物理数学コース

フーリエ解析

井町昌弘
内田伏一
共著

裳華房

デルタ関数の性質

ディラックのデルタ関数 $\delta(k)$ は $k=0$ での値のみが無限に大きく，$\delta(k)$ を含む積分には $k=0$ のみが寄与し，次の関係が成り立つ：

(7.8) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k)\,dk = 1\,.$$

これを考察してみよう．このために，$\delta_L(k)$ の積分を考える．まず

(7.9) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_L(k)\,dk = 1 \qquad (L>0)$$

を示そう（$L=$ 任意の正の数）．$t=kL$ と変数変換をすると (7.5) から

(7.10) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_L(k)\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kL}{\pi k}\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t}\,dt$$

となる．最後の結果は L が正なら，その大きさによらないことを示している．負なら最後の結果は符号を変える．さて，

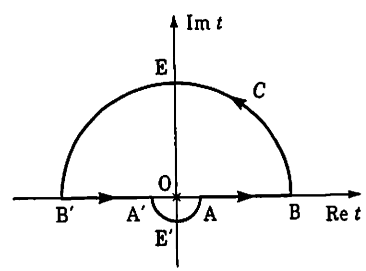
(7.11) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t}\,dt = 1$$

はコーシーの留数定理（p.41 参照）を借りてきて示せる．(7.9) で L は任意の正の数であったから，$L\to\infty$ でも成り立ち，(7.8) が得られる．

例題 7.1　次を示せ．

(7.12) $$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \pi\,.$$

［解］ $$J = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}-e^{-it}}{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is}}{s}\,ds\right)$$
$$= \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t}\,dt = \frac{1}{i}I.$$



J の積分を知るためには

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t}\,dt$$

を求めなければならない．そのために，t を複素数に拡張しよう．積分 I は t の実軸に沿っての $-\infty$ から ∞ までの積分である．これを求めるために図のような閉曲線 C（A→B→E→B′→A′→E′→A）を考える．この閉曲線 C に沿った積分 I_C は次のように表せる：

$$I_C = \oint_C \frac{e^{it}}{t}\,dt = I_{\mathrm{AB}} + I_{\mathrm{BEB'}} + I_{\mathrm{B'A'}} + I_{\mathrm{A'E'A}}\,. \qquad ①$$

$I_{\mathrm{AB}} + I_{\mathrm{B'A'}} = I_{\varepsilon,R}$，$I_{\mathrm{BEB'}} = I_R$，$I_{\mathrm{A'E'A}} = I_\varepsilon$ と書こう．$\varepsilon\to 0$，$R\to\infty$ の極限で

$$I_{\varepsilon,R} = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{it}}{t}\,dt$$

は求める積分 I に近づく：$\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} I_{\varepsilon,R} = I$.

① の被積分関数は $t=0$ に 1 位の極をもちそれ以外には特異点はない．$t=0$ における留数は $[\,e^{it}]_{t=0}=1$ だからコーシーの留数定理によって

$$I_C = I_{\varepsilon,R} + I_R + I_\varepsilon = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i\,. \qquad ②$$

また，下半円周上で $t=\varepsilon e^{i\theta}$（$\varepsilon=$ 正の定数，$\theta=$ 角度変数），$dt = i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta$ となるから

$$I_\varepsilon = \int_{\mathrm{A'E'A}} \frac{e^{it}}{t}\,dt = \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\, i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} i\int_{-\pi}^{0} d\theta = i\pi$$

を得る．ここで，$\varepsilon\to 0$ において $\exp(i\varepsilon e^{i\theta})\to 1$ であることを使った．上半円上で $t = Re^{i\theta}$（$R=$ 正の定数，$\theta=$ 角度変数），$dt = iRe^{i\theta}\,d\theta$ だから

$$I_R = \int_{\mathrm{BEB'}} \frac{e^{it}}{t}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\, iRe^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{\pi} e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}\,d\theta$$

となり，この積分の大きさの上限は

$$|I_R| \leqq \int_0^{\pi} |e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}|\,d\theta = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,|e^{iR\cos\theta}|\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta\,.$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $\dfrac{2}{\pi}\leqq\dfrac{\sin\theta}{\theta}\leqq 1$ であるから，$\alpha=\dfrac{2}{\pi}$ として，$\sin\theta\geqq\alpha\theta$ だから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\alpha\theta}\,d\theta = -\frac{1}{R\alpha}\Big[e^{-R\alpha\theta}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{R\alpha}\left(1-e^{-\frac{R\alpha\pi}{2}}\right).$$

この値は $R\to\infty$ で 0 に近づくから，$I_{\mathrm{BEB'}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$ となることがわかった．したがって $R\to\infty$，$\varepsilon\to 0$ の極限で

$$I_C = I_{\varepsilon,R} + I_R + I_\varepsilon \to I + 0 + i\pi$$

となる．この値が ② により，$I_C = 2\pi i$ だから $I=\pi i$ が得られ，これにより $J = I/i = \pi$ となって (7.12) が示された．◇