Paradigmas de Programación

Sistemas deductivos
Deducción natural para lógica proposicional

2do cuatrimestre de 2025

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Sistemas deductivos

Deducción natural para lógica proposicional

Semántica bivaluada

Motivación

Queremos poder hacer **afirmaciones matemáticamente precisas** sobre programas en distintos lenguajes de programación.

Ejemplos de afirmaciones que podríamos querer hacer

- El tipo `(Bool -> Int)` está sintácticamente bien formado.
- La expresión `map` tiene tipo `((a -> b) -> [a] -> [b])`.
- La expresión `map` tiene tipo `((a -> a) -> [a] -> [a])`.
- La expresión `undefined || True` tiene tipo `Bool`.
- El programa `while (true) {}` no termina.
- El resultado de evaluar `(factorial 7)` es 5040.
- Los algoritmos `quickSort` y `mergeSort` son indistinguibles.

Queremos tener mecanismos para demostrar dichas afirmaciones.

En este contexto, las afirmaciones se llaman **juicios**.

Sistemas deductivos

Sistema deductivo (informalmente)

Brinda herramientas y principios para **razonar de manera rigurosa**.

Sistema deductivo (un poco más formal)

Sirve para **razonar acerca de juicios**.

Sistemas deductivos

Sistema deductivo

Dado por un conjunto de **axiomas** y **reglas de inferencia**, que tienen la siguiente estructura:

$$\frac{}{\langle \text{axioma} \rangle}\langle \text{nombre del axioma} \rangle$$

$$\frac{\langle \text{premisa}_0 \rangle \quad \langle \text{premisa}_1 \rangle \quad \dots \quad \langle \text{premisa}_n \rangle}{\langle \text{conclusión} \rangle}\langle \text{nombre de la regla} \rangle$$

- **Axioma**: Afirmaciones básicas que se asumen como verdaderas (no se deducen de otras afirmaciones).
- **Reglas de inferencia**: Permiten derivar afirmaciones (teoremas) a partir de axiomas y otras afirmaciones.

Nota: Un axioma es una regla de inferencia sin premisas.

Reglas de inferencia

Regla de inferencia

$$\frac{\langle \text{premisa}_0 \rangle \quad \langle \text{premisa}_1 \rangle \quad \ldots \quad \langle \text{premisa}_n \rangle}{\langle \text{conclusión} \rangle}\langle \text{nombre de la regla} \rangle$$

Las premisas son **condiciones suficientes** para la conclusión.

- Lectura de arriba hacia abajo:
  si tenemos evidencia de que valen las premisas,
  podemos deducir que vale la conclusión.
- Lectura de abajo hacia arriba:
  si queremos demostrar que vale la conclusión,
  alcanza con demostrar que valen las premisas.

Sistemas deductivos

Ejemplo: Sistema deductivo $\mathcal{A}$

El sistema $\mathcal{A}$ predica sobre juicios de la forma "$X > Y$".

- Axiomas:

$$\frac{}{\bigstar > \blacksquare}\,\mathrm{ax1} \qquad \frac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\,\mathrm{ax2} \qquad \frac{}{\blacktriangle > \bullet}\,\mathrm{ax3}$$

- Regla de inferencia: definida por el *esquema*

$$\frac{X > Y \qquad Y > Z}{X > Z}\,\mathrm{trans}$$

  X, Y y Z son variables esquemáticas / *metavariables*: se pueden instanciar de manera arbitraria.

- Demostrar el juicio $\bigstar > \bullet$ de dos maneras distintas.

Derivación / Deducción / Prueba

Derivación

Un procedimiento sistemático que permite construir una demostración, mostrando cómo una afirmación se deduce a partir de un conjunto de axiomas y reglas de inferencia.

Árbol de Derivación

Árbol de Derivación

- Representación gráfica de una derivación.
- Un árbol **finito** donde...
  - Los nodos representan afirmaciones.
  - La raíz es la afirmación que se quiere probar (**conclusión**).
  - Las ramas representan las reglas de inferencias que conectan a las afirmaciones.
- Parte de ciertas premisas (hojas) y llega a una conclusión (raíz).

Árbol de Derivación

Ejemplo 1

$$\dfrac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\,\text{ax2}$$

Se puede concluir $\blacksquare > \blacktriangle$ sin premisas.

Ejemplo 2

$$\dfrac{\bigstar > \blacksquare \qquad \blacksquare > \blacktriangle}{\bigstar > \blacktriangle}\,\text{trans}$$

Se puede concluir $\bigstar > \blacktriangle$ a partir de las premisas $\bigstar > \blacksquare$ y $\blacksquare > \blacktriangle$.

Ejemplo 3

$$\dfrac{\dfrac{}{\bigstar > \blacksquare}\,\text{ax1} \qquad \dfrac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\,\text{ax2}}{\bigstar > \blacktriangle}\,\text{trans}$$

Se puede concluir $\bigstar > \blacktriangle$ sin premisas.

Afirmación derivable (teorema)

Afirmación derivable

Una afirmación es **derivable** si existe alguna derivación **sin premisas** que la tiene como conclusión.

¿Son derivables las siguientes afirmaciones?

- $\bigstar > \blacktriangle$
- $\blacktriangle > \bigstar$

Lógica proposicional: Sintaxis

Dado un conjunto infinito numerable de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$$

Fórmulas

Las fórmulas bien formadas (fbf) de la lógica proposicional se construyen inductivamente según las siguientes reglas:

- Cualquier variable proposicional es una fórmula.
- $\perp$ es una fórmula (representa una contradicción).
- Si τ es una fórmula, entonces $\neg\tau$ es una fórmula.
- Si τ y σ son fórmulas, entonces $(\tau \wedge \sigma)$, $(\tau \Rightarrow \sigma)$, y $(\tau \vee \sigma)$ son fórmulas.

Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Dado un conjunto infinito numerable de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$$

Sistema deductivo

La afirmación "X FORM" denota que X es una fórmula de la lógica proposicional.

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P \ \text{FORM}}\text{FP} \qquad \frac{}{\bot \ \text{FORM}}\text{F}\bot \qquad \frac{\tau \ \text{FORM} \qquad \sigma \ \text{FORM}}{(\tau \wedge \sigma) \ \text{FORM}}\text{F}\wedge$$

$$\frac{\tau \ \text{FORM} \qquad \sigma \ \text{FORM}}{(\tau \Rightarrow \sigma) \ \text{FORM}}\text{F}\Rightarrow \qquad \frac{\tau \ \text{FORM} \qquad \sigma \ \text{FORM}}{(\tau \vee \sigma) \ \text{FORM}}\text{F}\vee \qquad \frac{\tau \ \text{FORM}}{\neg\tau \ \text{FORM}}\text{F}\neg$$

1. Demostrar $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ FORM.
2. (Para pensar) Demostrar que si τ FORM es un juicio derivable, entonces τ tiene el mismo número de "(" que de ")". Proceder por inducción estructural en la derivación.

Sistemas deductivos

Deducción natural para lógica proposicional

Semántica bivaluada

Lógica proposicional: Sintaxis (gramáticas)

- Usualmente no vamos a definir la sintaxis de lenguajes a través de sistemas deductivos.
- Vamos a escribirlos de maneras abreviadas, usando gramáticas (la definición de lo que es una gramática la verán en LFAC).

Gramática de la lógica proposicional

Las **fórmulas** son las expresiones que se pueden generar a partir de la siguiente gramática:

$$\tau, \sigma, \rho, \ldots ::= \; P \mid \bot \mid (\tau \wedge \sigma) \mid (\tau \Rightarrow \sigma) \mid (\tau \vee \sigma) \mid \neg\tau$$

Observación

La gramáticas definen sistemas deductivos de manera abreviada. Una expresión τ se puede generar a partir de la gramática de arriba si y sólo si el juicio $\tau \; \mathrm{FORM}$ es derivable en el sistema anterior.

Convenciones de notación

1. Omitimos los paréntesis más externos de las fórmulas.

   $$\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho) \;=\; (\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho))$$

2. La implicación es asociativa a derecha.

   $$\tau \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho \;=\; (\tau \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \rho))$$

3. Ojo: los conectivos $(\wedge, \vee)$ **no** son conmutativos ni asociativos.

   $$\tau \vee (\sigma \vee \rho) \;\neq\; (\tau \vee \sigma) \vee \rho \qquad\qquad \tau \wedge \sigma \;\neq\; \sigma \wedge \tau$$

Lógica Proposicional : Semántica

Valuación

Una valuación es una función $v : \mathcal{P} \to \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

$v \models \tau$

Una valuación v **satisface** una fórmula τ si $v \models \tau$, donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \models P & \text{si y sólo si} & v(P) = \mathtt{V} \\
v \models \tau \wedge \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ y } v \models \sigma \\
v \models \tau \Rightarrow \sigma & \text{si y sólo si} & v \not\models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \tau \vee \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \neg\tau & \text{si y sólo si} & v \not\models \tau
\end{array}
$$

Nota: $v \models \bot$ **nunca vale**

Contextos y juicios

Contexto

Un **contexto** es un conjunto finito de fórmulas.

Los notamos con letras griegas mayúsculas $(\Gamma, \Delta, \Sigma, \ldots)$.
Por ejemplo:

$$\Gamma = \{P \Rightarrow Q, \neg Q\}$$

Generalmente omitimos las llaves; E.g., $P \Rightarrow Q, \neg Q$.

$v \models \Gamma$

Una valuación v satisface un contexto Γ (notación: $v \models \Gamma$) si y sólo si v satisface a todas las fórmulas de Γ.
Nota: Toda valuación v satisface al contexto vacío

Consecuencia lógica

Consecuencia lógica

Una fórmula τ es consecuencia lógica (o consecuencia semántica) de un conjunto Γ (notación: $\Gamma \vDash \tau$) si y sólo si cualquier valuación v que satisface a Γ también satisface a τ.

Notas:

- τ es verdadera para todas las valuaciones que satisfacen todas la fórmulas en Γ.
- Asumiendo que todas las fórmulas en Γ son verdaderas (hipótesis), τ (tesis) es verdadera.

Consecuencia lógica

Ejemplo

1. Probar que $P \wedge Q \vDash P$.
2. Probar que $P \vee Q, \neg Q \vDash P$.
3. Probar que no vale $P \vee Q \vDash Q$.
4. Probar que $P \vDash Q \vee \neg Q$.
5. Probar que $\vDash P \Rightarrow P$.

Limitaciones del método semántico

Hay varios problemas con un enfoque puramente semántico:

- Muy pocas lógicas tienen procedimientos de decisión como la lógica proposicional.
- El conjunto de hipótesis (axiomas) puede ser infinito.
- No evidencia la relación de la fórmula con hipótesis (e.g., dónde es necesaria una hipótesis).
- Difícil reconocer resultados intermedios (lemas).

Enfoque deductivo

- Definir un sistema deductivo.
- Vamos a ver el sistema de **deducción natural** (existen otros):
  - Trabaja con afirmaciones de la forma:

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{hipótesis}} \vdash \underbrace{\tau}_{\text{tesis}}$$

  - A estas afirmaciones las denominamos **juicios**.
  - Informalmente, un juicio afirma que a partir de las hipótesis en el contexto Γ es posible deducir la fórmula de la tesis.

Algunos juicios derivables

$$P \vee Q, \neg Q \vdash P \qquad \vdash P \Rightarrow P$$

$$P \Rightarrow Q \vdash \neg Q \Rightarrow \neg P \qquad P, Q \wedge R \vdash R \wedge P$$

Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.

(Vamos de a poco)

Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\text{ax}$$

Ejemplo

$$\frac{}{P \vdash P}\text{ax} \qquad \frac{}{P \Rightarrow Q, R \vdash P \Rightarrow Q}\text{ax} \qquad \frac{}{P, Q \wedge R, S \vdash Q \wedge R}\text{ax}$$

Los siguientes juicios **no** se deducen de la regla ax:

$$P, Q \vdash R \qquad \vdash P \Rightarrow P \qquad P \wedge Q \vdash Q \wedge P \qquad \neg\neg P \vdash P$$

Reglas de inferencia — conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \land \sigma} \land_i$$

Eliminación de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \land \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \land_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \land \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \land_{e_2}$$

1. Dar una derivación de $P \land Q \vdash Q \land P$.
2. Dar una derivación de $P \land (Q \land R) \vdash (P \land Q) \land R$.

Reglas de inferencia — implicación

Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Eliminación de la implicación

(*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow P$
2. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow (Q \wedge P)$
3. Dar una derivación de $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R$.

Reglas de inferencia — disyunción

Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow (P \vee P)$.
2. Dar una derivación de $\vdash (P \vee P) \Rightarrow P$.
3. Dar una derivación de $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo $\bot$ representa la falsedad (contradicción, absurdo).

El conectivo $\bot$ **no** tiene reglas de introducción.

Eliminación del falso

(principio de explosión o *ex falso quodlibet*)

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau} \bot_e$$

1. Dar una derivación de $(P \vee Q) \Rightarrow \bot \vdash P \Rightarrow Q$
2. Dar una derivación de $(P \wedge Q) \Rightarrow \bot \vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow R$
3. Mostrar que hay infinitas derivaciones de $\bot \vdash \bot$.

Reglas de inferencia — negación

Introducción de la negación (reducción al absurdo intuicionista)

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$$

Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \qquad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow \neg\neg P$.
2. Dar una derivación de $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$.
3. Dar una derivación de $P \vee Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$.

Deducción natural **intuicionista** (**NJ**) — todas la reglas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\text{ax}$$

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\wedge_{e_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge_{e_2}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\Rightarrow_e$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_2}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\vee_e$
$\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\bot_e$	
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$

Propiedades del sistema

Teorema (Debilitamiento) (*weakening*)

Si $\Gamma \vdash \tau$ es derivable, entonces $\Gamma, \sigma \vdash \tau$ es derivable.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma, \sigma \vdash \tau}\,\mathsf{W}$$

Se puede demostrar por inducción estructural en la derivación.
(Se hará como ejercicio en la práctica).

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q}\,\mathsf{ax}}{P \wedge Q, R \vdash Q}\,\wedge_{e_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q}\,\mathsf{ax}}{P \wedge Q, R \vdash P}\,\wedge_{e_1}}{\dfrac{P \wedge Q, R \vdash Q \wedge P}{R \vdash (P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)}\,\Rightarrow_i}\,\wedge_i$$

Reglas derivadas

Veamos que las siguientes reglas se deducen de las anteriores.
(No es necesario agregarlas al sistema deductivo).

Modus tollens

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\mathsf{MT}$$

Introducción de la doble negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\neg\neg_i$$

Principios de razonamiento clásicos

Eliminación de la doble negación

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

Principio del tercero excluido

(*Law of Excluded Middle*)

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\text{LEM}$$

No es posible deducir estas reglas de las anteriores.

Sin embargo, se pueden deducir la una de la otra. Veamos que:

1. Usando la regla LEM se puede deducir la regla $\neg\neg_e$.
2. Usando la regla $\neg\neg_e$ se puede deducir la regla LEM.

Principios de razonamiento clásicos

Las reglas $\neg\neg_e$ y LEM son principios de razonamiento **clásicos**.
Otro principio de razonamiento clásico, equivalente a $\neg\neg_e$ y LEM:

Reducción al absurdo clásico

(*Proof by Contradiction*)

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\text{PBC}$$

Ejercicio

Ver que usando PBC se puede deducir LEM y viceversa.

Lógica intuicionista vs. lógica clásica

Dos sistemas deductivos

NJ	sistema de deducción natural intuicionista.
NK	sistema de deducción natural clásica.

- **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos. Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo $\neg\neg_e$.
- Si un juicio es derivable en **NJ**, también es derivable en **NK**.
- **NJ** es más restrictiva. No permite usar $\neg\neg_e$, LEM, PBC, etc.
- Para hacer matemática, comúnmente usamos lógica clásica.

Interés de la lógica intuicionista en computación

- Permite razonar acerca de **información**. ¿Qué significa (hay vida en Marte $\vee$ $\neg$hay vida en Marte)?
- Las derivaciones en **NJ** se pueden entender como programas. **NJ** es la base de un lenguaje de programación funcional.

Deducción natural **clásica** (**NK**) — reglas completas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\wedge_{e_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge_{e_2}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\Rightarrow_e$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_2}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\vee_e$
$\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\bot_e$	
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$

Sistemas deductivos

Deducción natural para lógica proposicional

Semántica bivaluada

Corrección y completitud

Teorema (Corrección y completitud)

Son equivalentes:

1. $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. $\Gamma \models \tau$

Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \models \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \models \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \models \sigma$.
Sea v tal que $v \models \Gamma$ y veamos que $v \models \sigma$.
Por HI sabemos que $\Gamma \models \tau \Rightarrow \sigma$ y que $\Gamma \models \tau$.
Como $v \models \Gamma$ tenemos que $v \models \tau \Rightarrow \sigma$ y $v \models \tau$.
Por definición de $v \models \tau \Rightarrow \sigma$, tenemos entonces que $v \not\models \tau$ o $v \models \sigma$.
Pero teníamos $v \models \tau$, con lo cual concluímos $v \models \sigma$.

- Intentar probar los 12 casos restantes.

Demostración de completitud ($\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$)

Definición

1. Un contexto Γ **determina** una variable $P \in \mathcal{P}$ si vale que $P \in \Gamma$ o que $\neg P \in \Gamma$.
2. Un contexto Γ **determina** un conjunto de variables $X \subseteq \mathcal{P}$ si determina a todas las variables de X.

Para probar el teorema de completitud, necesitamos:

Lema principal

Si Γ determina a todas las variables que aparecen en τ, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Asumamos que el lema vale, lo demostraremos después.

Demostración de completitud $(\Gamma \models \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en ρ.
Usando LEM y $\vee_e$ podemos considerar 2^n casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien P_i o bien $\neg P_i$.
Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$ es derivable en **NK** (y listo).
2. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK**.
   Por corrección vale $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \models \neg\rho$.
   Sea v una valuación tal que $v(P_i) = \mathtt{V}$ si y sólo si $\tilde{P}_i = P_i$.
   Luego $v \models \neg\rho$. Absurdo pues sabíamos $\models \rho$.

Demostración del lema principal

Recordemos el enunciado:

Lema principal

Si Γ determina a todas las variables que aparecen en τ, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Lo demostramos por inducción estructural en τ.
Hay 6 casos (P, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\bot$, $\neg$).

Por ejemplo, supongamos que $\tau = (\sigma \wedge \rho)$.
Por hipótesis inductiva sobre σ, sabemos que:

1. O bien $\Gamma \vdash \sigma$ es derivable en **NK**.
   Por hipótesis inductiva sobre ρ, sabemos que:
   - 1.1 O bien $\Gamma \vdash \rho$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho$.
   - 1.2 O bien $\Gamma \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\sigma$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$.

- Intentar probar los 5 casos restantes.

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ? ? ? ? ? ? ? ? ?

Lecturas recomendadas

- **Capítulo 1 del libro Huth y Ryan.**
  Logic in computer science: Modelling and reasoning about systems. Michael Huth y Mark Ryan. Cambridge University Press, 2004.
- **Capítulos 2 y 6 del libro de Sørensen y Urzyczyn.**
  Morten Sørensen y Paweł Urzyczyn. *Lectures on the Curry–Howard Isomorphism*. Elsevier, 2006.