TDA - 2C2025   Practica 0: Repaso.

1. Probar por inducción:

a) $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2, \forall n \geq 1.$

Caso base: $n=1$.

$$1 = 1(1+1)/2.$$
$$1 = 1\cdot 2/2$$
$$1 = 1 \checkmark.$$

Paso inductivo: Asumo $p(h)$ para probar $p(h+1)$.

HI: $1+2+\ldots+h = h(h+1)/2.$

Qpq: $1+2+\ldots+h+h+1 = (h+1)(h+1+1)/2.$

$$\Rightarrow \underbrace{1+2+\ldots+h}_{HI.} + h+1 = (h+1)(h+2)/2.$$

$$h(h+1)/2 + h+1 = \frac{h^2+3h+2}{2.}$$
$$\frac{h^2+h}{2} + \frac{2h+2}{2.}$$

$$\frac{h^2+h+2h+2}{\cancel{2}} = \frac{h^2+3h+2}{\cancel{2}}.$$

$$h^2+3h+2 = h^2+3h+2 \checkmark.$$

Queda probado por inducción.

b) $1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2, \forall n \geq 0.$

Caso base:

$$(2n+1) = (n+1)^2$$
$$2\cdot 0+1 = (0+1)^2$$
$$1 = 1 \checkmark.$$ Cumple el caso base.

Paso inductivo:

HI: $1+3+5+\ldots+(2h+1) = (h+1)^2$

Qpq: $\underbrace{1+3+5+\ldots+(2h+1)}_{HI.} + (2(h+1)+1) = (h+1+1)^2$

$\Rightarrow$

$$(h+1)^2 + 2h+2+1 = (h+2)^2.$$
$$h^2+2h+1+2h+3 = h^2+4h+4.$$
$$h^2+4h+4 = h^2+4h+4. \checkmark$$

Queda probado por inducción.

e) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6, \forall n \geq 1.$

Caso base: $n=1$. $1^2 = 1(1+1)(2\cdot 1+1)/6.$
$1 = 1\cdot 2\cdot 3/6.$
$1 = 1$ ✓.

Paso inductivo:

HI: $1^2 + 2^2 + \dots + h^2 = h(h+1)(2h+1)/6.$

Qpq: $\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + h^2}_{HI} + (h+1)^2 = (h+1)(h+2)(2h+3)/6.$

$$\Rightarrow \frac{h(h+1)(2h+1) + 6(h+1)^2}{\cancel{6}} = \frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{\cancel{6}}$$

$$(h^2+h)(2h+1) + 6(h^2+2h+1) = (h^2+3h+2)(2h+3).$$

$$2h^3 + h^2 + 2h^2 + h + 6h^2 + 12h + 6 = 2h^3 + 3h^2 + 6h^2 + 9h + 4h + 6$$

$$2h^3 + 9h^2 + 13h + 6 = 2h^3 + 9h^2 + 13h + 6 \checkmark.$$

Queda probado por inducción.

d) $-1 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^n \cdot n^2 = (-1)^n n(n+1)/2, \forall n \geq 1.$

Caso base: $n=1$ $(-1)^1 \cdot 1^2 = (-1)^1 \cdot 1(1+1)/2.$
$-1\cdot 1 = -1 \cdot 2/2$
$-1 = -1$ ✓.

Paso inductivo:

HI: $-1 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^h \cdot h^2 = (-1)^h h(h+1)/2.$

Qpq: $\underbrace{-1 + 2^2 - 3^2 + \dots}_{HI} + (-1)^{h+1}(h+1)^2 = (-1)^{h+1}(h+1)(h+2)/2.$

$$(-1)^h \cdot h(h+1)/2 + (-1)^{h+1}(h+1)^2 = (-1)^{h+1}(h+1)(h+2)/2.$$

$$\frac{(-1)^h \cdot h(h+1) + 2(-1)^{h+1}(h+1)^2}{\cancel{2}} = \frac{(-1)^{h+1}(h+1)(h+2)}{\cancel{2}}$$

$$(-1)^h \cdot h(h+1) + 2\cdot(-1)(-1)^h(h+1)^2 = (-1)(-1)^h(h+1)(h+2).$$

$$\cancel{(-1)^h}(h(h+1) + 2(-1)(h+1)^2) = \cancel{(-1)^h}(-1)(h+1)(h+2)$$

$$h(h+1) + 2(-1)(h+1)^2 = (-1)(h+1)(h+2).$$

$$\cancel{(h+1)}(h + 2(-1)(h+1)) = (-1)\cancel{(h+1)}(h+2)$$
$$h + 2(-1)(h+1) = (-1)(h+2).$$
$$h - 2h - 2 = -h - 2$$
$$-h - 2 = -h - 2 \checkmark.$$ Queda probado por inducción.

e) $(1+2+3+\dots+n)^2 = 1^3+2^3+\dots+n^3, \forall n \geq 1.$

Reescribimos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3, \forall n \geq 1.$$

Caso base: $\left(\sum_{i=1}^{1} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{1} i^3$

$1^2 = 1^3$ ✓.

Paso inductivo:

HI: $\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} i^3$.

Rpq: $\left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^3$.

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i + (k+1)\right)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^3$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2}_{HI} + 2\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)(k+1) + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^3.$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{k} i^3} + 2\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)(k+1) + (k+1)^2 = \cancel{\sum_{i=1}^{k} i^3} + (k+1)^3.$$

$$\cancel{(k+1)}\left(2\sum_{i=1}^{k} i + (k+1)\right) = (k+1)^{\cancel{3}2}$$

$$2\sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = (k+1)^2$$

* Por sumatoria de Gauss

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*

$$\cancel{2}\,\frac{k(k+1)}{\cancel{2}} + (k+1) = (k+1)^2$$

$k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1.$

$k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$ ✓

Queda probado por inducción. ✓

f) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1, \forall n \geq 1.$

Caso base: $n=1$ $1\cdot 1! = (1+1)! - 1$

$1 = 2! - 1$

$1 = 1$ ✓.

Paso inductivo:

HI: $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + k\cdot k! = (k+1)! - 1$

Rpq: $\underbrace{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + k\cdot k!}_{HI} + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1.$

$(h+1)! \cdot \cancel{x} + (h+1)(h+1)! = (h+2)! \cdot \cancel{x}$.

$(h+1)! + (h+1)(h+1)! = (h+1)! \cdot (h+2)$.

$\cancel{(h+1)!}\,(1+(h+1)) = \cancel{(h+1)!}\,(h+2)$.

$h+2 = h+2$ ✓ Queda probado por inducción.

2. $\sum_{i=0}^{n} 2^i$

Caso base: $\sum_{i=0}^{0} 2^0 = 1$ ✓

Paso inductivo:

HI $1+2+2^2+2^3+\dots+2^h = \sum_{i=0}^{h} 2^i$

Qpq $\underbrace{1+2+2^2+2^3+\dots+2^h}_{HI} + 2^{h+1} = \sum_{i=0}^{h+1} 2^i$

$\sum_{i=0}^{h} 2^i + 2^{h+1} = \sum_{i=0}^{h} 2^i + 2^{h+1}$ ✓

Queda probado por inducción.

3. 10×2^n

4. $2^n > n^2, \forall n \geq 5$.

Caso base: $n=5$ $2^5 > 5^2$.
$32 > 25$ ✓

Paso inductivo:

HI: $2^h > h^2$

Qpq $2^{h+1} > (h+1)^2$

$\underbrace{2^h}_{HI} \cdot 2 > (h+1)^2$

$2^h > h^2 \Rightarrow 2^h \cdot 2 > h^2 \cdot 2 > (h+1)^2$

Si pruebo esto ya se vale?

*

$2^h \cdot 2 \overset{HI}{>} h^2 \cdot 2 > (h+1)^2$

$h^2 \cdot 2 > h^2 + 2h + 1$.

$2h^2 > h^2 + 2h + 1$.

$h^2 > 2h + 1$. → Se podría decir q h^2 tiene un crecimiento exponencial y por lo tanto cada $h \geq 5$ va a cumplir la desigualdad.

$h^2 - 2h - 1 > 0$.

$(h-1)^2 > 0$. ✓

Para el único caso q no vale es para $h=1$. pero como tenemos q $h \geq 5$ sabemos q cumple

Queda probado por inducción.

5. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $\forall n \geq 3$.

Caso base: $a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$ ✓

$$\sqrt{\frac{1}{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3+1}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}}\left(\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} - \frac{9-6\sqrt{5}+5}{4}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}}\left(\frac{14+6\sqrt{5}}{4} - \frac{14-6\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{12\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 3\sqrt{5} = 3$$ — Cumple el caso base.

Paso inductivo:

HI: $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h+1}\right) = a_h$ y $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h}\right) = a_{h-1}$

Qpq: $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2}\right) = a_{h+1}$.

$$\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right) = a_{h+1}.$$

Tenemos: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$. y $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1$.

$$\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}_{HI} + \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$a_n + \underbrace{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\sqrt{\frac{1}{5}}}_{HI} = a_{n+1}.$$

$$a_n + a_{n-1} = a_{n+1} \checkmark$$

Queda probado por inducción.

Ejercicio 6.

```haskell
-- Ejercicio 6 --
raizPositiva :: Float -> Float
raizPositiva n = ((1 + sqrt 5) / 2) ** (n + 1)

raizNegativa :: Float -> Float
raizNegativa n = ((1 - sqrt 5) / 2) ** (n + 1)

poblacionDeGatos :: Int -> Int
poblacionDeGatos n = round (sqrt (1/5) * (raizPositiva (fromIntegral n) - raizNegativa (fromIntegral n)))
```

Ejercicio 7.

El error está en el paso inductivo, usan "también vale para un conjunto de dos elementos" para concluir $x_{n-1} = x_n$, pero no probaron la base $n=2$ (solo $n=1$).

Además, la afirmación es falsa, contraejemplo: $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$

Ejercicio 8.

Hay dos errores.

1. HI indebida: En el paso usan q $a^{n-1} = 1$ y $a^{n-2} = 1$, pero solo suponen $a^{n-1} = 1$. Esto sería inducción fuerte y requeriría dos casos base. (al menos $n=0$ y $n=1$).

2. Paso $n=1$ inválido: la fórmula usa a^{n-2}, pero $n=1$ es a^{-1}, q no está cubierto por la base $n=0$ ni por la HI.

Además, el enunciado es falso, ej: $a=2$, $n=1 \Rightarrow 2^1 \neq 1$.