Práctica 0: Repaso

Compilado: 17 de agosto de 2025

1. Probar por inducción:
   a) $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2, \forall n \geq 1$
   b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2, \forall n \geq 0$
   c) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6, \forall n \geq 1$
   d) $-1 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n n(n+1)/2, \forall n \geq 1$
   e) $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3, \forall n \geq 1$
   f) $1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1, \forall n \geq 1$
2. Encontrar una fórmula para la siguiente suma y demostrarla por inducción: $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n$.
3. La población de una colonia de hormigas se duplica todos los años. Si se establece una colonia inicial de 10 hormigas, ¿cuántas hormigas habrá después de n años?
4. Probar por inducción que para $n \geq 5$ se verifica que $2^n > n^2$.
5. La población de gatos en un depósito tiene la propiedad de que el número de gatos en un año es igual a la suma del número de gatos de los dos años anteriores. Si en el primer año (empezando a contar desde 1) había un solo gato, y en el segundo dos (suponiendo ello posible!), probar que el número de gatos en el año n es:
$$\sqrt{\frac{1}{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$
6. Programar de manera recursiva (en su lenguaje favorito) la función del punto anterior. Escribir casos de test para la función, utilizando la fórmula cerrada demostrada en el punto anterior.
7. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?
   Se quiere probar que los elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, de un conjunto son iguales entre sí.
   a) Paso inicial ($n = 1$): El conjunto tiene un sólo elemento x_1 que es igual a si mismo.
   b) Paso inductivo: Supongamos que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$. Como también vale la hipótesis inductiva para un conjunto de dos elementos, tenemos que $x_{n-1} = x_n$ y por tanto resulta que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_n$.
8. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?
   Se quiere probar que $\forall a \neq 0$ vale que $a^n = 1$.
   a) Paso inicial ($n = 0$): $a^n = 1\ \forall a$.
   b) Paso inductivo: Supongamos que $a^{n-1} = 1$. Entonces $a^n = (a^{n-1} \times a^{n-1})/a^{n-2} = (1 \times 1)/1 = 1$.