第9章　ブラウン運動の解析

本章では，ブラウン運動による確率過程の積分である確率積分（伊藤積分）の概念と性質について学習する．

9.1　単純過程の伊藤積分

定義 9.1 (単純過程) 増大情報系付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t;\, t \in \mathbb{R}^+\}$, における確率過程 $X = \{X_t;\, t \in \mathbb{R}^+\}$ が，**単純過程** (simple process) であるとは，$\{t_n \in \mathbb{R}^+;\, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots,\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ と有界な $\mathcal{F}_{t_n}$-可測確率変数列 $\{\xi_n;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ がとれて，

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) 1_{[0,t_1]}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(\omega) 1_{(t_j, t_{j+1}]}(t)$$

と表現できることである．すなわち，

$$X_t(\omega) = \begin{cases} \xi_0(\omega), & t \in [0, t_1] \\ \xi_n(\omega), & t \in (t_n, t_{n+1}],\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

となることである．

定義 9.2 (単純過程の伊藤積分) 時点 $T > 0$ を所与として単純過程 $X = \{X_t : t \in [0, T]\}$ が，$\{t_n \in \mathbb{R}^+;\, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T,\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ と有界な $\mathcal{F}_{t_i}$-可測確率変数列 $\{\xi_i;\, i = 0, 1, \cdots, n-1\}$ がとれて，

$$X_t = \xi_0 1_{[0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

と表現できるとする．このとき，

$$(X \cdot B)_T := \int_0^T X(t) \mathrm{d}B(t) := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

を単純過程 X に対するブラウン運動 B による**確率積分** (Stochastic Integral)，あるいは, **伊藤積分** (Itô Integral) という．

9.2　単純過程の伊藤積分の性質

定理 9.1 単純過程 X, Y に対して，次が成立する．

(1) (単純過程の線形性)

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\alpha X(t)+\beta Y(t))\mathrm{d}B(t)\\ =\ &\alpha\int_0^T X(t)\mathrm{d}B(t)+\beta\int_0^T Y(t)\mathrm{d}B(t)\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(2) (積分区間の線形性) $0\le t_1<t_2<t_3$ に対して，

$$\int_{t_1}^{t_3} X(t)\mathrm{d}B(t)=\int_{t_1}^{t_2} X(t)\mathrm{d}B(t)+\int_{t_2}^{t_3} X(t)\mathrm{d}B(t).$$

証明　定義より明らか． □

定理 9.2 単純過程 X, Y について次が成立する．

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t\mathrm{d}B_t\right)\left(\int_0^T Y_t\mathrm{d}B_t\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T X_tY_t\mathrm{d}t\right]. \tag{9.1}$$

証明　単純過程 X, Y の時間分点は共通にとれることに注意する．

$$X_t=\xi_0 1_{[0,t_1]}(t)+\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t),\quad Y_t=\xi_0 1_{[0,t_1]}(t)+\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

であるとして，$\Delta B_j:=B_{t_{j+1}}-B_{t_j}$ とおけば，

$$\int_0^T X_t\mathrm{d}B_t=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\Delta B_j,\ \int_0^T Y_t\mathrm{d}B_t=\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\Delta B_j.$$

したがって，

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t\mathrm{d}B_t\right)\left(\int_0^T Y_t\mathrm{d}B_t\right)\right]=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}[\xi_j\eta_k\Delta B_j\Delta B_k]. \tag{9.2}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\xi_j\eta_k\Delta B_j\Delta B_k] \\
= &\begin{cases}
\mathbb{E}\left[\xi_j\eta_k\Delta B_j\mathbb{E}\left[\Delta B_k|\mathcal{F}_{t_k}\right]\right] & \\
= \mathbb{E}[\xi_j\eta_k\Delta B_j]\mathbb{E}[\Delta B_k] = 0 & j < k \\
\mathbb{E}\left[\xi_j\eta_j\mathbb{E}\left[(\Delta B_j)^2|\mathcal{F}_{t_j}\right]\right] & \\
= \mathbb{E}[\xi_j\eta_j]\mathbb{E}[(\Delta B_j)^2] = \mathbb{E}[\xi_j\eta_j](t_{j+1}-t_j) & j = k
\end{cases}
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t \mathrm{d}B_t\right)\left(\int_0^T Y_t \mathrm{d}B_t\right)\right] &= \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[\xi_j\eta_j](t_{j+1}-t_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[\xi_j\eta_j]\int_{t_j}^{t_{j+1}}\mathrm{d}t \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T X_tY_t\mathrm{d}t\right].
\end{aligned}
$$

□

系 9.1 (伊藤の等長性) 単純過程 X について次が成立する.

$$
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t\mathrm{d}B_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t\right].
$$

証明　定理 9.2 において $X = Y$ とすればよい. □

定理 9.3 単純過程 X の伊藤積分 $X \cdot B = \{(X \cdot B)_t;\ t \in \mathbb{R}^+\}$ は, 2 乗可積分な $\mathbb{F}$-適合的確率過程であり, 次が成立する.

(1) 各 $\omega \in \Omega$ に対して, $(X \cdot B)(t, \omega)$ は t に関して連続.

(2) $(X \cdot B)_0 = 0$ a.s.

(3) $X \cdot B$ はマルチンゲール.

問 9.1 定理 9.3 を証明せよ.

解答例　定義 9.1 より, $X \cdot B$ が 2 乗可積分な $\mathbb{F}$-適合的確率過程であることは明らか.

(1)(連続性)　$t = t^*(\geq 0)$ での連続性を調べる．はじめに，t^* が t_n に一致した場合の連続性を調べる．t^* の近傍では,

$$(X \cdot B)_t = \begin{cases} (X \cdot B)_{t_{n-1}} + \xi_{n-1}(B_t - B_{t_{n-1}}), & t \leq t^* = t_n \\ (X \cdot B)_{t_n} + \xi_n(B_t - B_{t_n}), & t > t^* = t_n. \end{cases}$$

したがって，B の連続性より,

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow t^*}(X \cdot B)_t &= (X \cdot B)_{t_{n-1}} + \xi_{n-1}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) = (X \cdot B)_{t_n}, \\ \lim_{t \downarrow t^*}(X \cdot B)_t &= (X \cdot B)_{t_n} \end{aligned}$$

となるので，$(X \cdot B)_t$ は $t = t^*$ で連続となる．t^* が X の時間軸での分点でない場合は，ブラウン運動 $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}^+\}$ の t に関する連続性より明らかである．以上により，$(X \cdot B)_t$ は t に関して連続であることが示された.

(2) 定義より自明.

(3) t_j を X の t 軸に関する分点として，$s \leq t_j \leq t$ の場合,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_j(B_t - B_{t_j})|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_j(B_t - B_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\xi_j\mathbb{E}[(B_t - B_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s] \quad (\because \xi_j \text{ の } \mathcal{F}_{t_j}\text{-可測性}) \\ &= 0 \quad (\because B \text{ の独立増分性，正規増分性}). \end{aligned}$$

$t_j < s < t \leq t_{j+1}$ となる場合,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_j(B_t - B_{t_j})|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\xi_j(B_t - B_s) + \xi_j(B_s - B_{t_j})|\mathcal{F}_s] \\ &= \xi_j(B_s - B_{t_j}). \end{aligned}$$

$t_{j+1} < s$ となる場合,

$$\mathbb{E}[\xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|\mathcal{F}_s] = \xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

以上の考察から,

$$(X \cdot B)_s = \mathbb{E}[(X \cdot B)_t|\mathcal{F}_s] \text{ a.s.}, \ 0 \leq s \leq t.$$

□

9.3　発展的可測過程の伊藤積分

伊藤積分における被積分関数となる確率過程を発展的可測過程に拡大する．

定義 9.3 (発展的可測) 確率過程 $X = \{X_t;\, t \in \mathbb{R}^+\}$ が増大情報系 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t;\, t \in \mathbb{R}^+\}$ に関して**発展的可測** (progressively measurable) であるとは，任意の $t \in \mathbb{R}^+$ に対して，

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega;\, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

となることである．

定理 9.4 見本路が右連続な適合過程は発展的可測となる．

証明　$\{X(t,\omega);\, (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\}$ を見本路が右連続な適合過程とする．任意の $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$X_n(s,\omega) := \begin{cases} X\left(\frac{(k+1)t}{2^n}, \omega\right), & s \in \left[\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \\ X(t,\omega) & s = t \end{cases}$$

とおくと $\{X_n(s,\omega);\, (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega\}$ は，自明に $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測であり，かつ，$\lim_{n\to\infty} X_n(s,\omega) = X(s,\omega)$ であるから題意を得る．□

定義 9.4 所与の $T > 0$ に対して，$\mathcal{L}^2_T(B)$ を，

$$\int_0^T \mathbb{E}[X^2(t)]\mathrm{d}t < \infty$$

を満たす発展的可測過程 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ の族とし，$\mathcal{L}^*_T(B)$ を，

$$\int_0^T X^2(t)\mathrm{d}t < \infty \quad a.s.$$

を満たす発展的可測過程 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ の族とする．

補題 9.1 任意の $\{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\} \in \mathcal{L}^2_T(B)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T [X(t) - X_n(t)]^2 \mathrm{d}t\right] = 0 \tag{9.3}$$

となる単純過程の列 $\{X_n(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$, $n \in \mathbb{N}$, が存在する．

証明

$$X^{(m)}(t,\omega) = \begin{cases} X(t,\omega), & |X(t,\omega)| \le m \\ 0, & |X(t,\omega)| > m \end{cases}, \qquad m \in \mathbb{N}$$

とすると，Lebesgueの有界収束定理より，$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T [X(t) - X^{(m)}(t)]^2 \mathrm{d}t\right] = 0$ となるから，一般性を失うことなく，$X(t)$ を有界，すなわち，

$$\exists C \in \mathbb{R};\ |X(t,\omega)| \le C < \infty,\ t \in [0,T],\ \omega \in \Omega$$

としてよい．

$X(t)$ が，確率 1 で t に関して連続であれば，

$$X_n(t) = X\left(\frac{kT}{n}\right), \quad t \in \left(\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right],\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

とおけば，Lebesgue の有界収束定理より，題意が成立する．次に $X \in \mathcal{L}_T^2(B)$ が一般の発展的可測過程である場合について考える．

今の場合，各 $\omega \in \Omega$ に対して，$F(t,\omega) := \int_0^t X(s,\omega)\mathrm{d}s$, は，Lebesgue 積分の意味で定義できる．ここで，

$$\begin{aligned} \tilde{X}_m(t,\omega) &:= m\int_{(t-1/m)\vee 0}^{t} X(s,\omega)\mathrm{d}s \\ &= \frac{F(t,\omega) - F((t-1/m)\vee 0,\omega)}{1/m} \end{aligned}$$

とすると，$\tilde{X}_m(t,\omega)$ は，確率 1 で t に関して連続となる．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T [\tilde{X}_m(t) - \tilde{X}_{m,n}(t)]^2 \mathrm{d}t = 0\right]$$

となる単純過程列 $\{\tilde{X}_{m,n}(t)\}$ が存在する．

$$\begin{aligned} F'(t,\omega) &= \lim_{m\to\infty} \frac{F(t,\omega) - F((t-1/m)\vee 0,\omega)}{1/m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \tilde{X}_m(t,\omega) = X(t,\omega) \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

であるから，Lebesgue の有界収束定理より題意が成立する． □

定理 9.5 $X \in \mathcal{L}_T^2(B)$ に対して，(9.3) を満たす単純過程列 $\{X_n(t)\}$ は存在し，この単純過程列の確率積分列 $X_n \cdot B_T \equiv \int_0^T X_n(t)\mathrm{d}B(t)$, $n \in \mathbb{N}$，は，ある $X \cdot B_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ に平均 2 乗収束する．

証明　補題 9.1 より，発展的可測な $X \in \mathcal{L}_T^2(B)$ に対して，(9.3) を満たす単純過程列 $\langle X_n(t);\, n \in \mathbb{N}\rangle$ が存在する．したがって，この単純過程列 $\langle X_n(t);\, n \in \mathbb{N}\rangle$ に対しては，

$$\begin{aligned}&\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_n(t)\mathrm{d}B(t) - \int_0^T X_m(t)\mathrm{d}B(t)\right)^2\right]\\ = &\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T [X_n(t) - X_m(t)]^2\,\mathrm{d}t\right] = 0\end{aligned}$$

となる．すなわち，$\left\langle \int_0^T X_n(t)\mathrm{d}B(t);\, n \in \mathbb{N}\right\rangle$, は，$L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ 上の Cauchy 列となるので，ある $X \cdot B_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ に平均 2 乗収束する（???参照）． □

定義 9.5 定理 9.4 の $X \cdot B_T$ を $X \in \mathcal{L}_T^2(B)$ のブラウン運動 B による**確率積分**もしくは**伊藤積分**と定義し，$\int_0^T X(t)\mathrm{d}B(t) := X \cdot B_T$ とする．

定理 9.6 (伊藤積分のマルチンゲール性) $\{X(t);\, t \in [0,T]\} \in \mathcal{L}_T^2(B)$ に対して，$\left\{\int_0^t X(s)\mathrm{d}B(s);\, t \in [0,T]\right\}$ は，連続な 2 乗可積分マルチンゲールとなる．

証明　$\{X(t);\, t \in [0,T]\} \in \mathcal{L}_T^2(B)$ の場合，定理 9.5 より，$\int_0^t X(s)\mathrm{d}B(s),\, t \in [0,T]$，は，

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t [X(s) - X_n(s)]^2 \mathrm{d}s\right] = 0$$

となる単純過程 X_n の伊藤積分の平均 2 乗収束先である．したがって，定理 9.2 とその証明より題意が成立する． □

系 9.2 任意の有界な Borel 可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$\{\int_0^t f(B(s))\mathrm{d}B(s);\, t \in [0,T]\}$ は，2 乗可積分マルチンゲールとなる．

注 9.1 定理 9.6 の証明と同じ理由により，単純過程 X を $X = \{X(t);\, t \in [0,T]\} \in \mathrm{L}_T^2[B]$ に置き換えて，定理 9.3 と系 9.1（伊藤の等長性）が成立する．

次に伊藤積分における被積分関数の族を $\mathcal{L}_T^*(B)$ に拡張する．

補題 9.2 $X \in \mathcal{L}_T^*(B)$ に対して，

$$\operatorname{plim}_{n\to\infty}\left\{\int_0^T [X(t)-X_n(t)]^2 \mathrm{d}t\right\}=0 \tag{9.4}$$

となる $X_n \in \mathcal{L}_T^2(B)$, $n \in \mathbb{N}$, が存在する．

証明

$$\begin{aligned}
\tau_m &:= \begin{cases} \inf\{t\in[0,T];\ \int_0^t X^2(s)\mathrm{d}s \geq m\}; & \int_0^T X^2(s)\mathrm{d}s \geq m \\ T, & \int_0^T X^2(s)\mathrm{d}s < m, \end{cases} \\
X_m(t) &:= X(t)1_{\{t\leq\tau_m\}}, \quad m\in\mathbb{N}
\end{aligned} \tag{9.5}$$

とおく．このとき，$X_m \in\in \mathcal{L}_T^2(B)$ となるので，補題 9.1 より，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[X_m^{(n)}(t)-X_m(t)\right]^2 \mathrm{d}t\right]=0$$

となる単純過程列 $\langle X_m^{(n)};\, n\in\mathbb{N}\rangle$ が存在する．さらに，

$$P\left\{\int_0^T [X(t)-X_m(t)]^2\mathrm{d}t>0\right\}\leq P\left\{\int_0^T X(t)^2\mathrm{d}t>m\right\}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
& P\left\{\int_0^T [X(t)-X_m^{(n)}(t)]^2\mathrm{d}t>\epsilon\right\} \\
\leq\ & P\left\{\int_0^T [X(t)-X_m(t)]^2\mathrm{d}t>0\right\}+P\left\{\int_0^T [X_m(t)-X_m^{(n)}(t)]^2\mathrm{d}t>\frac{\epsilon}{2}\right\} \\
\leq\ & P\left\{\int_0^T X(t)^2\mathrm{d}t>m\right\}+\frac{2}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T [X_m(t)-X_m^{(n)}(t)]^2\mathrm{d}t\right].
\end{aligned}$$

最右辺，第 2 項の導出には，Chebyshev の不等式を用いた．上の不等式において，$n\to\infty$ とした後，$m\to\infty$ とすれば題意が成立する． □

補題 9.3 $X \in \mathcal{L}_T^*(B)$ に対して，次が成立する．

$$\begin{aligned}
& P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X(s)\mathrm{d}B(s)\right|>\alpha\right\} \\
\leq\ & \frac{\beta}{\alpha^2}+P\left\{\int_0^T X(s)^2\mathrm{d}s>\beta\right\} \quad \forall\,\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}^{++}.
\end{aligned}$$

証明　$X_m(s,\omega)$ を (9.5) で定義されるものとする．このとき，$X_m \in \mathcal{L}_T^2(B)$ であるから，

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_m(s)\mathrm{d}B(s)\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[X_m(s)^2\right]\mathrm{d}s \leq m < \infty.$$

さらに

$$\left\{\omega \in \Omega;\ \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t [X(s) - X_m(s)]\mathrm{d}B(s)\right| > 0\right\} \subseteq \left\{\omega \in \Omega;\ \int_0^T X(s)^2\mathrm{d}s > m\right\}.$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
& P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X(s)\mathrm{d}B(s)\right| > \alpha\right\} \\
= \ & P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X_m(s)\mathrm{d}B(s) + \int_0^t [X(s) - X_m(s)]\mathrm{d}B(s)\right| > \alpha\right\} \\
\leq \ & P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X_m(s)\mathrm{d}B(s)\right| > \alpha\right\} \\
& +P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t [X(s) - X_m(s)]\mathrm{d}B(s)\right| > 0\right\} \\
\leq \ & P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X_m(s)\mathrm{d}B(s)\right| > \alpha\right\} + P\left\{\int_0^t X(s)^2\mathrm{d}s > m\right\} \\
\leq \ & \frac{1}{C^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(s)\mathrm{d}B(s)\right)^2\right] + P\left\{\int_0^t X(s)^2\mathrm{d}s > m\right\} \\
\leq \ & \frac{m}{\alpha^2} + P\left\{\int_0^t X(s)^2\mathrm{d}s > m\right\}.
\end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}$ であったから，m を $\beta \in \mathbb{R}^{++}$ に代えて与式が成立する．　□

定理 9.7 $\langle X_n \in \mathcal{L}_T^2(B);\ n \in \mathbb{N}\rangle$ を $X \in \mathcal{L}_T^*(B)$ を補題 9.2 の意味で近似する確率過程の列とすると，確率積分列 $\langle X_n \cdot B_T;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ は確率収束する．

証明

$$\lim_{n,m\to\infty} P\left\{\int_0^T [X_n(t) - X_m(t)]^2\mathrm{d}t > \epsilon\right\} = 0\ \forall \epsilon > 0$$

さらに，補題 9.3 より，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty} P\left\{\left|\int_0^T X_n(t)\mathrm{d}B(t) - \int_0^T X_m(t)\mathrm{d}B(t)\right| > \delta\right\} \\
\le\ & \frac{\epsilon}{\delta^2} + P\left\{\int_0^T [X_n(t) - X_m(t)]^2 \mathrm{d}t > \epsilon\right\}\ \forall \epsilon,\, \delta > 0.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\lim_{n,m\to\infty} P\left\{\left|\int_0^T X_n(t)\mathrm{d}B(t) - \int_0^T X_m(t)\mathrm{d}B(t)\right| > \delta\right\} = 0$$

となるから，確率変数列 $\left\langle X_n \cdot B_T = \int_0^T X_n(t)\mathrm{d}B(t);\, n \in \mathbb{N}\right\rangle$ は，ある確率変数へ確率収束する． □

定義 9.6 定理 *9.7* の確率積分列 $\left\langle X_n \cdot B_T = \int_0^T X_n(t)\mathrm{d}B(t);\, n \in \mathbb{N}\right\rangle$ の確率収束先を $X \in \mathcal{L}_T^*(B)$ のブラウン運動 B による**確率積分**もしくは**伊藤積分**と定義し，これを $X \cdot B_T = \int_0^T X(t)\mathrm{d}B(t)$ と表わす．

系 9.3 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ が連続な適合過程ならば伊藤積分が存在する．

証明　連続な適合過程であるから，発展的可測である．さらに X の連続性より，任意の有限区間で見本路は有界である．したがって $\int_0^T X^2(t)\mathrm{d}t < \infty$ a.s. であるから，題意が成立する． □

例 9.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$B(t)$ は連続な適合過程であるから，$\int_0^1 f(B(t))\mathrm{d}B(t)$ は定義できる．

(1)　$f(t) = t$ の場合．この場合，$\int_0^1 \mathbb{E}[B(t)^2]\mathrm{d}t < \infty$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^1 B(t)\mathrm{d}B(t)\right] &= 0, \\
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 B(t)\mathrm{d}B(t)\right)^2\right] &= \int_0^1 \mathbb{E}[B(t)^2]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(2) $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ の場合．

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 f(B(t))\mathrm{d}B(t)\right)^2\right] &= \int_0^1 \mathbb{E}[f(B(t))^2]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \mathbb{E}[\mathrm{e}^{2B(t)^2}]\mathrm{d}t = \infty \\
&\quad \left(\because\ \mathbb{E}[\mathrm{e}^{2B(t)^2}] = \infty,\, t \ge \frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

したがって，この場合，2次以上の有限の積率の存在を保証できない．

□

注 9.2 例 9.1(1) において，

$$\int_0^1 B(t)\mathrm{d}B(t) = \frac{B(1)^2}{2}$$

としては，いけない！

注 9.3 $\int_0^t \mathbb{E}[X(s)^2]\mathrm{d}s = \infty$ の場合，伊藤積分 $\{\int_0^t X(s)\mathrm{d}B(s);\, t \geq 0\}$ は，マルチンゲールになるとは限らないが，?? 章で定義する局所マルチンゲールとなる．

9.4　伊藤積分過程

定義 9.7 (2 次変分) $[0,t]$ の分割を $\{t_i^n;\, i = 0, 1, \cdots, n,\, 0 = t_0^n < \cdots < t_n^n = t\}$ とし，$\delta_n := \max\{t_{i+1}^n - t_i^n;\, i = 0, 1, \cdots, n-1\}$ とする．このとき，確率過程 Y の $[0,t]$ における **2 次変分** (quadratic variation) を

$$[Y](t) := \mathrm{plim}_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2 \tag{9.6}$$

で定義する．ただし，$\delta_n \to 0\,(n \to \infty)$ とする．

確率過程 X と Y の $[0,t]$ 上での**交差変分** (covariation) を

$$[X,Y](t) := \frac{1}{4}\left([X+Y](t) - [X-Y](t)\right) \tag{9.7}$$

で定義する．

定理 9.8 $\left\{Y_j(t) := \int_0^t X_j(s)\mathrm{d}B(s);\, t \in [0,T]\right\}$, $j = 1, 2$, に対して次が成立する．

$$[Y_j, Y_k](t) = \begin{cases} \int_0^t X_j(s)^2\mathrm{d}s, & j = k, \\ \int_0^t X_j(s)X_k(s)\mathrm{d}s, & j \neq k. \end{cases} \tag{9.8}$$

証明　はじめに，$j = k$ の場合について証明する．これが示されれば，$j \neq k$ の場合は，(9.7) より成立する．添字の j, k を省略する．また，一般性を失うことなく $T = 1$ とする．X が

$$X(t) = \xi_0 1_{[0,1/2]}(t) + \xi_1 1_{(1/2,1]}(t), \quad t \in [0,1]$$

となる単純過程の場合について証明する[1].

今の場合，

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t X(s)\mathrm{d}B(s) \\ &= \begin{cases} \xi_0 B(t), & t \le 1/2 \\ \xi_0 B(1/2) + \xi_1(B(t) - B(1/2)), & t > 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

であるから，

$$Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n) = \begin{cases} \xi_0(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)), & t_i^n < t_{i+1}^n \le 1/2 \\ \xi_1(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)), & 1/2 \le t_i^n < t_{i+1}^n. \end{cases}$$

したがって，$t \le 1/2$ の場合には，

$$\begin{aligned} [Y](t) &= \mathrm{plim}_{n\to 0} \xi_0^2 \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \\ &= \xi_0^2 [B](t) = \xi_0^2 t \ (\because \text{ 定理??}) \\ &= \int_0^t X(s)^2 \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

また，$t > 1/2$ の場合には，

$$\begin{aligned} [Y](t) &= \xi_0^2 \mathrm{plim}_{\delta_n \to 0} \sum_{t_i < 1/2} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \\ &\quad + \xi_1^2 \mathrm{plim}_{\delta_n \to 0} \sum_{t_i > 1/2} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \\ &= \xi_0^2 [B](1/2) + \xi_1^2 [B]((1/2, t]) = \int_0^t X(s)^2 \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

□

[1] $X_j(t)$ が伊藤積分可能な確率過程である場合にも，伊藤積分が単純過程の確率積分の確率収束先であることから証明できる．

9.5 ブラウン運動の伊藤公式

定理 9.9 g を有界な連続関数とし，$\{t_i^n\}$ を $[0,t]$ の分割とする．このとき，次が成立する．

$$\begin{aligned}\mathrm{plim}_{\delta_n\to\infty}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2 = \int_0^t g(B(s))\mathrm{d}s \\ \forall\,\theta_i^n\in(B(t_i^n),B(t_{i+1}^n)).\end{aligned} \tag{9.9}$$

証明　はじめに，$\theta_i^n := B(t_i^n)$ として，(9.9) を示す．$g(B(t))$ が t に関して連続であることから，

$$\lim_{\delta_n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n-t_i^n) = \int_0^t g(B(s))\mathrm{d}s \quad \forall\,\theta_i^n\in(B(t_i^n),B(t_{i+1}^n)).$$

次に，

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2 - \sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n-t_i^n) \xrightarrow{L^2} 0 \tag{9.10}$$

を示す．(9.10) が示されれば，$\theta_i^n := B(t_i^n)$ として，(9.9) が成立する．$\Delta B_i := B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)$，$\Delta t_i := t_{i+1}^n - t_i^n$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2-\Delta t_i\right)^2\right] \\ = & \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))^2\mathbb{E}\left[\left((\Delta B_i)^2-\Delta t_i\right)^2\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right]\right] \\ = & 2\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))^2\left(\Delta t_i\right)^2\right] \\ \le & \delta_n 2\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))^2\Delta t_i\right]\right] \to 0 \quad (\delta_n\to 0). \end{aligned}$$

したがって，(9.10) が成立する．次に，任意の $\theta_i^n\in(B(t_i^n),B(t_{i+1}^n))$ に対して，

$$\begin{aligned} & \mathrm{plim}_{\delta_n\to 0}\left[\sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2 - \sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2\right] \\ = & 0 \end{aligned} \tag{9.11}$$

を示す．これが示されれば，(9.9) が示されたことになる．

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}(g(\theta_i^n)-g(B(t_i^n)))(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2\\ \le\ &\max_{i\in\{0,\dots,n-1\}}(g(\theta_i^n)-g(B(t_i^n)))\sum_{i=0}^{n-1}(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2.\end{aligned}$$

ここで，g の連続性から，$\max_{i\in\{0,\dots,n-1\}}(g(\theta_i^n)-g(B(t_i^n)))\to 0$ $(\delta_n\to 0)$ a.s. かつ

$$\mathrm{plim}_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2=t$$

となることに注意すると，(9.11) を得る． □

定理 9.10 (伊藤公式) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が 2 回連続微分可能な関数ならば，次が成立する．

$$f(B(t))=f(0)+\int_0^t f'(B(s))\mathrm{d}B(s)+\frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))\mathrm{d}s, \forall\, t\ge 0. \quad (9.12)$$

証明 $\{t_i^n;\, i=0,1,\cdots,n\}$, $n\in\mathbb{N}$, を $[0,t]$ の分割とする．このとき，

$$f(B(t))=f(0)+\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(B(t_{i+1}^n))-f(B(t_i^n))\right)$$

が成立し，Taylor の公式より，

$$\begin{aligned}&f(B(t_{i+1}^n))-f(B(t_i^n))\\ =\ &f'(B(t_i^n))\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right)+\frac{1}{2}f''(\theta_i^n)\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right)^2\end{aligned}$$

となる $\theta_i^n\in(B(t_i^n),B(t_{i+1}^n))$ が存在する．よって，

$$\begin{aligned}f(B(t))\ =\ &f(0)+\sum_{i=0}^{n-1}f'(B(t_i^n))\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\theta_i^n)\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right)^2\end{aligned}$$

となる．ここで，$\delta_n\to 0$ とすると，上式左辺第 2 項は，伊藤積分の定義により，$\int_0^t f'(B(s))\mathrm{d}B(s)$ に確率収束し，第 3 項は定理 9.9 より，$\int_0^t f''(B(s))\mathrm{d}s$ に確率収束する． □

例 9.2 $f(x) = x^m,\ m \geq 2$ とすると，

$$B^m(t) = m\int_0^t B(s)^{m-1}\mathrm{d}B(s) + \frac{m(m-1)}{2}\int_0^t B(s)^{m-2}\mathrm{d}s.$$

□

9.6 確率微分と伊藤過程

定義 9.8 (伊藤過程と確率微分) (1) $\mu(t)$ を $\int_0^T |\mu(s)|\mathrm{d}s < \infty$ a.s. となる適合過程とし，

(2) $\sigma(t)$ を $\int_0^T \sigma(s)^2\mathrm{d}s < \infty$ a.s. となる発展的可測過程とする．
このとき，

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}B(s), \quad t \in [0,T] \tag{9.13}$$

となる確率過程 $\{X(t);\, t \in [0,T]\}$ を**伊藤過程** (Itô process) と呼ぶ．また，(9.13) を

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}B(t), \quad t \in [0,T] \tag{9.14}$$

と略記し，(9.14) を $\{X(t);\, t \in [0,T]\}$ の**確率微分** (stochastic differential) と呼ぶ.

例 9.3 $X(t) := \mathrm{e}^{B(t)}$ の確率微分を求める．$f(x) := \mathrm{e}^x$ とすると，定理9.10 の伊藤公式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{B(t)}) &= f'(B(t))\mathrm{d}B(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{B(t)}\mathrm{d}B(t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{B(t)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

すなわち，

$$\mathrm{d}X(t) = X(t)\mathrm{d}B(t) + \frac{1}{2}X(t)\mathrm{d}t.$$

定義 9.9 (伊藤過程にる確率積分) $X = \{X(t);\, t \in [0,T]\}$ を，確率微分

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}B(t) \tag{9.15}$$

をもつ伊藤過程とし，$H = \{H(t);\, t \in [0,T]\}$ を $\int_0^T H(t)^2\sigma(t)^2 \mathrm{d}t < \infty$ a.s. , $\int_0^T |H(t)\mu(t)| \mathrm{d}t < \infty$ a.s. となる発展的可測過程とする．このとき，H の伊藤過程 X による積分 $\int_0^t H(s)\mathrm{d}X(s)$ を

$$\int_0^t H(s)\mathrm{d}X(s) := \int_0^t H(s)\mu(s)\mathrm{d}s + \int_0^t H(s)\sigma(s)\mathrm{d}B(s) \tag{9.16}$$

で定義する．

定理 9.11 (伊藤過程の 2 次変分) X を (9.13) で定義される伊藤過程とすると，その 2 次変分は次式で与えられる．

$$[X](t) = \int_0^t \sigma(s)^2 \mathrm{d}s. \tag{9.17}$$

証明 X を (9.13) で定義される伊藤過程とすると，$\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s$ は，有限変分であるから，その 2 次変分はゼロである．また，$\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s$ と $\int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}B(s)$ との交差変分もゼロとなる．一方，$\int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}B(s)$ の 2 次変分は，定理 9.8 より，$\int_0^t \sigma(s)^2 \mathrm{d}s$ となる． □

定理 9.12 (伊藤公式) $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ を

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}B(t), \quad t \geq 0 \tag{9.18}$$

で定義される伊藤過程とする．このとき，$f(t,x) \in C^{2,1}$ であるならば，次が成立する．

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}f(t, X(t)) \\ = \;& \frac{\partial}{\partial t} f(t, X(t))\mathrm{d}t + \frac{\partial}{\partial x} f(t, X(t))\mathrm{d}X(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, X(t))\mathrm{d}[X](t) \\ = \;& \left(f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\sigma(t)^2 \right) \mathrm{d}t + f'(X(t))\sigma(t)\mathrm{d}B(t). \end{aligned} \tag{9.19}$$

証明 定理 9.13 を用いれば，定理 9.10 の証明と同様にして証明できる．
□

例 9.4 (例 9.3 の続き) 確率微分

$$\mathrm{d}X(t) = X(t)\mathrm{d}B(t) + \frac{1}{2}X(t)\mathrm{d}t$$

を満たす確率過程 X を求めることを考える．$\log X(t)$ に伊藤公式を適用すると，

$$\mathrm{d}\log X(t) = \frac{1}{X(t)}\mathrm{d}X(t) - \frac{1}{2X(t)^2}X(t)^2\mathrm{d}t = \mathrm{d}B(t)$$

したがって，$\log X(t) = \log X(0) + B(t)$ となるから，

$$X(t) = X(0)\mathrm{e}^{B(t)}.$$

定義 9.10 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ を伊藤過程とする．このとき確率微分

$$\mathrm{d}U(t) = U(t)\mathrm{d}X(t) \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{9.20}$$

を満たす $U = \{U(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ を伊藤過程 X の**確率指数** (stochatic exponential) といい，$\mathcal{E}(X)_t := U_t$ とする．

定理 9.13 伊藤過程 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ の確率指数は次式で与えられる．

$$\mathcal{E}(X)_t = \mathrm{e}^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X]_t}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{9.21}$$

証明 $U = \{U(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ を確率微分 (9.20) を満たすものとして，$\log U(t)$ に伊藤公式を適用すると，

$$\mathrm{d}\log U(t) = \frac{1}{U(t)}\mathrm{d}U(t) - \frac{1}{2U(t)^2}\mathrm{d}[U](t) = \mathrm{d}X(t) - \frac{1}{2}\mathrm{d}[X](t)$$

したがって，$\log U(t) = X(t) - X(0) - \frac{1}{2}[X](t)$ となるから，(9.21) を得る．
□