# 第10章　確率微分方程式

## 10.1　確率微分方程式の定義

**定義 10.1** $\mu$ と $\sigma$ を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}$ への所与の関数としたとき，未知の確率過程 $\{X(t);\, t\in\mathbb{R}^+\}$ に関する方程式

$$\mathrm{d}X(t)=\mu(X(t),t)\mathrm{d}t+\sigma(X(t),t)\mathrm{d}B(t) \tag{10.1}$$

を（拡散過程型）**確率微分方程式** (**SDE**: Stochastic Differential Equation) という．

**定義 10.2** 所与のブラウン運動 $\{B(s);\, s\in[0,t]\}$ に対して，$X(t)$, $t\in\mathbb{R}^+$, が $(t,\{B(s);\, s\in[0,t]\})$ の関数であり，$\int_0^t \mu(X(s),s)\mathrm{d}s$ と $\int_0^t \sigma(X(s),s)\mathrm{d}B(s)$ が存在して

$$X(t)=\int_0^t \mu(X(s),s)\mathrm{d}s+\int_0^t \sigma(X(s),s)\mathrm{d}B(s). \tag{10.2}$$

を満たすとき，$X(t)$ は確率微分方程式 (10.1) の**強解** (strong solution) であるという．

**注 10.1** 以下，本書では，強解を解と呼ぶ．確率微分方程式の解には, 強解の他に弱解がある．本書では，弱解は扱わない．弱解とその性質などについては，例えば，karatzas ans Shreve (1991), Ikeda and Watanabe (1981) などを参照して欲しい．

## 10.2　線形確率微分方程式

**定義 10.3** $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ を見本路が連続な適合過程としたとき，確率微分方程式

$$\mathrm{d}X(t)=(\alpha(t)+\beta(t)X(t))\mathrm{d}t+(\gamma(t)+\delta(t)X(t))\mathrm{d}B(t). \tag{10.3}$$

を**線形確率微分方程式** (Linear SDE) と呼ぶ．

はじめに (10.3) において $\alpha = \gamma = 0$ の場合について考える．

**定理 10.1** 線形確率微分方程式;

$$\mathrm{d}X(t) = \beta(t)X(t)\mathrm{d}t + \delta(t)X(t)\mathrm{d}B(t). \tag{10.4}$$

の解は,

$$X(t) = X(0)\exp\left(\int_0^t \left(\beta(s) - \frac{1}{2}\delta(s)^2\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \delta(s)\mathrm{d}B(s)\right). \tag{10.5}$$

**証明** $Y = \{Y(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ を

$$\mathrm{d}Y(t) = \beta(t)\mathrm{d}t + \delta(t)\mathrm{d}B(t)$$

で定義される伊藤過程とすると，(10.4) は,

$$\mathrm{d}X(t) = X(t)\mathrm{d}Y(t) \tag{10.6}$$

となる．(10.6) は，$Y$ の確率指数であるから，???より

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathcal{E}(Y)(t) \\ &= X(0)\exp\left(Y(t) - Y(0) - \frac{1}{2}[Y,Y](t)\right) \\ &= X(0)\exp\left(\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \delta(s)\mathrm{d}B(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \delta(s)^2\mathrm{d}s\right) \\ &= X(0)\exp\left(\int_0^t \left(\beta(s) - \frac{1}{2}\delta(s)^2\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \delta(s)\mathrm{d}B(s)\right) \end{aligned}$$

□

**例 10.1** 線形確率微分方程式；

$$\mathrm{d}X(t) = rX(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}B(t) \tag{10.7}$$

について考える．いまの場合，(10.4) において，$\beta(t) = r$, $\delta(t) = \sigma$ とした場合であるから，その解は次式で与えられる．

$$X(t) = X(0)\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right). \tag{10.8}$$

□

次に (10.3) の解について考える．

**定理 10.2** 線形確率微分方程式 (10.3) の解は次式で与えられる．

$$X(t)=U(t)\left(X(0)+\int_0^t\frac{\alpha(s)-\delta(s)\gamma(s)}{U(s)}\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\gamma(s)}{U(s)}\mathrm{d}B(s)\right). \tag{10.9}$$

ただし，ここで

$$U(t):=\exp\left(\int_0^t\left(\beta(s)-\frac{1}{2}\delta(s)^2\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\delta(s)\mathrm{d}B(s)\right).$$

**証明** $\{U(t);\,t\in\mathbb{R}^+\}$ と $\{V(t);\,t\in\mathbb{R}^+\}$ を各々次の確率微分方程式の解とする．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U(t) &= \beta(t)U(t)\mathrm{d}t+\delta(t)U(t)\mathrm{d}B(t),\quad U(0)=1,\\ \mathrm{d}V(t) &= a(t)\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}B(t),\quad V(0)=X(0).\end{aligned}$$

このとき，$a$ と $b$ を上手く定めることによって，

$$\mathrm{d}X(t)=\mathrm{d}(U(t)V(t)) \tag{10.10}$$

とすることができれば，(10.3) の解は

$$X(t)=U(t)V(t)$$

で与えられることになる．伊藤公式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(U(t)V(t)) &= V(t)\mathrm{d}U(t)+U(t)\mathrm{d}V(t)+\mathrm{d}U(t)\mathrm{d}V(t)\\ &= \beta(t)X(t)\mathrm{d}t+\delta(t)X(t)\mathrm{d}B(t)+a(t)U(t)\mathrm{d}t+b(t)U(t)\mathrm{d}B(t)\\ &\qquad +b(t)\delta(t)U(t)\mathrm{d}t\\ &= (a(t)U(t)+b(t)\delta(t)U(t)+\beta(t)X(t))\mathrm{d}t\\ &\qquad +(b(t)U(t)+\delta(t)X(t))\mathrm{d}B(t).\end{aligned}$$

したがって，(10.10) を満たすには，

$$b(t):=\frac{\gamma(t)}{U(t)},\quad a(t):=\frac{\alpha(t)-\delta(t)\gamma(t)}{U(t)}$$

とすればよい．$U(t)$ は，定理 10.1 において $X(t)=U(t)$ として (10.5) で与えられるので，結局，(10.3) の解は，(10.9) で与えられる． □

**例 10.2** $a$ を適合的な連続過程として，SDE;

$$\mathrm{d}X(t) = a(t)X(t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B(t) \tag{10.11}$$

の解を考える．いまの場合，(10.3) において，$\beta(t) = a(t)$，$\gamma(t) = 1$，$\alpha(t) = \delta(t) = 0$ とした場合であるから，$U(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}$ として，(10.9) より，

$$X(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}\left(X(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^u a(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}B(u)\right).$$

□

## 10.3　解の存在と一意性

**定義 10.4 (強解の一意性)** 確率微分方程式の任意の強解 $\xi_t$, $\tilde{\xi}_t$, $t \in [0,T]$, が，

$$P\left\{\sup_{t\in[0,T]} |\xi_t - \tilde{\xi}_t| > 0\right\} = 0$$

となるとき，解は一意であるという.

**定理 10.3** $L_1$, $L_2$ を定数として，可測関数 $a(t,x), b(t,x), (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ が，

$$\begin{aligned}
\textbf{Lipschitz 条件} \quad &: \quad |a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \le L_1|x-y|, \\
&\qquad\qquad t \in [0,T],\ x,y \in \mathbb{R}, \quad (10.12) \\
\textbf{増大条件} \quad &: \quad |a(t,x)| + |b(t,x)| \le L_2(1+|x|), \\
&\qquad\qquad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R} \quad (10.13)
\end{aligned}$$

を満たすとする．また，$\eta$ を $\mathbb{E}[\eta^2] < \infty$ となる $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数とする．このとき，SDE；

$$\mathrm{d}X(t) = a(t,x)\mathrm{d}t + b(t,x)\mathrm{d}B(t), \quad X(0) = \eta \tag{10.14}$$

の解 $X(t)$, $t \in [0,T]$, が一意存在し，

$$\int_0^T \mathbb{E}[X(t)^2]\mathrm{d}t \le \infty \tag{10.15}$$

を満たす.

定理 10.3 の証明に先立って，証明に必要な不等式を補題として示しておく．

**補題 10.1 (Gronwall の不等式)** $u(t), v(t)$，$w(t), t \in [0, T]$，を非負関数で，次式を満たすものとする．

$$u(t) \leq v(t) + \int_0^t w(s)u(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [0, T]. \tag{10.16}$$

このとき，次が成立する．

$$u(t) \leq v(t) + \int_0^t v(s)w(s) \exp\left\{\int_s^t w(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right\} \mathrm{d}s, \quad t \in [0, T]. \tag{10.17}$$

**証明**　$y(t) := \int_0^t w(s)u(s)\mathrm{d}s$ とおくと，(10.16) より

$$y'(t) - w(s)y(t) \leq w(t)v(t). \tag{10.18}$$

また，$z(t) := y(t) \exp\left(-\int_0^t w(s)\mathrm{d}s\right)$ とくおくと，(10.18) より，

$$z'(t) \leq v(t)w(t) \exp\left(-\int_0^t w(s)\mathrm{d}s\right).$$

したがって，$z(0) = 0$ に注意すると，

$$z(t) \leq \int_0^t v(s)w(s) \exp\left(-\int_0^s w(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right) \mathrm{d}s.$$

$z(t)$ の定義より，

$$y(t) \leq \int_0^t v(s)w(s) \exp\left(\int_s^t w(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right) \mathrm{d}s.$$

さらに，ここで，$y(t)$ の定義と (10.16) より，$u(t) \leq v(t) + y(t)$ となることに注意すると，(10.17) を得る．□

**補題 10.2** $f : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ を $\int_0^T f_t^2 \mathrm{d}s < \infty$ a.s. となる可予測過程とする．このとき，任意の $\delta > 0$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して，次が成立する．

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t f(s, \omega)\mathrm{d}B(s)\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\delta}{\epsilon^2} + P\left(\int_0^T f(s, \omega)^2 \mathrm{d}s > \delta\right).$$

**証明**

$$\tau_\delta(\omega) := \begin{cases} \inf\left\{t \in [0,T];\ \int_0^t f(s,\omega)^2 \mathrm{d}s \geq \delta\right\} & ;\ \int_0^T f(s,\omega)^2 \mathrm{d}s \geq \delta \\ T & ;\ \int_0^T f(s,\omega)^2 \mathrm{d}s < \delta \end{cases}$$

として，$f_\delta(s,\omega) := f(s,\omega)1_{s\leq\tau_\delta(\omega)}$ とすると，

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f_\delta(s)\mathrm{d}B(s)\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[f_\delta(s)^2\right]\mathrm{d}s \leq \delta < \infty.$$

$$\left\{\omega\in\Omega;\ \int_0^T f_\delta(s)^2\mathrm{d}s \leq \delta\right\} \subset \left\{\omega\in\Omega;\ \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t (f(s) - f_\delta(s)\mathrm{d}B(s)\right| = 0\right\}.$$

$\therefore$

$$\left\{\omega\in\Omega;\ \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t (f(s) - f_\delta(s))\mathrm{d}B(s)\right| > 0\right\} \subset \left\{\omega\in\Omega;\ \int_0^T f(s)^2\mathrm{d}s > \delta\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\qquad & P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}B(s)\right| > \epsilon\right) \\
= \ & P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t f_\delta(s)\mathrm{d}B(s) + \int_0^t (f(s) - f_\delta(s))\mathrm{d}B(s)\right| > \epsilon\right) \\
\leq \ & P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t f_\delta(s)\mathrm{d}B(s)\right| > \epsilon\right) \\
& \quad + P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t (f(s) - f_\delta(s))\mathrm{d}B(s)\right| > 0\right) \\
\leq \ & P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t f_\delta(s)\mathrm{d}B(s)\right| > \epsilon\right) + P\left(\int_0^T f(s)^2\mathrm{d}s > \delta\right) \\
\leq \ & \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f_\delta(s)\mathrm{d}B(s)\right)^2\right] + P\left(\int_0^T f(s)^2\mathrm{d}s > \delta\right) \\
& (\because\ \text{定理??の不等式}) \\
\leq \ & \frac{\delta}{\epsilon^2} + P\left(\int_0^T f(s)^2\mathrm{d}s > \delta\right).
\end{aligned}$$

□

**定理 10.3 の証明**　はじめに一意性を示す．$\xi := \{\xi_t;\, t \in [0,T],\, \xi_0 = \eta\}$ と $\tilde{\xi} := \{\tilde{\xi}_t;\, t \in [0,T],\, \tilde{\xi}_0 = \eta\}$ を (10.14) の解とすると，

$$\xi_t - \tilde{\xi}_t = \int_0^t (a(s,\xi_s) - a(s,\tilde{\xi}_s))\mathrm{d}s + \int_0^t (b(s,\xi_s) - b(s,\tilde{\xi}_s))\mathrm{d}B(s).$$

よって，(10.12) より，

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left(\xi_t - \tilde{\xi}_t\right)^2\right] \\ \le\ & 2T\int_0^t \mathbb{E}\left[\left(a(s,\xi_s) - a(s,\tilde{\xi}_s)\right)^2 + \left(b(s,\xi_s) - b(s,\tilde{\xi}_s)\right)^2\right]\mathrm{d}s \\ \le\ & 2L_1^2 T\int_0^t \mathbb{E}\left[(\xi_s - \tilde{\xi}_s)^2\right]\mathrm{d}s.^1 \end{aligned} \tag{10.19}$$

ここで，補題 10.1 の Gronwall の不等式を (10.19) に適用すると，

$$\mathbb{E}\left[(\xi_t - \tilde{\xi}_t)^2\right] = 0.$$

$\therefore\ (\xi_t - \tilde{\xi}_t)^2 = 0$ a.s. 以上により，一意性が示された．

次に存在性を示す．

$$\begin{aligned} \xi_t^{(0)} &:= \eta, \\ \xi_t^{(n)} &:= \eta + \int_0^t a(s,\xi_s^{(n-1)})\mathrm{d}s + \int_0^t b(s,\xi_s^{(n-1)})\mathrm{d}B_s, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{10.20}$$

とする．

（10.20）と (10.13) より，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(0)}\right)^2\right] &\le 2T\int_0^t \mathbb{E}\left[a(s,\xi_s^{(0)})^2 + b(s,\xi_s^{(0)})^2\right]\mathrm{d}s \\ &\le 2L_2^2 T\int_0^t \mathbb{E}\left[(1+|\eta|)^2\right]\mathrm{d}s \le Lt. \end{aligned}$$

ただし，ここで，$L := 2\max\{L_1^2 T, L_2^2 T\mathbb{E}\left[(1+|\eta|)^2\right]\}$ とした．

---

[1]最初の不等式には，$(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 及び Schwartz の不等式と伊藤の等長性を用いた．

（10.20）と (10.12) より，

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\left(\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}\right)^2\right] \\
\leq\ & 2T\int_0^t \mathbb{E}\left[\left(a(s,\xi_s^{(n)})-a(s,\xi_s^{(n-1)})\right)^2+\left(b(s,\xi_s^{(n)})-b(s,\xi_s^{(n-1)})\right)^2\right]\mathrm{d}s \\
\leq\ & 2L_1^2T\int_0^t \mathbb{E}\left[\left(\xi_s^{(n)}-\xi_s^{(n-1)}\right)^2\right]\mathrm{d}s \\
\leq\ & L\int_0^t \mathbb{E}\left[\left(\xi_s^{(n)}-\xi_s^{(n-1)}\right)^2\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

これより，帰納的に，

$$
\mathbb{E}\left[\left(\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}\right)^2\right]\leq\frac{(Lt)^{n+1}}{(n+1)!},\quad n\in\mathbb{N} \tag{10.21}
$$

となる．また，

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\left|\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}\right| \ \leq\ & \left|\int_0^T a(s,\xi_s^{(n)})-a(s,\xi_s^{(n-1)})\mathrm{d}s\right| \\
& +\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t [b(s,\xi_s^{(n)})-b(s,\xi_s^{(n-1)})]\mathrm{d}B_s\right|.
\end{aligned}
$$

が成立することに注意すると，

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}\right|>2^{-n}\right\} \\
\leq\ & P\left\{\left(\int_0^T\left(a(s,\xi_s^{(n)})-a(s,\xi_s^{(n-1)})\right)\mathrm{d}s\right)^2>2^{-2n-2}\right\} \\
& +P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t[b(s,\xi_s^{(n)})-b(s,\xi_s^{(n-1)})]\mathrm{d}B_s\right)^2>2^{-2n-2}\right\}.
\end{aligned}
$$

を得る[2]．ここで，上の不等式右辺第 1 項と第 2 項に各々，Chebychev の

[2] $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, x+y>\alpha\}\subset\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, x>\frac{\alpha}{2}\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, y>\frac{\alpha}{2}\right\},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$, を用いた．

不等式と定理??の不等式を用いると，

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}\right|>2^{-n}\right\} \\
\leq\ & 2^{2(n+1)}T\int_0^T \mathbb{E}\left[\left(a(s,\xi_s^{(n)})-a(s,\xi_s^{(n-1)})\right)^2+\left(b(s,\xi_s^{(n)})-b(s,\xi_s^{(n-1)}\right)^2\right]\mathrm{d}s \\
\leq\ & 2^{2(n+1)}L_1^2T\int_0^T \mathbb{E}\left[\left(\xi_s^{(n)}-\xi_s^{(n-1)}\right)^2\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

したがって，(10.21) より，

$$
P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}\right|>2^{-n}\right\}\leq c\int_0^T\frac{(4Lt)^n}{n!}\mathrm{d}t=c\frac{(4LT)^{n+1}}{(n+1)!}.
$$

ただし，ここで $c:=4L_1^2T$ とした．これより，

$$
\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}\right|>2^{-n}\right\}\leq c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4LT)^{n+1}}{(n+1)!}=c(\mathrm{e}^{4LT}-1)<\infty
$$

となるので，Borel-Cantelli の補題より，$\{\xi_t^{(n)};\,n\in\mathbb{N}\}$ は，a.s. で $t$, $t\in[0,T]$, に関して一様に

$$
\xi_t=\xi_t^{(0)}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}\right)
$$

に収束する．

続いて，$\xi=\{\xi_t;\,t\in[0,1]\}$ が (10.14) の解であることを示す．

（10.12）より，

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t[a(s,\xi_s^{(n)})-a(s,\xi_s)]\mathrm{d}s\right|^2 &\leq L_1^2T\int_0^t\left|\xi_s-\xi_s^{(n)}\right|^2\mathrm{d}s \\
&\leq L_1^2Tt\sup_{t\in[0,t]}\left\{\left|\xi_s^{(n)}-\xi_s\right|^2\right\}.(10.22)
\end{aligned}
$$

同様に，補題 10.2 と（10.12）より，任意の $\delta > 0$ と $\epsilon > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
& P\left\{\left|\int_0^t [b(s,\xi_s^{(n)}) - b(s,\xi_s)]\mathrm{d}B(s)\right| > \epsilon\right\} \\
\leq\ & \frac{\delta}{\epsilon^2} + P\left\{\int_0^t [b(s,\xi_s^{(n)}) - b(s,\xi_s)]^2 \mathrm{d}s > \delta\right\} \\
\leq\ & \frac{\delta}{\epsilon^2} + P\left\{L_1^2 T \int_0^t \left|\xi_s - \xi_s^{(n)}\right|^2 \mathrm{d}s > \delta\right\} \\
\leq\ & \frac{\delta}{\epsilon^2} + P\left\{L_1^2 T t \sup_{t\in[0,t]}\left\{\left|\xi_t^{(n)} - \xi_t\right|^2\right\} > \delta\right\}. \qquad (10.23)
\end{aligned}$$

ここで，

$$P\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left\{\left|\xi_t^{(n)} - \xi_t\right|^2\right\} > \delta\right\} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となることから，(10.22) と (10.23) より，

$$\left[\xi_t - \xi_t^{(n+1)}\right] + \int_0^t [a(s,\xi_s^{(n)}) - a(s,\xi_s)]\mathrm{d}s + \int_0^t [b(s,\xi_s^{(n)}) - b(s,\xi_s)]\mathrm{d}B(s)$$

は，$n \to \infty$ としたとき，ゼロに確率収束する．

最後に，$\int_0^T \mathbb{E}\left[(\xi_t)^2\right]\mathrm{d}t \leq \infty$ が成立することを示す．(10.13) より，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\xi_t^{(n+1)}\right)^2\right] &\leq 3\left\{\mathbb{E}[\eta^2] + T\int_0^t \mathbb{E}\left[a(s,\xi_s^{(n)})^2 + b(s,\xi_s^{(n)})^2\right]\mathrm{d}s\right\} \\
&\leq 3\mathbb{E}[\eta^2] + 6L_2^2 T \int_0^t \left[1 + \mathbb{E}\left[\left(\xi_s^{(n)}\right)^2\right]\right]\mathrm{d}s \\
&\leq 3\left(1 + \mathbb{E}[\eta^2]\right) + 6L_2^2 T \int_0^t \left[1 + \mathbb{E}\left[\left(\xi_s^{(n)}\right)^2\right]\right]\mathrm{d}s - 1.
\end{aligned}$$

これより，$L = 6L_2^2 T$ として，帰納的に

$$\mathbb{E}\left[\left(\xi_t^{(n+1)}\right)^2\right] \leq 3(1 + \mathbb{E}[\eta^2])\mathrm{e}^{Lt} - 1$$

となることが示せる．したがって，Fatou の補題より，

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathbb{E}[\xi_t^2]\mathrm{d}t &\leq 3(1 + \mathbb{E}[\eta^2])\int_0^T \mathrm{e}^{Lt}\mathrm{d}t - T \\
&= 3(1 + \mathbb{E}[\eta^2])\frac{\mathrm{e}^{LT} - 1}{L} - T < \infty
\end{aligned}$$

□

## 10.4 マルチンゲールとDynkin公式，Feyman-Kac公式

以下，本節では，確率過程 $X = \{X(t);\, t \geq 0\}$ を確率微分方程式 (10.1) の解とする．

**定義 10.5** $f \in C^{2,1}$ に対する $X$ に関する生成作用素 $\mathcal{L}_t$ を次で定義する．

$$\mathcal{L}_t f(x,t) = (L_t f)(x,t) = \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \mu(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{10.24}$$

10.25 の $\mathcal{L}_t$ を **Dynkin 作用素** (Dynkin Operator) と呼ぶ．

Dynkin 作用素 $\mathcal{L}_t$ を用いれば，伊藤公式は，次の定理にあるようにコンパクトに表現できる．

**定理 10.4 (伊藤公式)** $f \in C^{2,1}$ に対して，次が成立する．

$$\mathrm{d}f(X(t),t) = \left(\mathcal{L}_t f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(X(t),t)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)\sigma(X(t),t)\mathrm{d}B(t). \tag{10.25}$$

**定理 10.5** $X = \{X(t);\, t \geq 0\}$ は定理 10.3 の条件を満たすとする．また $f \in C^{2,1}$ は，$\frac{\partial f}{\partial x}$ が有界であるとする．このとき，

$$M_f(t) := f(X(t),t) - \int_0^t \left(\mathcal{L}_u f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(X(t),t)\mathrm{d}u \tag{10.26}$$

で定義される $\{M_f(t);\, t \in [0,T]\}$ は，マルチンゲールとなる．

**証明**　伊藤公式から

$$M_f(t) = f(X(0),0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X(u),u)\sigma(X(u),u)\mathrm{d}B(u).$$

また，所与の仮定から $\exists K_1 \in \mathbb{R};\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right)^2 < K_1$．したがって，

$$\int_0^T \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(X(u),u)\sigma(X(u),u)\right)^2\right]\mathrm{d}u \leq K_1\int_0^T \mathbb{E}\left[\sigma(X(u),u)^2\right]\mathrm{d}u. \tag{10.27}$$

増大条件より，$\exists K \in \mathbb{R}$;

$$K_1 \int_0^T \mathbb{E}\left[\sigma(X(u),u)^2\right] \mathrm{d}u \le 2K_1K^2 \int_0^T (1+\mathbb{E}[X(u)^2]]\mathrm{d}u.$$

さらに定理 10.3 より，$\int_0^T \mathbb{E}[X(u)^2]]\mathrm{d}u < \infty$ となるから，結局，(10.27) の左辺は有限となり，定理**??**より，$\{M_f(t);\, t \in [0,T]\}$ は，マルチンゲールとなる． □

**定理 10.6** $X = \{X(t);\, t \ge 0\}$ は定理 10.3 の条件を満たすとする．このとき，$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda|X(0)|)\right] < \infty,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ ならば，$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda|X(t)|)\right] < \infty,\ \forall\,t \in [0,T]$ となる．また，任意の $t \in [0,T]$ と $f(x,t) \in C^{2,1}$ に対して，

$$\exists\, c_t, k_t \in \mathbb{R};\quad \max\left\{\left|\tfrac{\partial f(x,u)}{\partial t}\right|, \left|\tfrac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|, \left|\tfrac{\partial^2 f(x,u)}{\partial x^2}\right|\right\} \le c_t \mathrm{e}^{k_t|x|},\quad \forall\,(x,u) \in \mathbb{R}\times[0,t] \tag{10.28}$$

が成立するならば，(10.26) で定義される $\{M_f(t);\, t \in [0,T]\}$ は，マルチンゲールとなる．

**証明** $X(t) = B(t)$ の場合についてのみ証明する[3]．いまの場合，$B(t) \sim N(0,t)$ であるから，

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda|X(t)|)] = \mathbb{E}[\exp(\lambda|B(t)|)] < \infty,\quad (\lambda,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]. \tag{10.29}$$

また，伊藤公式より，

$$M_f(t) = f(B(0),0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B(u),u)\mathrm{d}B(u).$$

(10.28) より，

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial f(B(u),u)}{\partial x}\right)^2\right] \le c_t^2 \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{2k_t|B(u)|}\right],\quad \forall\,(x,u) \in \mathbb{R}\times[0,t]$$

となるが，(10.29) より，上式右辺は有限となる．したがって，

$$\int_0^T \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial f(B(u),u)}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}u < \infty \tag{10.30}$$

となる．あとは，定理 10.5 の証明と同様にして題意が成立することが示せる． □

定理 10.4-定理 10.6 より，次の 2 つの系が成立する．

[3] より一般的な場合については，Pinsky(1995) の Theorem 1.6.3 を参照.

**系 10.1** $f \in C^{2,1}$ が, 定理 10.5 もしくは定理 10.6 の仮定を満たし，次式を満たすとする．

$$\mathcal{L}_t f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{10.31}$$

このとき，$\{f(X(t),t);\, t \in [0,T]\}$ は，マルチンゲールとなる．

**定義 10.6** $f \in C^{2,1}$ の方程式 (10.31) を Kolmogorov の**後退方程式** (backward equation) という．

**系 10.2 (Dynkin 公式)** $f \in C^{2,1}$ が, 定理 10.5 もしくは定理 10.6 の仮定を満たすならば，次式が成立する．

$$\mathbb{E}[f(X(t),t)] = f(X(0),0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\mathcal{L}_u f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(X(u),u)\mathrm{d}u\right], \quad t \in [0,T]. \tag{10.32}$$

**注 10.2** 系 10.2 において，$t$ を有界な停止時 $\tau \in [0,T]$ に置き換えても，(10.32) は成立する．このことは，任意抽出定理を用いて証明できる．

**例 10.3** $X(t) = B(t)$ とすると，$\mathcal{L}_t f(x) = \frac{1}{2}f''(x)$. このとき後退方程式の解は，$f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, であるから，系 10.1 より $f(B(t)) = aB(t) + b$ は，マルチンゲールとなる．このことは，$\{B(t);\, t \geq 0\}$ がマルチンゲールであることからも，自明である． □

**例 10.4** $X(t) = B(t)$ とし，$f(x,t) = \exp\left(x - \frac{1}{2}t\right)$ とする．このとき，

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0$$

であるから，系 10.1 より，

$$\left\{\exp\left(B(t) - \frac{1}{2}t\right);\ t \geq 0\right\} \tag{10.33}$$

は，マルチンゲールとなる．(10.33) は $\{B(t);\, t \geq 0\}$ の指数マルチンゲールである． □

**例 10.5** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続な関数として，$X(t) := \int_0^t g(s)\mathrm{d}B(s)$, $t \in [0,T]$，とする．このとき，$X(t) \sim \mathrm{N}\left(0, \int_0^t g(s)^2\mathrm{d}s\right)$ であることを示す．

いま，$u \in \mathbb{R}$ として，$f(x,t) := \mathrm{e}^{ux}$, $(x,t) \in \mathbb{R}$，とする．このとき，Dynkin の公式より，

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{uX(t)}\right] = 1 + \frac{1}{2}u^2 \int_0^t g(s)^2 \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{uX(s)}\right] \mathrm{d}s.$$

ここで，$h(t) := \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{uX(t)}\right]$ とおき，$t$ で微分すると，

$$h'(t) = \frac{1}{2}u^2 g(t)^2 h(t), \quad h(0) = 1.$$

この微分方程式を解くと，$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{uX(t)}\right] = h(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2 \int_0^t g(s)^2 \mathrm{d}s}$．したがって，積率母関数の一意性から $X(t) \sim \mathrm{N}\left(0, \int_0^t g(s)^2 \mathrm{d}s\right)$. □

**定理 10.7** $f \in C^{2,1}$ が, 定理 10.5 もしくは定理 10.6 の仮定を満たし，次の後退方程式の解であるとする．

$$\mathcal{L}_t f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0, \quad f(x,T) = g(x).$$

このとき，次が成立する．

$$f(x,t) = \mathbb{E}\left[g(X(t)) | X(t) = x\right]. \tag{10.34}$$

**証明** 系 10.1 より，$\{f(X(t),t);\, t \in [0,T]\}$ はマルチンゲールとなるので，

$$f(x,t) = \mathbb{E}\left[f(X(T),T) | \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[g(X(T)) | \mathcal{F}_t\right].$$

さらに，$\{X(t);\, t \geq 0\}$ がマルコフ過程であることに注意すると，(10.34) を得る． □

**定理 10.8 (Feyman-Kac 公式)** $r(x,t)$, $g(x)$ を有界な関数として，

$$\mathcal{L}_t f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = r(x,t) f(x,t), \quad f(x,T) = g(x). \tag{10.35}$$

に，解が存在するとする．このとき，(10.35) の解は，次式によって，一意に与えられる．

$$C(x,t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u} g(X(T)) \middle| X(t) = x\right]. \tag{10.36}$$

**証明** [4]伊藤公式より，

$$\mathrm{d}f(X(t),t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t) + \mathcal{L}_t f(X(t),t)\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)\sigma(X(t),t)\mathrm{d}B(t).$$

(10.35) より，

$$\mathrm{d}f(X(t),t) = r(X(t),t)f(X(t),t)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)\sigma(X(t),t)\mathrm{d}B(t). \tag{10.37}$$

ここで，$f(X(t),t)\mathrm{e}^{\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u}$ に伊藤の公式を適用すると，

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}\left(f(X(t),t)\mathrm{e}^{\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u}\right) \\ = \; & f(X(t),t)\mathrm{e}^{\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u}(-r(X(t),t)\mathrm{d}t \\ & +\mathrm{e}^{\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u} df(X(t),t). \end{aligned}$$

上式右辺第 2 項に (10.37) を代入して

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}\left(f(X(t),t)\mathrm{e}^{\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u}\right) \\ = \; & \mathrm{e}^{\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)\sigma(X(t),t)\mathrm{d}B(t). \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} f(X(T),T) \; = \; & f(X(t),t)\mathrm{e}^{\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u} \\ & + \int_t^T \mathrm{e}^{\int_s^T r(X(u),u)\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x}(X(s),s)\sigma(X(s),s)\mathrm{d}B(s). \end{aligned}$$

上式の両辺に $\mathrm{e}^{-\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u}$ を掛けて

$$\begin{aligned} & f(X(T),T)\mathrm{e}^{-\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u} \\ = \; & f(X(t),t) \\ & + \int_t^T \mathrm{e}^{-\int_t^s r(X(u),u)\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x}(X(s),s)\sigma(X(s),s)\mathrm{d}B(s). \end{aligned}$$

$r$ の有界性より，上式右辺第 2 項が，マルチンゲールとなることから，

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u} g(X(T)) \middle| X(t) = x\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(X(u),u)\mathrm{d}u} f(X(T),T) \middle| X(t) = x\right] \\ = \; & f(X(t),t). \end{aligned}$$

□

[4]略証のみにとどめる．詳しくは，？参照.