解析技巧通録 ”∃nsemble Note”

Up-to-date edition is in...
http://www4.atpages.jp/redmagic/

文責：大谷　俊介

(北海道大学理学部)

2008 年 9 月 9 日

本テキストは定積分の技巧と主要な微分方程式の解法を目指して、応用数学の基礎として必要な解析学の結果をまとめたものです。*[1] 各トピックごとに 7 ページ前後を割り振り、最小限必要な事項に絞って記載しました。なし崩し的にならないようおおかたの定理に導出と応用例題をつけておきましたが、メインは定理の使い方なので証明は完全ではありません。

あまり寄り道せずに、駆け走るようにゴールを目指しましょう。

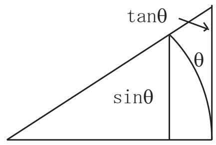
*[1] 訂正履歴：08/11/2(修正), 09/5/20(修正), 09/6/20(テンソル解析加筆)

目次

* のついたセクションはやや難しめの内容を伴っているので、はじめはスキップしても大丈夫。

1　1 変数関数の極限と微分

1.1　極限と微分



$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

から始めましょう。高校数学では偏角 $\frac{\pi}{2}$ 以下の円弧長を評価して

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} < \frac{\sin \theta}{\theta} < \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1$$

としてから $\theta \to 0$ で挟み撃つのが常套手段ですが、こういった不定形の極限は単純な公式の組み合わせだけで解けるとは限りません。おなじみの公式として

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

などがありますが、これらを沢山用意するより、次のような一撃必殺の定理を知っておくと便利です。(微分公式は次ページ)

定理 1.1

ロピタルの定理
$f(x), g(x)$ が微分可能であり、実数 a に対して $\lim_{x \to a} f(x) = 0, \lim_{x \to a} g(x) = 0$ で、$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ。

$f(x), g(x)$ を $1/g(x), 1/f(x)$ に置き換えてやれば ∞/∞ の不定形に対してもロピタルの定理が使えます。

例 1　$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

結局、$(\sin x)' = \cos x, x' = 1$ なので、(与式)$= \lim_{x \to 0} \cos x = 1$ です。

例 2　$\lim_{x \to +0} x^x = 1$

$y = x^x$ と置いて $\log y$ の極限を考えます。

$$\lim_{x \to +0} \log y = \lim_{x \to +0} \log(x^x) = \lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{1/x}$$

ここで定理 (1.1) により

$$\lim_{x \to +0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \to +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to +0} (-x) = 0$$

であるから、$\lim_{x \to +0} y = \lim_{x \to +0} e^{\log y} = 1$ を得ます。

順番が逆になりましたが、いくつかの微分公式を列挙しておきます。

──公式 1.2

主要な微分公式

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$
$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

ここで $\sinh, \cosh$ は双曲線関数であり、

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ,\ \ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

で定義されます。sinh をハイパボリックサイン、cosh をハイパボリックコサインと呼びます。[*2] また、これらを組み合わせた関数を微分するために、次のような公式があります。

──定理 1.3

ライプニッツの公式
関数 $f(x), g(x)$ が n 階微分可能ならば、

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\\ &= f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \binom{n}{2}f^{(n-2)}g'' + \cdots + \binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)} + fg^{(n)}.\end{aligned}$$

(注)$f^{(n)}$ は f の n 階微分を表す。

これは積の微分公式

$$(fg)' = f'g + fg'$$

を一般化したもので、$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ を使えば帰納法で証明できます。
$\binom{a}{b} = \dfrac{(a+b)!}{(a!)\cdot(b!)}$ は二項係数を表し、a, b が自然数ならば $\binom{a}{b} = aCb$ となります。

例　$\dfrac{d^n}{dx^n}[x^n \sin x]$ を求めよ。ここで $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ を k 階微分したものとする。
x^n を $n-k$ 階微分したものを $x^{n(n-k)}$ で表すことにします。何度も微分していると $(\sin x)^{(k)}$ は $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \cdots, \sin(x + \frac{k\pi}{2})$ と書けるとわかります。[*3] これにより、以下の通り微分できます。

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^n \sin x] = \sum_{k=0}^{n} x^{n(n-k)}(\sin x)^{(n)} = \underline{\sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1)\sin(x + \tfrac{\ell\pi}{2})}$$

が得られます。
次に、本節のメインであるテイラー展開をおさえます。

[*2] $\mathrm{sh}(x)$ や $\mathrm{ch}(x)$ と書くこともあります。
[*3] 帰納法で証明します：$k=0$ で O.K.,$k=\ell$ で $\sin(x+\frac{\ell\pi}{2})$ とすると、$\dfrac{d}{dx}\sin(x+\frac{\ell\pi}{2}) = \cos(x+\frac{\ell\pi}{2})$ が得られ $k=\ell+1$ でも O.K.

1.2　テイラー展開

$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$ という多項式を考えます。
$a_k(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を f を使って表そうとすると、

$$\begin{aligned}
f(a) &= a_0 & \text{より } a_0 &= f(a) \\
f'(a) &= a_1 & \text{より } a_1 &= f'(a) \\
f''(a) &= 2a_2 & \text{より } a_2 &= \tfrac{1}{2}f''(a) \\
f^{(3)}(a) &= 2\cdot 3a_3 & \text{より } a_3 &= \tfrac{1}{3!}f^{(3)}(a) \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(a) &= n!a_n & \text{より } a_n &= \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)
\end{aligned}$$

となり、元の多項式は

$$f(x) = f(a) + \tfrac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

と書けます。さて、左辺 $f(x)$ は多項式ですが、あえて $f(x) = \sin x$ などとおいてみると……(→ 例 **0**) 実は仮想的に現れる右辺の多項式がほとんど $\sin x$ に等しくなることがわかります。
ここで $f(x)$ を一般の関数に拡張して考えるのがテイラー展開の手法です。

定理 1.4

テイラー展開
$f(x)$ が何度でも微分可能として、定数 a に対して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

が成立する。$\left(\text{ただし } f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}\right)$

注意が必要なのはこの定理が成立する x の範囲が、$f(x)$ ごとにまちまちであるということです。初めはあまり気にせず、テイラー展開を利用して以下の例題を追いかけていきましょう。

例 0　$\sin x$ をテイラー展開し (→ 例 4)、

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dx^n}\sin x\Big|_{x=a}\right)(x-a)^n$$

として、$a = 0$ を代入すると

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

が得られる。右辺の多項式を $n = 1, 2, 3, 4$ 項で切り、それらを図示して、右辺が左辺に近づいていくことを確かめよ (実感せよ)。

実際に描画してみると、図のようになります。図 1 は $\sin x, x, x - x^3/3!$、図 2 は $\sin x, x - x^3/3! + x^5/5!, x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$ をどちらも $|x| < 3$ の範囲で描いたものです。こうしてみると、(この x の範囲では) マクローリン展開右辺で n がもっと大きくならなくても、十分両辺が近くなっていることが確かめられます。

ちなみに、図 2 で曲線同士のズレがおきる $x = 1.6$ あたりで計算してみました。$x = \pi/2 = 1.57079...$ として、$f(x) = \sin x$ と $g(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$ に代入すると $f(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$,$g(\pi/2) = 0.99984...$ となり、驚くべき一致を見ることができます。

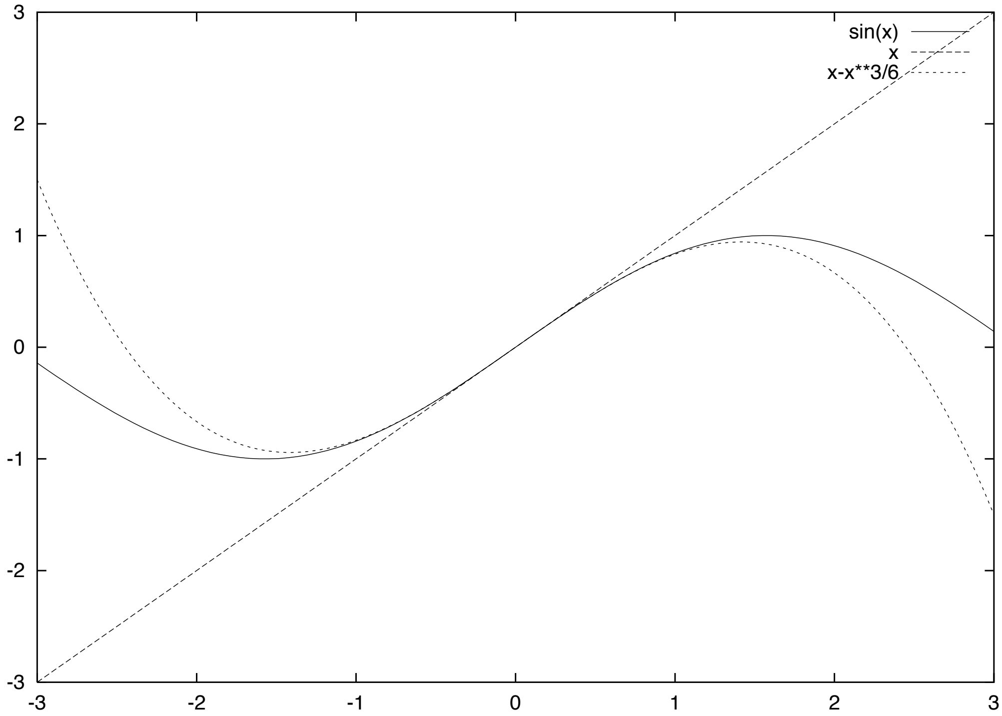


図 1

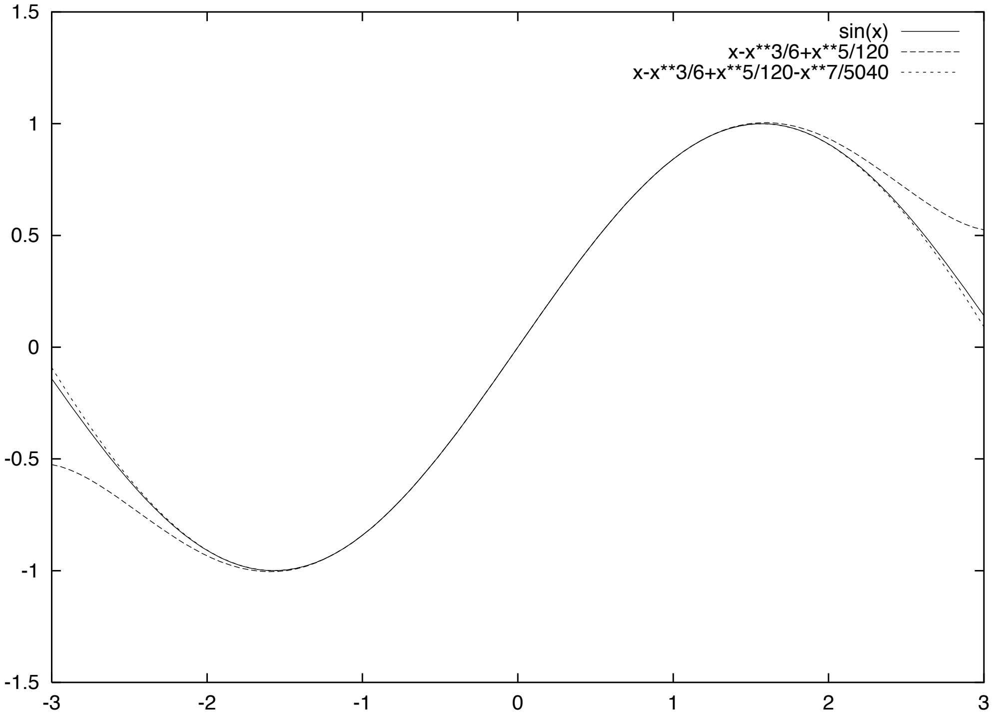


図 2

例 1　定理 (1.4) で $a=0$ として、e^x をテイラー展開せよ。

$f(x)=e^x$ とおくと、e^x は何度微分しても e^x だから、$f^{(n)}(x)=e^x$. したがって

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n}$$

が得られます。

例 2　次の級数和を求めよ。$1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}\cdots$

前問で $x=1$ とすれば

$$e^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

が成立します。これにより

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\underline{\ e\ }\quad(f(1)=e^1)$$

が得られます。

例 1 で扱ったように、$a=0$ としてテイラー展開することを特にマクローリン展開と呼びます。

例 3　$\cos x$ をマクローリン展開せよ。

$\cos x$ を微分し続け、$x=0$ を代入していくと

$$(\cos x)^{(n)}\Big|_{x=0}=1,0,-1,0,1,0,-1,\cdots\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

が得られるので、[*4]

$$\cos x=\underline{1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}$$

が成立します。

例 4　$\sin x$ をマクローリン展開して、例 1, 例 3 と比較して

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\quad(\text{オイラーの公式})\tag{1.1}$$

が成立することを示せ。ただし $i=\sqrt{-1}$ である。

はじめに $\sin x$ のマクローリン展開を示しておきます。実は公式に従う必要はなく、$\cos x$ のマクローリン展開両辺を微分すれば

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

があっさり得られてしまいます。少し難しいですが、例 1 で x を ix に置き換えて

$$e^{ix}=1+ix+\frac{-x^2}{2!}+\frac{-ix^3}{3!}+\cdots$$

とし、$\cos x$、$i\sin x$ のマクローリン展開の和と比べれば確かにオイラーの公式を得ることができます。

例 5　定理 1.1 を（大雑把で良いので）示せ。

任意の関数 $f(x),g(x)$ をテイラー展開し、$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots$ $g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+\dfrac{1}{2}g''(a)(x-a)^2+\cdots$ とします。ただし定理 1.1 の仮定に従って $f(a)=g(a)=0$ とします。このとき、

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots}{g'(a)(x-a)+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2+\cdots}=\frac{f'(a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)+\cdots}{g'(a)+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)+\cdots}$$

と書け、両辺で $x\to a$ とすると、定理が示せます。

例 6　$\dfrac{1}{1-x}$ をマクローリン展開せよ。

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ とおき、$f^{(n)}(x)$ を求めます。

$f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$、$f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ であり、(何度か繰り返してみれば)

[*4] $f(x)\Big|_{x=a}=f(a)$ に注意。

$f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ と予想がつきます。
一応帰納法で示しておくと、$n = 0$ で O.K.
$n = k > 0$ で $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ が成立するなら $f^{(k+1)}(x) = \dfrac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$ となるはずです。
実際、$n = k+1$ において

$$f^{(k+1)(x)} = \frac{d}{dx}f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-k!(k+1)(-1)(1-x)^k}{(1-x)^{2k+2}}\right) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

となり、予想が正しいことが示されます。ここで $f^{(n)}(0) = n!$ が得られ、これにより、マクローリン展開は

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \underline{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots}\end{aligned}$$

として得られます。

実は等比級数 $x^n \quad (n = 0, 1, \cdots)$ の和が

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$$

として表されることと同値であり、このとき級数の収束条件で $|x| < 1$ が成り立っていなければなりません。[*5]

実際、$x = 2$ を代入すると、

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots = \frac{1}{1-2} = -1$$

となり明らかに矛盾します。このようにテイラー展開は、級数の和として収束しなければ意味がなく、そのような x の範囲を考慮しなければいけません。

話を簡単にするためマクローリン展開が可能な x の範囲を考えます。

定理 1.5

収束半径 R
整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ の収束半径 R は、次のように求められる。

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$f(x)$ は $|x| < R$ の範囲でマクローリン展開ができる。

テイラー展開とセットで覚えるべき事項です。$R \to \infty$ となった場合は、「どんな実数 x に対してもテイラー展開可能」が言えます。

例 1　e^x をマクローリン展開したときの収束半径を求めよ。
$a_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0) = 1$ より $R = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) \to \infty$ より、x がどんな実数でも e^x はマクローリン展開可能です。

例 2　$\log(1+x)$ のマクローリン展開は次のように表される。$\log(1+x)$ の収束半径を求めよ。

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

[*5] このことは高校の教科書に載っているはず

$a_n = \dfrac{1}{n}(-1)^{n+1}$ により、$R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ が得られるので、$\log(1+x)$ は $-1 < x < 1$ においてのみマクローリン展開可能となります。

例 3　$\dfrac{1}{1-x}$ をマクローリン展開したときの収束半径を求めよ。

前ページの例 5 にしたがって $a_n = (-1)^n$ となり $R = 1$ で、$-1 < x < 1$ の範囲でマクローリン展開できることがわかります。

公式 1.6

その他有名なマクローリン展開

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (|x| < 1)$$

$$\mathrm{Tan}^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$\mathrm{Sin}^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$\text{ただし} \binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases} \quad n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 2 & (n \text{ 偶数}) \\ n(n-2)\cdots 1 & (n \text{ 奇数}) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

1.3　Abel の連続性定理について *

実際には収束するが、その収束性が危ぶまれるケースは意外に多く、ここではそのケーススタディを扱います。例えば $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ において $x = 1$ を代入すると

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{1.2}$$

という級数が得られ、実際にこの級数は収束するのですが、$x = 1$ は収束半径内の値 $(|x| < 1)$ ではなく、これ (収束半径による判定) だけでは収束しているとは言えません。そこで Abel の証明した連続性定理が役に立ちます。

Abel の連続性定理

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について、$x = z$ で右辺の級数和が有限確定ならば、その値は左辺 $\lim_{x\to z} f(x) = f(z)$ と等しくなる。(証明略)

注意すべきは、左辺が有限確定値をとっても、右辺の収束性は保障できないという点です。なんらかの方法で、「まず右辺の級数が収束すること」を示さなければならないのです。ポピュラーな例としてライプニッツの定理があります。

Leibniz の定理

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば、交代級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する。(証明略)

ライプニッツの定理を用いれば、式 (1.2) 右辺の交代級数は収束することがわかり、その上でアーベルの連続性定理を用いれば左辺の値 $\log 2$ に等しくなることがわかります。

2　1変数関数の積分

高校や微分積分学の初歩だけでは求めることのできない積分が山ほどあり、これらには後々「重積分」や「複素積分」などを応用して挑戦していくことになります。
本節では復習として、基本的な計算法を述べるに留めます。

2.1　置換積分の効用

置換積分をフルに使うことで簡単な公式をいくらでも一般化することができます。

次の積分が成り立っているとする。

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

これを利用して、以下の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} dx \quad (a > 0)$

(2)　$\displaystyle\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx$

(1)(2) はどちらも有用なテクニックであり、ガウスの積分として有名な

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

も含めて丸暗記に値するものです。(これは重積分の項で証明します)

解答

(1)　まず

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

において、$t = \sqrt{a}x$ （ただし $a > 0$) とおく。積分範囲は $(x|0 \to \infty)$ となるので、$dt = \sqrt{a}dx$ と併せて両辺は

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \sqrt{a} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

と書ける。両辺を $\sqrt{a}$ で割れば

$$\underline{\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}}$$

となる。

(2)　(1) で得た式を a で微分すると、

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{d}{da} e^{-ax^2} dx = \frac{d}{da} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \\ &\Longrightarrow \int_0^\infty (-x^2) e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}^3} \right) \end{aligned}$$

が得られ、このように a で微分することを繰り返していけば

$$\underline{\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}^{2n+1}} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}}$$

が得られる。ただし $n!! = n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots$ である。■

いくつか積分公式を記しておきます。なお、本節では積分定数 C を省略しています。

公式 2.1

$$\int f^n f' dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \log f$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x$$

$$\int \log x dx = x \log x - x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{Arcsin} \tfrac{x}{|a|}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^x}} = \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \mathrm{Arcsin} \tfrac{x}{|a|} \right)$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{Arctan} \tfrac{x}{a}$$

x と $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$ を含む有理式の積分：$t = \sqrt[n]{ax+b}$ とおく。

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ を含み、$a > 0$：$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおく。

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ を含み ax^2+bx+c が実根 α, β をもつ：$t = \sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ とおく。

2.2 瞬間部分積分

2 つの関数 $f(x), g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ を積分するために部分積分という技法があるのですが、これは公式で書くより次のように約束 (バージョンアップ) したほうが効率が良いです。

微分すると $f(x)g(x)$ を含む関数を見つけて補正する。

具体例を与えて説明しましょう。

例 1　$x \sin x$ を不定積分せよ。

微分すると $x \sin x$ を含む関数は、例えば $-x \cos x$ などがあります。$(-x\cos x)' = x \sin x - \cos x$ な

ので、補正は $\cos x$ です。つまり、$x\sin x = (x\cos x)' + \cos x$ の両辺を積分すればよいので、答えは

$$\begin{aligned}\int x\sin x dx &= x\cos x - \int \cos x dx\\ &= \underline{x\cos x - \sin x}\end{aligned}$$

例 2　$\log x$ を不定積分せよ。
微分すると $\log x$ を含むのは例えば $x\log x$ であり、補正は -1 です。つまり $\log x = (x\log x)' - 1$ なので、両辺を積分し、

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= x\log x - \int dx\\ &= \underline{x\log x - x}\end{aligned}$$

例 3　$e^x \sin x$ を積分せよ。
少し難しいですが

$$\begin{aligned}e^x\sin x &= (-e^x\cos x)' + e^x\cos x\\ e^x\cos x &= (e^x\sin x)' - e^x\sin x\end{aligned}$$

により

$$e^x\sin x = (-e^x\cos x)' + (e^x\sin x)' - e^x\sin x$$

となり、これを両辺積分し、

$$\underline{\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}(-e^x\cos x + e^x\sin x)}$$

が得られます。

はじめは難しいかも知れませんが、慣れると一瞬で部分積分が可能となります。

2.3　三角 → 指数関数のすり替え積分

9 ページのオイラーの公式 (1.1)

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

を使うため、複素数について準備します。実数 a, b を用いて $z = a + bi$ と書けるとき、a, b を z の実部、虚部と呼び、

$$a = \Re(z)\ ,\ b = \Im(z)$$

と書きます。オイラーの公式によれば、

$$\cos x = \Re(e^{ix})\ ,\ \sin x = \Im(e^{ix})$$

が成立するので、sin や cos を e^{ix} にすり替えて積分するのが有効となります。

例 1　$\displaystyle\int \sin x dx$ を求めよ。
e^{ix} を積分して虚部を取ります。

$$\begin{aligned}\int e^{ix}dx = \int(\cos x + i\sin x) &= \left[\frac{1}{i}e^{ix}\right]\\ &= -ie^{ix}\\ &= -i(\cos x + i\sin x)\\ &= \sin x - i\cos x\end{aligned}$$

両辺の虚部を取って、

$$\underline{\int \sin x dx = -\cos x}$$

例 2　$e^x \sin x$ の不定積分を求めよ。

$e^x \cdot e^{ix}$ を積分し、虚部を取ります。

$$\begin{aligned}\int e^{(1+i)x}dx &= \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} \\ &= \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}e^{(1+i)x} \\ &= \frac{1-i}{2}e^x e^{ix} \\ &= \frac{1-i}{2}e^x(\cos x + i\sin x) \\ &= \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x i\end{aligned}$$

両辺の虚部を取ると

$$\underline{\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)}$$

が得られます。

三角関数に比べて、指数関数は変数の加法が楽 (加法定理が $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ で瞬殺できる) であることを知れば、積分にかかわらず三角関数を指数関数にすり替えて考える方法は非常に有用だとわかるでしょう。

2.4　マクローリン展開して積分*

普通に考えると積分できなくても、工夫次第で求積可能な関数は相当数あり、その中の一つがこのテクニックです。

例　次の積分値を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{e^x+1}$$

求める積分を I とおき、あらかじめ分子分母に e^{-x} をかけておきます。

$$I = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

マクローリン展開 (あるいは無限等比級数) の公式の中に

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

というのがあるのでこれを使います。$t = e^{-x}$ とおくと、$t = e^{-x} \quad (0 \le x < \infty)$ は収束条件 $|t| < 1$ を満たしているので I を次のように書き換えることができます。

$$I = \int_0^\infty xe^{-x}\frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int_0^\infty xe^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^\infty xe^{-(1+n)x}dx$$

最右部の積分は瞬間部分積分の応用で、$\dfrac{1}{(n+1)^2}$ として求められるので、結果として

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

が得られます。この級数の和はフーリエ級数の応用で求めることができ、$I = \dfrac{\pi^2}{12}$ と決着づけることができます。

例　次の関係が成立することを示せ。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\beta$$

ただし、次の関係を用いよ。

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ , \quad \beta := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

この積分は統計力学で登場します。前問とほぼ同じなので簡潔に説明します。
求めるべき積分を I とおきます。被積分関数の分子分母に e^{-x} をかけておき、$t = \sqrt{x}$ とおきます。マクローリン展開で

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0} e^{-nx}$$

となることを使えば

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \int_0^\infty 2t^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+n)t^2}dt = \int_0^\infty e^{-X^2}dX \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^{3/2}}$$

と書けます。ただし、最後に部分積分および $X = \sqrt{1+n}t$ としての置換積分を施しました。問題に与えられている関係を使えば、確かに $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\beta$ となることがわかります。

2.5　一般化して絞込み積分 2*

本節冒頭に掲げた「一般化して絞込み」積分の続きです。応用のための「おまけ」と認識してください。そのため、詳しく論ずることはしないで、簡単な技術紹介に留めます。

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{(e^x+1)^2}dx \ , \quad J = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^4)^n}$$

などを考えます。両者の共通項は被積分関数の分母全体が自乗されていることで、そのまま積分しようとするとドロ沼です。これらを簡略化し、分母を一般化した

$$f_a(x) = \frac{x}{e^x+a} \ , \quad g_a(x) = \frac{1}{a+x^4}$$

を用意しておき、それぞれを $[0,\infty]$ で積分してから a で微分すると、所望の値を引き出すことができます。

2.6　定積分によって定義される特殊関数 Γ, B

この小節では定積分によって定義される特殊な関数、特に Γ 関数 (Gamma-Function)、B 関数 (Beta-Function) を扱います。

2.6.1　ガンマ関数

Γ 関数は次のように定義されます。

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \quad (s>0) \tag{2.1}$$

また、この関数は次の性質を持っています。[*6]

[*6] $\Gamma(s)$ が $s>0$ で収束することは優関数 e^{-px} $(0<p<1)$ と積分比較すれば容易にわかるでしょう。

定理 2.2

ガンマ関数の性質

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(2) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbf{N})$

(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(4) $\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2}) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s)$

(5) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

(1) は部分積分によって証明できます。(2) については、$s \in \mathbf{R}$ を $n \in \mathbf{N}$ に置き換えれば明らかに成り立ち、$n=1$ とすれば $\int_0^\infty e^{-x}dx = \big[-e^{-x}\big]_0^\infty = 1$ により成立が確かめられます。(3) は

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt \quad (x = t^2\text{で置換積分})$$

で与えられますが、右辺はガウス積分 (→ 本節冒頭、あるいは重積分の節を参照)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

によって求めることができ、決着をつけることができます。((4)(5) は難しい)

2.6.2 ベータ関数

B 関数は

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{2.2}$$

で定義される関数[*7] で、以下の性質を持っています。

定理 2.3

ベータ関数の性質

(1) $B(p,q) = B(q,p)$

(2) $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p}B(p+1,q)$

(3) $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^a\theta\cos^b\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

(5) $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$

(1)〜(4) は置換積分や部分積分で容易に証明できます。(5) は右辺で $t = \dfrac{x}{1+x}$ とおいて置換積分するとうまく証明できます。

ここで、ガンマ関数とベータ関数を結びつける次の関係を紹介します。

[*7] $B(p,q)$ は $p,q \geq 1$ のときは普通の連続関数ですが、p,q の少なくともどちらかが区間 $(0,1)$ にあるときには広義積分として扱わねば収束性を保障できません。

定理 2.4

ベータ関数とガンマ関数の関係

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

この性質は積分計算で大いに活躍します。

例１　次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^3\theta d\theta$$

定理 (2.3) の (4) と定理 (2.4)、定理 (2.2) の (1) による組み合わせです。

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}B\left(\frac{1+4}{2},\frac{1+3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{9}{2})}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{2}{35}$$

例２　次の積分を求めよ。

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^6}$$

$x=t^{1/6}$ と置換して

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^6}&=\frac{1}{6}\int_0^\infty\frac{t^{-5/6}}{1+t}dt\\
&=\frac{1}{6}B\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)\qquad(\because\ \text{定理 (2.6.2) の (5)})\\
&=\frac{1}{6}\frac{\Gamma(1/6)\Gamma(5/6)}{\Gamma(\frac{1}{6}+\frac{5}{6})}\quad(\because\ \text{定理 (2.6.2)})\\
&=\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\quad(\because\ \ \Gamma(\tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{6})=\Gamma(1)=1)\\
&=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/6)}\qquad(\because\ \ \text{定理 (2.6.1) の (5)})\\
&=\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

3　偏微分

重積分の概念に必要なヤコビアンの導出と、2 変数関数の Taylor 展開、および曲面の最大最小問題を扱います。

3.1　偏微分

この節では複数の変数による関数について、唯一つの変数のみ変動を許して、他の変数を固定して微分することを偏微分と呼び、例えば $f(x, y, z)$ について、y, z を固定して x を動かし、f を x で偏微分した関数を

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

などと書いて f の偏導関数と呼びます。y, z についての偏微分も同様です。

また、x による f の偏導関数を特に f_x などと書く場合があります。高階偏導関数は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}\ ,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{zyx}$$

などと表します。(偏微分する順序に注意！)

例　$f(x, y) = x + \sin y$ のとき、f_x,f_y,f_{xy},f_{yx} を求めよ。
x と y で偏微分すると、それぞれ $f_x = 1$,$f_y = -\cos y$ となります。(例えば x で偏微分するとき、y は定数とみなされることに注意！) さらに 2 階偏導関数はそれぞれ $f_{xy} = 0$、$f_{yx} = 0$ となって、偏微分の順序に関わらず 2 階偏微分が一致することがわかります。[*8]

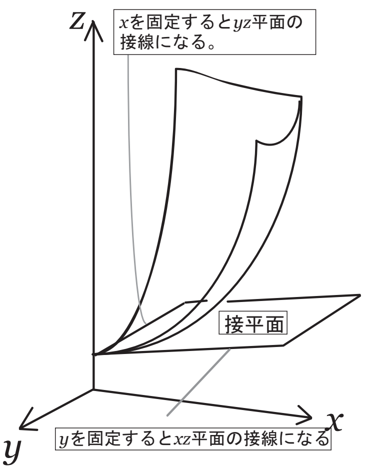
3.2　全微分とその可能性

一般に一変数関数 $f(x)$ が微分可能であるとは、$f(x)$ の接線が描けるということです。これを 2 変数関数に拡張すると、$z = f(x, y)$ が全微分可能であるということが $z = f(x, y)$ の接平面が描けるということに拡張できます。(x, y, z) の 3 次元空間において、平面の方程式は一般に実数 a, b, c を用いて、

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \qquad (3.1)$$

と書けます。[*9] さて、式 (3.1) を変形して

$$z - z_1 = m(x - x_1) + n(y - y_1)$$



[*8] 一般に f_{xy} , f_{yx} がともに連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$ が成立します (シュワルツの定理)

[*9] 平面上に定点 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x_1, y_1, z_1)$、平面上の任意点 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, z)$ を用いて、平面の方程式が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{d_1} + t\vec{d_2}$$

(s, t は任意変数) と書け、平面の法線ベクトル $\vec{h} = (a, b, c)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の内積を取れば導けるでしょう。

と書き直すことができ、$y = y_1$ とすれば、$z - z_1 = m(x - x_1)$ が得られます。微分を取れば $dz = mdx$ が得られます。$y = y_1$ に固定しているとき、接平面は接線になり、接線の傾きを考えれば $m = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ が得られます。逆に x を x_1 に固定すると、微分 $dz = ndy$ と、$n = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ が得られます。このことから、全微分は

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{3.2}$$

と書けることがわかるでしょう。

また、高階の全微分は

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \tag{3.3}$$

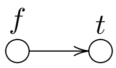
となります。(確かめてみましょう)

3.3 合成関数の微分

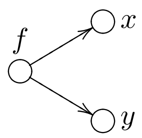
初心者には意外とややこしかったりするので、次のようにルールを決めて合成関数を作ると簡単になります。

アイテム 3.1

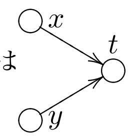
合成関数フローチャート

f が t のみの関数のとき、

のように f と t を連結する。

f が x, y の関数であるときは 

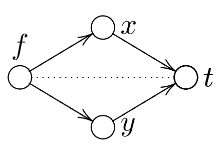
のように分岐させる。

x, y が t の関数のときは 

のように統合させる。

実際にこれを用いて合成関数の微分を求めてみます。

例 1　関数 f が x, y の関数であり、x, y が t の関数であるとき、$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ。

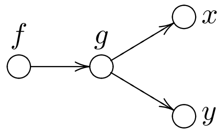
フローチャートを描くと 

のようになり、$f \to x \to t$ と $f \to y \to t$ の 2 通りの道があります。連結、統合では $\dfrac{d}{d\bigcirc}$、分岐では $\dfrac{\partial}{\partial \bigcirc}$ を使ってまとめると $f \to x \to t$ は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$、$f \to y \to t$ は $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ で微分が与えられ、これを足して

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

が得られます。

例 2　f が g の関数であり、g が x, y の関数であるとき、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ。

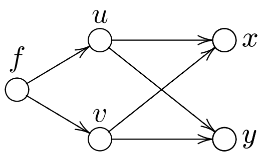
フローチャートは 

と描けるので、$f \to g \to x$ と $f \to g \to y$ の分岐について、ゴールが y のものを選べばよいです。

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dg}\frac{\partial g}{\partial y}$$

が得られます。全微分の式 (3.2) を両辺 dt で割った式であることを確かめておきましょう。

例 3　f が u, v の関数であり、u, v がどちらも x, y の関数であるとき、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ。

フローチャートは 

のように描けます。分岐が 2 回あることに注意して、

$f \to u \to x$ の分は $\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$f \to u \to y$ の分は $\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$f \to v \to x$ の分は $\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$、$f \to v \to y$ の分は $\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

となるので、これらから、ゴールが x となっている分だけ取り出して足せば

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.4}$$

さらにゴールが y となっている分を取り出して足せば、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.5}$$

が得られます。

3.4 Jacobian/ヤコビアン

定理 3.2

$f(x, y)$ を $x = u, y = v$ とおいたとき、変数変換は

$$dxdy = Jdudv$$

と書け、J をヤコビアン (**Jacobi** の行列式) と言い、

$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

で表される。

式 (3.4)、(3.5) にならって、$z = f(x, y)$ とし、$x = x(u, v), y = y(u, v)$ とすれば (x, y と u, v を入

れ替えたことに注意)、合成関数の微分は、

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

となり、行列を用いて

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

と書けます。これが置換積分の 2 変数関数バージョン「変数変換」の口火となります。置換積分について復習すると、$f(x)$ を積分するために $x = g(t)t$ (g は t の関数) とおいて、

$$dx/dt = g'(t) \quad \Leftrightarrow dx = g'dt$$

を得るのが常套手段でした。これを 2 変数関数に拡張して変数変換するには、

$$dxdy = Jdudv$$

と書けるような J が必要になり、式 (3.6) 最右部の行列の行列式を取って

$$J := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

が成り立ち、J をヤコビアン(Jacobi の行列式) と呼びます。実際に例を通してヤコビアンを求めていくことにします。

例 1. $f(x,y)$ について、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアンを求めよ。

直接計算すると、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \dfrac{\partial}{\partial \theta} r\cos\theta \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial r} r\sin\theta & \dfrac{\partial}{\partial \theta} r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

が得られます。

例 2. $f(x,y,z)$ について、$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\sin\phi$ とおいたときのヤコビアンを求めよ。

3 次元に拡張しても手法は同じです。[10]

$$J = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = r^2\sin\theta.$$

[10] サラスの手法で展開します。

3.5　2 変数関数の Taylor 展開

基本的には 1 変数関数のテイラー展開と変わりません。まず $f(x,y)$ を展開するために、$z(t)=f(a+ht,b+kt)(h,k$ は定数) とおきます。(さらに $x=a+ht, y=b+kt$ とおいておきます) z の全微分は式 (3.3) により

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

であり、両辺 dt^n で割って、合成関数の微分の形として

$$\frac{d^n z}{dt^n}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^n z=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z \tag{3.7}$$

さて式 (3.7) 左辺を用いたマクローリン展開は

$$z(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n z}{dt^n}\right|_{t=0}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{(n)}(0)t^n$$

であり、$t=1$ として

$$z(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n z}{dt^n}\right|_{t=0}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{(n)}(0) \tag{3.8}$$

となります。さらに式 (3.7) 右辺を用いたマクローリン展開は $t=1$ において

$$f(a+h,b+k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n z}{dt^n}\right|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

が得られます。さて、$t=1$ なので、$h=x-a, k=y-b$ と書き直すことで最終的に

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(a,b).$$

これが 2 変数関数のテイラー展開です。(a,b は定数)

例.　$f(x,y)=e^{x-2y}$ を $(1,1)$ のまわりに $n=2$ までテイラー展開せよ。

ひたすら偏微分しておきます。$\frac{\partial}{\partial x}e^{x-2y}=e^{x-2y}$、$\frac{\partial}{\partial y}e^{x-2y}=-2e^{x-2y}$、

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{x-2y}=e^{x-2y}$、$\frac{\partial^2}{\partial y^2}e^{x-2y}=4e^{x-2y}$、$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}e^{x-2y}=-2e^{x-2y}$、$e^{1-2}=\frac{1}{e}$ により、

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1,1)\\
&=f(1,1)+(x-1)\frac{\partial}{\partial x}f(1,1)+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}f(1,1)\\
&\quad+\frac{1}{2}(x-1)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(1,1)+\frac{1}{2}(y-1)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(1,1)+\frac{1}{2}\cdot 2(x-1)(y-1)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(1,1)\\
&=1/e+(x-1)/e-2(y-1)/e+(x-1)^2/(2e)+2(y-1)^2/e-2(x-1)(y-1)/e\\
&=\underline{\frac{1}{2e}\left(2+2(x-1)-4(y-1)+(x-1)^2+4(y-1)^2-4(x-1)(y-1)\right)}
\end{aligned}$$

3.6 極値と最大最小問題

1 変数関数の微分を用いることで $y = f(x)$ の導関数 (傾き) から $f'(x) = 0$ となるとき、$f(x)$ の極値を求めることができましたが、これを拡張し、$z = f(x, y)$ の極値を求めるのが本小節の目的です。

3.6.1 極大極小

以下の定理は証明せずに使います。

定理 3.3

$f(x, y)$ が (a, b) で極値を持つ必要条件は $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ である。
$(f(a, b) = 0$ となる点 (a, b) を停留点と呼ぶ)

定理 3.4

ヘッシアン H を次の式で定義する。

$$H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

このとき、$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ならば、極大極小の判定に関して以下が成り立つ。

(1) $H(a, b) > 0$ のとき
$f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow \quad f(x, y)$ は (a, b) で極小値$f(a, b)$ を持つ。
$f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow \quad f(x, y)$ は (a, b) で極大値$f(a, b)$ を持つ。

(2) $H(a, b) < 0$ のとき
$f(x, y)$ は (a, b) で極値を持たない。

教科書によってはヘッシアンの符号が逆で定義される場合もあります。(その場合判断基準も逆になります)

例　実関数 $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + y^4$ の極大値、極小値を求めよ。
まず $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たす (a, b) を探します。
f_x, f_y はそれぞれ、

$$f_x(x, y) = 2x,\ f_y(x, y) = -4y + 4y^2$$

であるから、$(x, y) = (0, 0), (0, -1), (0, 1)$ において $f = 0$ であり、これらが停留点とわかります。次に、これらについてヘッシアンを吟味します。

$$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = -4 + 12y^2,\ f_{xy} = 0$$

によってヘッシアン H は

$$H = 2(-4 + 12y^2) = 8(3y^2 - 1)$$

となるので $H > 0$ となるために $(x, y) = (0, \pm 1)$ であり、$(x, y) = (0, 0)$ は停留点ですが極値を与えません。
次に f_{xx} を吟味します。

$$f_{xx} = 2 > 0$$

より $(0, \pm 1)$ は極小値を与え、その値は $f(0, \pm 1) = \underline{-1}$ です。また、この関数は<u>極大値を持ちません</u>。

3.6.2 条件付極値とラグランジュの未定乗数法

$g(x,y)=0$ の条件のもとで $f(x,y)$ の極値を探すために次の定理を使います。

定理 3.5

条件付極値とラグランジュの未定乗数法

$f(x,y),\ g(x,y)$ が連続な偏導関数を持つとする。$g(x,y)=0$ の条件下で $f(x,y)$ が (a,b) で極値を持つならば、以下が成立する。(ただし $g_x(a,b), g_y(a,b) \neq 0$)

$$\begin{cases} f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0 \\ g(a,b) = 0 \end{cases}$$

(証明)f と g の全微分から $\frac{df}{dx},\ \frac{dg}{dx}$ を考えると、

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

および

$$\frac{dg}{dx} = g_x(x,y) + g_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad (\because g \equiv 0)^{*11}$$

を得て、特に $(x,y)=(a,b)$ のとき $\frac{d}{dx}f(a,b)=0$ なので $\frac{dy}{dx}$ を消去して、

$$\frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)} = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} = \lambda \quad (一定)$$

が得られます。□ これを使って極値を求めます。

例　$x^2+xy+y^2-3=0$ の条件下で $f(x,y)=x^2+y^2$ の極値を全て求めよ。

まず f_x, f_y を考えます。

$$f_x(x,y)=2x,\ f_y(x,y)=2y$$

次に $g(x,y)=x^2+xy+y^2$ とおいて $g_x,\ g_y$ を考えます。

$$g_x(x,y)=2x+y,\ g_y(x,y)=x+2y$$

ラグランジュの未定乗数 λ を使って f_x, f_y, g_x, g_y をまとめると、

$$\begin{cases} 2x - \lambda(2x+y) \\ 2y - \lambda(x+2y) \end{cases}$$

を得ることができ、λ を消去して $y=\pm x$ を得ます。これを $x^2+xy+y^2-3=0$ に代入することで、$(x,y)=(\pm1,\pm1),(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})$ を得ます。これらが f の停留点です。

ヘッシアンは $h=4>0$ であり、$f_{xx}>0$ なので、停留点は全て極小値を与える点であり、それぞれ $f(\pm1,\pm1)=2, f(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})=6$ を得ます。

[11] g は恒等的に 0

4　重積分

複数変数の関数を積分するために重積分の概念を学びます。上手く応用すれば、これまでのテクニックだけではカバーできない一変数関数の定積分 (例えば $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ など) が求められるようになります。

4.1　累次積分とその基礎演習

ツール 4.1

$f(x,y)$ を $(x|a\to b)$ で積分し、さらに $(y|c\to d)$ で積分するとき、次のように書く。

$$\int_c^d dy \int_a^b dx f(x,y) \quad \left(= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \right)$$

積分したものをさらに積分するので、このような重積分を特に累次積分(逐次積分) と呼びます。$\int$ と dx で挟むのではなく、$\int dx$ を作用させるように $\int dx f(x)$ として書くと便利です。もちろん今までどおり $\int f(x)dx$ のスタイルで記述することも許されます。

例 1　次の積分を求めよ。

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx x^2 y$$

まず x で積分して

$$\int_0^2 dx x^2 y = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 y = \frac{8}{3}y$$

さらに右辺を y で積分して

$$\int_0^1 dy \frac{8}{3}y = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^1 = \underline{\frac{4}{3}}$$

例 2　次の積分を求めよ。

$$\int_0^1 dy \int_y^{y+1} dx xy$$

順番を間違えないようにしましょう。まず x で積分します。

$$\begin{aligned}\int_y^{y+1} dx(xy) &= \frac{1}{2}y\left[x^2\right]_y^{y+1} \\ &= \frac{y}{2}(2y+1)\end{aligned}$$

次に y で積分します。

$$\int_0^1 dy \frac{1}{2}(2y^2+y) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \underline{\frac{7}{12}}$$

例 3　次の積分を求めよ。

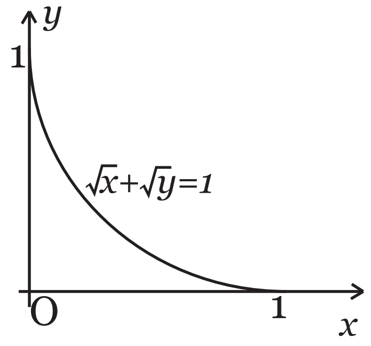
$$\iint_D dxdy x^2 \quad D = \{\,(x,y) \mid 0\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$$

領域 D を分解すれば普通の累次積分になります。

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy x^2 &= \int_1^2 dy \int_0^1 dx x^2 \\ &= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \\ &= \int_0^1 dy \frac{7}{3} = \underline{\frac{7}{3}}\end{aligned}$$

例 4　次の積分を求めよ。

$$\iint_D dxdy\sqrt{y} \qquad D:\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 1$$



領域を図示し、積分範囲を決めます。図より $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ であり、かつ領域 D の不等式から $y\leq(1-\sqrt{x})^2$ であるから、まず $(y|0\to(1-\sqrt{x})^2)$ で積分し、次に $(x|0\to 1)$ で積分します。

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy\sqrt{y} &= \int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\sqrt{y}\\ &= \int_0^1 dx\left[\frac{2}{3}(y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2}\\ &= \int_0^1 dx\frac{2}{3}(1-\sqrt{x})^3\\ &= \int_0^1 dx\left(1-3\sqrt{x}+3x-\sqrt{x}^3\right)\\ &= \underline{\frac{1}{15}}\end{aligned}$$

[*12]

例 5　次の積分を求めよ。

$$\iiint_D zdxdydz \qquad D:0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1-x, 0\leq z\leq 1-x-y$$

3 次元になっても基本は変わりません。シバリのきつい z から積分していきます。

$$\begin{aligned}\iiint_D zdxdydz &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} zdz\\ &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1-x-y}\\ &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\frac{1}{2}(1-x-y)^2\\ &= \int_0^1 dx\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{3}(1-x)^3\\ &= \left[\frac{-1}{24}(1-x)^4\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{24}}\end{aligned}$$

例 6　次の積分を求めよ。

$$\iiint_D ydxdydz \qquad D:x,y,z\geq 0,\ x+2y+3z\leq 6$$

積分範囲を自分で決定しなければならないので領域を図示します (といいつつ図省略)。境界は平面の方程式 $x+2y+3z=6$ なので、$x=0$ として $2y+3z=6$ を yz 平面に、$y=0$ として $x+3z=6$ を xz 平面に、$z=0$ として $x+2y=6$ を xy 平面に描けば領域がわかります。
まず立体図について、$0\leq z$ と $x+2y+3z\leq 6$ から z を消去して積分範囲を

$$\left(z\middle|0\to\frac{6-x-2y}{3}\right)$$

とし、次に平面図について、$0\leq y$ と $x+2y\leq 6$ から y を消去して、積分範囲は

$$\left(y\middle|0\to\frac{6-x}{2}\right)$$

[*12] 途中で $t=1-\sqrt{x}$ と置換するとベータ関数になり計算が楽になります。

となり、最後に x は $0 \leq x$ および $x \leq 6$ から、積分範囲が

$$(x|0 \to 6)$$

となるので、与式は以下のように求められます。

$$\begin{aligned}
\iiint_D ydxdydz &= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{2}} dy \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} ydz \\
&= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{2}} dy \cdot y \Big[z\Big]_0^{\frac{6-x-2y}{3}} \\
&= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{2}} dy \cdot y \left(\frac{6-x-2y}{3}\right) \\
&= \int_0^6 dx \left[\frac{6-x}{3}\frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{9}y^3\right]_0^{\frac{6-x}{2}} \\
&= \int_0^6 dx \frac{1}{72}(6-x)^3 \\
&= \frac{1}{72}\left[\frac{1}{4}(x-6)^4\right]_0^6 = \underline{\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

4.2 変数変換

この項では置換積分の多変数バージョンとのしての変数変換を扱います。ここでは偏微分の節で導いたヤコビアンを使います。

定理 4.2

直交座標から極座標への変数変換は以下の通りになる。
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad (0 < r, 0 \leq \theta < 2\pi)$ のとき、

$$dxdy = rdrd\theta$$

$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta \quad (0 < r, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi)$ のとき、

$$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

非常に多くの計算で現れるので最重要項目です。暗記に値します。ヤコビアンの導出は偏微分の項でやっているので省略します。各自試してみてください。

定理 4.3

重積分の変数変換
x, y から u, v に変数変換するとき、$f(x,y) = g(u,v)$ ならば、次の関係によって重積分を変換できる。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} g(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

例 1　半径が a である球の体積を求めよ。
球の微小体積を dV とします。dV を球全体で集めたのが球の体積 V であり、$V = \int dV$ という図式はすぐに思いつくでしょう。球の微小体積 dV は上の定理で

$$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

と書けるので、これで累次積分して

$$\begin{aligned} V = \iiint_V dV &= \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin\theta \\ &= \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{3}a^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \underline{\frac{4\pi}{3}a^3} \end{aligned}$$

が得られます。ちなみに、円の面積は $\int_0^a \int_0^{2\pi} r dr d\theta$ を計算すれば求められます。(πa^2)

例 2　次の積分を求めよ

$$\iint_D x^2 dx dy \qquad D = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x \,\}$$

領域 D が、中心 $(\frac{1}{2}, 0)$、半径 $\frac{1}{2}$ の円であることに気をつけて $x - \frac{1}{2} = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad (0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とおくと上手くいきます。$dxdy = r dr d\theta$ に注意。

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta r \cdot (r\cos\theta + \tfrac{1}{2})^2 \\ &= \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta (r^3 \cos^2\theta + r^2 \cos\theta + \tfrac{1}{4} r) \\ &= \int_0^{1/2} dr \left(\frac{1}{4}\pi r^4 + \frac{1}{2}\pi r^2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^4} \right) = \underline{\frac{5\pi}{64}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.3　ガウスの積分／有名な積分公式

本節の締めくくりに重要公式を証明します。一変数関数の積分ですが、以前までの初等的な技術では求積不能であり、重積分を知って初めてその証明が可能となります。

定理 4.4

ガウスの積分

次の関係が成立する。

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

極座標で攻めるか直線で攻めるかの 2 通りのパターンがあります。まずは極座標で考えてみます。$I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ とおき、I^2 を考えます。

$$I^2 = \int_0^\infty dx e^{-x^2} \int_0^\infty dy e^{-y^2}$$

ここで I の片方を変数 y の積分で表しました。累次積分の逆を考えると、

$$I^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-(x^2+y^2)}$$

と書けます。積分領域は第一象現全体であり、極座標で表すと、

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad, (r|0 \to \infty), (\theta|0 \to \tfrac{\pi}{2})$$

と書き表せ、ヤコビアンは r となるので、I^2 は

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta r e^{-r^2} \\
&= \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

と書けることになり、$I > 0$ により $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることが確かめられます。

さらに、直線を使って考えるには、

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

について、

$$I^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-x^2-y^2}$$

を考え、ここで $(x, y) = (x, tx) \quad (y = tx)$ と置き、$dy = xdt$ となるように変数を書き換えます。はじめに x を固定しておいて、最後にまとめて累次積分すると、

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty dt \cdot t e^{-(1+x^2)t^2} \\
&= \int_0^\infty dx \left[\frac{-1}{2(1+x^2)} e^{-(1+x^2)t^2}\right]_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

となり、これより $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られます。

定理 4.5

次の関係が成立する。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

たびたび現れる積分ですが、次のような証明法があります。2 変数関数 $f(x, y) = e^{-xy}\sin x$ を $(x|0 \to \infty),\ (y|0 \to \infty)$ で積分します。積分する順序を考えて、

y から積分する

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-xy} \sin x &= \int_0^\infty dx \sin x \left[\frac{e^{-xy}}{-x} \right]_0^\infty \\ &= \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \end{aligned} \tag{4.2}$$

x から積分する

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dy \int_0^\infty dx e^{-xy} \sin x &= \int_0^\infty dy \frac{1}{1+y^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで $\int_0^\infty dx e^{-xy} \sin x = \frac{1}{1+y^2}$ を用いています。また、$\int_0^\infty dy \frac{1}{1+y^2} = [\mathrm{Arctan} y]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ を使いました。式 (4.2) と式 (4.3) が等しいことから、所望の式が示せます。

5　常微分方程式の基本手順

x の関数 $y=f(x)$ と $g(x)$ によって

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}, \cdots) = g(x)$$

という形で記述される等式を常微分方程式と言い、本節では常微分方程式を解くためにいくつかの手法を紹介します。常微分方程式を解くとは、常微分方程式を満たす関数 $y=f(x)$ を具体的に求める行為のことで、本節では特に、明快で有力な変数分離法を中心とした解法を紹介します。

5.1　常微分方程式の分類

上に記した微分方程式は抽象的すぎるので、定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ によって

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + a_n \frac{d^n y}{dx^n} = g(x) \tag{5.1}$$

と表される微分方程式をはじめに考えることにします。これは $y, y', \cdots, y^{(n)}$ それぞれの 1 次の和で書け、線形微分方程式と呼ばれます。例えば $y^2 + \dfrac{dy}{dx} = x$ で記述される方程式などは非線形ということになります。最大階数 $\dfrac{d^n}{dx^n}$ に併せて、n 階線形微分方程式とも言います。一般に n 階方程式を解くと n 個の定数が現れます。

さらに $g(x) =$(定数) のときに斉次(せいじ)線形微分方程式と呼び、$g(x) \neq$(定数) のときに非斉次線型方程式と呼びます。[*13]

また、微分方程式を満たす y の具体的な形 $f(x)$ を微分方程式の解と呼びます。上に記したように、n 階方程式を解くと n 個の未知定数が現れ、この未知定数を用いた解を一般解と呼び、未知定数を指定し終えた解を特殊解と呼びます。

例　次の自由落下の運動方程式を解け。ただし g は既知の定数、$y(0)=h$、$y'(0)=0$ とする。

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -mg$$

これは両辺を t で 2 回積分すれば、

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B$$

という式が得られます。ただし A, B は不定積分によって現れた未知の積分定数とします。このように A, B が自然に現れたものの、具体的な値が指定されていないとき、y を一般解といいます。
問題では $y'(0)=0$、$y(0)=h$ とされているので $A=B=0$ が得られ、これを再び一般解に代入すると

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

という式が得られます。このように、未知の定数を指定した解 y を特殊解というわけです。

[*13] 同次線形微分方程式、非同次線形微分方程式とも呼ばれます。

5.2　変数分離

──戦略 5.1

変数分離

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

の形で表される常微分方程式は左辺に y の式、右辺に x の式を集め

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$$

の形に変形して両辺を積分する。

非常に破壊力のある解法です。

例 1.　次の方程式を前節によって分類して解け。ただし k は定数である。また、$N(0) = 2$ とする。

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

これは1 階斉次線形微分方程式です。左辺に N、右辺に t を集めて $\dfrac{dN}{N} = kdt$ とします。これを両辺積分し、

$$\log N = kt + C \qquad (C\text{:積分定数})$$

として、$N(t) = e^{kt+C}$ と変形します。$N(0) = e^C = 2$ となるので、特殊解が次のように得られます。

$$\underline{N(t) = 2e^{kt}}$$

この形の関数は対数期の微生物増殖、薬やアルコールの吸収速度、考古学のサンプルの年代測定、水の加熱と冷却、速度に比例する粘性抵抗項をもつ運動方程式など、非常に多くの現象を表します。

例 2.　次の方程式を前節によって分類して解け。ただし k, a, b は正の定数であり、$x < a < b$ の範囲で考え、$x(0) = 0$ とせよ。

$$\frac{dx}{dt} = -k(a-x)(b-x)$$

これは1 階非線形微分方程式です。変数分離して $\dfrac{dx}{(x-a)(x-b)} = -kdt$ とし、部分分数分解して積分します。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int \frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)}dx = \int -kdt \\
&\iff \int \frac{1}{x-b}dx - \int \frac{1}{x-a}dx = -(b-a)kt + (b-a)C \\
&\iff \log \tfrac{|x-b|}{|x-a|} = -(b-a)(kt+C) \\
&\iff \frac{x-b}{x-a} = \exp[-(b-a)(kt+C)]
\end{aligned}$$

これにより一般解は $x = \dfrac{b - ae^{-(b-a)(kt+C)}}{1 - e^{-(b-a)(kt+C)}}$ として得られ、$x(0) = 0$ より $c = \frac{1}{a-b}\log(b/a)$ となり、特殊解 $\underline{x(t) = \dfrac{1 - e^{-(b-a)kt}}{1 - \frac{b}{a}e^{-(b-a)kt}}b}$ を得ます。この問題には次のような解き方もあります。

与式右辺を平方完成して、$\alpha = \dfrac{a+b}{2}, \beta = \dfrac{a-b}{2}$ とおくと与式は

$$\frac{dx}{dt} = k\left(\beta^2 - (x-\alpha)^2\right)$$

と書き換えられます。$x-\alpha=\beta\mathrm{tanh}\theta$ とおいて (このとき $dx=\dfrac{\beta}{\cosh^2\theta}d\theta$) さらに

$$\frac{\beta d\theta}{\cosh^2\theta dt}=k\frac{\beta^2}{\cosh^2\theta}$$

と書き換えられ、分母を払って積分し、

$$\int d\theta=\int\beta kdt\Longrightarrow\theta=k\beta t+C\quad(C:\text{積分定数})$$

を得ます。$x=\beta\mathrm{tanh}\theta+a$ に θ を代入して、$t=0$ の条件で定数 C を消せば先ほどと同じ結果を得ることができます。この方程式はロジスティック方程式*14 と呼ばれ、家電製品の普及、速度二乗に比例する抵抗項を持つ運動方程式、化学反応、風邪の流行、ネズミの増殖などの現象を表します。

戦略 5.2

同次形

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形の方程式は、$y=ux$ とおけば変数分離可能な方程式になる。

例 1. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=1+\dfrac{y}{x}$ を解け。
微分方程式以外に条件がないので一般解のみを求めます。$y/x=u$ とおくと、与式は積の微分で

$$u+x\frac{du}{dx}=1+u\qquad\therefore\quad x\frac{du}{dx}=1$$

両辺を変数分離して積分すると $u=\log|x|+C$ となり、$y=x(\log|x|+C)$(C は積分定数) を得ることができます。

例 2. 微分方程式 $xyy'=y^2+4x^2$ を解け。ただし $y(1)=0$ とせよ。
両辺を xy で割ると $y'=\dfrac{y}{x}+4\dfrac{x}{y}$ と書き換えられるので $y/x=u$ とおくと

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2+4}{u}\qquad\therefore\quad udu=4\frac{dx}{x}$$

と書き換えられ、両辺積分して

$$\int udu=\frac{1}{2}u^2\ ,\quad\int\frac{4dx}{x}=4\log|x|+C$$

より $y^2=8x^2\ln x+C$ を得ます。$x=1$ で $y=0$ なので $C=0$ となり、最終的に $y^2=8x^2\ln x$ を得ます。(無理に $y=$ の形にしなくてもよい)

5.3 定数変化法

戦略 5.3

ラグランジュの定数変化法

非斉次 1 階線形方程式

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

の解を得るには、まず斉次形 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$ の一般解 y_s に現れる積分定数を関数 $u(x)$ にすり替えてから y_s を与式に代入し、$u(x)$ を特定する。

*14 ふつうは、正の定数 a,p で $\dfrac{dx}{dt}=p\dfrac{a-x}{a}x$ と記述される方程式。

斉次形の方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ky$ の解が、定数 C で Ce^{kx} と書けることを使い、C を関数 $u(x)$ に置き換えるという手法です。実際に解を導くことができることを示します。まず

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

を変数分離して積分をとると $\log|y| = -\int p(x)dx + C$ が得られ、$\int p(x)dx = P(x)$、$C = u(x)$ とおく[*15] ことで $y = e^{-P+u}$ と書け、これを x で微分した $\dfrac{dy}{dx} = (-p+u')e^{-P+u}$ と、先ほど求めた y を、元の方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

に代入すると $(-p+u')e^{-P+u} + e^{-P+u}p = q$ より、$\dfrac{du}{dx}e^{u(x)}e^{-P(x)} = q(x)$ となり、再び変数分離可能な方程式となり $u(x)$ を求めることができます。

例 1. 方程式 $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = -2x$ を解け。

斉次形 $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$ を変数分離してとくと $y = Ce^{x^2}$ が得られます。($e^Ce^{x^2}$ としても良い。本質的には同じ) ここで $C = u(x)$ とおくと $y' = u'e^{x^2} + 2xue^{x^2}$ となり、y, y' を与式に代入して

$$\frac{du}{dx}e^{x^2} = -2x$$

を得ることができます。再び変数分離してこれを解き、$u(x) = e^{-x^2} + C$ を得て、これを先ほどの $y = u(x)e^{x^2}$ に代入すれば $y(x) = Ce^{x^2} + 1$ を得ることができます。

例 2. 方程式 $\dfrac{dy}{dx} + \alpha y = Ce^{-kx}$ $\quad(\alpha, k, C$ は定数$)$ を解け。

斉次形 $y' + \alpha y = 0$ の解は $y = ce^{-\alpha x}$ $\quad(c$ は積分定数$)$ なので $c = u(x)$ と書き換えて得られる $y' = u'e^{-\alpha x} - \alpha ue^{-\alpha x}$ と y を与式に代入すれば $u'e^{-\alpha x} = Ce^{-kx}$ となり、変数分離して $du = Ce^{(\alpha-k)x}dx$ とし、これを積分して得られる $u = \dfrac{C}{\alpha-k}e^{(\alpha-k)x} + c'$ $\quad(c'$ は積分定数$)$ を $y = u(x)e^{-\alpha x}$ に代入し、

$$y = \frac{C}{\alpha-k}e^{-kx} + c'e^{-\alpha x}$$

5.4 斉次線形 2 階方程式

振動現象でよく現れる方程式です。

定理 5.4

定数 a, b で表される次の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

の解は代数方程式 $t^2 + at + b = 0$ の 2 解 p, q と任意定数 C_1, C_2 で次のように表される。

$$y = C_1e^{px} + C_2e^{qx}$$

変数分離のご利益がここでも効いてきます。これまでの材料で証明してみましょう。任意定数 k を使って方程式を

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a-k)\frac{dy}{dx} + k\frac{dy}{dx} + by = 0$$

[*15] 上では e^C を $u(x)$ とおくように書かれていますが、この変更は本質的なものではありません。もちろん e^C を $u(x)$ とおいてもうまくいきます。

と変形し、$(a-k)=\dfrac{b}{k}=\alpha$ と置いておきます (このとき $k=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ に固定)。すると、

$$\frac{d}{dx}\left\{\underline{\frac{dy}{dx}+\alpha y}\right\}=-k\left\{\underline{\frac{dy}{dx}+\alpha y}\right\}$$

と書き換えられ、下線部を f とおくと

$$\frac{df}{dx}=-kf\ ,\quad \frac{dy}{dx}+\alpha y=f$$

という 2 つの式が得られます。左の式は変数分離で $f=Ce^{-kx}$ (C は定数) として解け、右の方程式に代入すれば前ページの例 2. と全く同じ方程式となり、同様に解いて一般解は定数 c' を使って

$$y=\frac{C}{\alpha-k}e^{-kx}+c'e^{-\alpha x}$$

と書けます。ここで $\dfrac{C}{\alpha-k}=C_1$、$c'=C_2$ とおくと

$$y=C_1e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}x}+C_2e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}x}$$

と書くことができ、$p=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$、$q=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ なので定理が示せます。

例 1.　方程式 $y''+3y'+2=0$ を解け。

$t^2+3t+2=0$ の 2 根は $-1,-2$ なので $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ となります。

例 2.　方程式 $y''+ay'+by=0$ において、$t^2+at+b=0$ の根が虚数 $c\pm i\omega$ ならば、一般解が

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x\quad (C_1,C_2\text{は定数})$$

の形で表されることを示せ。

オイラーの公式 $e^{i\omega x}=\cos\omega x+i\sin\omega x$ を使えば容易に示せます。

$$\begin{aligned}y&=C_1e^{(c+i\omega)x}+C_2e^{(c-i\omega)x}\\&=C_1e^{c}(\cos\omega x+i\sin\omega x)+C_2e^{c}(\cos\omega x-i\sin\omega x)\\&=(C_1+C_2)e^{c}\cos\omega x+i(C_1-C_2)e^{c}\sin\omega x\end{aligned}$$

と変形してそれぞれの係数を改めて C_1,C_2 と置きなおせばよいです。

例 3.　単振動の方程式 $m\dfrac{dx^2}{dt^2}=-m\omega^2x$ を解け。ただし $x(0)=1,x'(0)=0$ とせよ。

例 2. によれば、一般解は $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$ と書くことができ、$x(0)=1,x'(0)=0$ より $C_1=1,C_2=0$ となり、答えは $x(t)=\cos\omega t$ となります。

定理 5.5

$t^2+at+b=0$ が重根 α を持つとき、方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=0$ の一般解は

$$y(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}\qquad (C_1,C_2\text{ は定数})$$

と表される。

先の定理によれば方程式の解は $Ce^{\alpha x}$ とわかりますが、2 階方程式の一般解は 2 つの独立な解を持たなければならないので $y=C(x)e^{\alpha}$ とおいて定数変化法を使います。元の方程式に代入して

$$\begin{aligned}&C''e^{\alpha x}+2\alpha C'e^{\alpha x}+C\alpha^2e^{\alpha x}+aC'e^{\alpha x}+a\alpha Ce^{\alpha x}+bCe^{\alpha x}=0\\&\Longleftrightarrow C''+(2\alpha+a\alpha)C'+(\alpha^2+a\alpha+b)=0\\&\Longleftrightarrow C''=0\ \ (\because\ \alpha=-\tfrac{a}{2})\end{aligned}$$

となり、2 回積分して $C=C_1+C_2x$ と書け、定理を得ます。

5.5 非斉次線形 2 階方程式

強制振動などを表す方程式を扱います。

戦略 5.6

非斉次線形 2 階方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=g(x)$$

を解くには、特殊解 $y_s(x)$ を見つけ、斉次形

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

の一般解 $Y(x)$ を結合させ

$$y=y_s(x)+Y(x)$$

とすればもとの方程式の一般解となる。
特殊解の見つけ方は次のように非斉次項に対応させれば良い。

$$\begin{gathered} e^{ax}\to y_s(x)=Ae^{ax} \\ \sin ax,\cos ax\to y_s(x)=A\sin ax+B\cos ax \\ n\text{ 次多項式}\to y_s(x)=\ n\text{ 次多項式} \\ \text{ただし } A,B \text{ は定数} \end{gathered}$$

この方程式はラプラス変換の項でも扱います。ここでは、上の戦略を頼りに、いくつかの例題を解いてみましょう。

例 1. 方程式 $y''-3y'+2y=e^{3x}$ を解け。
斉次形 $y''-3y'+2y=0$ の一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ となります。また、特殊解は $y_s(x)=Ae^{3x}$ とおけ、これを与式に代入すると $(9A-9A+2A)e^{3x}=e^{3x}$ となり、$A=\dfrac{1}{2}$ が得られ、一般解は

$$y(x)=\left\{C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}\right\}+\frac{1}{2}e^{3x}$$

となります。

例 2. 方程式 $y''-4y=\sin x$ を解け。
斉次形 $y''-4y=0$ の一般解は $Y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ となります。特殊解を $y_s(x)=A\sin x+B\cos x$ とおくと、与式に代入して $(-A\sin x-B\cos x)-4(A\sin x+B\cos x)=\sin x$ で係数比較して $A=-1/5$,$B=0$ を得るので、求めるべき一般解は

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{5}\sin x$$

となります。

5.6 複素数を導入する

力学の問題で、強制振動させるため力 $Fe^{i\omega t}$ を加えるという設定がよく行われます。$Fe^{i\omega t}$ が力そのものを表すのではなく、実部か虚部が表す力を拡張したに過ぎません。三角関数を $e^{i\theta}$ 関数に書き換えることで計算が楽になるのです。力学に限らず、このような置き換えは様々なジャンルで有効です。

例. 方程式 $y'' + 3y' + 2y = \sin t$ を解け。
$y = \Im(z)$ と置き ($\Im(z)$ は z の虚部)、与式を

$$z'' + 3z' + 2z = e^{it}$$

と書き換えます。斉次形の一般解は $Z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$ であり、特殊解を $z_s(t) = Ae^{it}$ と見込んで与式に代入すると $(-A + 3iA + 2A)e^{it} = e^{it}$ と書け、$A = \dfrac{1}{1+3i} = \dfrac{1-3i}{10}$ とわかり、一般解は $z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \dfrac{1-3i}{10} e^{it}$ と書け、両辺の虚部を取って

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{-3i}{10} e^{it}$$

を得ます。

5.7 べき級数法

微分方程式の解をマクローリン展開で予想する方法です。例として、

$$\frac{d^2}{dt^2}x + x = 0$$

を解いてみます。$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ とおき、a_n を求めれば $x(t)$ を求めたことになるので、a_n がどうなるか調べるのが目的です。$x(t)$ のマクローリン展開について微分すれば

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)t^n,\ \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)t^n$$

と書くことができ、与式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_{n+2}(n+1)(n+2) + a_n\} x^n = 0$$

と書き換えられます。$\{\}$ 内は 0 にならなければならないので、$a_{n+2} = \dfrac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n$ すなわち

$$a_n = \frac{-1}{n(n-1)} \cdot \frac{-1}{(n-2)(n-3)} \cdots \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n!} a_1 & (n \text{ 奇数}) \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} a_0 & (n \text{ 偶数}) \end{cases}$$

を得ます。$n = 2m+1, 2m$ で分ければ

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} a_1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} a_0 = a_1 \sin t + a_0 \cos t$$

を得ることができ、前前項の内容に合致することがわかります。

6　ベクトル解析 (微分)

6.1　ベクトルと内積、外積

いくつか復習しておきましょう。

定義 6.1

成分が (A_x, A_y, A_z) であるベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \equiv A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

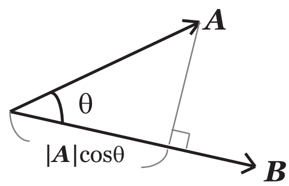
と書き表す。$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ を $\boldsymbol{A}$ の大きさと言う。

$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{j} = (0, 1, 0),\ \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ でこれらを基本ベクトルと呼びます。断りが無い場合は全て直交座標 (xyz 座標) でのものとします。$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とも書きます。

定義と定理 6.2

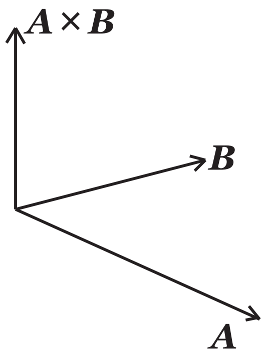
内積と外積

ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$、$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ について、内積 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ および外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を次のように定める。



$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$



ここで θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角である。

また、$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ はベクトルであり、大きさ $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす平行四辺形の面積。向きは $\boldsymbol{A}$ と垂直かつ $\boldsymbol{B}$ と垂直であり、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は順に「フレミングの左手」の中指、人差し指、親指に対応する。

いくつか例題を考えてみましょう。

例 (1)　$\boldsymbol{A} = (0, 2, 1)$、$\boldsymbol{B} = (1, 3, 0)$ において $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよ。

公式どおりに、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} = \underline{(-3, 1, -2)}$$

例 (2)　例 (1) において $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{C}$ のなす角を求めよ。

$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|}$ を使えばよいでしょう。$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} = 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$ により、
$\cos\theta = 0$ となり、$\theta = 90^\circ$ を得ます。

6.2　ナブラ (∇) の導入

座標ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ および、ナブラと呼ばれる次式の (形式的な) ベクトルを導入します。

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$f(x, y, z)$ が x, y, z の関数 (スカラー関数) であり、$f(\boldsymbol{r})$ と書けるとします。また、ベクトル $\boldsymbol{A}$ が、$\boldsymbol{A} = (A_x(\boldsymbol{r}), A_y(\boldsymbol{r}), A_z(\boldsymbol{r}))$ のように関数 (ベクトル関数) の形で書かれているとします。ベクトルには、前節に見るように「スカラー倍」の他に「内積」「外積」の演算が許されるので、ナブラを含んだ演算も、やはり次のように 3 通り考えられます。

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

ここで ∇ が演算子であることに注意しましょう。例えば $\dfrac{d}{dx}g(x)$ と $g(x)\dfrac{d}{dx}$ が全く違うものであるように、∇f と $f\nabla$ は全くの別モノです。(つまり、上の 3 つと $f\nabla$、$\boldsymbol{A} \cdot \nabla$、$\boldsymbol{A} \times \nabla$ を一緒にしてはいけないということ)

6.3　勾配 (grad)

定義 6.3

演算子 grad= ∇ を次のように定義する。

$$\mathrm{grad} f = \nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

これを $f(x, y, z)$ の勾配と呼ぶ。

x の関数 $g(x)$ について、$\dfrac{d}{dx}g(x)$ が $g(x)$ の傾きを表すように、「勾配 (grad)」は 3 変数関数 $f(x, y, z)$ の傾き具合をベクトルで表したものと解釈することができます。特に点 $\boldsymbol{a}$ を指定したときのベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a})$ が $\boldsymbol{a}$ における f の勾配であるといえるでしょう。さらに、このベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a})$ と $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ の内積を取ったものを f の方向微分係数と呼びます。(この説明はすぐ後にまわします)

例 1.　$f(x, y, z) = x + y^2 + \sin z$ とするとき、grad$f$ を求めよ。
定義にしたがって計算すると、

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (1, 2y, \cos z)$$

を得ることができます。

例 2.　例 1. の $f(x, y, z)$ について、$\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$ における勾配を求めよ。
$\mathrm{grad} f = (1, 2y, \cos z)$ に $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ を代入すると、$(1, 2, 1)$ を得ることができます。

$f(\boldsymbol{r})$ に対して単位定ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ が与えられたとき、微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ を次のように定義します。

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial n} \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{r} + h\boldsymbol{n}) - f(\boldsymbol{r})}{h}$$

すると $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ は $\boldsymbol{n}$ に沿った f の変化率であると見ることができ、これを方向微分係数と呼びます。これが ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ として) $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \cdot (\nabla f)$ に等しくなることを示しましょう。多変数 (3 変数) のテイラー展開を利用して、$f(x + hn_x, y + hn_y, z + hn_z)$ は

$$\begin{aligned}
f(x + hn_x, y + hn_y, z + hn_z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(ha_x \frac{\partial}{\partial x} + hn_y \frac{\partial}{\partial y} + hn_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^k f(x, y, z) \\
&= f + hn_x \frac{\partial f}{\partial x} + hn_y \frac{\partial f}{\partial y} + hn_z \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{k=2}^{\infty} (h\boldsymbol{a} \cdot \nabla)^k f \\
&= f(\boldsymbol{r}) + h(\boldsymbol{n} \cdot \nabla f) + h^2 F(\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

と書き換えることができます。最後に使った $h^2 F(\boldsymbol{r})$ は最後の項をまとめたもので、$h^2 F(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (h\boldsymbol{n} \cdot \nabla)^k f(\boldsymbol{r})$ です。これにより、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial n} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{r} + h\boldsymbol{n}) - f(\boldsymbol{r})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \Big((\boldsymbol{n} \cdot \nabla f) + hF(\boldsymbol{r}) \Big) \\
&= \boldsymbol{n} \cdot \nabla f
\end{aligned}$$

を得ることができます。

例 3.　例 2. における方向微分係数を求めよ。

$\boldsymbol{a}$ を単位ベクトルにします。

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

すでに勾配は $\nabla f = (1, 2, 1)$ として求めているので、方向微分係数は

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

となります。

ちなみに、grad$= \nabla$ の演算について、以下が成立します。(ϕ, ψ は任意関数)

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi + \psi) &= \nabla\phi + \nabla\psi \\
\nabla(\phi\psi) &= \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi
\end{aligned}$$

6.4　発散 (div)

定義 6.4

演算子 div$= \nabla\cdot$ を次のように定義する。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

これを $\boldsymbol{A}$ の発散と呼ぶ。

この定義式からアイディアを膨らますのではなく、次のような物理的要請で div が必要になることを見ましょう。

質量保存の法則を考えます。ある地点 A から B まで流れる (移動する) 密度 ρ で体積 $dV = dxdydz$(微小体積) の物体について、

$$(-1) \times (\text{単位時間に A から}\underset{\sim\sim\sim\sim}{\text{流れ出た}}\text{質量}) = (\text{B に}\underset{\sim\sim\sim\sim}{\text{流れ出てくる}}\text{質量})$$

という主張から、$\boldsymbol{v}$ を物体の流速 ($\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}$) として、

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho dV = \rho\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

という式を得ます。[*16] この方程式を噛み砕いてさらにきれいにするためには、dV や $d\boldsymbol{S}$ が邪魔になります。ここで微小面積 $d\boldsymbol{S} = (dydz, dzdx, dxdy)$ を使って、次のように工夫します。

$$\begin{aligned}
\rho\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} &= \rho v_x dydz + \rho v_y dzdx + \rho v_z dxdy \qquad (6.1)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\rho v_x dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y dydzdx + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z dzdxdy\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\rho v_x dV + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y dV + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z dV\\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{v}\rho dV \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

最後の行で div を導入していることがわかるでしょうか？　これにより、質量保存則は

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho dV = \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v})dV$$

と書くことができ、次の方程式を得ることができます。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

この方程式は一般に連続の式と呼ばれます。今回の導出は流体力学に拠りましたが、電磁気学や量子力学でもこの形の方程式 (保存則) が現れ、連続の式は物理的に保存法則を表し、「物体が突然何もないところから現れたり、逆に消えたりすることはない」という主張を示しています。

また、任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ およびスカラー場 ϕ について、次が成り立ちます。

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B}\\
\nabla \cdot (\phi\boldsymbol{A}) &= (\nabla\phi) \cdot \boldsymbol{A} + \phi\nabla \cdot \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

div と grad の形式的な積を使って、次の演算子を定義します。

定義 6.5

演算子ラプラシアン $\triangle$ を次で定義する。

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

[*16] 一次元で考えて見ましょう。断面積 S の長方形の中を速度 v で移動する箱について、通過時間を Δt として箱の体積 $|\Delta V|$ は $v\Delta tS$ として得られます。ΔV が損失を表しているので符号に気をつけて、

$$-\frac{\Delta V}{\Delta t} = vS$$

とし、三次元に拡張すれば質量保存則が得られます。

特にラプラス方程式

$$\triangle f(x,y,z)=0$$

を満たす $f(x,y,z)$ を探す問題は有名かつ重要で、ディリクレ問題と呼ばれています。また、そのような f を調和関数と呼びます。

6.5 回転 (rot,curl)

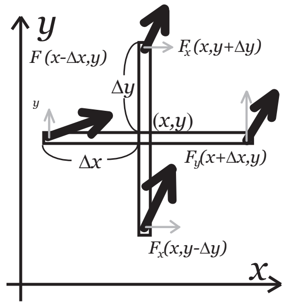
定義 6.6

演算子 rot= $\nabla\times$ を次のように定義する。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}\equiv\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

これを $\boldsymbol{A}$ の回転と呼ぶ。

これは力学を例にとって考えます。



図のように横長 $2\Delta x$、縦長 $2\Delta y$ の長方形を重ねて作った風車を風 (速度場) の中において考えてみましょう。風車の中心 (x,y) は動かないとします。黒太矢印で表された風の速度ベクトルにより、風車のそれぞれの場所が力 $\boldsymbol{F}$ を受け、$\boldsymbol{F}$ を座標に依存するベクトルと考えます。

風車の各地点 $(x-\Delta x,y)$、$(x,y+\Delta y)$、$(x+\Delta x,y)$、$(x,y-\Delta y)$ が受ける力の成分を灰色の矢印で示しました。灰色矢印は風車を回す力を表しており、それぞれの地点において受ける力を総合すると、時計回りに風車を回す力のモーメント N は

$$\begin{aligned}N&=F_y(x-\Delta x,y)\Delta x+F_x(x,y+\Delta y)\Delta y-F_y(x+\Delta x,y)\Delta x-F_x(x,y-\Delta y)\Delta y\\&=\frac{F_y(x+\Delta x,y)-F_y(x-\Delta x,y)}{\Delta x}\Delta x\Delta y-\frac{F_x(x,y+\Delta y)-F_x(x,y-\Delta y)}{\Delta y}\Delta x\Delta y\\&\simeq 2\left(\frac{\partial F_y}{\partial y}-\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y\end{aligned}$$

と書けます。[*17] これは 2 次元の結果なので得られるのはスカラーですが、3 次元に拡張すると、rot$\boldsymbol{F}$ が得られます。[*18] また、任意の $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ および ϕ について、次が成り立ちます。

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}\\\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})&=(\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}+\phi(\nabla\times\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

例. 次についてそれぞれ求めよ。ただし $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ とし、$\boldsymbol{\omega}$ を定ベクトルとする。

(1)∇r^n (2)$\nabla\cdot(r^n\boldsymbol{r})$ (3)$\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$

(1) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を使い、x 座標成分 $[\nabla r^n]_x$ のみ考えてみると、

$$[\nabla r^n]_x=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}=nxr^{n-2}$$

が得られ、他の成分も同様に考えると $\underline{nr^{n-2}\boldsymbol{r}}$ が得られます。

[*17] 厳密に言うとこのようにはならず、各点での力を積分してやる必要があります。今回は積分を取ることと Δx(または Δy) を掛けた結果が等しくなることを前提にしています。

[*18] 設定上、式の頭につく 2 が邪魔ですが

(2)　x で偏微分した結果を使います。

$$\frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} = r^n + x\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(2x) = r^n + nx^2r^{n-2}$$

これを各成分で足し合わせて $3r^n + nr^{n-2}(x^2+y^2+z^2) = \underline{(n+3)r^n}$ が得られます。

(3)　$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ として、$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (\omega_y z - \omega_z y, \omega_z x - \omega_x z, \omega_x y - \omega_y x)$ であるから、

$$[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]_x = \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) = 2\omega_x$$

となり、他の成分も同様に考えると$\underline{2\boldsymbol{\omega}}$を得ることができます。

6.6　公式集

これまでに扱った項目について、いくつかの公式をおいておきます。

公式 6.7

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \\
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \\
\nabla\times\nabla\phi &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= 0 \\
\nabla\cdot\nabla\phi &= \triangle\boldsymbol{A} \\
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \\
\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) &= \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} \\
\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) &= \phi\nabla\times\boldsymbol{A} + (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \\
\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

6.7　テンソルを用いたベクトル解析*

テンソル[*19] を用いると前小節の公式が比較的簡単に確かめられます。[*20] テンソル表記にはアインシュタインの縮約というルール[*21] が付きまとうのですが、ここでは $\sum_i$ のように書いて縮約しません。縮約に慣れた人は波線部を省略して読めばよいでしょう。

また、変数の各成分をインデックスで表し、ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を $x_i = (x_1, x_2, x_3)$ と書きます。例えば、$\boldsymbol{x}^2$ をテンソル表記で書くと $\sum_i x_i^2$ となります（i は 1 から 3 まで）。

次にレヴィ・チビタの記号[*22] ε_{ijk} を用意しておきます。

[*19] 一言でテンソルといってもいろいろ種類があり、ここではベクトルをテンソル化したものを扱います。テンソルは扱う文脈（舞台）によって使い方が変わるので注意しましょう。

[*20] もっとも直截的なのはストレートに成分計算することですが……。

[*21] 和を取るのに $\sum$ を省略するという暗黙の了解。

[*22] 別名エディントンのイプシロン。

定義 6.8

レヴィ・チビタの記号は次のように定義される。

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123), (231), (312) \text{ のどれか（cyclic）} \\ -1 & (ijk) = (132), (213), (321) \text{ のどれか (anti-cyclic)} \\ 0 & \text{otherwise（その他）} \end{cases} \tag{6.3}$$

これによるとベクトルの外積は次のように表されます。[23]

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_i = \underset{\sim\sim\sim}{\textstyle\sum_j \sum_k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{6.4}$$

左辺の $[\ ]_i$ はカッコ内の i 成分を表します。
これらの約束によりベクトルの計算が楽になることがあります。

[例]　定ベクトル A に対して $\nabla \times \boldsymbol{A} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ となることを示せ。($\vec{k}$ は $\boldsymbol{k}$ と同じ)
レヴィ・チビタの記号を用いて次のように書けることがわかります。ただし $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を ∂_i と書きます。

$$[\nabla \times \boldsymbol{A} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}]_i = \underset{\sim\sim\sim}{\textstyle\sum_j \sum_k} \partial_j A_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \underset{\sim\sim\sim}{\textstyle\sum_j \sum_k} i k_j A_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}]_i$$

ここでは $\partial_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \partial_j e^{ik_1x_1 + ik_2x_2 + ik_3x_3} = ik_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ を用いました。

定理 6.9

次が成立。$\underset{\sim\sim\sim}{\sum_{jklm}} \Big(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\Big) = \underset{\sim\sim\sim}{\sum_{jklm}} \Big(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\Big)$ ただし $\underset{\sim\sim\sim}{\sum_{kjlm}} = \underset{\sim\sim\sim}{\sum_j \sum_k \sum_l \sum_m}$

ここで δ_{ij} はクロネッカのデルタ[24] です。証明は省略します。[25]

[例]　$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を示せ。
$\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk}$ に注意して[26] $D_k = [\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}]_k$ とおくことで、$D_k = \underset{\sim\sim}{\sum_{lm}} \varepsilon_{klm} B_l C_m = \underset{\sim\sim}{\sum_{lm}} \varepsilon_{lmk} B_l C_m$
と書けます。これにより

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]_i &= \underset{\sim\sim}{\textstyle\sum_{jk}} \varepsilon_{ijk} A_j D_k \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{\textstyle\sum_{jklm}} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} A_j B_l C_m \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{\textstyle\sum_{jklm}} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \quad (\because \text{定理 } 6.7) \\ &= \underset{\sim\sim}{\textstyle\sum_{jm}} \Big(A_m B_i C_m - A_j B_j C_i\Big) \\ &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} [\boldsymbol{B}]_i - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} [\boldsymbol{C}]_i \end{aligned} \tag{6.5}$$

となり、証明が終わります。■

テンソルはベクトル[27]を圧縮した表現であり、テンソル演算になれるとベクトル解析の公式が簡単に証明できたり、作れたりします。

---

[23] 略証として。$i = 1$ のときは、$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_1 = A_2B_3 - B_2A_3$ となり、$i = 2, 3$ で計算すると、確かに外積を表していることがわかります。

[24] $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

[25] 以下では mod3 として、$\begin{pmatrix} i \equiv k+1, j \equiv k+2 \\ l \equiv k+1, m \equiv k+2 \end{pmatrix}$ のとき、$\begin{pmatrix} i \equiv k+1, j \equiv k+2 \\ l \equiv k+2, m \equiv k+1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} i \equiv k+2, j \equiv k+1 \\ l \equiv k+1, m \equiv k+2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} i \equiv k+2, j \equiv k+1 \\ l \equiv k+2, m \equiv k+1 \end{pmatrix}$、その他のとき、の 5 つに分類して計算すれば証明できます。

[26] $\varepsilon_{312} = \varepsilon_{123}$ と一緒！！

[27] および複数のインデックスによる"何か"

7 ベクトル解析 (積分)

7.1 曲線。その長さとフレネ・セレの公式

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で表される曲線を、短い線分の集まりと見なして足し合わせ、近似的な曲線の長さを考えます。そのために、曲線を微小に切った長さ Δs の線分は

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

と書くことができます。Δs が非常に小さいと考えて、これを足し合わせ (積分し) ます。

定理 7.1

ベクトル方程式 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で表される曲線について、$t = a$ から $t = b$ での区間で切られる長さ s は次のように表される。

$$\begin{aligned} s &= \int_{t=a}^{b} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt \end{aligned}$$

[*28] ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される曲線について、その接線方向、法線方向のベクトルを考えます。少し準備しておきましょう。b を変数 t に置き換え、

$$s(t) = \int_a^t \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$

を両辺 t で微分すると、

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$$

が得られます。ここで、$\boldsymbol{r}$ を、「s をパラメータとする曲線」と考え、[*29] 次のようなベクトル $\boldsymbol{t}$ を考えます。

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

$\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ が接線方向のベクトルとなることに由来して、$\boldsymbol{t}$ を単位接ベクトルと呼びます。[*30]

次に $\boldsymbol{r}$ の法線方向のベクトルを考えます。$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t} = 1$ ですから、両辺 s で微分して

$$\boldsymbol{t} \cdot \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = 0$$

[*28] ここで特に $z = 0$ に固定して、$y = f(x)$ と書けば、2 次元の曲線長が次のように求められます。

$$s = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'\}^2} dx$$

[*29] $s = s(t)$ であることから、$t = s^{-1}(s)$ として t から s に変数を切り替えることができます。

[*30] 準備していたことを使えば $\boldsymbol{t}$ が単位ベクトルであることを示すことができます。

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| / \left|\frac{ds}{dt}\right| = 1$$

を得ることができます。つまり $\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ は $\boldsymbol{t}$ に垂直となるので、$\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ が求めるべき法線方向のベクトルであることがわかります。ここで $\boldsymbol{t}$ にあわせて長さを 1 に調節して、次のようなベクトル $\boldsymbol{n}$ を定めます。

$$\boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\Bigg/\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| \equiv \frac{1}{\kappa}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$$

これまでの議論から $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t} = 0$ かつ $|\boldsymbol{n}| = 1$ であることがわかり、この $\boldsymbol{n}$ を単位主法線ベクトルと呼びます。

ここで

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right|$$

の関係を満たす κ について考えましょう。右図の $\boldsymbol{t}$ および $\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}$ のなす角を $\Delta\theta$ として、この 2 ベクトルのなす三角形について考えます。それぞれの矢印先端同士の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ は $|\Delta\boldsymbol{t}|$ であり、AB の弧長は $\widehat{\mathrm{AB}} = |\boldsymbol{t}|\Delta\theta = \Delta\theta$ と書け、$|\Delta t|$ が十分小さいと考えると、

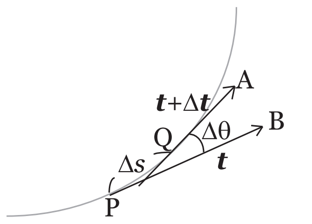


図 3　曲率の意味は……

$$\widehat{\mathrm{AB}} \simeq \overline{AB}$$

と見なすことができ、$\Delta\theta \simeq |\Delta t|$ と考えることができます。両辺を Δs で割り、$\Delta s \to 0$ とすれば

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \frac{d\theta}{ds}$$

と書けます。κ は曲線の「曲がり具合」を表すパラメータであり、曲率と呼ばれます。

さらに踏み込んで、今度は

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{b}$ について考えます。$\boldsymbol{b}$ は長さが 1 であり、単位従法線ベクトルと呼びます。$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 1$ の両辺 (s についての) 微分および $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t} = 0$ により、$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{n}$ に平行であることがわかり、係数 $-\tau$ を用いて

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

と書くことができます。τ は捩率(その名の通り曲線の「捩れ」を表すパラメータ) と呼ばれています。$\boldsymbol{b}$ の定義式から、$\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ は右手系をなす (全て直交している) ため、

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}) = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t} + \kappa\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n} = \tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}$$

と書くことができます。これで、$\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$(この組みを動標構と呼びます) およびそれらの時間微分を関係付ける次の定理が得られます。

定理 7.2

フレネ・セレの公式

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

が成立する。

7.2　線積分

7.2.1　具体的に求積するために

ここまで (リーマン) 積分の区間がx 軸上の 2 点によって決まるものを扱ってきました。これを拡張して、ある曲線 C の上を経路にとって、C 上の区間で積分する、いわゆる線積分の概念を本小節で扱います。線積分は

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_C f(x,y,z)\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt$$

または

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \{\, A_x dx + A_y dy + A_z dz \,\}$$

という形で書かれます。上の式をスカラー場の線積分、下の式をベクトル場の線積分といいます。特にベクトル場の線積分は、力学の素養があれば、力 $\boldsymbol{F}$ がなす仕事が $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ の形で書かれることと照らし合わせればイメージが湧きやすいのではないでしょうか。

とにかく、こういった線積分を考えるためには、次のようにする必要があります。

方法 1.　あるパラメータ t を使って、$x = x(t), y = y(t), z = (t)$ のように表し、置換積分の要領で $dx = \dfrac{dx}{dt}dt, dy = \dfrac{dy}{dt}dt, dz = \dfrac{dz}{dt}dt$ という形に書き直し、

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \{\, A_x\frac{dx}{dt}dt + A_y\frac{dy}{dt}dt + A_z\frac{dz}{dt}dt \,\} = \int_{t=a}^{b} \{\, A_x\tfrac{dx}{dt} + A_y\tfrac{dy}{dt} + A_z\tfrac{dz}{dt} \,\}dt$$

としてこれまで扱ってきた積分 (あるいはスカラー場の線積分) に帰着させる。

例.　原点 O と点 A(8, 12, 4) を通る線分を O から A に向かって移動する経路 C について、線積分

$$\int_C (xdx + zdy + y^2dz)$$

を求めよ。

$(x,y,z) = (2t, 3t, t)\quad (t|0 \to 4)$ とおけば変数を変換できるので (O から A の向きに注意！)、$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = (2,3,1)$ を用いて次を得ます。

$$\begin{aligned}\int_C (xdx + zdy + y^2dz) &= \int_0^4 \big((2t)(2dt) + t(3dt) + (9t^2)dt\big)\\ &= \int_0^4 (4t + 3t + 9t^2)dt\\ &= \int_0^4 (9t^2 + 7t)dt\\ &= \left[3t^3 + \frac{7}{2}t^2\right]_0^4\\ &= 192 + 56 = \underline{248}\end{aligned}$$

方法 2.　特に変数が 2 つのとき、

$$\int_C (A_x dx + A_y dy)$$

を考えるために、経路 C を $y = f(x)$ の形に書き、

$$\int_C (A_x dx + A_y dy) = \int_C (A'_x dx + A'_y \tfrac{df}{dx}(x)dx)$$

の形にして従来の積分に帰結させる。(A' は A を x の関数に書き改めたもの)

例　次の線積分を求めよ。

$$\int_C \cos(\pi\sqrt{y})dx - \sin(\pi x)dy$$

ただし C は $y = x^2$ 上を、$(0,0)$ から $(2,4)$ まで動く経路とする。

$\dfrac{dy}{dx} = 2x$ であるから、

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_C \cos(\pi|x|)dx - \sin(\pi x)2dx \\
&= \int_0^2 [\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x)]dx \\
&= \Big[\sin(\pi x) + 2\cos(\pi x)\Big]_0^2 \\
&= 2 - (2) = \underline{\ 0\ }
\end{aligned}
$$

を得ます。

7.2.2　向き付けと閉積分

向き付けられた経路 C に対して、逆向きにしたものを $-C$ と書くことにします。すると、

$$\int_C = -\int_{-C}$$

という性質が成り立つことがわかります。これは 1 変数積分で $\int_a^b = -\int_b^a$ が成立することとまったく同じです。また、経路 C が単一の閉曲線なら、特別に

$$\int_C = \oint_C$$

と書くことにします。これを閉積分、あるいは周回積分と呼びます。

7.2.3　グリーンの定理

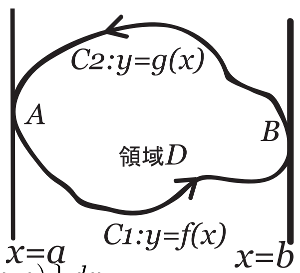
定理 7.3

グリーンの定理

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ が C(反時計回り) を境界とする閉領域 D について、

$$\int_C \{\, P(x,y)dx + Q(x,y)dy \,\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

が成立する。



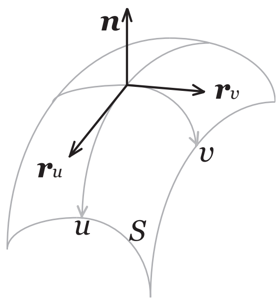
簡単なケースで証明してみましょう。図のように C を $x = a$ の点 A と $x = b$ の点 B にわけ、ここで A から B にいたる $C_1 : y = f(x)$ と、B から A にいたる $C_2 : y = g(x)$ に分解します。すると、

$$
\begin{aligned}
\int_C P(x,y)dx &= \int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx \\
&= \int_a^b P(x,f(x))dx - \int_b^a P(x,g(x))dx = \int_a^b \{\, P(x,f) - P(x,g) \,\} dx \\
&= -\int_a^b dx \int_f^g \frac{\partial P}{\partial y}dy = \underline{-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.}
\end{aligned}
$$

同様にして $\int_C Qdy$ を考え、両辺を足してやればグリーンの定理を得ることができます。

7.3　曲面と面積分

$f(x,y,z)=0$ で表される曲面の面積素 dS を用いて、2 重積分を次のように拡張します。



$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

ここで $d\boldsymbol{S}$ は「曲面の微小面積であり、曲面と直交するベクトル」とします。曲面に垂直な単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用意すれば $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}dS$ と書けることになるでしょう。

$f(x,y,z)=0$ で固定された曲面を表すベクトル表示 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ は、実質 2 つの変数 u,v で書くことができ、図のように (局所的に)uv 座標を貼り付けることにします。$\boldsymbol{r}_u=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}du,\ \boldsymbol{r}_v=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}dv$ は図のように曲面と直交するベクトルとなり、次のように書くことができます。

定理 7.4

曲面 S 上の $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ を u,v の組みで表すとき、$d\boldsymbol{S}$ は次で与えられる。

$$d\boldsymbol{S}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}dudv$$

しかし、$\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v,\ d\boldsymbol{S}$ が必ずしも右手系をなす必要はないので、

$$d\boldsymbol{S}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}dudv=-\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}dudv$$

と考えても差し支えないという問題が発生し、次のように考えてこの問題を回避します。

定義 7.5

大きさが微小面積であり、向きが曲面に垂直なベクトル $d\boldsymbol{S}=(dydz,dzdx,dxdy)$ について、符号を次のように定める。

$$dydz=-dzdy,\ dzdx=-dxdz,\ dxdy=-dydx \tag{7.1}$$

7.4　積分定理

厳密ではありませんが、それぞれ簡潔に示していきます。

定理 7.6

ガウスの積分定理

ある閉曲面 S に囲まれた領域 V 内での、任意のスカラー関数 $\phi(x,y,z)$ について、次の関係が成立する。

$$\iiint_V \nabla\phi dV = \iint_S \phi d\boldsymbol{S}$$

ϕ を x で偏微分し、領域 V で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial\phi}{\partial x}dV &= \int_V \frac{\partial\phi}{\partial x}dxdydz \\ &= \int_S \phi dydz \\ &= \int_S \phi dS_x\end{aligned}$$

同様に y,z 成分で考えると、ガウスの積分定理が得られます。

例　アルキメデスの原理 (; 密度 ρ の流体中に沈めた物体には、物体が押しのけた体積 V だけの流体の重力に等しい上向きの力が働く。この力を浮力といい ρVg で表される) を証明せよ。

各点での圧力を $p = p_0 + \rho gz$ とします。ただし z 軸は重力方向です。これに対してガウスの積分定理から (圧力)·(面積) の和が

$$-\iint_S pd\boldsymbol{S} = -\iiint_V \nabla pdV = -\iiint_V \nabla(p_0+\rho gz)dV = (0,0,-\rho Vg)$$

が得られます。ただし $\iiint_V dV = V$ としています。

定理 7.7

ガウスの発散定理

閉曲面 S 内の領域 V と任意のベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ について、次の関係が成立する。

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

ガウスの積分定理の導出過程において、$\phi = A_x$ とおけば

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}A_x dV = \int_S A_x dS_x$$

と書け、同様に $\phi = A_y, A_z$ とおいて足し合わせると、$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ についてガウスの発散定理が成立することがわかります。

例 1.　xyz 空間内に置かれた表面 S で覆われた体積 V の立体がある。どんな形に対しても[*31] $\iint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}$ は一定の値になることを示せ。

ガウスの発散定理より

$$\iint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{r}dV = 3\iiint_V dV = 3V$$

となります。

[*31] 球をゆがめたような単純な立体とします。自分を突き抜けるクラインの壺などは除外します。

例 2.　ガウスの法則

$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon} \qquad \text{ただし } q = \iiint_V \rho dV$$

がわかっているものとして、マクスウェルの方程式 (微分系) のひとつ

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

が成立することを示せ。

与式およびガウスの発散定理より

$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon}dV\ ,\quad \iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV$$

となるので、比較して所望の式が得られます。

定理 7.8

ストークスの定理
閉曲線 C 内の領域 S と任意のベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ について、次の関係が成立する。ただし C と $d\boldsymbol{S}$ は右ねじの法則の関係にあるとする。

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

グリーンの定理の拡張版なので、式 (10.2) に気をつけ、同様に説明しましょう。グリーンの定理の証明に使った図を用いて $x=a, x=b$ で曲線を $C_1:(x,y_1(x),z_2(x)), C_2(x,y_2(x),z_2(x))$ として、

$$\begin{aligned}
\oint_C A_x dx &= \oint_C A_x(x,y(x),z(x)) = \int_{C_1} A_x(x,y_1(x),z_1(x))dx + \int_{C_2} A_x(x,y_2(x),z_2(x))dx \\
&= \int_a^b A_x(x,y_1,z_1)dx + \int_b^a A_x(x,y_2,z_2)dx \\
&= -\int_a^b \{\, A_x(x,y_2,z_2) - A_x(x,y_1,z_1) + A_x(x,y_2,z_1) - A_x(x,y_2,z_1)\,\}\, dx \\
&= -\int_a^b dx \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{\partial A_x}{\partial z} - \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{\partial A_x}{\partial y} \\
&= \int_S \frac{\partial A_x}{\partial z} dzdx - \int_S \frac{\partial A_x}{\partial y} dxdy \qquad \text{(式 (10.2) に注意)}
\end{aligned}$$

を得て、同様に $A_y dy, A_z dz$ について積分して足し合わせればストークスの定理を得ることができます。

8 複素関数論

複素数を変数とする複素関数論[*32] について扱います。

8.1 複素数と複素関数ことはじめ

定義 8.1

$i=\sqrt{-1}$ を虚数単位とし、実数 a, b を用いて $c=a+bi$ を複素数 (あるいは虚数) と呼ぶ。
逆に a, b を c で表すときに

$$a=\Re(c),\ b=\Im(c)$$

と書く。
$\Re(c),\ \Im(c)$ をそれぞれ c の実部、および虚部と呼び、特に $\Re(c)=0$ で表される複素数 bi を純虚数と呼ぶ。また、$\bar{c}=a-bi$ を c の共役複素数と呼ぶ。ここで $|c|$ を

$$|c|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c\cdot\bar{c}}$$

で定義し、複素数 c の絶対値と呼ぶ。

例 $z=x+yi$ とおくとき、$x,\ y$ を $z,\ \bar{z}$ で表せ。
$\bar{z}=x-yi$ により、x, y は次のように書けます。

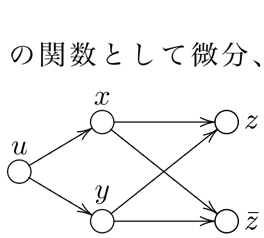
$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

複素数を関数に拡張して 2 変数関数

$$w(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$$

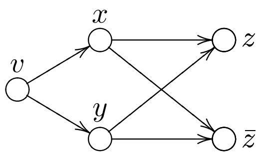
を考えましょう。ただし $u(x,y),\ v(x,y)$ は実関数とします。x, y を一つの変数 $z=x+yi$ にまとめ、$w(x,y)$ を z の関数 $f(z)$ として書けると仮定しましょう。そのためには、パラメータ変数 (x,y) の組を複素パラメータ $(z,\bar{z})$ に書き換え、

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \qquad (f \text{ が } \bar{z} \text{ の関数ではない})$$

が成立する必要があります。この仮定のもとで、$f(z)$ を z の関数として微分、積分することを目指すのです。偏微分の項で扱ったフローチャート 

および、

[*32] 略称として、単に関数論、あるいは解析関数と呼ばれたりもします。



にしたがって、$\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}},\ \dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}}$ を求めます。

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{2i}$$
$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{2i}$$

ただし先の例題で得た結果を使いました。ここで、はじめの仮定に従って

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)i = 0}$$

と書くことができ、下線部の実部と虚部を比較して次の定理が得られます。*33

定理 8.2

Cauchy-Riemann の方程式

$f(z) = u + vi$ が z で正則である必要十分条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成立することである。また、このことは

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Longleftrightarrow (f \text{ が } \bar{z} \text{ を含まない})$$

が成立することと同値である。

$f(z)$ が $z = z_0$ およびその近傍で微分可能であるとき、$f(z)$ は正則であるといいます。このステートメントを逆に利用すれば、2 変数の複素数値関数 $u(x,y) + iv(x,y)$ について、変数を x, y から z に統合できるかどうかの判定ができるようになります。

例 1. 次の関数 $F(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ は正則か。
F を実部と虚部にわけ、$u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$ とおくと、$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$、$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$、$\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$、$\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ と書くことができ、コーシー・リーマンの方程式を満たします。つまり $F(x,y)$ は正則であることがわかります。

例 2. 関数 $f(z,\bar{z}) = z^3 - 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 - \bar{z}^3$ の正則領域を求めよ。
$z = x + yi$ とおけば $f = (z - \bar{z})^3 = 8y^3 i$ と書け、コーシー・リーマンの方程式を満たす y の範囲を考えます。実部と虚部にわけると $u = 0,\ v = 8y^3$ と書けるので、$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$、$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$、$\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$、$\dfrac{\partial v}{\partial y} = 16y^2$ となり、コーシー・リーマンの方程式を満たすためには $y = 0$ でなければならないことがわかります。ここで変数 $z = x + yi$ が実軸上にあれば f が z で微分可能となることがわかります。しかし、これでは「実軸上の近傍で微分可能」という条件を満たすことができず、結局 f は正則でないことがわかります。ここで用いた「z が実軸上に存在」という表現については、すぐ後で説明します。

(別解) f が $\bar{z}$ を含むので、上に示した定理の後半部より f は正則ではありません。$\Longleftrightarrow$ 正則領域は「存在しません」。

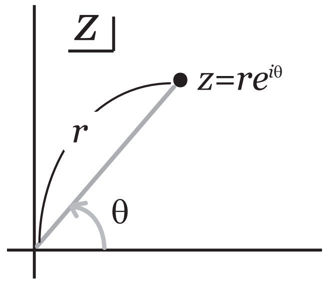
*33 普通は x, y の片方ずつを固定して微分を考えることで証明しますが、ここでは省略。

8.2　複素平面

さて、変数を (x, y) から z に書き換えるにあたって、次のような幾何的性質を考えておく必要があります。

定義 8.3

xy 直交座標上の点 (x, y) を $z = x + yi$ に対応させる。この対応付けを右図のように書き、このような座標平面を複素平面と呼ぶ。
(ふつう複素平面には軸の名前を書かず、「z 平面」というラベルをつける)
また、図のように $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を対応させ、r は $\sqrt{x^2 + y^2}$、すなわち $|z|$ に等しく、θ を z の偏角といい、$\theta =\mathrm{Arg}z$ として表す。



複素数は数であると同時に座標を指定するということが重要なのです。例えば実軸上の点は (xy 平面上での)x 軸上の点に対応することになります。

図では $z = re^{i\theta}$ と書かれていますが、これは次の定理によるものです。

定理 8.4

Euler の公式
任意の実数 θ に対して (形式的に)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

と書くことができる。

すでに 1 変数関数の微分の項で触れていますが、これは三角関数のマクローリン展開

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n},\ \ \sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$$

を用いて

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(i)^{2n}}{(2n)!}\theta^{2n} + i\frac{(i)^{2n}}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}$$

と書けることに由来します。

8.3　複素関数

8.3.1　1 価関数、指数関数と三角関数

これ以降、複素数の関数は $z = x + yi$ のみを変数に持つ $f(z)$ について考えていきましょう。三角関数を拡張するために、まず複素指数関数を定義する必要があります。

定義 8.5

次の関数を定義する。

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

単に e^x のマクローリン展開において $x \to z$ としただけですが、これが指数関数の性質[*34] をきちんと満たすかどうかチェックする必要があります (読者に任せます)。結果的にこの拡張は正しく、$\exp(z) = e^z$ と書くことが許されます。これとオイラーの公式を用いて、三角関数を次のように書くことができます。

定義 8.6

複素三角関数を次のように定義する。

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

逆に、指数関数は三角関数で表されるので、実数のときとは違って指数関数 e^z は周期 $2\pi i$ の周期関数となります。[*35]

右図は関数 $w = f(z) = \sin z$ を表すものです。複素関数は「z 平面から w 平面に点を移す写像」と言えることがわかります。

これらの複素関数は素朴な「関数」の定義「z が定まれば $f(z)$ の値がただひとつ定まる」を当然満たしている (**1** 価関数である) のですが、逆関数を取るとこの定義を満たさなくなってしまいます。

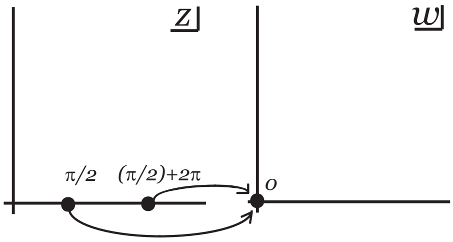


図 4　$w = f(z) = \sin z$ の例

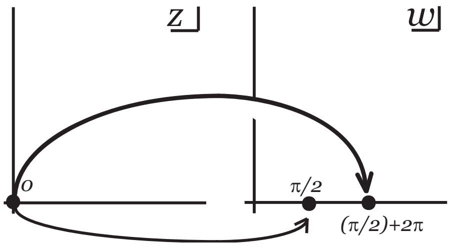


図 5　$f(z) = \sin^{-1}(z)$ の例

8.3.2　多価関数、逆三角関数

「z を指定したとき、$f(z)$ の値が複数指定されてしまう」という性質を持つ $f(z)$ を多価関数と呼びます。多価関数は関数の定義を満たさないので、そのままでは機能しません。うまく「z を指定したとき $f(z)$ がただひとつ定まる」ように、右図のように不要な写像 (矢印) を消していかなければなりません。さながら、この行為を「(枝を) 切る (**cut** する)」といいます。いいかえれば、多価関数を 1 価関数同様に機能するために、値域 w の範囲を制限してやることが

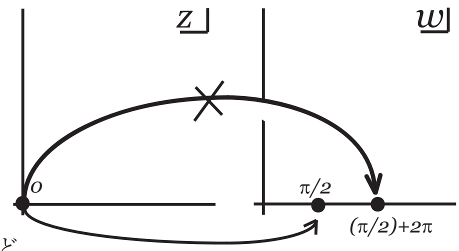


図 6　枝を切る

[*34] マクローリン展開の収束、正則性、指数の和が指数関数の積になるかなど。

[*35] 一応簡単に証明を。

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

により、

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+yi+2\pi i} = e^x \cos(y + 2\pi i) + ie^x \sin(y + 2\pi i) = e^z$$

「(枝を) 切る」ことであると言えます。[*36]

具体例で考えてみましょう。$\sin z$ は周期 2π の周期関数なので、$w = f(z) = \sin^{-1}(z)$ $(= \arcsin(z))$ とおくと、$z = 1$ において

$$f(1) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + 4\pi,\ \cdots$$

となり、z の値を指定しても w の値が確定しないことになってしまいます。ここで打開策として、$-\pi \leq w < \pi$ のように範囲を制限すると、ただ一つの値 $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ が確定し、1 価関数のように振舞うことがわかります。このように、多価関数の分枝を上手く切って得られる関数 $f(z)$ を分岐と呼び、値を主値と呼びます。$\sin^{-1}(z)$ の主値などは、わかりやすく $\mathrm{Sin}^{-1}(z)$ のように書くのが慣例になっています。[*37]

周期関数の逆関数は確実に多価関数となるので、あらかじめ元の関数の周期を調べ、その周期の区間で枝を切れば上手くいきます。

例.　$\cos z$ の逆関数 $\cos^{-1}(z)$ の主値はどのように求めればよいか。
　　$\cos z$ の周期は 2π なので、例えば $0 \leq \cos^{-1}(z) < 2\pi$ のように切れば上手くいきます。一般化して、$2n\pi \leq \cos^{-1}(z) < 2(n+1)\pi \quad (n \in \mathbf{Z})$ としてもよいでしょう。

8.3.3　多価関数、対数関数

複素指数関数 e^z の逆関数として複素対数関数 $\log z$ を考えます。e^z は周期 $2\pi i$ の周期関数なので複素対数関数 $\log z$ もやはり多価関数になります。

$$z = e^w$$

を満たす w が対数関数になるので、ここから w を求めます。まず $w = u + iv$、$z = re^{i\theta}(u, v$ は実数関数) とおくと、$z = e^{u+vi} = e^u e^{iv}$、$z = re^{i\theta}$ となるので、

$$e^u = r,\ e^{iv} = e^{i\theta}$$

と書けます。ここで $iv = i\theta$ とは限らないことに注意しましょう。指数関数は周期 $2\pi i$ を持つので $iv = i\theta + 2\pi in \quad (n$ は整数) とすべきです。また、$e^u = r$ は両辺ともに実数なので素朴に対数を取って $u = \log r$ と書け、これらをまとめると対数関数は次のように書けることがわかります。

$$w = u + vi = \log r + i\theta + 2\pi in \quad (n \in \mathbf{Z})$$

[*36] 写像の概念について少しだけ触れておきましょう。まず定義域 (z 平面内につくった領域) の全ての点が矢印の始点になることが必要ですが、値域 (w 平面内につくった領域) の全ての点が終点になる必要はありません。しかし定義域内の同じ点から 2 つ以上の矢印が伸びるのは駄目です。
値域内の点に二つの矢印が届くのは O.K. です。
また、ここでは写像とは「矢印の集合」だと思っておけば良いでしょう。(1 価) 関数は全てこのルールを満たしています。

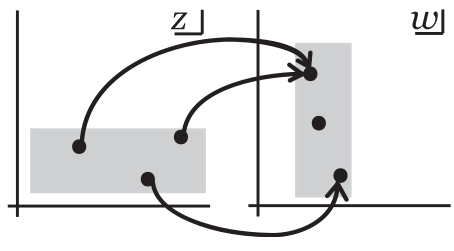


図 7　○写像として機能する

[*37] sin →arcsin, Sin^{-1} →Arcsin　として表す教科書もあります。

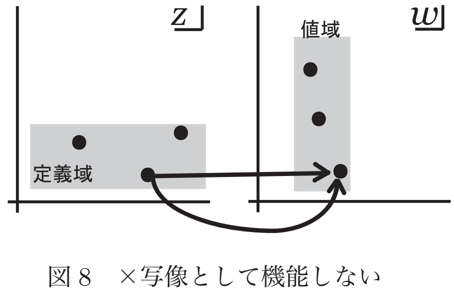


図 8　×写像として機能しない

ここで複素平面の項で述べたように r は z の絶対値を表し、偏角 θ は $\mathrm{Arg}(z)$ とも書けるので、w を z の関数として表すために次のように書き換えましょう。

$$w = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z) + 2\pi in \quad (n \in \mathbf{Z})$$

w は多価関数であり、$2\pi ni$ だけ不定なので、$n = 0$ として固定すれば (切れば) 1 価関数のように振舞わせることができます。このようにした主値を $\mathrm{Log}(z)$ と書き、

$$\mathrm{Log}z = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z)$$

とします。*38 ここで、実関数のときと違って、主値に固定していても

$$\mathrm{Log}(\alpha) + \mathrm{Log}(\beta) = \mathrm{Log}(\alpha\beta) + 2\pi Ni \quad (N \in \mathbf{Z})$$

となる N が存在する (任意ではない) ことに注意しましょう。*39

例 1. 次の方程式の根を一つ求めよ。

$$\sin z = \sqrt{2}$$

複素三角関数の定義を思い出しましょう。$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ なので与式より

$$e^{2iz} - 2\sqrt{2}ie^{iz} - 1 = 0$$

と書け、2 次方程式の要領で

$$e^{iz} = \frac{2\sqrt{2}i \pm \sqrt{-4}}{2} = \sqrt{2}i \pm i = (\sqrt{2} \pm 1)i$$

が与えられます。$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ により i の偏角は $\pi i/2$ なので、上式の対数を取って $iz = \log(\sqrt{2} \pm 1) + \dfrac{\pi i}{2} + 2N\pi i$ となり、主値をとれば

$$z = \frac{\pi}{2} - i\log(\sqrt{2} \pm 1)$$

を得ることができます。

例 2. $\alpha = \beta = e^{i\pi}$ のとき、$\mathrm{Log}\alpha + \mathrm{Log}\beta$ を求めよ。
$\mathrm{Log}e^{i\pi} = i\pi,\ \mathrm{Log}\alpha\beta = \mathrm{Log}e^{2\pi i} = \mathrm{Log}1 = 0$ より $N = 1$ です。こうして、次のように答えが得られます。

$$\mathrm{Log}\alpha + \mathrm{Log}\beta = \mathrm{Log}(\alpha\beta) + 2\pi i = 2\pi i$$

8.3.4 多価関数、累乗根

ルート $\sqrt{\ }$ の拡張を考えます。これまでは「$x(>0)$ の平方根は $\pm\sqrt{x}$」と表現していましたが、複素数 z に対して、その平方根を 2 価の関数 $z^{1/2}$ と書くように約束するのです。これをさらに拡張して、(一般) 指数関数を次のように定めます。

定義 8.7

一般指数関数

一般指数関数 z^α を次のように定義する。

$$z^\alpha = e^{\alpha\log z} \quad (z \neq 0,\ \alpha \in \mathbf{R})$$

*38 さらに簡略化して log → ln、Log→Ln と書いても良いです。

*39 これは偏角の変更によるもので、α か β の少なくとも一方が実数ならば $N = 0$ です。もう少し簡潔に書くなら

$$\mathrm{Log}\alpha + \mathrm{Log}\beta \equiv \mathrm{Log}\alpha\beta \mod (2\pi i)$$

とするべきでしょう。

これを利用すれば次の美しい定理を得ることができます。

定理 8.8

1 の N 乗根は N 個存在し、それらを $z_n = z_0, z_1, \cdots, z_{N-1}$ と書くと、これら $z_0, \cdots, z_{N-1}$ は複素平面上に「原点中心、および $z_0 = 1$ を通る正 N 角形」を構成する。

$\log 1 = \log|1| + 0 \cdot i + 2\pi n i$ に気をつければ

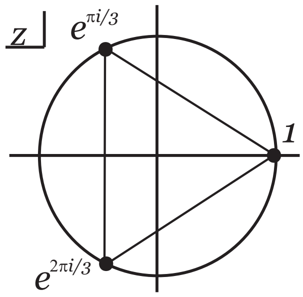
$$1^{1/N} = \exp\left(\frac{1}{N}\log 1\right) = \exp\left(\frac{1}{N}(\log|1| + 0 \cdot i + 2\pi n i)\right) = e^{\frac{2\pi n}{N} i} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

を得ることができ、定理が証明できました。

具体例を考えましょう。$N = 3$ とすれば

$$1^{1/3} = 1, e^{i\pi/3}(= \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}), e^{2i\pi/3}(= \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3})$$

と書くことができ、図のように配置されることがわかります。



8.4 複素関数の微分

複素関数 $f(z)$ の導関数を次のように定義します。

定義 8.9

複素平面上の領域 D において、$f'(z)$ を次のように定義する。

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$\Delta z \to 0$ の近づけ方にかかわらず一通りに決まるとき、$f'(z)$ を $f(z)$ の導関数と呼ぶ。
また、このとき $f(z)$ が微分可能ならば $f(z)$ は (D 内で) 正則である。

計算結果は実関数のときと同じなので省略します。波線部が特に重要で、$\Delta z \to 0$ の近づけ方をいろいろ変えても導関数が一致するか (正則であるか) どうかの判定は、すでにコーシー・リーマンの方程式の項で扱っています。

9　複素積分

本節の目標は留数定理の証明です。複素関数の線積分、コーシーの積分定理、コーシーの積分公式、特異点、ローラン展開、留数 (Residue) などを準備した上で、留数定理に至ります。留数定理は、通常の積分技巧では求められない積分を系統的に計算するために必要な武器であり、非常に重要です。実際に使うのは次の章に譲り、留数定理へのシナリオを追いかけていきましょう。

9.1　複素関数の積分

以下では複素関数 $f(z)$ を領域 D において一価で正則な関数とします。*40 微分すると $f(z)$ になる関数 $F(z)$ について、次が成立します。

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) \tag{9.1}$$

z_1, z_2 が複素数であることに注意しましょう。実関数での積分と非常に似た性質です。

例.　　次の積分を求めよ。

$$\int_0^{1+i} zdz$$

$\displaystyle\int_0^{1+i} zdz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1+i} = \underline{\frac{1}{2}(1+i)^2}$ となります。

9.2　線積分で解釈する

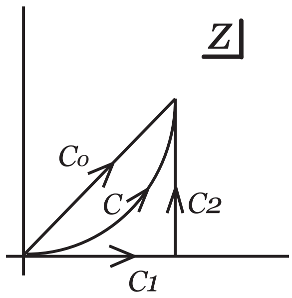
複素積分を応用していくためにはある種の路線変更が必要で、前項での積分だけを眺めても発展は望めません。考え方を変えて、z 平面上の経路 C に沿って $f(z)$ を積分すると考えましょう。このとき、$dz = dx + idy$、$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ という関係を使います。また、経路 C は $y = g(x)$ と書けるとし、経路の端点を $x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2\quad (y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2))$ とします。

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) \\
&= \int_C \{\,(udx - vdy) + (vdx + udy)i\,\} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \{\,u(x) - v(x)g'(x)\,\}\,dx + i\int_{x_1}^{x_2} \{\,v(x) + g'(x)u(x)\,\}\,dx \quad (\because dy = g'(x)dx)
\end{aligned}$$

この式が示しているのは「<u>$f(z)$ の複素線積分が経路によらず端点によって定まる</u>」(つまり前項で示したこと) ということと「<u>複素線積分が一変数関数の定積分に帰着できる</u>」ということの 2 つです。さらに踏み込めば「(通常の微積分の方法では求められないような) 一変数関数の定積分が複素線積分に変換することで計算できる」わけで、これから述べる複素積分の諸定理が、そのための武器になるのです。

*40 「領域 D という」表現は以後省略していきますが、複素関数は少し形を変えるとすぐ多価関数になってしまうので、それを防ぐために加えた制限と考えてください。

例　　以下のそれぞれの経路にしたがって線積分せよ。



$$\int_0^{1+i} zdz$$

(1)　　$C_0 : y = x$ に沿って 0 から $1+i$ まで

(2)　　$C_1 : x$ 軸に沿って 0 から 1 まで、さらに $C_2 : (y$ 軸と平行な直線$)$ に沿って 1 から $1+i$ まで

(3)　　C :(0 と 2 を直径とする半径 1 の円) に沿って 0 から $1+i$ まで

どれも重要例題です。それぞれの線積分で行う変換のテクニックが後で役に立ちます。

(1)　　$y = x$ により $dy = dx$ なので、

$$\int_{C_0} zdz = \int_{C_0}(x+iy)(dx+idy) = \int_0^1 (x+ix)(dx+idx)$$
$$= \int_0^1 (1+i)^2 xdx = (1+i)^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1+i)^2$$

(2)　　まず C_1 では $y = 0$ なので $dz = dx + 0i = dx$ です。

$$\int_{C_1} zdz = \int_{C_1}(x+0i)(dx+0i) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \tag{9.2}$$

次に C_2 では $x = 1$ で $(y|0 \to 1)$ です。$z = x+yi = 1+iy$、$dz = 0+idy = idy$ に気をつけましょう。[*41]

$$\int_{C_2} zdz = \int_{C_2}(1+iy)(0+idy) = \int_0^1 (1+iy)idy = i - \frac{1}{2} \tag{9.3}$$

これで式 (9.2) と式 (9.3) を足して答えは $\underline{i\left(=\frac{1}{2}(1+i)^2\right)}$ として得られます。

(3)　　点 α が中心である半径 r の円は $z - \alpha = re^{i\theta}$ とおきます。[*42] C は i を中心とする半径 1 の円なので $z = i + e^{i\theta}$ と書けます。$\theta = -\frac{\pi}{2}$ から $\theta = 0$ で切り取られる円弧が C なので、$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}$ に気をつけて

$$\int_C zdz = (i+e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta = \int_{-\pi/2}^0 (-e^{i\theta} + ie^{2i\theta})d\theta$$
$$= \left[-\frac{1}{i}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{2i\theta}\right]_{-\pi/2}^0 = \left(i+\frac{1}{2}\right) - \left(1+\frac{-1}{2}\right) = \underline{i\left(=\frac{1}{2}(1+i)^2\right)}$$

として答えが得られます。どの経路をとって積分しても同じ計算結果が得られることがわかります。

---

*41　$z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ において $z = 1 + yi$ だから $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

*42　そのような置き換えがなぜ有効か示しておきます。まず点 $\alpha = a + bi$ を中心とする円は xy 座標で言う (a, b) を中心とする円なので

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (r \text{ は円の半径})$$

と書けます。ここで $\frac{x-a}{r} = \cos\theta$、$\frac{y-b}{r} = \sin\theta$ という置き換えにより、オイラーの公式を利用すれば

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{r}\Big[(x-a)+(y-b)i\Big] = \frac{1}{r}\Big[(x+yi)-(a+bi)\Big] = \frac{1}{r}(z-\alpha)$$

と書けるから $re^{i\theta} = z - \alpha$ となることがわかります。

例題の計算を踏まえて、次の定理を与えることができます。

定理 9.1

α を中心とし、半径 r の円に対して時計の反対周りにまわる曲線を C とすれば、

$$\oint_C (z-\alpha)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases} \qquad (n:\text{整数}) \tag{9.4}$$

が成立する。

周回積分の正方向は反時計回りとします。$z-\alpha = re^{i\theta}$ とおくことで $(\theta|0 \to 2\pi)$ で区間が決定できますから、$dz/d\theta = rie^{i\theta}$ に気をつけて

$$\begin{aligned}\oint_C (z-\alpha)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} \int_0^{2\pi} ir^0 e^0 d\theta & n=-1 \\ \left[\dfrac{r^{n+1}}{(n+1)i} e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi} & n \neq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}\end{aligned}$$

より証明が完了します。この定理は留数定理の心臓部であり重要です。

9.3 コーシーの積分定理

どの経路を使っても積分すれば同じ値になるという結果を使います。C の端点 z_1 から z_2 に向かう (自分と交わらない) 曲線とします。すると式 (9.1) は

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

と書くことができます。ここで $z_1 = z_2$ としてみると、次の定理が成立します。

定理 9.2

コーシーの積分定理

$f(z)$ を領域 D 内で 1 価かつ正則な関数とする。D 内の単純閉曲線 C において、

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

が成立する。

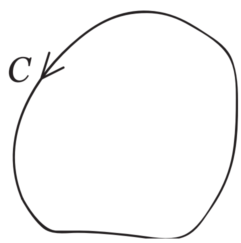


図 9　単純閉曲線：歪めた円

シンプルな定理ですが使いでがあります。次節でその応用を扱うとして、いくつか例題を見てみましょう。

例.　以下それぞれについて、周回積分を求めよ。

(1)

$$\oint_C \sin z dz \quad (C:\text{原点のまわりを時計と反対にまわる半径 1 の円を一周})$$

$\sin z$ はどの z でも正則なのでコーシーの積分定理より $\int_C \sin z dz = 0$ です。

(2)

$$\oint_C \frac{1}{z^n} dz \quad (n: \text{自然数}\ ,\ C: \text{原点のまわりを時計と反対にまわる半径 1 の円を一周})$$

これはコーシーの積分定理が使えません。なぜかというと、C 内部の原点で $\frac{1}{z}$ が正則でないためです。$f(z)$ が $z = \alpha$ で発散してしまうとき、$f(z)$ は $z = \alpha$ で正則ではないことに注意しましょう。しかし式 **(9.4)** を使うと求めることができます。

$$\oint_C \frac{1}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

9.4 特異点とローラン展開

前項での例 (2) に見たように、$1/z$ は原点で発散してしまい、正則とはいえません。ここで特異点について述べておきましょう。特異点の一般論については差し控えますが (本テキストでは説明し切れません) $f(z)$ が $z = \alpha$ において正則でなくなるとき、α を特異点と呼びます。

特に $f(z)$ が

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^n}$$

で与えられたとき、α をn 位の極(あるいは単に極) と言い、特異点の一つとして考えることができます。これ以降、コーシーの積分定理と魂を同じくし、単純閉曲線に沿った周回積分に絞って複素積分を考えていくことにします。式 (9.4) を有効利用することを考えると、積分の対象になる関数が $(z-\alpha)^n$ の和で書けた方がよさそうです。そこで次の定理を用意します。

定理 9.3

Laurent 展開

α のまわりで正則な $f(z)$ は、ある定数の組み $c_0, c_1, \cdots, c_{-1}, c_{-2}, \cdots$ を使って次のように展開でき、$z < \left| \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ で収束する。

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-\alpha)^n \\ &= \left(c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots\right) + \left[\frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \frac{c_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \cdots\right] \end{aligned}$$

ここで $(\cdots)$ を正則部、$[\cdots]$ を主要部と呼び、このような展開を ($z = \alpha$ のまわりの)
ローラン展開と呼ぶ。α が $f(z)$ の極でなければ $[\cdots] = 0$ となる。(テイラー展開になる)

発想が明確なので厳密な証明はしませんが、

$$\lim_{z\to\alpha} f(z)(z-\alpha)^n \neq 0 \text{ かつ有限}$$

となる n を見つけて $f(z)(z-\alpha)^n$ をテイラー展開し、両辺を $(z-\alpha)^n$ で割ればローラン展開を得ることができます。[43] これを逆用して得られる便利な定理をおさえておきます。

[43] もちろん例外があります。$n \to \infty$ のとき、同じ手法でローラン展開するのは不可能ですが、実際にはローラン展開が存在し、それも証明可能です。詳しくは複素関数論の本を当たってください。ここでは証明を割愛します。

定理 9.4

$f(z)$ が α を n 位の極に持つ必要十分条件は

$$\lim_{z\to\alpha} f(z)(z-\alpha)^n \neq 0 \text{ かつ有限} \tag{9.5}$$

が成立することである。

例　以下それぞれに答えよ。

(1)　$g(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ について、$|z|<1$ とする。$g(z)$ は何位の極を持つか。

$z\sim 0$ で $\dfrac{1}{\sin z}\sim\dfrac{1}{z}$ と書けるから、$g(z)$ は 1 位の極 $z=0$ を持つと予想できます。先ほどの定理と極限公式 ($\lim_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z}=1\neq 0$ かつ有限) を併せれば、やはり 1 位の極を持つとわかります。

(2)　$g(z)$ を原点のまわりに 3 次までローラン展開せよ。

$$g(z)=\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

と書けます。一方、マクローリン展開により $\sin z=z-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5-\cdots$ となりますから、

$$\begin{aligned}1=g(z)\sin z&=\left(\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\right)\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)\\&=c_{-1}+c_0z+(\tfrac{-1}{3!}c_{-1}+c_1)z^2+(\tfrac{-1}{3!}c_0+c_2)z^3+(\tfrac{c_{-1}}{5!}+\tfrac{-1}{3!}c_1+c_3)+\cdots\end{aligned}$$

と書け、任意の z でこの等式が成り立っていることを考えれば

$$c_{-1}=1,\ c_0=0,\ \tfrac{-1}{3!}c_{-1}+c_1=0,\ \tfrac{-1}{3!}c_0+c_2=0,\ \tfrac{c_{-1}}{5!}+\tfrac{-1}{3!}c_1+c_3=0$$

が成り立ち、$c_{-1}=1,\ c_0=0,\ c_1=\dfrac{1}{6},\ c_3=\dfrac{7}{300}$ がわかります。これで $\dfrac{1}{\sin z}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{6}z+\dfrac{7}{300}z^3+\cdots$ と展開できます。

(3)　$G(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ を $z=1$ のまわりでローラン展開せよ。

マクローリン展開の式 ($\frac{1}{1+x}=\sum(-x)^n$) を使って次のように二通りの展開ができます。

(i)　$|z-1|<1$ のとき

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-1)+1}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n(-1)^n$$

(ii)　$|z-1|>1$ のとき

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{(z-1)\{(z-1)+1\}}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n(-1)^n$$

2 通りの答えが出たのはもう一つの特異点 $z=0$ を含む円で領域が区分けされるからです。

(4)　$h(z)=e^{1/z}$ の特異点を有限な z で考えよ。

$z=0$ で $e^{1/z}$ が非正則となり、$z=0$ が特異点とわかります。

(5)　$z=0$ のまわりで $e^{1/z}$ をローラン展開せよ。

$z=0$ は極にはなりません。実際、e^z のマクローリン展開 $e^z=1+\dfrac{1}{1!}z+\dfrac{1}{2!}z^2+\cdots$ において z を $1/z$ に置き換えて

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots$$

となり z の負べきが永遠に続いてしまいます。(これが答え)

このように、ローラン展開するときに主要部が有限な $\dfrac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n}$ で打ち切られずに、永遠に続くような特異点を真性特異点と言います。

9.5　留数の定義とその導出法

最後の準備をします。

定義 9.5

$f(z)$ を特異点 α のまわりでローラン展開したときの c_{-1} を留数と言い、$\mathrm{Res}(\alpha)$ とも書く。

$f(z)$ が n 位の極 α を持つとして、その周りでローラン展開して

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

としてからうまく c_{-1} を求めましょう。正則部は $z=\alpha$ を代入すれば消せるので、問題は主要部ということになりますが、これは両辺に $(z-\alpha)^n$ を掛けて

$$(z-\alpha)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-\alpha) + \cdots + c_{-1}(z-\alpha)^{n-1} + c_0(z-\alpha)^n + c_1(z-\alpha)^{n+1} + \cdots$$

とし、$(n-1)$ 階微分して

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{\,(z-\alpha)^n f(z)\,\} = (n-1)!c_{-1} + c_0\frac{n!}{1!}(z-\alpha) + c_1\frac{(n+1)!}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots$$

の両辺で $z \to \alpha$ とすれば c_{-1} 以外が消えて解決します。これで以下の定理を得ることができます。

定理 9.6

$f(z)$ が n 位の極 α を持つならば、留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ は

$$\mathrm{Res}(\alpha) = \lim_{z\to\alpha}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{\,(z-\alpha)^n f(z)\,\} \tag{9.6}$$

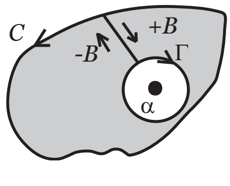
で与えられる。

また、$f(z)$ が 1 位の極 α を持ち、$f(z) = p(z)/q(z)$ と書けるとき、

$$\mathrm{Res}(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{q'(\alpha)} \tag{9.7}$$

と表すことができます。これは式 (9.6) とロピタルの定理を使って示すことができます。

9.6　留数定理の証明



コーシーの積分定理を利用して次のように考えます。$f(z)$ が右図の灰色部で正則であるとすると、C の内部で Γ の外部が正則領域ですからコーシーの積分定理より $\int_{C+(+B)+\Gamma+(-B)} f(z)dz = 0$ であり、$\int_C f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz$ が成立します。ここで Γ を $f(z)$ の特異点 α のまわりを時計回りに廻る半径 r の円形経路とし、C を反時計回りに廻り、Γ を囲む任意の閉路とします。すると、C を (Γ を囲むとして) 任意に選んでも、結局は Γ で線積

分を取ることに帰結されますから、Γ の反対周りを $-\Gamma$ で表し、$f(z)$ のローラン展開を利用して

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= -\oint_\Gamma f(z)dz \\ &= \oint_{-\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-\alpha)^n dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{-\Gamma} (z-\alpha)^n dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases} \qquad (\because \text{式 } (9.4)) \\ &= 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \mathrm{Res}(\alpha)\end{aligned}$$

と変形することができます。これをまとめれば次の定理、すなわち留数定理 (β 版) が得られます。

定理 9.7

反時計回りの閉路 C 内に特異点 α があるとき、次の関係が成立する。

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(\alpha)$$

C 内に複数特異点がある場合は、それぞれ足し合わせればよく、次の定理が完成します。

定理 9.8

留数定理

反時計回りに廻る任意の閉曲線 C 内に $f(z)$ の特異点 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ があるとき、次が成立する。

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha_k)$$

10　留数定理の応用

前節の続きとして、複素閉 (周回) 積分の問題をいくつか扱い、応用として定積分の技巧を紹介します。

10.1　留数定理を使ってみよう

留数定理を使うために次の段階で考えます。

戦略 10.1

ステップ 1.　求める積分が複素周回積分の形であることを確認する

ステップ 2.　積分経路の中に被積分関数 $f(z)$ の特異点 (極または真性特異点) があるか調べる。

　　極があれば何位であるかも調べる($\to$ 式 (9.5))

ステップ 3.　次の 3 つのケースが考えられます。

特異点がないとき	コーシーの積分定理より、答えは 0
n 位の極があるとき	式 (9.6) により留数を求める。(1 位のときは式 (9.7) でもよい)
真性特異点があるとき	ローラン展開して a_{-1}(留数) を求める。

ステップ 4.　留数 $\mathrm{Res}(\alpha) = a_{-1}$ が求められたら、答えは $2\pi i a_{-1}$

例.　以下の積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z} dz$　$C : |z| = 1$ を正方向に一周

(2)　$\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z} dz$　$C : |z| = 1$ を正方向に一周

(3)　$\displaystyle\oint_C \frac{1}{z(e^z - 1)} dz$　$C : |z| = 2$ を負方向に一周

(4)　$\displaystyle\oint_C e^{1/z} dz$　$C : |z| = 1$ を正方向に一周

(1)　見かけは $z = 0$ が特異点のようですが、調べてみると ($\lim_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$ かつ有限なので)$z = 0$ で $\dfrac{\sin z}{z}$ は発散しません。つまりこの関数は特異点を持たないので、コーシーの積分定理より

$$\int_C \frac{\sin z}{z} dz = \underline{\ 0\ }$$

です。別の見方をすれば、ローラン展開して

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 - \cdots$$

となり $a_{-1} = 0$ であるから、留数定理より $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i a_{-1} = 0$ としても良いでしょう。

(2)　$\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z}$ が発散するので $z = 0$ は特異点です。また、$\displaystyle\lim_{z\to 0} z \frac{e^z}{z} = e^0 \neq 0$ かつ有限となり、$\dfrac{e^z}{z}$ は 1 位の極 $z = 0$ を持つことがわかります。

留数 Res(0) は式 (9.7) により $\displaystyle\mathrm{Res}(0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z'} = e^0 = 1$ なので答えは $2\pi i$ です。

(3)　$z = 0, 2\pi i, 4\pi i, \cdots$ が特異点ですが、積分経路の中にあるのは $z = 0$ だけです。$z = 0$ は $\displaystyle\lim_{z\to 0} z^2 \frac{1}{z(e^z - 1)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1 \neq 0$ かつ有限より[*44] 2 位の極であることがわかります。式

[*44] ロピタルの定理で求められます。

(9.6) を用いて留数を求めると、

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{1}{z(e^z-1)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1)-ze^z}{(e^z-1)^2} \tag{10.1}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(-z)e^z}{2e^z(e^z-1)} \tag{10.2}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

ただし式 (10.1) から式 (10.2) でロピタルの定理を使っています。最後に問題文をよく見てください。経路は負方向 (時計回り) となっていますから、答えは $2\pi i\mathrm{Res}(0)$ ではなく、反対方向を加味した (-1 倍した) $-2\pi i\mathrm{Res}(0)$ となります。これにより、答えは $-2\pi i\mathrm{Res}(0) = \pi i$ となります。

(4) ローラン展開してみると

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

となり、$z = 0$ が真性特異点になります。この場合式 (9.6) や式 (9.7) は使えませんから、直接 $\frac{1}{z}$ の係数を探します。展開式より $\frac{1}{z}$ の係数 a_{-1} は 1 であるため、答えは $2\pi i a_{-1} = 2\pi i$ とわかります。

10.2 定積分の技巧

留数定理は大きく分けて 2 通りの定積分に有効です。

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta\ ,\quad \int_0^{\infty} f(x)dx$$

前者を角変数型積分 (特殊型)、後者を一般型と呼ぶことにします。(フォーマルな呼び名ではない) 順に追って説明しますが、両者に共通の決まりごとがあるので、まずこれを押さえておきます。

戦略 10.2

次式の要領で定積分を複素周回積分に変換して計算するとき、以下の決まりごとを遵守する。

$$\int_a^b f dx = \int_C f dz$$

(1) 被積分関数の分子に三角関数があるときは、$e^{i\theta}$ で置き換える。

(2) 経路 C は特異点の上を通ってはならない。

10.3 角変数型定積分 $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ の技巧

$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$、の形の積分には複素積分が有効です。[*45] $z = e^{i\theta}$ とおくことで[*46]、積分区間 $(\theta|0 \to 2\pi)$ は「$C(: z = e^{i\theta}$ で表される単位円) を正方向一周」と書き換えられ、式で表すと

$$\int_0^{2\pi} f d\theta = \int_C f\frac{dz}{iz}$$

となります。置換積分の要領で $z = e^{i\theta}$ から $\dfrac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ を得ていることに注意してください。

---

*45 一変数の微積分では $t = \tan\frac{\theta}{2}$ とおけば $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ と書け、これで求積します。

*46 このとき $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ と書けます。

戦略 10.3

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ の積分は $z=e^{i\theta}$ とおいて、

$$\int_0^{2\pi} f d\theta = \oint_C f\frac{dz}{iz}$$

と書き換えた後、右辺を留数定理によって求める。

例 1. 次の定積分を求めよ。

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos\theta}d\theta$$

$z=e^{i\theta}\left(\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}\right)$ として

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos\theta}d\theta=\oint_C\frac{1}{5+3\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz} \qquad \text{(以下、}C\text{ は単位円を正方向に一周)}\\&=\oint_C\frac{2}{i(3z^2+10z+3)}dz=\frac{2}{i}\oint_C\frac{1}{3(z+3)(z+\frac{1}{3})}dz\end{aligned}$$

と書き換えることができます。

$\dfrac{1}{3(z+3)(z+\frac{1}{3})}$ は**1 位の極**$z=-3,-\frac{1}{3}$ を持っていますが、C の中には $z=-\frac{1}{3}$ しか入っていないので $-\frac{1}{3}$ について式 (9.7) から留数を求めて

$$\mathrm{Res}(-1/3)=\lim_{z\to\frac{-1}{3}}\frac{1}{(3z^2+10z+3)'}=\lim_{z\to\frac{-1}{3}}\frac{1}{6z+10}=\frac{1}{8}$$

となるから、留数定理により答えは

$$I=\frac{2}{i}\oint_C\frac{1}{3z^2+10z+3}dz=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\mathrm{Res}(-1/3)=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{8}=\underline{\frac{\pi}{2}}$$

として得られます。

例 2. 次の積分を求めよ。

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}d\theta \qquad \text{ただし } 0<a<1 \text{ で } m \text{ は自然数}$$

被積分関数の分子が cos なので $e^{i\theta}$ にすり替えましょう。つまり $J=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{im\theta}}{1+2a\cos\theta+a^2}d\theta$ とおいて J を求め、J から I を求めます。$z=e^{i\theta}$ とおけば

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta})^m}{1+2a\cos\theta+a^2}=\oint_C\frac{z^m}{1+2a\frac{z+z^{-1}}{2}+a^2}\frac{dz}{iz}\\&=\frac{1}{ia}\oint_C\frac{z^m}{\left(z+\frac{1}{a}\right)(z+a)}dz \qquad (C\text{ は単位円を正方向に廻る})\end{aligned}$$

となります。ここで $\dfrac{z^m}{\left(z+\frac{1}{a}\right)(z+a)}$ の極は $z=-a,\frac{1}{a}$ の 2 つであり、どちらも **1** 位です。問題文より $0<a<1$ なので曲線 C 内にある特異点は $-a$ のみなので、留数 $\mathrm{Res}(-a)$ は式 (9.7) により

$$\mathrm{Res}(-a)=\lim_{z\to-a}\frac{z^m}{(z^2+(a+\frac{1}{a})z+1)'}=\lim_{z\to-a}\frac{z^m}{2z+a+\frac{1}{a}}=\frac{(-a)^m}{\frac{1}{a}-a}=\frac{2\pi(-a)^m}{1-a^2}a$$

が得られるので、留数定理により J は

$$J=\frac{1}{ia}\int_C\frac{z^m}{\left(z+\frac{1}{a}\right)(z+a)}dz=\frac{1}{ia}\cdot 2\pi i\mathrm{Res}(-a)=\frac{1}{ia}\cdot 2\pi i\cdot\frac{2\pi(-a)^m}{1-a^2}a=\frac{2\pi(-a)^m}{1-a^2}$$

として得られます。最後に $I=\Re(J)$[*47] より、答えは $I=\underline{\dfrac{2\pi(-a)^m}{1-a^2}}$ となります。

*47 $\Re(z)$ は z の実部。

10.4　一般型 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の技巧 (基本形とフーリエ変換)

先に準備をしておきます。

定理 10.4

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、次の不等式が成立する。

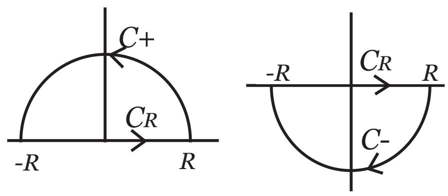
$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta \tag{10.3}$$

$y = \sin x$ と $y = \dfrac{2}{\pi}x$ を実際に図に書けばすぐに示せ、具体的に問題を解くときには三角不等式[*48]が役に立ちます。$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 型の積分のほとんどは、次の定理で一掃することができます。[*49]

定理 10.5

実軸上に特異点を持たない $f(z)$ が、実数 $\theta, k, M > 0$ および大きい $R\ (>0)$ に対し、$|f(Re^{i\theta})| < \dfrac{M}{R^k}$ を満たすならば、図の経路内に存在する $f(z)$ の特異点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ に対し、次の式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}dx = \begin{cases} 2\pi i \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha_i) & t \geq 0 \text{ のとき} \\ -2\pi i \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha_i) & t < 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.5}$$



t>oで正方向　t<oで負方向

$t > 0$ の時のみ示します。$I_R = \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)e^{itx}dx = \int_{C_R} f(z)e^{itz}dz$ とおくと、留数定理により

$$\oint_{C_R + C_+} f(z)e^{itz}dz = I_R + \int_{C_+} f(z)e^{itz}dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha)$$

と書けるので、

$$I_R = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha) - \int_{C_+} f(z)e^{itz}dz$$

において $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_+} f(z)dz = 0$ が成立すれば良いことがわかります。これを挟み撃ちで示しま

---

*48

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{10.4}$$

証明自体は簡単です。

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$
$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

より辺々引いて $(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|z_2| - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq 0$ から得られます。(Rez は z の実部)

*49 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

のように定義され (フーリエ解析の項参照)、これを実際に求める際にもこの定理が有用です。

しょう。C_+ は $z = Re^{i\theta}$ $(\theta|0 \to \pi)$ と表されるので、仮定より

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_+} f(z)e^{itz}dz\right| &= \left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}e^{itR(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta\right| \\
&\le \int_0^\pi \left|f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}e^{itR\cos\theta}e^{-tR\sin\theta}d\theta\right| \\
&= \int_0^\pi \frac{M}{R^{k-1}}e^{-tR\sin\theta}d\theta \qquad (10.6)\\
&\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{R^{k-1}}e^{-2tR\theta/\pi}d\theta \qquad (10.7)\\
&= \frac{2M}{R^{k-1}}\frac{\pi}{2tR}(1-e^{-tR}) \to 0 \quad (R\to\infty) \qquad (10.8)
\end{aligned}$$

式 (10.6) から式 (10.7) にかけて不等式 (10.4) を使っています。不等式 (10.4) が使えるのは $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ の範囲なので $\int_0^\pi e^{-Rt\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-Rt\sin\theta}d\theta$ という変形が入っているのに注意してください。これで定理が証明できたことになります。($t < 0$ の場合は読者が証明してみてください)

例.　式 (10.5) を使って以下の定積分を求めよ。

$$(1)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x-i\varepsilon}dx \quad (\varepsilon>0) \qquad (2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx \qquad (3)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{1+x^2}dx \qquad (4)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}dx$$

(1)　$t = +1$ なので経路 $C = C_R + C_+$ を使います。$\dfrac{e^{iz}}{z-i\varepsilon}$ は 1 位の極 $i\varepsilon$ を経路 C 内に持つので、留数は $\mathrm{Res}(i\varepsilon) = e^{-\varepsilon}$ となり、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x-i\varepsilon}dx = \underline{2\pi ie^{-\varepsilon}}$$

が得られます。

(2)　$t = 0$ なので C_+、C_- のどちらをとっても良いです。$C = C_R + C_+$ として考えます。$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ は 2 位の極 $\pm i$ を持ち、経路 C 内にあるのは $+i$ のみなので、留数は式 (9.6) により $\mathrm{Res}(i) = \dfrac{1}{4i}$ となるから答えは $2\pi i\mathrm{Res}(i) = \underline{\dfrac{\pi}{2}}$ となります。

(3)　$t = -1$ なので $C = C_R + C_-$ の経路で考えます。$\dfrac{e^{-iz}}{1+z^2}$ の極は $\pm i$ でどちらも 1 位ですが、C 内にあるのは $-i$ だけです。留数は $\mathrm{Res}(-i) = \dfrac{e}{-2i}$ となるので答えは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{1+x^2}dx = -2\pi i\mathrm{Res}(-i) = \underline{2\pi e}$$

となります。

(4)　分子の三角関数は e^{ix} に置き換えます。求めるべき積分を I とおき、$J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^4}dx$ として J を求めます。$1 + z^4 = 0$ の根は ($z = e^{i\phi}$ とおいて ϕ を求めればよい) $e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ の 4 つで、このうち C 内にあるのは $e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}$ の 2 つで、どちらも 1 位です。それぞれ α, β とおくと、式 (10.3) を使って、留数は $\mathrm{Res}(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}}{4\alpha^3}$ および $\mathrm{Res}(\beta) = \dfrac{e^{i\beta}}{4\beta^3}$ と書けるから、

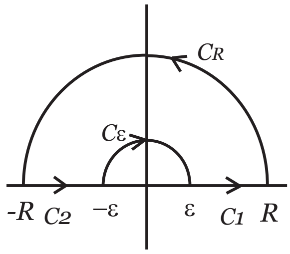
$$J = 2\pi i(\mathrm{Res}(\alpha)+\mathrm{Res}(\beta)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) + \sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right)$$

であり、$I = \Re(J) = J$ で答えが得られます。

10.5　一般型積分 2：原点が特異点の関数を積分する

10.5.1　半ドーナツ経路

例えば $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ などを考える場合、複素積分に帰結させて求めるには分子の三角関数を exp になおす必要があるため $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz$ の形にして考える必要があります。元の関数と違い、$\dfrac{e^{iz}}{z}$ は原点を 1 位の極に持つため、原点を避けた図のような経路を使う必要があります。



例　定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ。上の説明にあるように図の経路で考えましょう。$C_R : z = Re^{i\theta}, (\theta|0 \to \pi), C_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta}, (\theta|\pi \to 0)$ なので、

$$I_R = \int_{C_1+C_R+C_2+C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_R^\varepsilon \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz$$
$$= \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz$$

第二項は式 (10.5) の証明同様に $R \to \infty$ で 0 に収束します。第三項は $\varepsilon \to 0$ で $-\pi i$ に収束しますが、こちらは次のように示します。

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_\pi^0 \frac{\exp(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = -i\int_0^\pi \exp(\varepsilon e^{i\theta})d\theta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -i\int_0^\pi d\theta = -i\pi$$

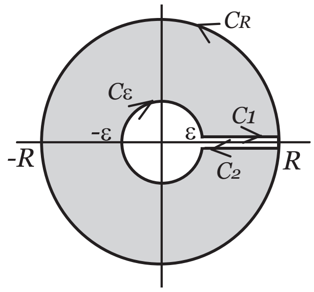
経路の中に特異点がないのでコーシーの積分定理 (あるいは留数定理) より $I_R = 0$ となり、$R \to 0, \varepsilon \to 0$ において次の式を得ることができます。($[e^{ix} - e^{-ix}]/2i = \sin x$ に注意！)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

10.5.2　メリン変換とドーナツ経路

$$G(a) = \int_0^\infty f(x)x^{a-1}dx$$

で表される積分変換をメリン変換と呼びます。[*50]



この形の積分は、図のような経路に沿って複素積分をとるとうまくいきます。[*51]

原点が特異点なのでこれを避ける経路をとるのですが、正則な $f(z)$ に対し、$0 < a < 1$ のとき $z^{a-1}f(z)$ において $z = 0$ が極にならないことに注意しておきましょう。($a - 1$ が整数にならないので、ローラン展開できない！！) このような特異点を分岐点と呼びます。

例　$f(x) = \dfrac{x^{a-1}}{1+x}$ の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx \quad (0 < a < 1)$ を求めよ。
まず経路を確保します。$C_R : z = Re^{i\theta}, (\theta|0 \to 2\pi)$、$C_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta}, (\theta|2\pi \to 0)$ であり、$I_1 = \displaystyle\int_{C_1} f(z)dz$、$I_2 = \displaystyle\int_{C_2} f(z)d$ とおくと $I_1 = \displaystyle\int_\varepsilon^R f(x)dx$、$I_2 = \displaystyle\int_R^\varepsilon f(xe^{2\pi i})dx$ と書ける (C_2 は半径 R の円 C_R を一周してから通るので、偏角が変更されていることに注意！) ので、

$$I_R = \oint_{C_1+C_R+C_2+C_\varepsilon} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_R^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{a-1}}{1+x}dx + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$$
$$= (1 - e^{2\pi i(a-1)})\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz \quad (10.9)$$

[*50] Mellin transform:ガンマ関数 $\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ の e^{-x} を $f(x)$ に拡張したもので、$f(x)$ は必然的に e^{-x} のように収束する関数である必要があります。

[*51] ただし $f(z)$ は実軸上に正の特異点を持たないとします。

と分解できます。$R \to \infty$ で $\int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \to 0$ および $\varepsilon \to 0$ で $\int_{C\varepsilon} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \to 0$ になることを示しておきます。

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| = \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1} |e^{i(a-1)\theta}|}{|Re^{i\theta}+1|} |ie^{i\theta} R d\theta| \tag{10.10}$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1}}{R-1} R d\theta = 2\pi \frac{R^a}{R-1} \to 0 \quad (R \to \infty) \tag{10.11}$$

(ただし式 (10.10 右) から式 (10.11 左) で三角不等式 (10.4) を使い、$\frac{1}{|Re^{i\theta}+1|} < \frac{1}{|Re^{i\theta}|-|1|}$ としています)

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \right| &\leq \int_{C_\varepsilon} \left| \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \\ &= \int_{2\pi}^{0} \frac{|\varepsilon^{a-1} e^{2\pi i(a-1)}|}{|1+Re^{i\theta}|} |i\varepsilon e^{i\theta} d\theta| \\ &\leq \int_{2\pi}^{0} \frac{\varepsilon^a}{1-\varepsilon} d\theta \to 0 \quad (\varepsilon \to 0) \qquad (\because \quad (\text{三角不等式})) \end{aligned} \tag{10.12}$$

一方 I_R は灰色領域の周回積分なので、$\dfrac{z^{a-1}}{1+z}$ の灰色領域内の極 $z = -1$ により留数は $\mathrm{Res}(-1) = (-1)^{a-1} = e^{\pi i(a-1)}$ と書けます。留数定理により

$$I_R = 2\pi i \mathrm{Res}(-1) = 2\pi i e^{\pi i(a-1)} \tag{10.13}$$

となり、$R \to \infty, \varepsilon \to 0$ において式 (10.9) と式 (10.13) を比較すれば

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(a-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(a-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi a i} - e^{-\pi a i}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

が得られます。

10.5.3 その他有名な一般型積分

具体的な計算は割愛しますが、有名な積分と経路の組み合わせを記しておきます。

1. 原点が特異点 →(図 10)

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0$$

この場合 $z = 0$ は (ローラン展開不能な) 特異点です。

2. フレネル積分 →(図 11)

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

e^{iz^2} を図 (11) の経路で複素積分すればよいでしょう。

3. exp による関数を積分するとき →(図 12) ラプラス積分

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(ax) dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}}$$

などは図 (12) の経路にしたがって複素積分をとります。定数 k の値はケースバイケースで。上では $k = a/2$ とすれば良いです。(ふつう極の 2 倍にすると上手くいきます) $\dfrac{e^{ix}}{\cosh x}$ や $\dfrac{e^{ax}}{1+e^x}$ の積分もこの一種です。

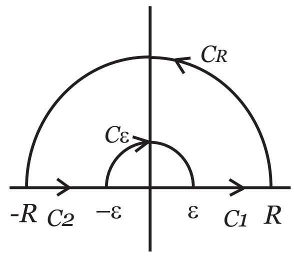


図 10　半ドーナツ

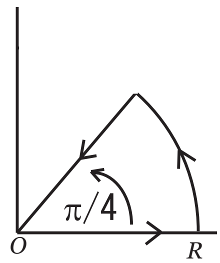


図 11　ショートケーキ ×2

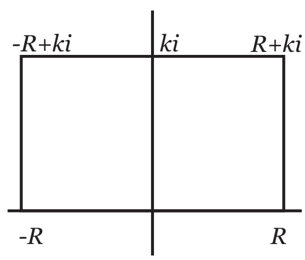


図 12　板チョコ

11　Fourier 級数展開

11.1　複素フーリエ級数展開

周期 L の周期関数 $f(x)$ を次のように展開することを考えます。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi nix}{L}} \tag{11.1}$$

このような c_n を求めて $f(x)$ を展開することで周期関数 $f(x)$ を調べることができるようになるのです。このような展開を複素フーリエ展開と呼びます。複素フーリエ級数c_n を求めるために、式(11.1) の両辺に $e^{-i\frac{2\pi mx}{L}}$ (m は整数) をかけて積分してやります。

$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi mx}{L}}dx &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-L/2}^{L/2} e^{\frac{2\pi ix}{L}(n-m)}dx \\ &= \cdots + 0 + 0 + (L\cdot c_m) + 0 + 0 + \cdots\end{aligned}$$

ただし $\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} e^{i\frac{2\pi ix}{L}(n-m)}dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ L & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$ となることを使いました。上の式を整理すれば、次の定理を得ることができます。

定理 11.1

複素フーリエ級数展開

周期 L の区分的に滑らかな周期関数 $f(x)$ は次のように展開できる。フーリエ係数c_n は以下のように決まる。

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi nix}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi mx}{L}}dx$$

11.2　実フーリエ級数展開

ただし、多くの教科書は実フーリエ係数を用いた展開を扱っているので、そちらも紹介しましょう。$a_n = c_n + c_{-n}$ および $b_n = i(c_n - c_{-n})$ と置けば、複素フーリエ展開により

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{\frac{2\pi inx}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi inx}{L}} + c_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)(\cos\tfrac{2\pi nx}{L} - i\sin\tfrac{2\pi nx}{L}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)(\cos\tfrac{2\pi nx}{L} + i\sin\tfrac{2\pi nx}{L}) + \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}\left(a_n\cos\tfrac{2\pi nx}{L} + b_n\sin\tfrac{2\pi nx}{L}\right)\end{aligned}$$

と変形でき、先のフーリエ係数の式をまとめれば次の定理を得ることができます。

定理 11.2

フーリエ級数展開

区分的に滑らかな周期 L の周期関数 $f(x)$ は次のように展開できる。また、フーリエ係数 a_n, b_n は次のように決まる。

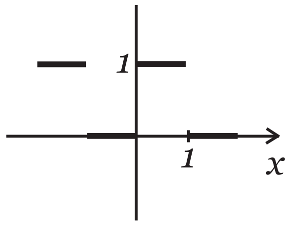
$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\tfrac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\tfrac{2\pi nx}{L}\right) \tag{11.2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\tfrac{2\pi nx}{L}dx \tag{11.3}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\tfrac{2\pi nx}{L}dx \tag{11.4}$$

級数展開の収束は難しいので省略します。どちらも展開した結果は同じなので、計算のしやすい方を選ぶのが賢い判断でしょう。ここではもっぱら式 (11.1) にしたがって展開することにします。

例 1.　周期 2 の次の関数 $f(x)$ をフーリエ展開せよ。



$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x < 1) \end{cases}$$

$L = 2$ なので、c_n は次のように計算できます。

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-in\pi x}dx \\ &= \begin{cases} 1/2 & (n=0) \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{-in\pi}[e^{-in\pi x}]_0^1 & (n \ne 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (n=0) \\ \dfrac{1}{n\pi}e^{\frac{in\pi}{2}}\sin\frac{in\pi}{2} & (n \ne 0) \end{cases} \end{aligned}$$

これにより、$f(x)$ は次のようにフーリエ展開できます。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} c_n e^{in\pi x} + c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\pi x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} e^{-in\pi x} + c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\pi x} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{in\pi(x+1/2)} - e^{-in\pi(x+1/2)}\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{in\pi} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\sin[n\pi(x+1/2)]\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \end{aligned}$$

例 2.　次の周期 1 の関数 $f(x) = x \;\; (0 < x \le 1)$ をフーリエ展開せよ。

まず c_n を求めます。

$$c_n = \int_{-1/2}^{1/2} xe^{-2n\pi ix}dx$$

であり $c_0 = 0$ です。$n \neq 0$ のときは、この積分を計算して $c_n = \dfrac{\cos n\pi}{2\pi in}$ を求め、これを展開式に代入して

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{0} c_n e^{2ni\pi x} + c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2ni\pi x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{-2in\pi} e^{-2n\pi ix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{2in\pi} e^{2n\pi ix} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\pi} \sin 2n\pi x
\end{aligned}$$

を得ます。

11.3　フーリエ余弦展開とフーリエ正弦展開

ここでは $f(x)$ が区間 $[-l, l]$ で周期 $L = 2l$ を持つとして、$f(x)$ の実フーリエ展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\tfrac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{l}) \right)$$

を考えます。$[-l, l]$ において奇関数を積分すると 0 になることを使えば、

$f(x)$ が偶関数のとき

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\tfrac{n\pi x}{l}) \ \ (-l \leq x < l),\ a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos(\tfrac{n\pi x}{l}) dx$$

とかけ、さながら $f(x)$ $(0 \leq x < l)$ を偶関数として $(-l \leq x < l)$ に拡張したように考えることができます。これを $f(x)$ のフーリエ余弦展開と呼びます。また、

$f(x)$ が奇関数のとき

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{l}) \ \ (-l \leq x < l),\ b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\tfrac{n\pi x}{l}) dx$$

とかけ、$f(x)$ $(0 \leq x < l)$ を奇関数として $(-l \leq x < l)$ に拡張したように考えることができます。これを $f(x)$ のフーリエ正弦展開と呼びます。

11.4　Parseval の等式とその応用

重要な定理です。主に級数和の値を求めるために重宝します。単にフーリエ展開した両辺に特定の値を代入しても級数和の値が求められる場合がありますが、Parseval の等式を用いるとさらに便利になります。

—定理 11.3

Parseval の等式

周期 L の $f(x)$ に対して、a_n, b_n を実フーリエ係数、c_n を複素フーリエ係数とすると、次が成立する。

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}|f(x)|^2dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2$$

シュワルツの不等式[*52]

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2dx\right)$$

を使えば

$$\left|\int_{-L/2}^{L/2}\left\{f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right\}f(x)dx\right| \to 0 \quad (N\to\infty)$$

と書くことができ、定理を導くことができます。

例.　次の等式が成立することを導け。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

重要な式です。上の例 2. で $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\pi}\sin 2n\pi x$ と展開したのを使いましょう。周期が 1 なので

$$(\text{パーセバルの式左辺}) = 2\int_{-1/2}^{1/2}x^2dx = \frac{1}{6}$$

$$(\text{パーセバルの式右辺}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$$

より両辺を=で結べば所望の級数和を導けます。

また、ここでは計算過程を省略しますが、$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x \leq \pi)$ を展開すると

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)(-1)^n}{n^2}$$

となり、$x=\pi$ としても $\dfrac{\pi^2}{6}$ の級数表示が得られます。さらに $f(x)$ について Parseval の等式を用いれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}$$

を示すことができます。

[*52] シュワルツの不等式は様々なバリエーションで現れますが、全て同じように証明することができます。キーは「二次方程式の判別式 $D\leq 0$」です。$a=\int f^2dx, b=\int fgdx, c=\int g^2dx$ とおいておきます。任意の t に対して

$$y = \int (tf-g)^2dx$$

を用意します。これを展開し、$y = at^2+2bt+c \geq 0$ を導いたら、$y\geq 0$ を満たしている $\Longleftrightarrow$ y は t 軸と交わらない放物線 $\Longleftrightarrow$ 判別式 $D\leq 0$ という流れで示すことが出来ます。

11.5 フーリエ級数と偏微分方程式

関数 $u(x,t)$ についての偏微分方程式において、初期条件が区分的に滑らかな周期関数 $f(x)$ のとき、すなわち $u(x,0)=f(x)$ であるならばフーリエ展開による解放が有効です。具体的な問題で考えてみましょう。

例. $f(x)\ \ (0<x<L)$ をなめらかな任意の (周期 L の) 関数であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)\ \ (0<x<L)$ をフーリエ正弦級数に展開せよ。

(2) $0<x<L,\ 0<t$ において $u(x,t)$ は次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\quad (\text{ただし } v>0)$$

を満足している。$x=0,\ L$ において $u(0,t)=0$、$u(L,t)=0$ および $u(x,0)=f(x)$、$u(x,\infty)=0$ を満たすとして、変数分離を用いて解 $u(x,t)$ を求めよ。

(1) まずフーリエ正弦展開係数を b_n とすれば

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\tfrac{n\pi x}{L})dx$$

となるので、

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\tfrac{n\pi x}{L})=\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\tfrac{n\pi x}{L}\int_0^L f(t)\sin(\tfrac{n\pi t}{L})dt}$$

として展開できます。

(2) $u(x,t)=X(x)T(t)$ と変数分離して与式に代入すると

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\frac{v^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-m^2\quad (\text{一定})$$

となり、$T=e^{-m^2t}$、$X=A\sin(\frac{mx}{v})+B\cos(\frac{mx}{v})\ \ (A,B\ \text{定数})$ として T,X が得られる。境界条件から $X(0)=X(L)=0$ なので、$B=0$、$\dfrac{mL}{v}=n\pi\ \ (n=0,1,2,\cdots)$ が得られ、TX の重ね合わせを取って (定数を $A\to A_n$ として) [*53]

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-(\frac{vn\pi}{L})^2t}\sin(\tfrac{n\pi x}{L})=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-(\frac{vn\pi}{L})^2t}\sin(\tfrac{n\pi x}{L})$$

とする。$t=0$ において $u(x,0)=f(x)$ となるから、(1) より

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\tfrac{n\pi x}{L})=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\tfrac{n\pi x}{L})$$

となり $A_n=b_n(b_n$ は (1) で求めた) とわかる。これで $u(x,t)$ は

$$\underline{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin(\tfrac{n\pi t}{L})dt\right\}e^{-(\frac{vn\pi}{L})^2t}\sin(\tfrac{n\pi x}{L})}$$

11.6 フーリエ積分

フーリエ変換を与える準備をします。周期関数を調べるのがフーリエ級数であるなら、フーリエ変換は非周期関数を調べる道具であると言えます。周期 L を $L\to\infty$ とすることで周期性を消すことができるからです。ここで $f(x)$ を全領域 $[-\infty,\infty]$ で考える必要性がでてきます。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=M<+\infty\quad (\text{つまり } M \text{ は有限})$$

[*53] n が不定なので、とりあえずすべての n で和をとる必要があります。この後、n について調整するために A_n の性質を考えるわけです。

と仮定しておきます。はじめに、$f(x)$ を周期 L の周期関数とし、フーリエ展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2n\pi ix}{L}}$$

を用意しましょう。このときフーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)e^{-\frac{2n\pi ix}{L}}dx$$

で表されます。これにより $\Delta u = \dfrac{2\pi}{L}$ とおいて $L \to \infty$ の極限をとると

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty} f(x) &= \lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2n\pi ix}{L}} \\
&= \lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-\frac{2n\pi it}{L}}dt\right\}e^{-\frac{2n\pi ix}{L}} \\
&= \lim_{L\to\infty,\Delta u\to 0}\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{+\infty}\left\{\left(\frac{\Delta u}{2\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-n\Delta u\pi ix}dt\right)e^{-n\Delta uix}\right\}
\end{aligned} \tag{11.5}$$

ここで区分求積[*54] を用いると、

$$\lim_{L\to\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt\right)e^{iux}$$

が得られ、改めて $f(x)$ を非周期関数とすれば次の関係が得られます。

定理 11.4

任意の $f(x)$ は次のように展開できる。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt\right)e^{iux} \tag{11.6}$$

この式をフーリエ積分と呼ぶ。

後に現れる「フーリエ変換をフーリエ逆変換すると元の関数に戻る」性質はこの式に由来します。

例 1.　次の関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

[*54] 区分求積 (リーマン和) は次の式で表されます。

$$\lim_{\Delta u\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta uF(n\Delta u) = \int_0^{\infty} F(u)du$$

$$\lim_{\Delta u\to 0}\sum_{n=-\infty}^{-1}\Delta uF(n\Delta u) = \int_{-\infty}^{0} F(u)du$$

式 (11.5) で $n \neq 0$ としているのは、$n = 0$ のときのみ

$$c_0 \to \lim_{L\to+\infty}\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)dt < \lim_{L\to+\infty}\frac{M}{L} = 0$$

となるためです。

のフーリエ積分を考えることで、次の等式を証明せよ。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

まず、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt &= \int_{-1}^{1} e^{-iut}dt \\ &= \left[\frac{e^{-iut}}{-iu}\right]_{-1}^{1} \\ &= 2\frac{\sin u}{u}\end{aligned}$$

であることを用いて式 (11.6) に代入すれば

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{\pi u} e^{-iux} du$$

を得ることができます。両辺に $x = 0$ を代入してやれば $f(0) = 1$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi$$

となり、$\dfrac{\sin u}{u}$ が偶関数であることから、所望の式

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を得ることができます。

例 2. 関数 $\delta(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dte^{-itu}$ を考える。このとき、任意の $f(u)$ に対して次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)f(u)du = f(0)$$

上式の左辺と右辺を別々に計算します。右辺でフーリエ積分を用います。

$$(\text{左辺}) = \int_{-\infty}^{\infty} du\delta(u)f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dte^{-itu}f(u)$$

右辺で $f(0)$ をフーリエ積分 (11.6) で展開し

$$(\text{右辺}) = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dte^{-itu}f(u)$$

となり、両辺が一致することがわかります。この $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数と呼ばれ、フーリエ変換の項で現れます。<u>$\delta(x)$ は偶関数</u>であることに注意しましょう。

12　フーリエ変換とディラックのデルタ関数

フーリエ逆変換を示すために次の性質を満たす超関数$\delta(x)$を準備しておきます。

定義 12.1

Dirac の Delta-Function

$\delta(x)$ は次の性質を満たす。

$$x \neq 0 \text{ のとき、} \delta(x) = 0 \tag{12.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{12.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a) \tag{12.3}$$

ここで超関数についての詳しい記述は省きますが、このような $\delta(x)$ を表示する有名な方法はいくつかあり、そのどれもがなんらかの「極限」を基調としていて、一般の関数とは一線を画したものと考えなければなりません。本節では次のような表示法を用います。

定理 12.2

デルタ関数の積分表示

デルタ関数の仮初の表示として、次のような書き方がある。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

この表示がデルタ関数の定義を満たしていることは前項最後の例題で示されています。[*55] 非常に有用な表記であり、フーリエ逆変換が成立することを簡単に示すために利用できます。

12.1　フーリエ変換

定理 12.3

Fourier 変換と逆変換

$f(x)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(x)] = F(k)$ および、$F(k)$ のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^{-1}[F(k)] = f(x)$ を次のように定義する。

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \tag{12.4}$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \tag{12.5}$$

純粋数学の立場では、$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$、$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$ などと書く

---

*55　他にも有名な表示法として、$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |x| \leq \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$ や $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$、$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \exp\{-(-x/\varepsilon)^2\}$、$\rho_\varepsilon(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}$ などが、$\varepsilon \to 0$ において $\lim_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon(x) = \delta(x)$ を満たすことがわかっています。

流儀もありますが、本節では上の定義で説明します。まず $f(x)$ をフーリエ変換して $F(y)$ を求め、$F(y)$ を逆変換すると $f(x)$ に戻ることを示しておきましょう。すなわち

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy\xi}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-iyx}$$

を示せばよいわけですが、右辺の積分順序を入れ替え、指数関数の肩を整理してやれば、次のように書くことができます。

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \underline{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \underline{\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy(\xi - x)}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\xi - x) dx \\
&= f(\xi)
\end{aligned}$$

となり、左辺に一致します。下線部をデルタ関数にまとめたことに注意してください。[*56] (デルタ関数は $\delta(x-\xi) = \delta(\xi - x)$ を満たします)

例 1.　$f(x) = 1$ をフーリエ変換せよ。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx$$

となり、x を $-x$ に置き換えると $F(k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = \underline{2\pi\delta(x)}$ を得ます。

例 2.　次の $f(x)$ をフーリエ変換せよ。$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

$$F(k) = \int_{-1}^{1} e^{-ikx} dx = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\sin k}{k}$$

となります。

例 3.　$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ をフーリエ変換せよ。

$f(x)$ が $1/$(多項式) の形なら、留数定理を使います。詳しくは留数定理の応用の項目を見てください。求めるべきは

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+1} dx$$

であり、上半円 $(k<0)$ に $+i$、下半円 $(k>0)$ に $-i$ の、どちらも一位の極を持つので、

$$\begin{aligned}
F(k) = 2\pi i \mathrm{Res} &= \begin{cases} 2\pi i e^{k} & (k<0) \\ 2\pi i e^{-k} & (k>0) \end{cases} \\
&= 2\pi i e^{-|k|}
\end{aligned}$$

として答えを得ることが出来ます。

例 4.　ガウス関数 e^{-x^2} をフーリエ変換せよ。

ガウス積分を用います。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{ik}{2})^2 - k^2/4} dx = e^{-k^2/4}\int_{-\infty+ik/2}^{\infty+ik/2} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

となりガウス関数のフーリエ変換はガウス関数になることがわかります。(途中計算で複素平面の経路を通っていることに注意 (計算上はただのガウス積分です)。)

[*56] このことは、前項のフーリエ積分を用いることと同じですが、このようにデルタ関数を用いた式変形自体も非常に重要です。

12.2　いくつかの諸公式

収束に関する細かいことは省きます。これらは微分方程式を解く段階で必要になりますが、全て暗記している必要はありません。(まったく知らないのもいけないけど……) 本項では $F(k) = \mathscr{F}[f(x)]$、$G(k) = \mathscr{F}[g(x)]$ とします。

定理 12.4

微分のフーリエ変換

$$\mathscr{F}[\tfrac{d^n}{dx^n}f(x)] = (ik)^n F(k)$$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{d^k}{dx^k}f(x)e^{-ikx} = 0$ (k は n 以下で 0 以上の整数) とすれば部分積分より証明できます。

$$\mathscr{F}[\frac{d}{dx}f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx}dx = [f(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ik)e^{-ik}dx$$

で、右辺第一項が 0 になり、これを繰り返せば定理を示すことができます。

定理 12.5

積分のフーリエ変換

$$\mathscr{F}\Big[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\Big] = \frac{1}{ik}F(k)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$ が成立すると仮定して、部分積分を使えば証明できます。

$$\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right) = \left[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{ik}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

において右辺第一項が 0 になるので、定理を示すことができます。

定理 12.6

変数置換 (拡大)

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F(k/a)$$

これは $ax = y$ と置換して積分すればケリがつきます。ただし a の正負について場合分けしなければなりません。($a < 0$ なら $(x| - \infty \to \infty)\to(y|\infty \to -\infty)$ となることに注意！)

定理 12.7

合成積(たたみこみ)のフーリエ変換

$$\mathscr{F}[f * g(x)] \equiv \mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy\right] = F(k)G(k)$$

右辺から左辺になることを示します。以下において $x + t = y$ と置けば左辺と等しくなります。

$$F(k)G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} dtf(x)g(t)e^{-ik(x+t)}$$

また、これらのほかにも次の公式たちが成立していますが、証明は省きます。

定理 12.8

$$k\text{ の移動}\qquad \mathscr{F}[e^{iax}f(x)] = F(k-a) \tag{12.6}$$
$$x\text{ の移動}\qquad \mathscr{F}[f(x-a)] = e^{-iak}F(k) \tag{12.7}$$
$$\text{積の変換}\qquad \mathscr{F}[f(x)g(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)G(k-\xi)d\xi \tag{12.8}$$

12.3 Planchrel の等式とその応用

次の定理が成立します。

定理 12.9

Planchrel の等式

$\mathscr{F}[f(x)] = F(k)$ とするとき、以下の等式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk|F(k)|^2$$

デルタ関数を使って簡単に証明します。フーリエ変換の定義に従い、

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx,\ \overline{F(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)}e^{iky}dy$$

が成立します。$\overline{f(y)}$ は $f(y)$ の複素共役です。ここで両者を掛け合わせ、$\int_{-\infty}^{\infty} dk$ を作用させると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk|F(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-ikx}\int_{-\infty}^{\infty} dy\overline{f(y)}e^{iky} = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\int_{-\infty}^{\infty} dy\overline{f(y)}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(y-x)}}_{2\pi\delta(y-x)}$$
$$= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\overline{f(y)}\delta(y-x)}_{\overline{f(x)}} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^2$$

となり、証明できました。

例.　次の積分を求めよ。$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

本項第 1 節 [例 2.] において $f(x) = 1(|x| < 1), 0(|x| > 1)$ のフーリエ変換が $F(k) = \dfrac{2\sin k}{k}$ であったことを利用します。Planchrel の等式により

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2\sin k}{k}\right|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{1} dx = 2$$

となるので、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k^2}dk = \pi$ を得ます。

12.4 デルタ関数の再考

デルタ関数の有名な性質として、次のようなものが挙げられます。

定理 12.10

Dirac のデルタ関数が次の式で定められるとする。ただし $f(x)$ は任意の関数である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

このとき Dirac のデルタ関数は、以下の性質を満たす。

(1) $\delta(x) = \delta(-x)$

(2) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$

(3) $x\delta(x) = 0$

(4) $x\delta'(x) = -\delta(x)$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b)$

(6) x_i は $x : [a,b]$ の区間における $g(x) = 0$ の根であり、$g'(x_i) \neq 0$ ならば以下が成立する。

$$\int_a^b f(x)\delta\big(g(x)\big)dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{12.9}$$

(1) と (6) のみ示しておきます。(2) から (5) は (1) とほぼ同じです。デルタ関数に関する恒等式の証明は、「任意の関数 $f(x)$ を用いて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = 0$ を満たすとき、$G(x) = 0$ である」という事実を用いて間接的に示すものが多く、(1) はその典型です。まず任意の関数 $f(x),\ f(-x)$ について、デルタ関数の定義式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta(x) = f(0)$$

が成立します。上第一式と、第二式で $x \to -x$ と書き換えた式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx = f(0)$$

を辺々引くと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Big(\delta(x) - \delta(-x)\Big)dx = 0$$

となり、$\delta(x)$ と $\delta(-x)$ が恒等的に等しいことがわかります。

次に (6) を示します。$g'(x) = dg(x)/dx > 0$ として、x_i を $g(x)$ のゼロ点、ε を十分小さい正数とします。

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx &= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx \\
&= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))\left(\frac{dx}{dg}\right)\delta(g)dg \\
&= \sum_i f(x_i)\left(\frac{dx}{dg}\right)\bigg|_{x=x_i} = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (\because g' > 0)
\end{aligned}$$

ここで $g'(x)<0$ のときは[*57]

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx &= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx \\
&= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))\big(g'(x)\big)^{-1}\delta(g)dg \\
&= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))\big(-|g'(x)|\big)^{-1}\delta(g)dg \\
&= \sum_i \int_{x_i+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} f(x(g))\big(|g'(x)|\big)^{-1}\delta(g)dg = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}
\end{aligned}
$$

となり、所望の式を得ます。この応用として、以下の問題を解いて見ましょう。

例 1.　次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+1}\delta(x^4-1)dx$$

まず $x^4-1=0$ の根は $x=\pm1,\pm i$ であり、積分区間 $[-\infty,\ \infty]$ の中にあるのは $-1,\ +1$ だけなので、これらについてのみ和をとります。$x_i=-1,1$ とし、$|x_i|=1$ であることに気をつけて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+1}\delta(x^4-1)dx = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{(x^4-1)'}\bigg|_{x=x_i} \times \frac{e^{ikx_i}}{x_i^2+1} = \frac{1}{4}\frac{e^{ik}}{1^2+1} + \frac{1}{4}\frac{e^{ik(-1)}}{(-1)^2+1} = \frac{1}{4}\cos k$$

例 2.　次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\infty} \delta(\cos x)e^{-x}\sin x dx$$

$\cos x=0$ の根は $x=\dfrac{2n+1}{2}\pi$ (n は整数) であり、積分区間 $[0,\infty]$ の中にあるのは $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots$ すなわち $x_n=\dfrac{2n+1}{2}\pi\quad(n=0,1,2,\cdots)$ です。この x_n について和を取ります。

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \delta(\cos x)e^{-x}\sin x dx &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x_n}\sin x_n \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-e^{-\pi})^n = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}} = \frac{1}{2\cosh\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

として答えが得られます。

12.5　3 次元に拡張されたデルタ関数

3 次元ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)\quad(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ を変数とするデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r})$ [*58] について扱います。

定義 12.11

3 次元デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r})$ は次の式によって定義される。

$$
\begin{cases}
\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \\
\displaystyle\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}_0) \quad (\boldsymbol{r}_0\in V),\ \delta(\boldsymbol{r})=0\ \ (\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0})
\end{cases}
$$

また、これによって定義されるデルタ関数は次のように表示されることが多いです。

[*57] x ではなく、g が増加するように積分区間を指定することに注意しましょう。

[*58] 一般には $\delta^3(\boldsymbol{r})$ と書く場合もあります。

定理 12.12

3 次元デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r})$ は次の積分表示で表すことができる。

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{V_k}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{k} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_x\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\int_{-\infty}^{\infty}dk_z e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}$$

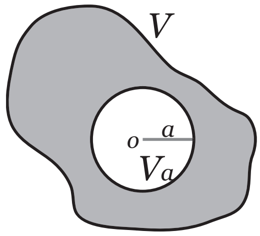
以上が拡張されたデルタ関数の定義と表示法であり、1 次元デルタ関数の拡張に過ぎません。しかし、以下に掲げる定理は非常に重要なものです。

定理 12.13

3 次元ベクトル $\boldsymbol{r}$ と、これを変数に持つ $\delta(\boldsymbol{r})$ について、以下の関係が成立する。

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \quad \boldsymbol{r} = (x, y, z) \tag{12.10}$$

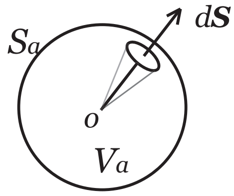
次のように証明します。まず、ベクトル解析の内容を踏まえて $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ および、$-\nabla\frac{1}{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ であることを用いれば、証明すべきことは



$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

であることがわかります。まず、$\boldsymbol{r} \neq 0$ のとき、

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0 \tag{12.11}$$



を確認しておきます。ここで、$\boldsymbol{r} = 0$ を中心として半径 a の球で囲った領域 V_a と、V_a を含む任意領域 V について、領域 V における $\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ の積分を考えます。V_a の表面を S_a で表し、この微小面積素を $d\boldsymbol{S}$ で表すとき、式 (12.11) から、

$$\int_V \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV = \int_{V_a}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV$$

であり、$d\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}dS$ であることと、ガウスの発散定理を用いれば

$$\int_{V_a}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV = \int_{S_a}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_a}\frac{\boldsymbol{r}}{a^3}\cdot\underbrace{d\boldsymbol{S}}_{\frac{\boldsymbol{r}}{r}dS} = \int_{S_a}\frac{dS}{a^2} = \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = 4\pi$$

を得ます。a をどんなに小さくとってもこの式は成立し、

$$\int_V \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV = 4\pi \quad \left(= \int_V 4\pi\delta(\boldsymbol{r})dV\right)$$

すなわち

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

が成り立つことがわかります。これで所望の式が示せました。[*59]

[*59] 蛇足ですが、これを少し一般化して、次の式も成立しています。

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

12.6　3 次元に拡張されたフーリエ変換

デルタ関数同様、フーリエ変換も 3 次元に拡張することができます。

定理 12.14

$f(\boldsymbol{r})$ の 3 次元フーリエ変換 $F(\boldsymbol{k})$、逆変換 $f(\boldsymbol{r})$ は次のように表される。

$$F(\boldsymbol{k}) = \iiint_V f(\boldsymbol{r})\exp(-i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k})d^3\boldsymbol{r}$$

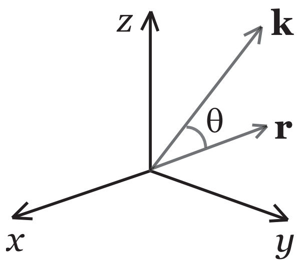
$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_V F(\boldsymbol{k})\exp(i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k})d^3\boldsymbol{k}$$

ただし V は 3 次元空間全体を指す。$d^3\boldsymbol{r}$ の代わりに dV とも書く。

具体的に計算してみましょう。重積分の復習であり、$d^3\boldsymbol{r} = dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$ を用います。

例.　　次の関数を 3 次元フーリエ変換せよ。

$$\frac{\sin r}{r} \quad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$



図のように、任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ が、ベクトル $\boldsymbol{k}$ となす角を θ とします。このとき、$k = |\boldsymbol{k}|$ とおけば $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k} = rk\cos\theta$ と書け、この座標系の下で積分すると、

$$\iiint_V d^3\boldsymbol{r}\frac{\sin r}{r}e^{-i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}} = \int_0^\infty drr^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\frac{\sin r}{r}e^{-ikr\cos\theta}$$

となり、$X = \cos\theta$ とおくと、

θ	$0 \to \pi$
X	$1 \to -1$

であり、$d\theta = \dfrac{dX}{-\sin\theta}$ と書けるから、ϕ、$\theta(X)$ の順に積分して

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty drr^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\frac{\sin r}{r}e^{-ikr\cos\theta} &= 2\pi\int_0^\infty drr\sin r\int_{-1}^1 dXe^{-ikrX} \\
&= 2\pi\int_0^\infty drr\sin r\frac{e^{-ikr}-e^{ikr}}{-ikr} \\
&= \frac{2\pi}{k}\int_0^\infty dr\frac{e^{ir}-e^{-ir}}{2i}\cdot\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{i} \\
&= -\frac{\pi}{k}\int_0^\infty dr\left[e^{ir(k+1)}+e^{-ir(k+1)}-e^{ir(1-k)}-e^{-ir(1-k)}\right] \\
&= -\frac{\pi}{k}\left\{\int_{-\infty}^\infty dre^{ir(k+1)} - \int_{-\infty}^\infty dre^{ir(1-k)}\right\} \\
&= \frac{-\pi}{k}\Big(\delta(k+1)-\delta(1-k)\Big) \\
&= \frac{\pi}{|\boldsymbol{k}|}\Big(\delta(|\boldsymbol{k}|-1)-\delta(|\boldsymbol{k}|+1)\Big)
\end{aligned}$$

これにより、フーリエ変換が求められました。*60

*60　最終式右辺 4 段目では、はじめの 2 項を

$$\int_0^\infty e^{ir(k+1)}dr + \int_0^\infty e^{-ir(k+1)}dr = \int_0^\infty e^{ir(k+1)}dr + \int_{-\infty}^0 e^{ir(k+1)}dr = \int_{-\infty}^\infty e^{ir(k+1)}dr$$

としてまとめています。終わりの 2 項も同様です。
また、最終式右辺 6 段目では、δ 関数が偶関数であることを用いています。

13 ラプラス変換と常微分方程式

かつてヘヴィサイドに始まった演算子法はラプラス変換の理論によって正当化されました。これは変数 t の常微分方程式を解くための技巧理論で、ラプラス変換は次のように定義されます。

定義 13.1

区分的に連続な $f(t)$ について、次の積分

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{13.1}$$

が収束するとき、$F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換という。s は複素変数で、$F(s)$ が収束する範囲 $(\sigma_c < \Re[s])$ に存在するものとする。(σ_c を収束横座標という)

ラプラス変換には収束に関するうるさい束縛がつきますが、本節では細かい箇所を省き、なるべく「方程式を解く」ことに主眼をおきます。

例題. (1) $\cos\omega t$ (2) t^n (n は自然数) (3)e^{at} $(a>0)$ のラプラス変換を求めよ。

(1) $\cos\omega t \to e^{i\omega t}$ と直して積分します。

$$\int_0^\infty e^{(i\omega - s)t}dt = \frac{1}{i\omega - s}\left[e^{(i\omega-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-i\omega} \quad (\text{収束するように}\Re[s]>0\text{とする})$$
$$= \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}$$

の実部を取って $\mathscr{L}[\cos(\omega t)] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ を得ます。

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty t^n e^{-st}dt$ とおくと、部分積分により

$$I_n = \left[\frac{-1}{s}e^{-st}t^n\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{s}e^{-st}nt^{n-1}dt = 0 + \frac{n}{s}I_{n-1} \qquad (\Re[s]>0\text{とする})$$

となるので $I_n = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ が得られます。

(3) 単純に積分して求めます。

$$\int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \qquad (\Re[s]>a\text{とする})$$

$f(t)$ とそのラプラス変換 $F(s)$ について、以下の表を記しておきます。

ラプラス変換表

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$e^{bt}\sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$t\sin at$	$\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$
$\delta(t)$	1

次にラプラス変換の諸公式についておさえておきます。ラプラス変換した後、これを元に戻す逆変換は難しいので、これら公式 (および上のリスト) を使って逆変換を行うためです。(もちろん逆変換は後で扱います)

13.1　いくつかの諸公式

(収束性にこだわらなければ) どれも証明自体は難しくありません。これらの公式は道具として使われるものであって、具体的な問題で要求されるごとに手になじませていってください。いきなり覚える必要はありません。

定理 13.2

微分のラプラス変換

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{n-1}(0)$$

が成り立つ。特に、$n = 1, 2$ では

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = [e^{-st}f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-st}f(t)dt = -f(0) + sF(s)$$

のように、部分積分を繰り返して導くことができます。逆に積分について以下が成立します。

定理 13.3

積分のラプラス変換

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

が成立する。

やはり部分積分を用います。

$$(\text{左辺}) = \int_0^\infty dte^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau = \left[\frac{-e^{-st}}{s}\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

ここで第 1 項が 0 に収束するので定理を得ます。

定理 13.4

場合分け関数のラプラス変換

ヘヴィサイドの階段(ステップ)関数

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

に対して、次の関係が成立する。ただし $a > 0$.

$$\mathscr{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}F(s) \tag{13.2}$$

$t - a = \tau$ とおきかえます。

$$(\text{左辺}) = \int_{-a}^\infty H(\tau)f(\tau)e^{-s(a+\tau)}d\tau = e^{-sa}\int_{-a}^0 \underline{H(\tau)}f(\tau)e^{-s\tau}d\tau + e^{-sa}\int_0^\infty H(\tau)f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$H(t)$ の定義より下線部は 0、波線部は 1 となり、ラプラス変換の定義から上の定理を得ます。

定理 13.5

合成積(畳み込み積分)（コンボリューション）

$f(t)$ と $g(t)$ の合成積を

$$f * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

で定義するとき、次の関係が成立する。ただし $\mathscr{L}[f] = F, \mathscr{L}[g] = G$ とする。

$$\mathscr{L}[f * g(t)] = \mathscr{L}[f]\mathscr{L}[g] = F(s)G(s)$$

フーリエ変換でも使う次の変換を考えます。中辺で $z = x - y$ とおいていることに注意。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dyu(x-y)v(y)e^{-sx} &= \int_{-\infty}^{\infty} dzu(z) \int_{-\infty}^{\infty} dyv(y)e^{-s(z+y)} \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dzu(z)e^{-sz} \right\}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dyv(y)e^{-sy} \right\}\end{aligned}$$

前ページにも現れたヘヴィサイドの階段関数 $H(x)$ を使って $u(x) = H(x)f(x)$、$v(y) = H(y)g(y)$ とおけば定理を示すことができます。

これら以外にも、以下のような関係が成立しますが証明は省略します。上の定理たちの導出を参考にしてください。

定理 13.6

次のそれぞれの関係が成立する。

微分の逆変換	$F'(s) = \mathscr{L}[-tf(t)]$	移動の逆変換	$F(s-a) = \mathscr{L}[e^{at}f(t)]$
積分の逆変換	$\int_s^{\infty} F(k)dk = \mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}]$	逆変換の拡大	$F(as) = \mathscr{L}[\frac{1}{a}f(\frac{t}{a})]$

説明なしに「逆変換」という言葉を使っていますが、ラプラス逆変換は次のように定義されます。

定義 13.7

$F(s)$ を $f(t)$ に戻す (積分) 変換をラプラス逆変換と呼び、次のように記述する。

$$\mathscr{L}^{-1}[F(t)] = f(t)$$

例 1. $F(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ のラプラス逆変換を求めよ。

部分分数分解します。

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

となり、p89 のラプラス変換表 (あるいは例 3.) を参照し、$\mathscr{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$ となるから、

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \mathscr{L}[2e^{-t}] - \mathscr{L}[e^{-2t}] = \mathscr{L}[2e^{-t} - e^{-2t}]$$

より、$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \underline{2e^{-t} - e^{-2t}}$ を得ることができます。

例 2. $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}$ のラプラス逆変換 $g(t)$ を求めよ。

$$G(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \mathscr{L}[t] - \mathscr{L}[1] + \mathscr{L}[e^{-t}] = \mathscr{L}[t - 1 + e^{-t}]$$

として、$\mathscr{L}^{-1}[G(s)] = t - 1 + e^{-t}$ を得ます。

例 2. 別解　積分のラプラス変換の公式を使うと、$F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$、$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ とおいて、

$$\frac{1}{s}F(s) = \mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]$$

と書けます。$f(t)$ を求めましょう。部分分数分解により $\dfrac{1}{s(s+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}$ であり、やはりラプラス変換表にしたがって

$$F(s) = \mathscr{L}[1] - \mathscr{L}[e^{-t}] = \mathscr{L}[1 - e^{-1}]$$

により $f(t) = 1 - e^{-t}$ を得ることができます。最後に

$$G(s) = \frac{1}{s}F(s) = \mathscr{L}\left[\int_0^t (1 - e^{-\tau})d\tau\right] = \mathscr{L}[e^{-t} - 1 + t]$$

と書けるから $\mathscr{L}^{-1}[G(s)] = \underline{e^{-t} - 1 + t}$ を得ることができます。

例 3.　$F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)(s+1)^2}$ のラプラス逆変換を求めよ。

部分分数分解とラプラス変換表により、

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2(s+1)^2} = \frac{1}{2}\mathscr{L}[\sin t] - \frac{1}{2}\mathscr{L}[te^{-t}] = \mathscr{L}\left[\frac{\sin t - te^{-t}}{2}\right]$$

と書けるから、求めるべき逆変換は $\dfrac{\sin t - te^{-t}}{2}$ になります。

このように部分分数分解とラプラス変換表を使えば逆変換を求めることができます。次項でラプラス逆変換を定式化しますが、やや難しいので、表を見ながら (あるいは主要なラプラス変換を覚えて) 逆変換するのも良いでしょう。

13.2　ラプラス逆変換の定式化

定理 13.8

ラプラス逆変換

$t > 0$ において、$F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ は次のように定式化できる。

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st}ds$$

ただし $\sigma > \sigma_c$ とする。

フーリエ変換で準備していたデルタ関数を使えば、成立を示すことができます。ただし、もっぱら使うのはこれを応用した次の定理です。

定理 13.9

$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ が s(複素) 平面内に $\Re(s) < \sigma_c$ の領域でローラン展開不能な特異点を持たず、定数 M, k について、$F(s) \leq \dfrac{M}{|s|^k}$ ならば

$$f(t) = \sum \mathrm{Res}_n$$

が成立する。ただし Res_n は $\underline{\underline{F(s)e^{st}}}$ の極 s_n に対する留数である。

証明は省略します。

例 1.　$\dfrac{1}{s}$ のラプラス逆変換を求めよ。

$s=0$ が 1 位の極なので留数は 1 です。つまり $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]=1$ となり、p89 の表に合致します。

例 2.　$\dfrac{1}{s^2+1}$ のラプラス変換を求めよ。

極は $s=\pm i$ の 2 つでどちらも 1 位です。それぞれの留数は

$$\mathrm{Res}(i)=\lim_{s\to i}\frac{e^{st}}{(s^2+1)'}=\frac{1}{2i}e^{it}\ ,\quad \mathrm{Res}(-i)=\lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{(s^2+1)'}=\frac{1}{-2i}e^{-it}$$

となり、和を取って $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\sin t$ が得られ、やはり変換表に合致します。

例 3.　$\dfrac{s+3}{(s-1)(s^2-2s+5)}$ のラプラス逆変換を求めよ。極は $s=1,1+2i,1-2i$ の 3 つで全て 1 位です。これらについて留数を取ると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(1)&=\lim_{s\to 1}\frac{(s+3)e^{st}}{\{(s-1)(s^2-2s+5)\}'}=\lim_{s\to 1}\frac{(s+3)e^{st}}{(s^2-2s+5)+2(s-1)^2}=e^t\\
\mathrm{Res}(1+2i)&=\lim_{s\to 1+2i}\frac{(s+3)e^{st}}{(s^2-2s+5)+2(s-1)^2}=\frac{4+2i}{-8}e^te^{2it}\\
\mathrm{Res}(1-2i)&=\lim_{s\to 1-2i}\frac{(s+3)e^{st}}{(s^2-2s+5)+2(s-1)^2}=\frac{4-2i}{-8}e^te^{-2it}
\end{aligned}$$

となるので、それぞれ和を取って $e^t-e^t\cos 2t+\dfrac{1}{2}e^t\sin 2t$ が求めるべきラプラス逆変換になります。

このように、留数定理を知っていれば自前の変換表無しで逆変換を求めることができます。次項ではラプラス変換と逆変換を使って、常微分方程式を解くことになります。

13.3　常微分方程式を解く

スタイルは次のとおりです。

戦略 13.10

線形方程式を解く手法

0.　求める関数 $f(t)$ について方程式を作る。
1.　方程式を両辺ラプラス変換する。
2.　$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求める。
3.　$F(s)$ をラプラス逆変換する。

例 1.　次の方程式を解け。ただし f' は $\dfrac{df}{dt}$ を表すものとする。

$$f''(t)-3f'(t)+2f(t)=t\quad (f(0)=0,f'(0)=0)$$

まず両辺をラプラス変換します。$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ として、微分のラプラス変換の公式を使えば

$$\begin{aligned}
(\text{与式左辺のラプラス変換})&=(s^2F-sf(0)-f(0))-3(sF-s(0))+2F\\
&=(s^2-3s+2)F(s)
\end{aligned}$$

および

$$(\text{与式右辺のラプラス変換})=\int_0^\infty te^{-st}dt=\frac{1}{s^2}$$

となるから、これから $F(s)$ を求めると

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s^2-3s+2)}$$

を得ることができます。

(留数から求める場合)　$s=0$ が 2 位の極、$s=1,2$ がそれぞれ 1 位の極であり、それぞれの留数は $F'=\dfrac{dF}{ds}$ として

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(0) &= \lim_{s\to 0}\left\{\frac{e^{st}}{s^2-3s+2}\right\}' = \lim_{s\to 0}\frac{te^{st}(s^2-3s+2)-e^{st}(2s-3)}{(s^2-3s+2)^2} = \frac{1}{2}t+\frac{3}{4} \\
\mathrm{Res}(1) &= \lim_{s\to 1}\frac{e^{st}}{\{s^2(s^2-3s+2)\}'} = \lim_{s\to 1}\frac{e^{st}}{2s(s^2-3s+2)+s^2(2s-3)} = -e^t \\
\mathrm{Res}(2) &= \lim_{s\to 2}\frac{e^{st}}{2s(s^2-3s+2)+s^2(2s-3)} = \frac{1}{4}e^{2t}
\end{aligned}$$

となるから、それぞれ足し合わせて $f(t)=\underline{\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}-e^t+\frac{1}{4}e^{2t}}$ が得られます。

(変換表を使う場合)　部分分数分解して $F(s)=\dfrac{1}{2s^2}+\dfrac{3}{4s}-\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{4(s-2)}$ とし、変換表によれば $f(t)=\underline{\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}-e^t+\frac{1}{4}e^{2t}}$ が得られます。

例 2.　次の方程式を解け。ただし $y(0)=1$ とする。

$$\frac{d}{dt}y(t)+3y(t)+\int_0^t e^{-(t-\tau)}y(t)d\tau = -e^{-t}$$

左辺第三項は畳み込み積分を使います。両辺ラプラス変換すると、$\mathscr{L}[y]=Y(s)$ として

$$sY-y(0)+3Y+\frac{Y}{1+s}=-\frac{1}{1+s}$$

となり、整理して Y を求めると $Y=\dfrac{s}{(s+2)^2}$ となり、これを逆変換すれば y が求められます。$s=-2$ が 2 位の極なので留数は

$$\mathrm{Res}=\lim_{s\to -2}(se^{st})'=\underline{(1-2t)e^{-2t}}$$

となり、これが $y(t)$ になります。変換表に従っても同様の結果を得ることができます。

例 3.　次の方程式を解け。ただし $x(0)=0$ とする。

$$\frac{dx}{dt}+\int_0^t x(\tau)d\tau=\begin{cases}\sin t & (0\le t<\pi)\\ 0 & (\pi\le t)\end{cases}$$

右辺に場合分け関数がきているので場合分け関数のラプラス変換の公式を使います。その前に、両辺をラプラス変換しておきましょう。右辺のラプラス変換は

$$\mathscr{L}[(\text{与式右辺})]=\int_0^\pi e^{-st}\sin tdt+\int_\pi^\infty \cdot 0\cdot dt$$

となり、この積分を I とおくと、部分積分により

$$I=[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin t]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{-1}{s}e^{-st}\cos tdt=[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\cos t]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{-1}{s^2}e^{-st}(-\sin t)dt=\frac{1}{s^2}(1+e^{-s\pi})-\frac{1}{s^2}I$$

となり、$I=\dfrac{1+e^{-s\pi}}{1+s^2}$ を得ます。また、与式左辺第二項は x の積分式なので、積分のラプラス変換の公式を使います。$\mathscr{L}[x(t)]=F(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}[\int_0^t x(\tau)d\tau]=\frac{1}{s}F(s)$$

と書け、これで与式両辺のラプラス変換を

$$sF(s)-x(0)+\frac{1}{s}F(s)=\frac{1+e^{-s\pi}}{1+s^2}$$

と書くことができます。両辺を整理して $F(s)$ を求めると

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}(1+e^{-s\pi})$$

と書け、これをラプラス逆変換すれば $x(t)$ を求めることができます。ここで与えられた微分方程式が場合分けの関数を含んでいるとき、その方程式の解も場合分け関数になるということを覚えておいてください。本問がまさにそのパターンです。$G(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ とおくと、

$$F(s) = G(s) + G(s)e^{-s\pi}$$

と書くことができ、$G(s)$ のラプラス逆変換 $\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ は

$$\mathscr{L}^{-1}[G(s)] = \frac{t}{2}\sin t$$

として求められます。次に $G(s)e^{-s\pi}$ のラプラス逆変換ですが、これは場合わけ関数のラプラス変換の公式を使って

$$\mathscr{L}^{-1}[G(s)e^{-s\pi}] = H(t-\pi)\frac{t-\pi}{2}\sin(t-\pi)$$

として得ることができます。ただし $H(t)$ はヘヴィサイドの階段関数です。これら 2 つの逆変換を足し合わせて

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2}\sin t & (t < \pi) \\ \dfrac{\pi}{2}\sin t & (\pi \leq t) \end{cases}$$

を得ます。これが答えとなります。