第8章　確率過程とBrown運動

本章では，確率過程の定義を行った後，ファイナンスなどの応用上で特に重要となるブラウン運動とその性質について学習する．

8.1　確率過程とブラウン運動

定義 8.1 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の**確率過程** (stochastic process) とは，$t \in [0, \infty)$ をパラメータにもつ Ω 上の確率変数の族 $X := \{X(t, \omega);\ (t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\}$ のことである．任意の所与の $\omega \in \Omega$ に対して，t の関数 $X(t, \omega)$ を，ω に対する X の**見本路** (sample path) という．以下，混乱が生じない限り，$X(t, \omega)$ を $X(t)$ あるいは X_t と略記する．

確率過程 $\{Y_t\}$ が確率過程 $\{X_t\}$ の**修正** (modification, version) であるとは，任意に t を止めたとき，

$$P(\{\omega \in \Omega;\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1$$

となることである．

定義 8.2 次の 3 つの性質をもつ確率過程 $\{B(t);\ t \in \mathbb{R}^+\}$ を**ブラウン運動** (Brownian motion) という．

1. **正規増分性** 任意の $s, t;\ 0 \le s < t$，に対して，$B(t) - B(s)$ は，平均 0，分散 $t - s$ の正規分布に従う．
2. **独立増分性** 任意の $s, t;\ 0 \le s < t$，に対して，$B(t) - B(s)$ は，$B(u)$, $u \in [0, s]$, と独立．
3. **見本路の連続性** 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，見本路 $t \mapsto B_t(\omega)$ は t に関して連続．

以下，特に断らない限り，$\{B(t);\ t \in \mathbb{R}^+\}$ をブラウン運動とする．

例 8.1 $B(0)=0$ とする．このとき，正規増分性より，

$$P(B(2) \le 0) = \frac{1}{2}.$$

$B(2) = \hat{B}(1) + B(1)$, $\hat{B}(1) := B(2) - B(1)$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
& P(B(1) \le 0, B(2) \le 0) \\
= \ & P(B(1) \le 0, \hat{B}(1) \le -B(1)) \\
= \ & \int_{-\infty}^{0} P(\hat{B}(1) \le -x) \mathrm{d}\Phi(x) \quad (\text{独立増分性，正規増分性}) \\
= \ & \int_{-\infty}^{0} \Phi(-x) \mathrm{d}\Phi(x) \\
= \ & \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1-y) \mathrm{d}y \quad (\text{正規分布の対称性，変数置換}) \\
= \ & \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

ただし，ここで Φ は標準正規分布の分布関数を表わす． □

P_x は，$B(0) = x$ としたときの事象の確率を表わすとする．このとき，正規増分性から，

$$P_x(B(t) \in (a,b)) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \mathrm{d}y, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

となる．(8.1) の被積分関数

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \tag{8.2}$$

をブラウン運動の**推移確率密度** (transition probability dinsity) という．

例 8.1 と同様の議論によって，有限次元分布は，推移確率密度を用いると次のようにして計算できる．

$$\begin{aligned}
& P_x(B(t_1) < x_1, B(t_1) \le x_2, \ldots, B(t_n) \le x_n) \\
= \ & \int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x, y_1) \int_{-\infty}^{x_2 - y_1} P_{t_2 - t_1}(y_1, y_2) \\
& \cdots \int_{-\infty}^{x_n - \sum_{i=1}^{n-1} y_i} P_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, y_n) \mathrm{d}y_n \ldots \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}y_1.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

定義 8.3 確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ に関して，その有限次元分布が

$$\begin{aligned}
& P(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n | X(0) = 0) \\
= \ & P(X(t_1) \leq x_1 + x, \ldots, X(t_n) \leq x_n + x | X(0) = x)
\end{aligned}$$

を満たすとき，$\{X(t), t \geq 0\}$ は，**状態斉次である** (space-homogeneous) という．

$\{B^x(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ は，x から出発するブラウン運動を表わすものとする．すなわち，$B^x(0) = x$ とする．このとき，正規増分性より，

$$B^x(t) = x + B^0(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{8.4}$$

となる．すなわち，ブラウン運動は状態斉次である．

8.2 ガウス過程としてのブラウン運動

定義 8.4 任意の有限次元分布が多変量正規分布となる確率過程を**ガウス過程** (Gausiann process) という．確率過程 $\{X(t)\}$ の**共分散関数** $\gamma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$\begin{aligned}
\gamma(s,t) \ &:= \ \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) \\
&\equiv \ \mathbb{E}\Big[\big(X(s) - \mathbb{E}[X(s)]\big)\big(X(t) - \mathbb{E}[X(t)]\big)\Big] \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^+
\end{aligned} \tag{8.5}$$

定理 8.1 ブラウン運動は，平均ゼロ，$\gamma(s,t) = \min\{s,t\}$ となるガウス過程である．

証明 正規増分性より，$\mathbb{E}[B(t)] = 0, \ \forall t \geq 0.$ よって，

$$\gamma(s,t) = \mathbb{E}[B(s)B(t)].$$

ここで，$t < s$ とすると，独立増分性より，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B(s)B(t)] \ &= \ \mathbb{E}[(B(s) - B(t) + B(t))B(t)] \\
&= \ \mathbb{E}[B(t)^2] = t.
\end{aligned}$$

同様に，$t > s$ とすると，$\mathbb{E}[B(s)B(t)] = s$ となるので，$\gamma(s,t) = \min\{s,t\}$. ブラウン運動がガウス過程となることは，次の補題 8.1 を帰納的に用いることで示される． □

補題 8.1 $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ は，互に独立であるとする．このとき，

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 + X_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right).$$

ただし，ここで，$\mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ は，平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$, 共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の n 変量正規分布を表わし，$\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ は，平均 μ, 共分 σ^2 の正規分布を表わす．

問 8.1 補題 8.1 を証明せよ．

解答例

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda(X_1+X_2)}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda(X_1)}\right]\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda(X_2)}\right] \quad (X_1 \text{ と } X_2 \text{ の独立性}) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda\mu_1 + \frac{\lambda^2\sigma_1^2}{2}}\mathrm{e}^{\lambda\mu_2 + \frac{\lambda^2\sigma_2^2}{2}} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda(\mu_1+\mu_2) + \frac{\lambda^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}.
\end{aligned}$$

$\therefore$ 積率母関数の一意性により，$X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$．一方，$X_1$ と X_2 の独立性により，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_1, X_1 + X_2) &= \mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\
&= \mathrm{Var}(X_1) = \sigma_1^2.
\end{aligned}$$

$\therefore$ 題意を得る． □

例 8.2 $B(1) + B(2) + B(3) + B(4)$ の分布を考える．
$\boldsymbol{X} = (B(1), B(2), B(3), B(4))$ とすると，正規増分性と独立増分性より，

$$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_4(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

一般に，$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ とすると，任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a})$ となることから[1]，$B(1)+B(2)+B(3)+B(4) \sim \mathrm{N}(0, 30)$．
□

[1]以下，ベクトルは，特に断らないかぎり列ベクトルとし，$\top$ は転置を表わす．

例 8.3 $B\left(\frac{1}{4}\right)+B\left(\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{3}{4}\right)+B(1)$ の分布を考える．
$\boldsymbol{X}=(B(1),B(2),B(3),B(4))$, $\boldsymbol{Y}=\left(B\left(\frac{1}{4}\right),B\left(\frac{1}{2}\right),B\left(\frac{3}{4}\right),B(1)\right)$ とすると，$\frac{1}{2}\boldsymbol{X}\overset{\mathrm{d}}{=}\boldsymbol{Y}$ [2]. よって，$\boldsymbol{X}$ の共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}$ とすると，$\boldsymbol{Y}$ の共分散行列は，$\frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}$ となる．したがって，例 8.2 の結果より，

$$B\left(\frac{1}{4}\right)+B\left(\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{3}{4}\right)+B(1)\sim \mathrm{N}(0,30/4).$$

□

例 8.4 $P\left(\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t>\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ を求める．ブラウン運動は見本路が連続であることから，各見本路ごとにリーマン積分可能である．$t_i=i/n$, $i=0,1,\ldots,n$, $n\in\mathbb{N}$ として

$$\sum_{i=1}^{n}B(t_i)(t_i-t_{i-1})$$

を考えると，これは，平均ゼロの正規分布となる．正規確率変数の級数は，正規分布に従うことから，$\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t$ は，平均ゼロの正規分布に従う．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\right) &= \mathrm{Cov}\left(\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t,\int_0^1 B(s)\mathrm{d}s\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\int_0^1 B(s)\mathrm{d}s\right)\\
&= \int_0^1\int_0^1 E[B(t)B(s)]\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \int_0^1\int_0^1 \min\{t,s\}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \int_0^1\int_0^s t\mathrm{d}t\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$+\int_0^1\int_s^t s\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\frac{1}{3}.$$

ただし，3 番目の等式は，フビニの定理による[3]．したがって，$\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\sim\mathrm{N}(0,1/3)$ となる． □

[2] $\overset{\mathrm{d}}{=}$ は，両辺の「確率分布が等しい」を表わす．
[3] シュワルツの不等式より

$$\int_0^1\int_0^1 E|B(s)B(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t\le\int_0^1\int_0^1\sqrt{st}\mathrm{d}s\mathrm{d}t<1$$

となるので，フビニの定理より，期待値と積分の順序交換が行える．

8.3　ブラウン運動の見本路の性質

ブラウン運動の 2 次変分

定義 8.5 ブラウン運動の **2 次変分** (quadratic variation)$\{[B,B](t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ を次で定義する.

$$[B,B](t) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)|^2 \text{ a.s. } \forall\, t \in \mathbb{R}^+. \tag{8.6}$$

ただし，ここで $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ は，$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = t$ となる $[0,t]$ の分割とし，すべての分割に対して極限は，$\delta_n := \max_i(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0\,(n \to \infty)$ となるようにとるとする.

定理 8.2

$$[B,B](t) = t \text{ a.s.} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

証明　$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ の場合についてのみ証明する[4]．$T_n := \sum_{i=1}^n |B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)|^2$ とする．すると，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} |B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)|^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(t_i^n - t_{i-1}^n\right) = t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[T_n] &= \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} |B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)|^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left[\left(B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)\right)^2\right] \quad (\because \text{ 独立増分性}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2\left(t_i^n - t_{i-1}^n\right)^2 \\
&\le 2\delta_n \sum_{i=1}^{n} \left(t_i^n - t_{i-1}^n\right) = 2\delta_n t.
\end{aligned}$$

[4] より一般的な場合については，Doob, J.L. “Stochastic Processes” (Wiley Classics Library)(1990), P.395 を参照.

したがって，

$$\begin{aligned}\infty &> \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}[T_n] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(T_n-\mathbb{E}[T_n])^2\right] \quad (\because \text{単調収束定理})\end{aligned}$$

であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n-\mathbb{E}[T_n])^2 < \infty$ a.s. [5] よって，$(T_n-\mathbb{E}[T_n])^2 \to 0\,(n\to\infty)$ a.s. すなわち，$T_n \to t\,(n\to\infty)$ a.s.. □

命題 8.1 殆どすべての見本路 $B(t)$, $t\in[0,\infty)$, は，次の性質をもつ．

(1) t の連続関数；

(2) どの区間においても単調ではない；

(3) どの点においても微分不可能である；

(4) どの区間でも有限変分ではない；

(5) すべての $t\in[0,\infty)$ で，$[0,t]$ 上の 2 次変分は，t に等しい．

証明 性質 (1) は定義 8.2 による．性質 (5) は定理 8.2 による．定理 8.3 [6] より，性質 (5) ⇒ 性質 (4)．単調関数ならば有限変分となるので，性質 (4) ⇒ 性質 (2)．したがって，性質 (3) の微分不可能性を証明すればよい．

[5] 定理???より，$\int|f|\mathrm{d}P<\infty \Rightarrow |f|<\infty$ a.s..

[6]

定理 8.3 g が有限変分をもつ連続関数ならば，2 次変分はゼロである．

証明

$$\begin{aligned}[g](t) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(g(t_{i+1}^n)-g(t_i^n)\right)^2 \\ &\le \lim_{n\to\infty}\left(\max_{1\le i\le n}\left|g(t_{i+1}^n)-g(t_i^n)\right|\sum_{i=0}^{n-1}\left|g(t_{i+1}^n)-g(t_i^n)\right|\right) \\ &\le \lim_{n\to\infty}\left(\max_{1\le i\le n}\left|g(t_{i+1}^n)-g(t_i^n)\right|\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left|g(t_{i+1}^n)-g(t_i^n)\right|.\end{aligned}$$

g は連続であるから，$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left|g(t_{i+1}^n)-g(t_i^n)\right|=0$ となり，定理が成立する．
□

微分不可能性の証明

所与の $\beta > 0$ に対して，ある点 $s \in [0,1]$ での見本路の微係数 $B'(s)$ が $|B'(s)| < \beta$ であったとする．すると，微分の定義から，

$$\exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n > n_0\ |B(t) - B(s)| \leq 2\beta|t-s|\ \forall t \in [0,1];\ |t-s| \leq \frac{2}{n}.$$

また，k を $\frac{k}{n} \leq s$ となる最大整数とすると，$\frac{k}{n} \leq s < \frac{k+1}{n}$ より，

$$\begin{aligned}
&\left|B\left(\frac{k+2}{n}\right) - B\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| \\
\leq\ &\left|B\left(\frac{k+2}{n}\right) - B\left(s\right)\right| + \left|B\left(\frac{k+1}{n}\right) - B\left(s\right)\right| \leq \frac{6\beta}{n}, \\
&\left|B\left(\frac{k+1}{n}\right) - B\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
\leq\ &\left|B\left(\frac{k+1}{n}\right) - B\left(s\right)\right| + \left|B\left(\frac{k}{n}\right) - B\left(s\right)\right| \leq \frac{4\beta}{n}, \\
&\left|B\left(\frac{k}{n}\right) - B\left(\frac{k-1}{n}\right)\right| \\
\leq\ &\left|B\left(\frac{k}{n}\right) - B\left(s\right)\right| + \left|B\left(\frac{k-1}{n}\right) - B\left(s\right)\right| \leq \frac{6\beta}{n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad y_k &:= \max\left\{\left|B\left(\frac{k+2}{n}\right) - B\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|, \left|B\left(\frac{k+1}{n}\right) - B\left(\frac{k}{n}\right)\right|,\right. \\
&\qquad \left.\left|B\left(\frac{k}{n}\right) - B\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|\right\} \\
&\leq \frac{6\beta}{n}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
A_n &:= \Bigg\{B(u),\ u \in [0,1];\ \exists s \in [0,1]; \\
&\qquad |B(t) - B(s)| \leq 2\beta|t-s|\ \forall t \in [0,1];\ |t-s| \leq \frac{2}{n}\Bigg\}, \\
B_n &:= \cup_{k=1}^{n-2}\left\{B(u),\ u \in [0,1];\ y_k \leq \frac{6\beta}{n}\right\}
\end{aligned}$$

とすると，A_n, B_n は単調減少列で，$A_n \subset B_n$ であるから，$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ が示されれば，$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = 0$ となり，題意が示される．

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= P\left(\cup_{k=1}^{n-2}\left\{B(u),\, u\in[0,1];\ y_k \le \frac{6\beta}{n}\right\}\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{n-2} P\left(\max\left\{\left|B\left(\frac{k+2}{n}\right)-B\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|,\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left|B\left(\frac{k+1}{n}\right)-B\left(\frac{k}{n}\right)\right|,\left|B\left(\frac{k}{n}\right)-B\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|\right\} \le \frac{6\beta}{n}\right) \\
&\le nP\left(\max\left\{\left|B\left(\frac{3}{n}\right)-B\left(\frac{2}{n}\right)\right|,\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left|B\left(\frac{2}{n}\right)-B\left(\frac{1}{n}\right)\right|,\left|B\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right\} \le \frac{6\beta}{n}\right) \\
&= nP\left(\left(\left|B\left(\frac{3}{n}\right)-B\left(\frac{2}{n}\right)\right| \le \frac{6\beta}{n},\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left|B\left(\frac{2}{n}\right)-B\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{6\beta}{n},\left|B\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right) \le \frac{6\beta}{n}\right) \\
&= nP\left(\left(\left|B\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right) \le \frac{6\beta}{n}\right)^3 \\
&= n\left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\frac{6\beta}{n}}^{\frac{6\beta}{n}} \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}}\mathrm{d}x\right)^3 = n\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi n}}\int_{-6\beta}^{6\beta} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n}}\mathrm{d}x\right)^3 \to 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

8.4　ブラウン運動のマルチンゲール性

定義 8.6 可算加法族 $\mathcal{F}$ の部分可算加法族の族 $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t;\, t\in\mathbb{R}^+\}$ で，

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\cup_{u\in\mathbb{R}^+}\mathcal{F}_u\right) \subseteq \mathcal{F} \quad 0 \le s \le t$$

を満たすものを**増大情報系** (filtration) という．

確率過程 $X = \{X_t;\, t\in\mathbb{R}^+\}$ が, 所与の増大情報系 $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t;\, t\in\mathbb{R}^+\}$ に対して，各 $t\in\mathbb{R}^+$ において，X_t が $\mathcal{F}_t$-可測となるとき，X は $\mathbb{F}$-**適合的** (adapted) という．

所与の確率過程 $X = \{X_t;\, t\in\mathbb{R}^+\}$ に対して，

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X(s);\, s\in[0,t]), \quad \forall\, t\in\mathbb{R}^+$$

すなわち $\mathcal{F}_t$ を $\{X_s;\, s \in [0,t]\}$ から生成される可算加法族とする．このとき，増大情報系 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t;\, t \in \mathbb{R}^+\}$ を X の**自然な増大情報系** (natural filtration) という．

以下では，特に断らない限り，増大情報系 $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t;\, t \in \mathbb{R}^+\}$ 付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ を固定する．

定義 8.7 (マルチンゲール) 確率過程 $\{X_t;\, t \in \mathbb{R}^+\}$ が，

(1) (可積分性) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

(2) (適合性) $\{X_t\}$ は $\mathbb{F}$-適合的.

(3) (条件付期待値の不等式) $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ a.s., $0 \leq s \leq t$.

を満たすとき，**劣マルチンゲール** (submartingale) であるという．

(3) で逆の不等式：$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ が成立するときは，**優マルチンゲール** (supermartingale) であるという．

劣かつ優マルチンゲールであるとき，すなわち，(3) で等式：$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ が成立するときは，**マルチンゲール** (martingale) であるという．

以下では，記号の簡略化のため，$\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t]$ を $\mathbb{E}_t[\cdot]$ と表わす．また，確率変数間の等式，不等式などは，a.s. で成立するとし，a.s. を省略する．また，特に断らない限り，ブラウン運動 $\{B(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ について議論する場合は，$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t;\, t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\{B(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ の自然な増大情報系とする．

定理 8.4 次の (1)〜(3) は，マルチンゲールとなる．

(1) $\{B(t); t \geq 0\}$.

(2) $\{B(t)^2 - t;\, t \geq 0\}$.

(3) $\{\mathrm{e}^{uB(t) - \frac{u^2}{2}t};\, t \geq 0\} \ \forall u \in \mathbb{R}$.

証明

(1) $B(t) \sim \mathrm{N}(0,t)$ であるから，$\mathbb{E}[|B(t)|] \leq \mathbb{E}[B(t)^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} < \infty$. よって，$B(t)$ は可積分である．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_t[B(t+s)] &= \mathbb{E}_t[B(t) + B(t+s) - B(t)] \\
&= B(t) + \mathbb{E}_t[B(t+s) - B(t)] \ (\because B(t) \text{ の } \mathcal{F}_t\text{-可測性}) \\
&= B(t) + \mathbb{E}[B(t+s) - B(t)] \ (\because B(t) \text{ の独立増分性}) \\
&= B(t).
\end{aligned}
$$

(2) 1 と同様にして可積分性は明らか.

$$\begin{aligned} B(t+s)^2 &= (B(t)+B(t+s)-B(t))^2 \\ &= B(t)^2+2B(t)(B(t+s)-B(t)) \\ &\quad +(B(t+s)-B(t))^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \mathbb{E}_t[B(t+s)^2] = B(t)^2+s.$$

$$\therefore \qquad \mathbb{E}_t[B(t+s)^2-(t+s)] = B(t)^2-t.$$

(3) $\mathrm{N}(0,t)$ の積率母関数より,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{uB(t)}\right] = \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}t}$$

したがって, $\mathrm{e}^{uB(t)-\frac{u^2}{2}t}$ は可積分である.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[\mathrm{e}^{uB(t+s)}] &= \mathbb{E}_t[\mathrm{e}^{u(B(t)+B(t+s)-B(t))}] \\ &= \mathrm{e}^{uB(t)}\mathbb{E}_t[\mathrm{e}^{u(B(t+s)-B(t))}] \ (\because B(t) \text{ の } \mathcal{F}_t\text{-可測性}) \\ &= \mathrm{e}^{uB(t)}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{u(B(t+s)-B(t))}] \ (\because B(t) \text{ の独立増分性}) \\ &= \mathrm{e}^{uB(t)+\frac{u^2}{2}s}. \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \mathbb{E}_t[\mathrm{e}^{uB(t+s)-\frac{u^2}{2}(t+s)}] = \mathrm{e}^{uB(t)-\frac{u^2}{2}t}.$$

□

8.5 ブラウン運動のマルコフ性

定義 8.8

$$P(X(t+s) \le y|\mathcal{F}_t) = P(X(t+s) \le y|X(t)) \quad \forall y \in \mathbb{R},\ t,\ s>0 \quad (8.7)$$

となるとき, 確率過程 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ は**マルコフ過程** (Markov process) であるという.

定理 8.5 ブラウン運動はマルコフ過程である.

証明

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_t[\mathrm{e}^{uB(t+s)}] &= \mathrm{e}^{uB(t)}\mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}s} \quad (\because \text{ 定理 } 8.4(3) \text{ の証明}) \\
&= \mathrm{e}^{uB(t)}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{u(B(t+s)-B(t))}\middle| B(t)\right] \quad (\because \text{ 独立増分性}) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{uB(t)+u(B(t+s)-B(t))}\middle| B(t)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{uB(t+s)}\middle| B(t)\right].
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 積率母関数と分布の一意性により，題意が成立する． □

定義 8.9 $X := \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ をマルコフ過程としたとき，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $t \geq s \geq 0$ に対して，

$$P(y,t,x,s) := P(X(t) < y | X(s) = x)$$

を X の**推移確率関数** (transition probability function) という．

推移確率関数が

$$P(y,t,x,s) = P(y,t-s,x,0) \tag{8.8}$$

を満たすとき，マルコフ過程 X は**斉時的** (time-homogeneous) であるという．

ブラウン運動では，

$$P(y,t,x,s) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\mathrm{e}^{-\frac{(u-x)^2}{2(t-s)}}\mathrm{d}u$$

となるので，斉時的である．

定義 8.10 非負確率変数 T が

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$$

となるとき，T を**停止時** *(stopping time)* という．

すなわち，T が停止時であるとは，$\mathcal{F}_t$ に含まれる情報を観測することで T が生起したかどうかを決定できるということ意味している

例 8.5 (1) T を任意の定数とすると，T は停止時である．
$\because$ すべての $t \geq 0$ に対して $\{T \leq t\}$ は，$\emptyset$ もしくは Ω であるから，$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

(2) $T := \inf\{t \geq 0;\, B(t) = a\},\ a \in \mathbb{R}$，とすると，$T$ は停止時である．
$\because\ \{T \leq t\}^c = \{B(u) > a,\, u \in [0,t]\} \cup \{B(u) < a,\, u \in [0,t]\} \in \mathcal{F}_t$.

(3) $T := \inf\{t \geq 0;\, \max_{t\in[0,1]} B(t)\}$ とすると，T は，停止時ではない．
$\because\ \{T \leq t\}\ t \in [0,1)$, が生起したかどうかは，$B(s),\, s \in (t,1]$, の値に依存しているので，$\{T \leq t\} \notin \mathcal{F}_t$.

(4) $T := \sup\{t \in [0,1];\, B(t) = 0,\ t \in [0,1]\}$ とすると，T は，停止時ではない．
$\because\ \{T \leq t\}$, $t \in [0,1)$, が生起したかどうかは，$B(s)$, $s \in (t,1]$, の値に依存しているので，$\{T \leq t\} \notin \mathcal{F}_t$.

定理 8.6 ブラウン運動は，強マルコフ性をもつ．すなわち，有限な停止時 T に対して，

$$P(B(T+t) \leq y|\mathcal{F}_T) = P(B(T+t) \leq y|B(T)) \quad \text{a.s.}$$

が成立する．

系 8.1 有限な停止時 T に対して

$$\hat{B}(t) := B(T+t) - B(T), \quad t \geq 0 \tag{8.9}$$

とすると，$\{\hat{B}(t)t \geq 0\}$ は，初期値ゼロで $\mathcal{F}_T$ と独立なブラウン運動となる．

8.6 退出時と到達時

以降，$T_x := \inf\{t > 0;\, B(t) = x\}$ とする．

定理 8.7 $x \in (a,b)$ として，$\tau := \min(T_a, T_b)$ とする．すると，

$$P_x(\tau < \infty) = 1, \qquad \mathbb{E}_x[\tau] < \infty$$

となる．

証明

$$\{\tau > 1\} = \{B(s) \in (a,b),\, s \in [0,1]\} \subset \{B(1) \in (a,b)\}$$

であるから，

$$P_x(\tau > 1) \le P_x(B(1) \in (a,b)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}} \mathrm{d}y.$$

ここで，

$$\theta := \max_{x \in [a,b]} P_x(B(1) \in (a,b)) < 1$$

とおく[7]．強マルコフ性に注意すると，次を得る．

$$\begin{aligned} P_x(\tau > n) &= P_x(B(s) \in (a,b),\, s \in [0,n]) \\ &= P_x(B(s) \in (a,b),\, s \in [0,n-1],\ B(s) \in (a,b),\, s \in [n-1,n]) \\ &= P_x(\tau > n-1,\ B(s) \in (a,b),\, s \in [n-1,n]) \\ &= P_x(\tau > n-1,\ B(n-1) + \hat{B}(s) \in (a,b),\, s \in [0,1])\ (\because (8.9)) \\ &\le P_x(\tau > n-1)\theta \le \theta^n. \end{aligned}$$

さらに，$\mathbb{E}[X] \le \sum_{n=1}^{\infty} P(X \ge n),\ X \ge 0$ a.s. [8]に注意すると，

$$\mathbb{E}_x[\tau] \le \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{1}{1-\theta} < \infty. \qquad \Box$$

8.7　ブラウン運動の最大値と最小値

時間 $[0,t]$ におけるブラウン運動の最大値，最小値

$$M(t) := \max_{s \in [0,t]} B(s), \quad m(t) := \min_{s \in [0,t]} B(s)$$

を考える．

定理 8.8

$$\begin{aligned} P_0(M(t) \ge x) &= 2P_0(B(t) \ge x) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right) \qquad \forall x > 0, \\ P_0(m(t) \le x) &= 2P_0(B(t) \le x) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \qquad \forall x < 0, \end{aligned}$$

ただし，ここで Φ は標準正規分布の分布関数を表わす．

[7] $P_x(B(1) \in (a,b))$ が $[a,b]$ 上で，x の連続関数であるので，θ が存在する．
[8] $X \ge 0$ a.s. ならば，$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} P(X \ge x)\mathrm{d}x$ となる．

証明

$$\{B(t) \geq x\} \subset \{M(t) \geq x\} = \{T_x \leq t\}$$

であるから，

$$P(B(t) \geq x) = P(B(t) \geq x, T_x \leq t).$$

ここで，$\hat{B}(s) := B(T_x + s) - B(T_x), s \geq 0$ が $\mathcal{F}_{T_x}$ と独立なブラウン運動となることに注意すると

$$\begin{aligned} P(B(t) \geq x) &= P(B(T_x + (t - T_x)) - B(T_x) \geq 0, T_x \leq t) \\ &= P(\hat{B}(t - T_x) \geq 0, T_x \leq t) \end{aligned} \quad (8.10)$$

さらに，ここで，

$$P(B(t) \geq x) = P(\hat{B}(t - T_x) \geq 0)P(T_x \leq t)$$[9]

が成り立つとすると，

$$\begin{aligned} P(B(t) \geq x) &= \frac{1}{2}P(T_x \leq t) \\ &= \frac{1}{2}P(M(t) \geq x). \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\therefore \quad P(M(t) \geq x) = 2P(B(t) \geq x).$$

正規分布の対称性より，$\{\hat{B}(t) = -B(t),\, t \geq 0\}$ もブラウン運動となる．さらに，

$$-\min_{s \in [0,t]} B(s) = \max_{s \in [0,t]}(-B(s))$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned} P_0(m(t) \leq x) &= P_0(-\max_{s \in [0,t]}(-B(s)) \leq x) \\ &= P_0(\max_{s \in [0,t]}(-B(s)) \geq -x) \\ &= 2P_0(-B(t) \geq -x) \ (\because\ (8.11)) \\ &= 2P_0(B(t) \leq x). \end{aligned}$$

□

[9]実際にこの式が成立することについては，Dudley (1989) p.459 を参照．

例 8.6

$$\{B(s) \le 0,\ s \in [0,t]\} = \{M(t) \le 0\}.$$

したがって，定理 *8.8* より，

$$P(B(s) \le 0,\, s \in [0,t]) = 1 - P(M(t) > 0) = 1 - 2P(B(t) > 0) = 1 - 2\frac{1}{2} = 0.$$

同様にして，

$$\{B(s) \ge 0,\ s \in [0,t]\} = \{m(t) \ge 0\}$$

であるから，

$$P(B(s) \ge 0,\, s \in [0,t]) = 0.$$

すなわち，任意の $t > 0$ に対して，$B(s), s \in [0,t]$ が同符号をとる確率はゼロとなる． □

8.8 到達時の分布

定理 8.9 初到達時 T_x は，パラメータ $\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$ の逆ガンマ分布に従う，すなわち，その確率密度関数は，

$$f_{T_x}(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad t \ge 0$$

となる．

証明 $x > 0$ とする．このとき，$\{M(t) \ge x\} = \{T_x \le t\}$ であるから，

$$\begin{aligned} P(T_x \le t) &= P(M(t) \ge x) \\ &= 2P(B(t) \ge x) \\ &= \int_x^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}} \mathrm{d}y \\ &= \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \ (\because\ u = \tfrac{y}{\sqrt{t}}) \text{ で変数変換}). \end{aligned}$$

上式を t で微分して $f_{T_x}(t)$ を得る．$x < 0$ の場合も同様にして，$f_{T_x}(t)$ を得る． □

定理 8.9 より，

$$\mathbb{E}_0[T_x] = \int_0^\infty \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}} \mathrm{d}t = \infty^{10}$$

定理 8.10 $T_b - T_a$, $b > a > 0$ は，$B(t)$, $t \in [0, T_a]$, から独立で，$T_b - T_a \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_{b-a}$ となる．

証明　ブラウン運動の強マルコフ性より，$\{\hat{B}(t) = B(T_a + t) - B(T_a);\ t \geq 0\}$ は，$B(t)$, $t \in [0, T_a]$, と独立な標準ブラウン運動となる．一方，$T_b - T_a = \inf\{t \geq 0;\ \hat{B}(t) = b - a\}$ であるから，$T_b - T_a \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_{b-a}$.　□

8.9　鏡像原理と同時分布

定理 8.11 (鏡像原理) T を停止時として，

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} B(t) & t \leq T, \\ 2B(T) - B(t) & t > T \end{cases}$$

とする．このとき，$\{\hat{B}(t);\ t \geq 0\}$ も標準ブラウン運動となる．

略証[11]　系 8.1 より，$B(t) - B(T)$ は，$\{B(t); t \in [0, T]\}$, と独立な標準ブラウン運動となる．したがって，正規分布の対称性により，

$$\hat{B}(t) - \hat{B}(T) \equiv -(B(t) - B(T)) \tag{8.12}$$

も $\{\hat{B}(t) = B(t); t \in [0, T]\}$ と独立な標準ブラウン運動となるので，題意が成立する．□

定理 8.12 $(B(t), M(t))$ の同時確率密度関数は，次式で与えられる．

$$f_{B,M}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y - x}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}, \quad y \geq 0,\ x \leq y. \tag{8.13}$$

証明

$$P(B(t) \leq x, M(t) \geq y) = P(B(t) \leq x, T_y \leq t).$$

[10] $t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ $(t \to \infty)$ により，最右辺を得る．
[11] 厳密な証明については，Freedman (1971) 参照.

定理 8.11 で，$T := T_y = \inf\{t \geq 0; B(t) = y\}$ とおくと，$\{T_y \leq t\}$ 上で $\hat{B}(t) = 2y - B(t)$ であるから，

$$\begin{aligned}
P(B(t) \leq x, T_y \leq t) &= P(\hat{B}(t) \geq 2y - x, T_y \leq t) \\
&= P(B(t) \geq 2y - x, T_y \leq t) \\
&\quad (\because T_y \overset{\mathrm{d}}{=} \inf\{t \geq 0; \hat{B}(t) = y\}) \\
&= P(B(t) \geq 2y - x) \\
&\quad (\because y - x \geq 0 \text{ より}, \{B(t) \geq 2y - x\} \subset \{T_y \leq t\}) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt(t)}\right).
\end{aligned}$$

上式最右辺を x, y で微分すれば, (8.13) を得る. □