S7

$f \in End(V)$ Endomorfisme Diagonalizare

$x \neq 0_V$ s.n. vector propriu $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ ai $f(x) = \lambda x$

λ = valoare proprie.

$V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ subspațiu propriu.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

- valorile proprii - răd din $\mathbb{K}$ ale polin. caracteristic

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 0$

$\lambda_1, .., \lambda_k$ = valori proprii distincte.

$m_1, .., m_k$ = multiplicități.

(T) $\exists$ un reper R in V ai $[f]_{R,R}$ diagonală $\Leftrightarrow$

1) $\lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{K}$

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_i$, $\forall i = \overline{1,k}$

(5) $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x_2 - x_3 + x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_4, x_4)$.

a) Să se afle valorile proprii

b) Precizați care sunt subspațiile proprii

c) $\exists$ un reper R în $\mathbb{R}^4$ ai $[f]_{R,R}$ este diagonală?

(6) Fie $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ liniară

$$A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Să se afle valorile proprii și subsp. proprii coresp.

b) $U = \langle\{e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4\}\rangle$ Să se arate că U este subsp. invariant al lui f i.e $f(U) \subset U$.

⑦ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_2, x_3, 2x_1 - 5x_2 + 4x_3)$

Să se arate că f nu este un endomorfism diagonalizabil.

~~2. Endomorfisme diagonalizabile~~

⑧ Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

a) $\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = e_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(e_1) = e_3 \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = e_1 \end{cases}$

Precizați dacă există câte un reper R în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[f]_{R,R}$ este matrice diagonală.

⑨ Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

a) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Precizați dacă $\exists$ un reper R în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[f]_{R,R}$ este matrice diagonală. În caz afirmativ, să se det acesta.

⑩ Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $[f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

a) Det valorile proprii și subspațiile proprii coresp.

b) Det R reper în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[f]_{R,R} = A' =$ diagonală

c) $R_0 \xrightarrow{C} R$ Det. C

d) Să se calculeze A^n.

(14) Fie șirul Fibonacci $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

a) Determinați matricea A ai

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

b) Diagonalizați A și calculați A^n.

c) $f_n = ?$

(12) $f \in End(\mathbb{R}^3)$

Dacă $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ sunt valorile proprii și $v_1 = (-3, 2, 1)$, $v_2 = (-2, 1, 0)$, $v_3 = (-6, 3, 1)$ sunt vectorii proprii coresp, atunci care este matricea $A = [f]_{R_0, R_0}$?

(13) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (4x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 4x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 4x_3)$

Precizați dacă $\exists$ un reper R în rap. cu care $[f]_{R,R}$ este diagonală.