1,n}}$ bază în $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

⑤ $V=(0,\infty)$, $(V,\oplus,\odot)/_{\mathbb{R}}$ sp vect

$x\oplus y=xy$; $\alpha\odot x=x^{\alpha}$

Arătați că $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ sunt vectori LD.

⑥ $V=\left\{x\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \end{cases}\right\}$

Det o bază în V

⑦ $R=\{e_1=(3,2,-1),\ e_2=(1,0,-1),\ e_3=(2,-1,1)\}\xrightarrow{A}R'$

$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $R'=?$ R, R' repere în $\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

⑧ Pt $m,n\in\mathbb{R}$ discutați SLI / SLD

pt $S=\{(m,1,1),\ (n,mn,n),\ (1,1,m)\}$

⑨ $S=\{\underbrace{(3+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})}_{u_1},\ \underbrace{(7,\ 1+2\sqrt{2})}_{u_2}\}$.

a) S e SLD în $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$

b) S e SLI în $\mathbb{R}^2/\mathbb{Q}$

Scanat cu CamScanner