- $V_s = \{t \mid s \notin V_s\ ;\ t \in V_s \Rightarrow s \in V_t\}$ voisinage — tous vois. entre eux (clique)
- $U = \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c$ (glob); $U_s = \sum_{c \in \mathcal{C},\, s \in c} U_c$ (local en un site s)

4 connex
8 connex

MAF

Champs de Markov / de Gibbs

- **Déf.** X est un champ de Markov ssi la proba cond. locale en un site n'est f-n que de la config. du voisinage du site.

cond. à tous les autres pixels — pixels voisins

$$P(X_s = x_s \mid x^s) = P(X_s = x_s \mid x_t, t \in V_s)$$

en un site — $x^s = (x_t)_{t \neq s}$

- **Mesure de Gibbs** : $P(X = x) = \frac{1}{Z} e^{-U(x)}$ où $U(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x)$, $Z = \sum_{x \in \Omega} e^{-U(x)}$?
- **Champ de Gibbs** : Champ X dont la mesure est la mesure de Gibbs.
- **Th Hammersley-Clifford**

X est un champ de Markov relativement à V et $P(X = x) > 0\ \forall x \in \Omega$ ssi X est un champ de Gibbs de potentiel associé à V.

Permet de lier les probabilités glob. et loc.

énergie locale — $(x_t, t \in V_s)$

- $U_s(x_s \mid x_t, t \in V_s) = \sum_{c \in \mathcal{C},\, s \in c} U_c(x_s, V_s)$: on fait la somme des énergies de toutes les cliques qui contiennent s.

pixel particulier — V_s

- $P(X_s = x_s \mid X^s = x^s) = \dfrac{e^{-U_s(x_s \mid V_s)}}{\sum_{x_s \in E} e^{-U_s(x_s \mid V_s)}}$ proba cond. locales en un site x_s

fait intervenir que les potentiels des cliques contenant le site s.

Modèle d'Ising

$\beta \nearrow\!\!\!\! \searrow\ x_s \neq x_t$

plus β grand, plus les zones sont compacts

- Valeurs : $x_s \in \{-1, 1\} = E = \{0, 1\}$
- Voisinage : 4 ou 8 plus proches vois.
- Potentiels : $U_{c=(s,t)}(x_s, x_t) = \begin{cases} -\beta & \text{si } x_s = x_t \\ +\beta & \text{si } x_s \neq x_t \end{cases} = -\beta x_s x_t$

- β>0

↳ β>0 : config. plus probables = énergies plus faibles : spins de même signe

↳ β<0 : altern. des spins de signes opposés

$U(x) = -\sum_{c=(s,t) \in \mathcal{C}} \beta x_s x_t - \sum_{s \in S} B x_s$ (énergie totale ; champ externe / clique d'ordre 1)

$\beta \nearrow\ 1 / x_s \neq x_t$

Quand éner. locale demandée → traiter cas en f-n des valeurs de x_s : $x_s = 0$ | voisin. (4 ou 8) ; $x_s = 1$ | vois. (4 ou 8)

Modèle de Potts

: extension Ising

- $E = \{0, \dots, m-1\}$ (niveaux de gris diff ou labels) — on sait juste les "régions" d'une image
- Voisinage : 4-, 8- connexe
- Potentiel $U_{c=(s,t)}(x_s, x_t) = \begin{cases} -\beta & \text{si } x_s = x_t \\ +\beta & \text{si } x_s \neq x_t \end{cases}$

↳ β>0 : config. probables : larges zones homogènes

! Possible d'avoir diff val de β selon type de régions

Vois 4-8 connexité

Modèle markovien gaussien

- $E = \{0, \dots, 255\}$ image en niveau de gris pas étiquettes

$$U(x) = \beta \underbrace{\sum_{c=(s,t)} (x_s - x_t)^2}_{\text{régularisation}} + \alpha \underbrace{\sum_{s \in S} (x_s - \mu_s)^2}_{\text{attache aux données}}$$

clique d'ordre 2

fav. les faibles diff de niv. entre voisins pour β>0 — gris

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$ ± équir. ou piqué de la distrib.

Échantillonage de MAF

= donne une image possible

réaliser le tirage d'une config. (une image) en suivant la loi de proba de Gibbs ?

① **Echantillonneur de Gibbs** (nb fini)

= construction itérative d'une suite d'images

- A l'itération n : → choix d'un site s (*)

pour chaque x_s possible

→ $P(X_s = x_s \mid V_s) = \dfrac{e^{-U_s(x_s \mid V_s)}}{\sum_{\xi \in E} e^{-U_s(\xi \mid V_s)}}$

le x_s est tiré aléatoirement selon la loi de Gibbs

→ mise à jour du site s par tirage aléatoire selon la loi $P(X_s = x_s \mid V_s)$

p pour $x_s = 0$; p1

(*) tirer le site selon une loi uniforme ou effect. un balayage

② **Algo de Metropolis** (issu de la phy stat)

= suite d'images qui sont des tirages selon la loi du Champ de Markov

⇒ diff mise à jour.

→ choix du site s

→ tirage aléatoire d'un descripteur (niveau de gris) λ selon une loi uniforme

→ calcul de la variat. d'énergie pour le passage de $x_s^{(n-1)}$ à λ : $\Delta U = U_s(\lambda \mid V_s^{(n-1)}) - U_s(x_s^{n-1} \mid V_s^{n-1})$

1) $\Delta U < 0$: $x_s^{(n)} = \lambda$ ✓ ; ② $\Delta U \geq 0$ refusé $p = e^{-\Delta U}$, accepté $1-p$ / selon ces probas

donne LA meilleure image

① ALGO RECUIT SIMULÉ : $P_T(X = x) = \frac{1}{Z(T)} e^{-U/T}$

- recherche d'une config. d'énergie minimale
- algo itératif ; diminuer la temp.

→ Choix de $T^{(0)}$ assez élevée

→ choix d'une config. initiale $x^{(0)}$

→ à l'étape n :

- simul. de $x^{(n)}$ pour la loi de Gibbs d'énergie $\frac{U(x)}{T^{(n)}}$ (par echantillonneur)
- dim. lente de la temp $T^{(n)} > \frac{c}{\log(1+n)}$

→ arrêt lorsque le taux de changement est faible

- Images obtenues uniques
- Minimum global

Lorsque T=0, P_T est unif distrib. sur les minimas globaux (config. plus probable)

② ALGO ICM

plus rapide, min local, dép. de l'initialis.

Algo itératif ; modif. x_s de façon déterministe

- Etape n :

→ parcourir TOUS les sites → fin : lorsque le chang. d'une étape à l'autre devient faible

→ en chaque site s :

- calcul de la proba cond locale pour toutes les val. λ des niveaux de gris possibles du site : $P(X_s = \lambda \mid x_t, t \in \text{Vois de } s)$ ⇒ mise à jour $x_s = \lambda$, avec λ qui maximise la proba locale

MAP (Max à posteriori) : $P(X = x \mid Y = y) \propto \underbrace{P(Y \mid X)}_{\text{likelihood / data attach.}}\ \underbrace{P(X)}_{\text{prior / regular.}}$

X=x - si rest. = im. idéale ; si segm = image

Y=y - image obs.

$$P(X = x \mid Y = y) = e^{-U(x|y)/Z'}$$

[$\max_x P(X = x \mid Y = y) \Leftrightarrow \min_x U(x|y)$ global

$$U(x|y) = \sum_{s \in S} -\ln p(y_s \mid x_s) + \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x)$$

si gaussien — Ising, potts... — hyp. Markov sur X

$$U(x|y) = \sum_{s \in S} \frac{(x_s - y_s)^2}{2\sigma^2} + \beta \sum_{(s,t) \in \mathcal{C}} \Phi(x_s - x_t) \quad \text{(rest)}$$

$$U(x|y) = \sum_{s \in S} \frac{(y_s - \mu_{x_s})^2}{2\sigma_{x_s}^2} + \ln \sqrt{2\pi}\,\sigma_x + \beta \sum_{(s,t) \in \mathcal{C}} \Phi(x_s, x_t) \quad \text{(seg)}$$

$P(y_s \mid x_s = i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_s - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$ — chaque classe i a une distr. gauss. (μ_i, σ_i^2)

$\Phi(u) = u^2$ (flou) ; Φ = Ising cartoon (bien zone homog.)

$U(x, b) = \sum_{s,t} (1 - b_{st})(x_s - x_t)^2 + \gamma b_{st}$