第11章　マルチンゲールの諸性質

本章では，マルチンゲールの諸性質について考察する．以下，本章では，通常条件を満たす情報増大系付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t;\ t \geq 0\}$, と $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ 上で定義された確率過程 $X = \{X(t);\ t \geq 0\}$ を所与とする．

11.1　一様可積分性

確率過程の一様可積分性を定義する前に，その理解を容易にするために確率変数の可積分性の必要十分条件について示す.

はじめに，後の議論で用いる必要条件を示す.

補題 11.1 確率変数 X が可積分，すなわち，$\mathbb{E}[|X|] < \infty$, であるならば，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0; \quad E[|X| 1_F] < \epsilon \quad \forall F \in \mathcal{F};\ P(F) < \delta. \tag{11.1}$$

証明　背理法で示す．X が可積分であるとして，

$$\exists \epsilon_0 > 0;\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists F_n \in \mathcal{F};\ P(F_n) < \frac{1}{2^n}, \mathbb{E}[|X| 1_{F_n}] \geq \epsilon_0.$$

とする．このとき，Borel-Cantelli の補題より，$H := \limsup_{n\to\infty} F_n$ とすると，

$$P(H) = 0. \tag{11.2}$$

一方，X が可積分であることから Fatou の補題より，

$$\int_H |X| \mathrm{d}P = \mathbb{E}[|X| 1_H] \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X| 1_{F_n}] \geq \epsilon_0.$$

となり，(11.2) に矛盾する．$\therefore$ X が可積分であれば，(11.1) が成立する．
□

定理 11.1 確率変数 X が可積分，すなわち，$\mathbb{E}[|X|] < \infty$, であるための必要十分条件は，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X|1_{\{|X|>n\}}] = 0 \tag{11.3}$$

となることである．

証明 X が可積分ならば，定理???より，$|X|1_{\{|X|>n\}} \leq |X| < \infty$ a.s., したがって $\lim_{n\to\infty} |X|1_{\{|X|>n\}} = 0$ a.s. であるから，Lebesgue の有界収束定理より，(11.3) が成立する．逆に，n を $\mathbb{E}[|X|1_{\{|X|>n\}}] < \infty$ となる自然数とすると[1]，$|X|1_{\{|X|\leq n\}} \leq n$ であるから，

$$\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[|X|1_{\{|X|>n\}}] + \mathbb{E}[|X|1_{\{|X\leq n\}}] < \infty$$

となる． □

定義 11.1 確率過程 $\{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ が，$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}[X(t)^p] < \infty$, $p \geq 1$, を満たすとき，p **乗可積分** (square integrable) であるという．特に $p = 1$ のときは，**可積分**であるという．

例 11.1

(1) ブラウン運動 $\{B(t);\, t \in [0, T]\}$，$T < \infty$, は，$\mathbb{E}[B(t)^2] = t \leq T$ であるから，2 乗可積分マルチンゲールである．同様に $\{B(t)^2 - t;\, t \in [0, T]\}$ も 2 乗可積分マルチンゲールとなる．

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を有界で連続な関数とすると，$\{\int_0^t f(s)\mathrm{d}B(s);\, t \in [0, T]\}$，$T < \infty$, は，2 乗可積分マルチンゲールとなる．さらに，$\int_0^\infty f(s)^2 \mathrm{d}s < \infty$ ならば，$\{\int_0^t f(s)\mathrm{d}B(s);\, t \in [0, \infty)\}$ は，2 乗可積分マルチンゲールとなる．

定義 11.2 確率過程 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ が，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|>n\}}] = 0 \tag{11.4}$$

となるとき，X は，**一様可積分**（uniformily integrable）であるという．

---

[1]

$$(11.3) \iff \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow \mathbb{E}[|X|1_{\{|X|>n\}}] < \epsilon$$

より題意を満たす自然数が存在する．

定理 11.2 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ が，一様可積分であれば，$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$，すなわち，$X$ は可積分である．

証明

$$
\begin{aligned}
& \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X(t)|] \\
= & \sup_{t\geq 0} \left\{\mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|>n\}}] + \mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|\leq n\}}]\right\} \\
\leq & \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|>n\}}] + n, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

さらに，X が一様可積分であることから，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n > n_0$ となる $n \in \mathbb{N}$ に対しては，

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X(t)|] < \epsilon + n$$

となるので，題意を得る． □

次の例に示されるように定理 11.2 の逆は一般に成り立つとは限らない．

例 11.2 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$ を考える．ただし，μ は Lebesgue 測度とする．ここで，

$$E_n := (0, n^{-1}), \quad X(n) = X(n,\omega) := n1_{E_n}(\omega), \quad (n,\omega) \in \mathbb{N} \times \Omega$$

とする．このとき，$\mathbb{E}[|X(n)|] = 1, n \in \mathbb{N}$. すなわち，$X = \{X(n);\, n \in \mathbb{N}\}$ は可積分である．一方，任意 $K \in \mathbb{N}$ に対して，$n > K$ であれば，

$$\mathbb{E}[|X(n)|1_{\{|X(n)|>K\}}] = nP(E_n) = 1$$

となるので，X は一様可積分ではない． □

次に一様可積分となるための十分条件を示す．

定理 11.3 確率過程 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ に対して，

$$|X(t)| \leq Y,\ t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{E}[|Y|] < \infty$$

となる確率変数 Y が存在するならば，X は一様可積分である．

証明　$|X(t)| \le Y,\ t \in \mathbb{R}^+$ より

$$\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|>n\}}] \le \mathbb{E}[|Y|1_{\{|Y|>n\}}].$$

かつ，Y に関して定理 11.1 を用いれば，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|>n\}}] \le \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|Y|1_{\{|Y|>n\}}] = 0.$$

□

定理 11.3 より，直ちに次の系を得る．

系 11.1 $\mathbb{E}[\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|X(t)|] < \infty$ であるならば，$X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ は，一様可積分となる．

定理 11.4 $p > 1$ として $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ が p 乗可積分ならば，一様可積分となる．

証明　$m \ge n > 0$ ならば，$m \le n^{1-p}m^p$ となるので，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|>n\}}] &\le n^{1-p}\mathbb{E}[|X(t)|^p 1_{\{|X(t)|>n\}}]\\ &\le n^{1-p}\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}[|X(t)|^p], \quad t \ge 0,\end{aligned}$$

かつ $\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}[|X(t)|^p] < \infty$ であるから，

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|>n\}}] \to 0\ (n\to\infty).$$

□

注 11.1 定理 11.4 より，$X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ が 2 乗可積分ならば，X は一様可積分となる．

定理 11.5 (Doob のマルチンゲール) Y を可積分な確率変数として，

$$X(t) = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t], \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{11.5}$$

とおくと，$X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ は一様可積分なマルチンゲールとなる．

証明　X がマルチンゲールとなることは明らか．したがって，一様可積分性について証明する．

$Y \geq 0$ の場合について証明する[2]．$X(t_n) \uparrow \infty\,(t_n \uparrow \infty)$ となる単調増加列 $\{t_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ が存在したとすると，単調収束定理より，$\mathbb{E}[X(t_n)] \uparrow \infty$ となるが，これは，$\mathbb{E}[X(t_n)] = \mathbb{E}[Y] < \infty$ に矛盾する．したがって，$X^* := \sup_{t\in\mathbb{R}^+} X(t) < \infty$．$\{X(t) > n\} \subset \{X^* > n\}$ と条件付き期待値の定義より，

$$\mathbb{E}[|X(t)|1_{\{|X(t)|>n\}}] = \mathbb{E}[Y1_{\{|X(t)|>n\}}] \leq \mathbb{E}[Y1_{\{X^*>n\}}].$$

ここで，X^* が有限であることと，Y が可積分であることに注意すると，Lebesgue の有界収束定理より，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y1_{\{X^*>n\}}] = 0.$$

したがって，X は一様可積分となる．□

定義 11.3 (11.5) のマルチンゲールは，Y について**閉じている**（closed）という．

マルチンゲールの定義により，直ちに次の系を得る．

系 11.2 $X = \{X(t),\, t \in [0,T]\}$，$T < \infty$, がマルチンゲールならば，一様可積分で，$X(T)$ について閉じている．

定理 11.6 (有界収束定理) X, X_n, $n \in \mathbb{N}$, を確率変数とする．このとき，$\exists K \in \mathbb{R};\, |X_n| \leq K\, \forall n \in \mathbb{N}$, かつ $\mathrm{plim}_{n\to\infty} X_n = X$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0.$$

証明　$\mathrm{plim}_{n\to\infty} X_n = X$ から，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ P\left(|X_n - X| > \frac{\epsilon}{3}\right) < \frac{\epsilon}{3K}\ \forall n \geq n_0.$$

[2] $Y = Y^+ - Y^-$ より，一般の場合も同様にして証明できる．

また，$K \geq |X_n|$ より，

$$\begin{aligned}\left\{|X| - K > \tfrac{1}{k}\right\} &\subset \left\{|X| - |X_n| > \tfrac{1}{k}\right\} \\ &\subset \left\{|X - X_n| > \tfrac{1}{k}\right\} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad P\left(|X| > K + \frac{1}{k}\right) \leq P\left(|X_n - X| > \frac{1}{k}\right).$$

$$\therefore \quad \mathrm{plim}_{n\to\infty} X_n = X \Rightarrow P\left(|X| > K + \frac{1}{k}\right) = 0.$$

$$\therefore \quad P\left(\cup_{k=1}^{\infty}\left\{|X| > K + \frac{1}{k}\right\}\right) = P\left(|X| > K\right) = 0.$$

すなわち，$K \geq |X|$ a.s.　以上により，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|X_n - X|] \\ = \ & \mathbb{E}\left[|X_n - X| 1_{\left\{|X_n - X| > \frac{\epsilon}{3}\right\}}\right] + \mathbb{E}\left[|X_n - X| 1_{\left\{|X_n - X| \leq \frac{\epsilon}{3}\right\}}\right] \\ \leq \ & 2KP\left(|X_n - X| > \frac{\epsilon}{3}\right) + \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

□

定理 11.7 (平均収束の必要十分条件) X, $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}$ とする．このとき次が成立する．

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0 \\ \Longleftrightarrow \ & \begin{cases} \mathrm{plim}_{n\to\infty} X_n = X, \\ \{X_n;\, n \in \mathbb{N}\} \text{ は，一様可積分.} \end{cases}\end{aligned}$$

証明　$\Leftarrow$ のみ証明する[3]．
$K \in [0, \infty)$ に対して，$\varphi_K : \mathbb{R} \to [-K, K]$;

$$\varphi_K(x) := \begin{cases} K & x > K, \\ x & |x| \leq K, \\ -K & x < -K \end{cases}$$

とする．X の可積分性と X_n の一様可積分性から，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\mathbb{E}[|\varphi_K(X_n) - X_n|] < \frac{\epsilon}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[|\varphi_K(X) - X|] < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (11.6)$$

[3] $\Rightarrow$ の証明については練習問題とする．

となるような K が存在する．一方，$|\varphi_K(x)-\varphi_K(y)|\le|x-y|$ となるから，$\mathrm{plim}_{n\to\infty}\varphi_K(X_n)=\varphi_K(X)$. かつ $\varphi_K(X_n)\le K,\ n\in\mathbb{N}$, となるので定理 11.6 より，

$$\exists n_0\in\mathbb{N};\quad \mathbb{E}[|\varphi_K(X_n)-\varphi_K(X)|]<\frac{\epsilon}{3}\ \forall n\ge n_0. \tag{11.7}$$

したがって，(11.6) と (11.7) より，

$$\begin{aligned}\exists n_0\in\mathbb{N};\quad \mathbb{E}[|X_n-X|] &\le \mathbb{E}[|X_n-\varphi_K(X_n)|]\\ &\quad+\mathbb{E}[|\varphi_K(X_n)-\varphi_K(X)|]\\ &\quad+\mathbb{E}[|\varphi_K(X)-X|]<\epsilon,\quad \forall n\ge n_0.\end{aligned}$$

□

問 11.1 定理 11.7 の $\Rightarrow$ を証明せよ．

解答例 $\mathrm{plim}_{n\to\infty}X_n=X$ は定理??より成立する．したがって，あとは，$\{X_n;\,n\in\mathbb{N}\}$ が一様可積分であることを示せばよい．

$X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ であるから，補題 11.1 より，

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0;\forall F\in\mathcal{F};\ P(F)<\delta,\ \mathbb{E}[|X|1_F]<\frac{\epsilon}{2}.$$

よって，$m_1\in\mathbb{N}$ を

$$\frac{1}{m_1}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[|X_n|]<\delta$$

となるように選べば，Chebyshev の不等式より，$m\ge m_1$ に対して，

$$P(|X_n|>m)<\delta\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

となるので，

$$\mathbb{E}[|X|1_{\{|X_n|>m\}}]<\frac{\epsilon}{2}.$$

さらに，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[|X_n-X|]=0\Rightarrow\forall\epsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N};\,n>n_0\ \Rightarrow\ \mathbb{E}[|X_n-X|]<\frac{\epsilon}{2}.$$

$\therefore\ n>n_0$ ならば，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n|1_{\{|X_n|>m\}}] &\le \mathbb{E}[|X|1_{\{|X_n|>m\}}]+\mathbb{E}[|X_n-X|1_{\{|X_n|>m\}}]\\ &\le \mathbb{E}[|X|1_{\{|X_n|>m\}}]+\mathbb{E}[|X_n-X|]<\epsilon.\end{aligned}$$

一方，$X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$，$n \in \mathbb{N}$，から定理 11.1 より，

$n = 1, \cdots, n_0 \ \Rightarrow\ \forall \epsilon > 0,\ \exists m(n) \in \mathbb{N};\ m \geq m(n)\ \Rightarrow\ \mathbb{E}[|X_n| 1_{\{|X_n|>m\}}] < \epsilon.$

$\therefore\ m_2 := \max\{m(n);\ n = 1, \cdots, n_0\}$ とすると，すべての $n = 1, \cdots, n_0$ に対して，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists m_2 \in \mathbb{N};\ m \geq m_2\ \Rightarrow\ \mathbb{E}[|X_n| 1_{|X_n|>m}] < \epsilon.$$

以上により，$m^* := \max\{m_1, m_2\}$ とすると，$m \geq m^*$ ならば，

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n| 1_{\{|X_n|>m\}}] < \epsilon.$$

すなわち，$\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ が一様可積分であることが示された． □

11.2 停止時，停止時前可算加法族

定義 11.4 $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ が

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega;\ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0. \tag{11.8}$$

を満たすとき，τ を $\{\mathcal{F}_t\}$-**停止時** (stopping time) といい，情報増大系 $\{\mathcal{F}_t\}$ が自明であるときには，単に停止時という．また

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \subset \Omega;\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$$

で定義される $\mathcal{F}_\tau$ を τ-**停止時前可算加法族** (pre-τ algebra) という．

定義 11.4 より，次の定理が成立することが容易にわかる．証明は練習問題とする．

定理 11.8

(1) $\tau_1 \leq \tau_2 \ \Rightarrow\ \mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

(2) $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

(3) $A \in \mathcal{F}_{\tau_1 \vee \tau_2} \ \Rightarrow\ A \cap \{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

(4) $\mathcal{F}_{\tau_1 \vee \tau_2} = \sigma(\mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2})$

(5) $\mathcal{F}_{t+} := \cap_{u>t}\mathcal{F}_t$ とすると次が成立する．

$$\begin{aligned} \tau \text{が} \mathcal{F}_{t+}\text{-停止時} &\iff \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t,\ t \geq 0, \\ \mathcal{F}_{\tau+} &:= \{A \subset \Omega;\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+},\ t \geq 0\} \\ &= \{A \subset \Omega;\ A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}. \end{aligned}$$

証明

(1) $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ とすると，$A \cap \{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ $\tau_1 \leq \tau_2$ より，$A \cap \{\tau_2 \leq t\} = A \cap \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\}$. $\{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. $\therefore A \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. $\therefore \mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

また，

定理 11.9 $\{\tau_n; n \in \mathbb{N}\}$ を $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時の列とすると，次が成立する．

(1) $\tau_n \uparrow \tau \Rightarrow \tau$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時.

(2) $\tau_n \downarrow \tau \Rightarrow \tau$ は $\{\mathcal{F}_{t+}\}$-停止時で $\mathcal{F}_{\tau+} = \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n+}$.

証明

(1) $\tau_n \uparrow \tau \Rightarrow \{\tau \leq t\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{\tau_n \leq t\}$ より明らか.

(2) $\tau_n \downarrow \tau \Rightarrow \{\tau < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$. $\therefore \tau$ は $\{\mathcal{F}_{t+}\}$-停止時.

$$\begin{aligned} & E \in \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n+} \\ \iff & E \cap \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t, n \in \mathbb{N} \text{ かつ } \tau_n \downarrow \tau \Rightarrow \{\tau < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n < t\}. \\ \iff & E \cap \{\tau < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}(E \cap \{\tau_n < t\}) \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

$\therefore$ 題意を得る．

□

定理 11.10 X が発展的可測，τ が停止時ならば，$\omega \in \Omega \mapsto X(\tau) := X(\tau(\omega), (\omega)) \in \mathbb{R}$ は，$\mathcal{F}_\tau$-可測となる．

証明 各 $t \in \mathbb{R}^+$ に対して，$\hat{\Omega}_t := \{\omega \in \Omega; \tau \leq t\}$ とし，$\hat{\mathcal{F}}_t$ を $\hat{\Omega}_t$ の部分集合からなる可算加法族で，$\mathcal{F}_t$ に含まれるものとする．$\rho : \hat{\Omega}_t \to [0, t] \times \hat{\Omega}_t$ を $\rho(\omega) := (\tau(\omega), \omega)$ で定義し，$\hat{X}_t : [0, t] \times \hat{\Omega}_t \to \mathbb{R}$ を $\hat{X}_t(s, \omega) := X(s, \omega)$ で定義する．このとき，

$$\{X(\tau) \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \{(\hat{X}_t \circ \rho) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}$$

かつ $\{(\hat{X}_t \circ \rho) \in A\} \in \hat{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$ であるから，題意を得る． □

11.3　離散時間マルチンゲール

本節では，時刻の集合を $\mathbb{Z}^+$ とする．すなわち時刻の集合が離散であるとして，離散時間のマルチンゲール $\{X(t);\, t \in \mathbb{Z}^+\}$ について考察する．

定理 11.11 (Doob の横断数定理 (Doob's Upcossing Theorem)) $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{Z}^+\}$ を優マルチンゲールとする．時刻 N までにサンプル・パスが $[a,b]$ を下から上へと横断する回数を $U_N(X;[a,b])$ とする．すなわち，$U_N(X;[a,b])$ は，

$$X(s_i) < a,\ X(t_i) > b, i = 1, \ldots, k;\ 0 \leq s_1 < t_1 < \cdots < s_k < t_k \leq N$$

となる最大の k である．このとき，次が成立する．

$$\mathbb{E}[U_N(X;[a,b])] \leq \frac{\mathbb{E}[(X(N)-a)^-]}{b-a}.$$

証明

$$\begin{aligned} C_1 &:= 1_{\{X_0<a\}}, \\ C_n &:= 1_{\{C_{n-1}=1\}}1_{\{X(n-1)\leq b\}} + 1_{\{C_{n-1}=0\}}1_{\{X(n-1)<a\}},\ n = 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

として，

$$Y(n) := \sum_{k=1}^{n} C_k(X(k) - X(k-1)),\ n \in N, \quad Y_0 := 0$$

とする．このとき，

$$Y(N) \geq (b-a)U_N(X;[a,b]) - (X(N)-a)^- \tag{11.9}$$

が成立する（図 11.1）．さらに $Y = \{Y(n);\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ は，その定義により優マルチンゲールとなるので，$\mathbb{E}[Y(N)] \leq 0$. したがって，(11.9) の期待値をとると，

$$0 \geq \mathbb{E}[Y(N)] \geq (b-a)\mathbb{E}[U_N(X;[a,b])] - \mathbb{E}[(X(N)-a)^-].$$

これより，求める不等式を得る． □

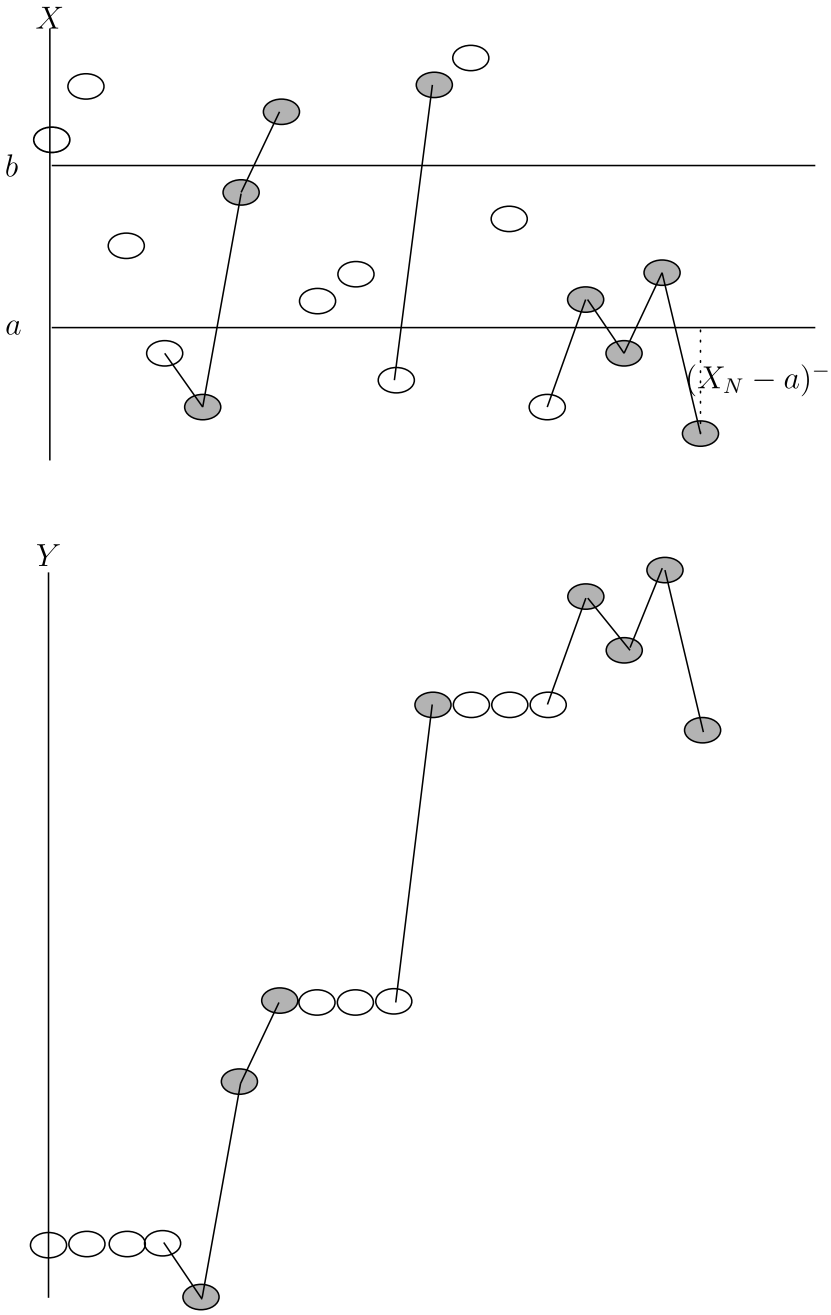

図 11.1: Doob の横断数

系 11.3 $X=\{X(t);\, t\in\mathbb{Z}^+\}$ を一様可積分な優マルチンゲールとし，

$$U_\infty(X;[a,b]) := \lim_{N\to\infty} U_N(X;[a,b])$$

とする．このとき，

$$(b-a)\mathbb{E}[U_\infty(X;[a,b])] \le |a| + \sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{E}[|X(n)|] < \infty$$

となる．

証明 定理 11.11 と一様可積分性より，

$$(b-a)\mathbb{E}[U_N(X;[a,b])] \le |a| + \mathbb{E}[|X(N)|] \le |a| + \sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{E}[|X(n)|] < \infty.$$

よって，単調収束定理により題意を得る． □

注 11.2 系 11.3 と定理??? より $X=\{X(t);\, t\in\mathbb{Z}^+\}$ が一様可積分優マルチンゲールならば，$P(U_\infty(X;[a,b])=\infty)=0$ となる．

定理 11.12 (マルチンゲール収束定理) 優マルチンゲール $X=\{X(t),\, t\in\mathbb{Z}^+\}$ が可積分，すなわち，$\sup_{t\in\mathbb{Z}^+}\mathbb{E}[|X(t)|]<\infty$ であれば，確率 1 で有限な極限 $X(\infty) := \lim_{t\to\infty} X(t)$ が存在する．

証明

$$\Lambda := \{\omega\in\Omega;\ \ \{X(t,\omega);\, t\in\mathbb{Z}^+\}\text{ が }[-\infty,\infty]\text{ で極限を持たない }\}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\Lambda &= \{\omega\in\Omega;\, \liminf_{t\to\infty} X(t,\omega) < \limsup_{t\to\infty} X(t,\omega)\} \\ &= \cup_{a,b\in\mathbb{Q};\, a<b}\{\omega\in\Omega;\, \liminf_{t\to\infty} X(t,\omega) < a < b < \limsup_{t\to\infty} X(t,\omega)\}.\end{aligned} \tag{11.10}$$

ここで，

$$\Lambda_{a,b} := \{\omega\in\Omega;\, \liminf_{t\to\infty} X(t,\omega) < a < b < \limsup_{t\to\infty} X(t,\omega)\}$$

とし，$U_\infty(X;[a,b])$ を系 11.3 で定義したものとすると，

$$\Lambda_{a,b} \subset \{\omega\in\Omega;\, U_\infty(X;[a,b])=\infty\}$$

となる．一方，系 11.3 より，$P(U_\infty(X;[a,b]) = \infty) = 0$ であるから $P(\Lambda_{a,b}) = 0$ となり，(11.10) より $P(\Lambda) = 0$ を得る．さらに，Fatou の補題より，

$$\mathbb{E}[\lim_{t\to\infty} |X(t)|] = \mathbb{E}[\liminf_{t\to\infty} |X(t)|] \le \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X(t)|] \le \sup_{t\in\mathbb{Z}^+} \mathbb{E}[|X(t)|] < \infty.$$

となるから，$|X(\infty)| < \infty$ a.s. となる． □

系 11.4

(1) 一様可積分マルチンゲールは，確率 1 で収束する．

(2) 2 乗可積分マルチンゲールは，確率 1 で収束する．

(3) 正値マルチンゲールは，確率 1 で収束する．

証明

(1) 定理 11.2 より一様可積分であれば可積分であるから，定理 11.12 より題意が成立する．

(2) 定理 11.4 より 2 乗可積分であれば一様可積分であるから，1 より題意が成立する．

(3) $\mathbb{E}[|X(t)|] = \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X(0)] < \infty \, \forall t \in \mathbb{Z}^+$, であるから X は可積分である．したがって，定理 11.12 より題意が成立する．

□

定理 11.13 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{Z}^+\}$ が, 一様可積分優マルチンゲールならば，$X(t) \xrightarrow{L^1} X(\infty)$ $(t \to \infty)$ となり，

$$X(t) \ge \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.,} \quad t \in \mathbb{Z}^+. \tag{11.11}$$

特に X がマルチンゲールならば，(11.11) は等号で成立する．

証明 定理 11.12 と定理 11.7 及び定理??? より，

$$X \text{ が一様可積分} \iff X(t) \xrightarrow{L^1} X(\infty) \ (t \to \infty).$$

$q \in \mathbb{Z}^+;\, q \ge t$ とすると，条件付き期待値の定義より，

$$\mathbb{E}[X(q)1_E] \le \mathbb{E}[X(t)1_E] \quad \forall E \in \mathcal{F}_t$$

よって，$X(t) \xrightarrow{L^1} X(\infty)$ $(t \to \infty)$ ならば，$q \to \infty$ として，(11.11) を得る．
□

定理 11.14 (Lévy-Doob の下方定理) 所与の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して，$\{\mathcal{G}_n;\, n \in -\mathbb{N}\}$ を $\mathcal{F}$ の部分可算加法族の族で，

$$\mathcal{G}_{-\infty} := \cap_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{-k} \subset \cdots \subset \mathcal{G}_{-2} \subset \mathcal{G}_{-1}$$

となるものとする．$X = \{X(n);\, n \in -\mathbb{N}\}$ を $\{\mathcal{G}_n;\, n \in -\mathbb{N}\}$- 優マルチンゲールとする．すなわち，

$$\mathbb{E}[X(n)|\mathcal{G}_m] \leq X(m) \text{ a.s.},\ m \leq n \leq -1, \quad \mathbb{E}[|X(n)|] < \infty\ \forall n \in -\mathbb{N}$$

とする．このとき，X は，一様可積分であり，極限 $X(-\infty) := \lim_{n \to -\infty} X(n)$ が概収束かつ平均収束の意味で存在し，

$$\mathbb{E}[X(n)|\mathcal{G}_{-\infty}] \leq X(-\infty) \quad \text{a.s.},\ n \in -\mathbb{N}$$

が成立する．また，X がマルチンゲールならば，最後の不等式は等号で成立する．

証明 X の一様可積分性を証明する．このことが示されれば，定理の主張は定理 11.13 と全く同様にして示すことができる．

$\lim_{n \downarrow -\infty} \mathbb{E}[X(n)] < \infty$ であるから，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\exists k \in -\mathbb{N};\ 0 \leq \mathbb{E}[X(n)] - \mathbb{E}[X(k)] \leq \frac{1}{2}\epsilon\ \forall n \leq k.$$

ここで，優マルチンゲール性に注意すると，$n \leq k$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned}
0 &< \mathbb{E}[|X(n)|1_{\{X(n)>m\}}] \\
&= \mathbb{E}[X(n)1_{\{X(n)>m\}}] \\
&= \mathbb{E}[X(n)] - \mathbb{E}[X(n)1_{\{X(n)\leq m\}}] \\
&\leq \mathbb{E}[X(n)] - \mathbb{E}[X(k)1_{\{X(n)\leq m\}}] \\
&\leq \mathbb{E}[X(k)] - \mathbb{E}[X(k)1_{\{X(n)\leq m\}}] + \frac{1}{2}\epsilon \\
&= \mathbb{E}[X(k)1_{\{X(n)>m\}}] + \frac{1}{2}\epsilon \\
&\leq \mathbb{E}[|X(k)|1_{\{X(n)>m\}}] + \frac{1}{2}\epsilon.
\end{aligned}$$

同様に，優マルチンゲール性より，

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}[|X(n)|1_{\{X(n)<-m\}}] &= -\mathbb{E}[X(n)1_{\{X(n)<-m\}}] \\
&\leq -\mathbb{E}[X(k)1_{\{X(n)<-m\}}] \\
&\leq \mathbb{E}[|X(k)|1_{\{X(n)<-m\}}].
\end{aligned}$$

したがって，$\epsilon > 0$ に対して

$$\mathbb{E}[|X(n)|1_{\{|X(n)|>m\}}] \le \mathbb{E}[|X(k)|1_{\{|X(n)|>m\}}] + \frac{1}{2}\epsilon. \tag{11.12}$$

一方，$X(k) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ であるから補題 11.1 より，

$$\exists \delta > 0;\ \mathbb{E}[|X(k)|1_{\{F\in\mathcal{F};\,P(F)<\delta\}}] < \frac{1}{2}\epsilon. \tag{11.13}$$

さらに，Chebyshev の不等式より，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$P(|X(n)| > m) \le \frac{1}{m}\mathbb{E}[|X(n)|]$ となるから，

$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N};\ m > m_0 \ \Rightarrow\ P(|X(n)| > m) \le \delta, \quad n \le k. \tag{11.14}$$

(11.12)〜(11.14) より，$m > m_0$ ならば $\mathbb{E}[|X(n)|1_{\{|X(n)|>m\}}] < \epsilon$, $n \le k$ を得る．

一方，$X(j) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $j = -1, -2, \ldots, -(k-1)$, から，定理**??** より

$$\exists m_j \in \mathbb{N};\ m > m_j \ \Rightarrow\ \mathbb{E}[|X(j)|1_{\{|X(j)|>m\}}] < \epsilon.$$

よって，$m^* := \max\{m_0, m_j,\, j = -1, -2, \ldots, -(k-1)\}$ とすれば，

$$\sup_{n\in-\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X(n)|1_{\{|X(n)|>m\}}] < \epsilon, \quad m > m^*.$$

すなわち，X は一様可積分となる． □

定理 11.15 (Doob の劣マルチンゲール不等式) $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{Z}^+\}$ を非負値劣マルチンゲールとする．このとき，任意の $c > 0$ と $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して次の不等式が成立する．

$$cP\left(\sup_{k\le n} X(k) \ge c\right) \le \mathbb{E}\left[X(n)1_{\{\sup_{k\le n} X(k)\ge c\}}\right] \le \mathbb{E}[X(n)].$$

証明

$$\begin{aligned}
E &:= \{\sup_{k\le n} X(k) \ge c\}, \\
E_0 &:= \{X(0) \ge c\}, \\
E_k &:= \{X(0) < c\} \cap \{X(1) < c\} \cap \cdots \cap \{X(k-1) < c\} \cap \{X(k) \ge c\}, \\
&\quad\ k = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

とすると，E は

$$E = E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n$$

というように，排反な事象の和に分解できる．また，$E_k \in \mathcal{F}_k$ かつ E_k 上では $X(k) \geq c$ であるから，

$$E\left[X(n)1_{E_k}\right] \geq E\left[X(k)1_{E_k}\right] \geq cP(E_k).$$

上の不等式において k について和をとると，

$$\mathbb{E}\left[X(n)1_{\{\sup_{k\leq n} X(k)\geq c\}}\right] \equiv \mathbb{E}[X(n)1_E] \geq cP(E) \equiv cP\left(\sup_{k\leq n} X(k) \geq c\right).$$

さらに，X の非負性に注意すると定理の不等式を得る． $\square$

定義 11.5 (離散時間の可予測過程) 確率過程 $X = \{X(n); n \in \mathbb{Z}^+\}$ に対して，各 $n \in \mathbb{Z}^+$ において，$X(n)$ が $\mathcal{F}_{n-1}$-可測となるとき，X を**可予測過程**と呼ぶ．

定理 11.16 (Doob 分解)

(1) $X = \{X(n); n \in \mathbb{Z}^+\}$ が $X(n) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{Z}^+$，となる適合過程とする．このとき，$M = \{M(n); n \in \mathbb{Z}^+, M(0) = 0\}$ をマルチンゲール，$A = \{A(n); n \in \mathbb{Z}^+, A(0) = 0\}$ を可予測過程として，

$$X(n) = X(0) + M(n) + A(n), \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{11.15}$$

というように分解できる．また，この分解は，マルチンゲール $\tilde{M}$ と可予測過程 $\tilde{A}$ を

$$P\left(M(n) = \tilde{M}(n), A(n) = \tilde{A}(n),\ n \in \mathbb{Z}^+\right) = 1$$

として，

$$X(n) = X(0) + \tilde{M}(n) + \tilde{A}(n) \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

となるという意味で一意である．

(2) X が劣マルチンゲールとなるのは，(11.14) において，

$$P(A(n) \leq A(n+1),\ n \in \mathbb{Z}^+) = 1$$

となるときであり，また，そのときに限られる．

証明

$$A(n) := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X(k) - X(k-1)|\mathcal{F}_{k-1}] \quad \text{a.s.},\ n \in \mathbb{N},\ A(0) := 0$$

とすると A は可予測，かつ，

$$\mathbb{E}[(X(n) - A(n)) - (X(n-1) - A(n-1))|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$$

となる．ここで $M(n) := X(n) - X(0) - A(n)$ とすれば，M はマルチンゲールとなり，(11.14) の分解を得る．また，(2) の劣マルチンゲールについては，その定義より自明である． □

補題 11.2 $X = \{X(n); n \in \mathbb{Z}^+\}$ を優マルチンゲールもしくは劣マルチンゲールとすると，任意の $c > 0$ に対して，次が成立する．

$$cP\left(\sup_{k \le N} |X(k)| \ge 3c\right) \le 4\mathbb{E}[|X(0)|] + 3\mathbb{E}[|X(N)|], \quad N \in \mathbb{Z}^+.$$

証明 X を劣マルチンゲールとする．Doob 分解より，

$$X(n) = X(0) + M(n) + A(n), \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

と表現できるので，

$$\sup_{k \le N} |X(k)| \le |X(0)| + \sup_{k \le N} |M(k)| + \sup_{k \le N} |A(k)| \le |X(0)| + \sup_{k \le N} |M(k)| + A(N)$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned}
& cP\left(\sup_{k \le N} |X(k)| \ge 3c\right) \\
\le\ & cP(|X(0)| \ge c) + cP\left(\sup_{k \le N} |M(k)| \ge c\right) + cP(A(N) \ge c) \\
\le\ & \mathbb{E}[|X(0)|] + \mathbb{E}[|M(N)|] + \mathbb{E}[A(N)] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (\because \text{Doob の劣マルチンゲール不等式}) \\
=\ & \mathbb{E}[|X(0)|] + \mathbb{E}[|X(N) - X(0) - A(N)|] + \mathbb{E}[A(N)] \\
\le\ & 2\mathbb{E}[|X(0)|] + \mathbb{E}[|X(N)|] + 2\mathbb{E}[A(N)] \\
=\ & 2\mathbb{E}[|X(0)|] + \mathbb{E}[|X(N)|] + 2\mathbb{E}[X(N) - X(0)] \\
\le\ & 4\mathbb{E}[|X(0)|] + 3\mathbb{E}[|X(N)|].
\end{aligned}$$

以上より，X が劣マルチンゲールの場合について題意が示された．X が優マルチンゲールの場合は，$-X$ について，以上の議論を用いればよい．
□

定理 11.17 (Lévy の上方定理) 所与の $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して，$M(n) := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n]$, $n \in Z^+$, とすると，$M := \{M(n); n \in Z^+\}$ は，一様可積分なマルチンゲールで，

$$M(n) \to \eta := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\infty] \ (n \to \infty) \text{ a.s., かつ } M(n) \xrightarrow{L^1} \eta \ (n \to \infty).$$

証明 定理 11.5 より，M は一様可積分マルチンゲールとなるので，定理 11.4 と定理 11.13 より，$M(\infty) := \lim_{n\to\infty} M(n)$ が a.s. かつ L^1 で存在する．そこで，あとは，$M(\infty) = \eta$ a.s. を示せばよい．

$F \in \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, に対して，

$$\mathbb{E}[\eta 1_{\{F\}}] = \mathbb{E}[M(n) 1_{\{F\}}] = \mathbb{E}[M(\infty) 1_{\{F\}}].$$

∴ 題意を得る． □

定理 11.18 τ を停止時とし，$X = \{X(t); t \in \mathbb{Z}^+\}$ をマルチンゲール (優マルチンゲール) とする．このとき $\{X(t \wedge \tau); t \in \mathbb{Z}^+\}$ はマルチンゲール（優マルチンゲール）となる．

証明 X がマルチンゲールの場合について証明する[4]．

$$\textstyle\sum_{k=1}^n 1_{\{k \le \tau\}}(X(k) - X(k-1)) = X(n \wedge \tau) - X(0),$$
$$\{1_{\{n \le \tau\}} = 0\} = \{\tau \le n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1},\ \{1_{\{n \le \tau\}} = 1\} = \{\tau \le n-1\}^c$$

となることに注意すると，$X(n \wedge \tau)$ は $\mathcal{F}_n$-可測かつ

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(n\wedge\tau) - X(n-1\wedge\tau)|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[1_{\{n\le\tau\}}(X(n) - X(n-1))|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= 1_{\{n\le\tau\}}\mathbb{E}[X(n) - X(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= 1_{\{n\le\tau\}}\left(\mathbb{E}[X(n)|\mathcal{F}_{n-1}] - X(n-1)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

∴ $\mathbb{E}[X(n\wedge\tau)|\mathcal{F}_{n-1}] = X(n-1\wedge\tau)$, $n \in \mathbb{N}$. 以上の議論から題意を得る．
□

定理 11.19 τ を停止時とし，X を優マルチンゲールとする．このとき，次の (1)〜(3);

(1) $\exists N \in \mathbb{N}; \tau(\omega) \le N,\ \forall \omega \in \Omega$,

[4]優マルチンゲールの場合も全く同様にして証明できる．

(2) $\exists K \in \mathbb{R};\ |X(n)| \le K,\ \forall (n,\omega) \in \mathbb{Z}^+ \times \Omega$ かつ $\tau < \infty$ a.s.,

(3) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ かつ $\exists K \in \mathbb{R};\ |X(n) - X(n-1)| \le K,\ \forall (n,\omega) \in \mathbb{Z}^+ \times \Omega$

のいずれかが成り立つならば，$X(\tau)$ は可積分であり，

$$\mathbb{E}[X(\tau)] \le \mathbb{E}[X(0)]$$

が成立する．また X がマルチンゲールの場合には，同条件の下で最後の不等式が等号で成立する．すなわち，

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$$

となる．

証明　X が優マルチンゲールの場合について証明する．定理 11.18 より，

$$\mathbb{E}[|X(\tau \wedge n)|] < \infty,\ \mathbb{E}[X(\tau \wedge n) - X(0)] \le 0,\ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{11.16}$$

(1) $n = N$ とすれば，$X(\tau \wedge n) = X(\tau)$ であるから，(11.17) より題意が成立する．

(2) (11.17) において，$n \to \infty$ とすれば，Lebesgue の有界収束定理より，題意が成立する．

(3)
$$X(n \wedge \tau) - X(0) = \sum_{k=1}^{n\wedge\tau} (X(k) - X(k-1)) \le K\tau$$
であるから，(11.17) において，$n \to \infty$ とすれば，Lebesgue の有界収束定理より，題意が成立する．

□

補題 11.3 X を優マルチンゲールとし，τ をある $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\tau \le N$ となる停止時とする．このとき，$X(\tau) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, P)$ かつ次が成立する．

$$\mathbb{E}[X(N)|\mathcal{F}_\tau] \le X(\tau).$$

証明　$E\in\mathcal{F}_\tau$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(N)1_E] &= \sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}[X(N)1_{E\cap\{\tau=n\}}]\\ &\leq \sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}[X(n)1_{E\cap\{\tau=n\}}]\\ &= \mathbb{E}[X(\tau)1_E].\end{aligned}$$

$$|X(\tau)|\leq\sum_{n=0}^{N}|X(n)|$$

より，$\mathbb{E}[|X(\tau)|]<\infty$. $\therefore$ 題意を得る． □

定理 11.20 (任意抽出定理) τ_1，τ_2 を $0\leq\tau_1\leq\tau_2\leq\infty$ となる停止時とする．X が一様可積分マルチンゲールならば，次が成立する．

$$\mathbb{E}[X(\tau_2)|\mathcal{F}_{\tau_1}]=X(\tau_1)\quad\text{a.s.}$$

証明　τ を任意の停止時とする．補題 11.3 と定理 11.13 より，

$$X(\tau\wedge k)=\mathbb{E}[X(k)|\mathcal{F}_{\tau\wedge k}]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X(\infty)|\mathcal{F}_k]|\mathcal{F}_{\tau\wedge k}]=\mathbb{E}[X(\infty)|\mathcal{F}_{\tau\wedge k}].$$

定理 11.17 より，$k\to\infty$ として

$$X(\tau)=\mathbb{E}[X(\infty)|\mathcal{G}],\ \mathcal{G}:=\sigma(\cup_k\mathcal{F}_{\tau\wedge k}).$$

ここで，$E\in\mathcal{F}_\tau$ とすると，$E\cap\{\tau\leq k\}\in\mathcal{F}_{\tau\wedge k}$．したがって，$E\cap\{\tau<\infty\}\in\mathcal{G}$ となり，

$$\mathbb{E}[X(\tau)1_{E\cap\{\tau<\infty\}}]=\mathbb{E}[X(\infty)1_{E\cap\{\tau<\infty\}}].$$

したがって，

$$\mathbb{E}[X(\tau)1_{E\cap\{\tau=\infty\}}]=\mathbb{E}[X(\infty)1_{E\cap\{\tau=\infty\}}].$$

以上より，

$$\mathbb{E}[X(\tau)1_E]=\mathbb{E}[X(\infty)1_E].$$

これより，$F\in\mathcal{F}_{\tau_1}$ とすると，

$$\mathbb{E}[X(\tau_2)-X(\tau_1)1_F1_{(\tau_1,\tau_2]}]=0$$

となるので，題意を得る． □

11.4　連続時間マルチンゲール

本節では，前節で得られた結果を連続時間での確率過程に拡張する．

定義 11.6 確率過程 $X = \{X(t,\omega);\ (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\}$ が，すべての見本路において，

$$
\begin{aligned}
X(t,\omega) &= \lim_{u \downarrow t} X(t,\omega), \\
\exists\, X(t-,\omega) &:= \lim_{s \uparrow t} X(t,\omega), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}
$$

すなわち，各 $t \in \mathbb{R}^+$ で，見本路が右連続かつその左極限が存在するとき，X を **RCLL 過程** (RCLL: Right Contiuous Left Limit process) という．また，すべての見本路において，

$$
\begin{aligned}
X(t,\omega) &= \lim_{s \uparrow t} X(t,\omega), \\
\exists\, X(t+,\omega) &:= \lim_{u \downarrow t} X(t,\omega), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$

となるとき，X を **LCRL 過程** (LCRL: Left Contiuous Right Limit process) という．

定理 11.21 X を RCLL 優マルチンゲールとし，τ を停止時とする．また，

$$
\mathbb{D}_n^+ := \left\{ \frac{k}{2^n};\ k \in \mathbb{Z}^+ \right\}, \quad n \in \mathbb{N}
$$

とする．所与の $t \geq 0$ に対して，

$$
\tau^{(n)} := \inf\{q \in \mathbb{D}_n^+;\ q > \tau\}, \quad t^{(n)} := \inf\{q \in \mathbb{D}_n^+;\ q > t\} \tag{11.17}
$$

とする．このとき，$\tau^{(n)}$ は $\{\mathcal{F}_q;\ q \in \mathbb{D}_n^+\}$-停止時となり，$\tau^{(n)} \downarrow \tau$, $\mathcal{F}_{\tau^{(n)}} \downarrow \mathcal{F}_\tau$ となる．さらに

$$
\begin{aligned}
& X(\tau^{(n)} \wedge t^{(n)}) \to X(\tau \wedge t)\ (n \to \infty) \text{ a.s.}, \\
\text{かつ}\quad & X(\tau^{(n)} \wedge t^{(n)}) \xrightarrow{L^1} X(\tau \wedge t)\ (n \to \infty).
\end{aligned} \tag{11.18}
$$

証明　定理 11.9 より，$\mathcal{F}_{\tau^{(n)}} \downarrow \mathcal{F}_\tau$ となる．定理 11.14 より，$\{X(t^{(n)});\ n \in \mathbb{N}\}$ が一様可積分優マルチンゲールになることに注意すると定理 11.20 より，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(\tau^{(n)} \wedge t^{(n)}) | \mathcal{F}_{\tau^{(n+1)} \wedge t^{(n+1)}}] &\leq X(\tau^{(n+1)} \wedge t^{(n+1)}) \text{ a.s.}, \\
\mathbb{E}[X(\tau^{(n)} \wedge t^{(n)})] &\leq \mathbb{E}[X(0)].
\end{aligned}
$$

定理 11.14 より，(11.18) を得る．　□

定理 11.22 X をRCLL(優) マルチンゲールとし，τ を停止時とする．このとき，$\{X(\tau \wedge t);\, t \geq 0\}$ は，RCLL(優) マルチンゲールとなる．

証明　所与の $t \geq s \geq 0$ に対して，$\tau^{(n)}$, $t^{(n)}$ を (11.17) で定義し，$s^{(n)}$ も同様に定義する．離散時間モデルより，

$$\mathbb{E}[X(\tau^{(n)} \wedge t^{(n)})|\mathcal{F}_{s^{(r)}}] \leq X(\tau^{(r)} \wedge s^{(r)}) \text{ a.s., } n, r \in \mathbb{N};\, r \geq n.$$

ここで，$r \uparrow \infty$ とすると，定理 11.14 より，

$$\mathbb{E}[X(\tau^{(n)} \wedge t^{(n)})|\mathcal{F}_s] \leq X(\tau^{(n)} \wedge s) \text{ a.s.}$$

上式において，(11.18) を左辺に適用し，右辺において X の右連続性を用いると，

$$\mathbb{E}[X(\tau \wedge t)|\mathcal{F}_s] \leq X(\tau \wedge s), \quad \text{a.s.}$$

□

定理 11.23 (Doob の任意抽出定理) $X = \{X(t);\, t \geq 0\}$ を一様可積分もしくは非負の RCLL 優マルチンゲールとし，τ と τ_1 と τ_2 を $\tau_1 \leq \tau_2$ となる停止時とする．このとき $\mathbb{E}[|X(\tau_2)|] < \infty$ であり，次が成立する．

$$\mathbb{E}[X(\infty)|\mathcal{F}_\tau] \leq X(\tau), \quad \mathbb{E}[X(\tau_2)|\mathcal{F}_{\tau_1}] \leq X(\tau_1) \quad \text{a.s.}$$

X が一様可積分もしくは非負の RCLL マルチンゲールの場合には，不等式を等式として題意が成立する．すなわち，

$$\mathbb{E}[X(\infty)|\mathcal{F}_\tau] = X(\tau), \quad \mathbb{E}[X(\tau_2)|\mathcal{F}_{\tau_1}] = X(\tau_1).$$

さらに，X が一様可積分ならば $\{X(\tau);\, \tau = \text{ 停止時 }\}$ は，一様可積分となる．

証明　$\tau^{(n)}$ を (11.17) によって定義する．離散時間モデルにおける定理 11.20 と同様にして

$$\mathbb{E}[X(\tau^{(n)})|\mathcal{F}_{\tau^{(n+1)}}] \leq X(\tau^{(n+1)})\, quad \mathbb{E}[X(\tau^{(n)})] \leq \mathbb{E}[X(0)].$$

定理 11.21 より，$X(\tau^{(n)}) \xrightarrow{L^1} X(\tau)\,(n \to \infty)$ かつ右連続性より $X(\tau^{(n)}) \to X(\tau)\,(n \to \infty)$ a.s. また，

$$\mathbb{E}[X(\infty)|\mathcal{F}_{\tau^{(n)}}] \leq X(\tau^{(n)})$$

に定理 11.14 を適用すると，

$$\mathbb{E}[X(\infty)|\mathcal{F}_\tau] \le X(\tau)$$

を得る．同様に

$$\mathbb{E}[X(\tau_2^{(n)})|\mathcal{F}_{\tau_1^{(r)}}] \le X(\tau_1^{(r)}), \quad n, r \in \mathbb{N};\ r \ge n$$

が成立し，上式において，$r \uparrow \infty$ とした後 $n \uparrow \infty$ とすると，題意を得る．
$\square$

定理 11.24 $X = \{X(t);\ t \in \mathbb{R}^+\}$ を各停止時 τ に対して，$\mathbb{E}[|X(\tau)|] < \infty$, $\mathbb{E}[X(\tau)] = 0$ となる発展的可測過程とすると，X は一様可積分マルチンゲールとなる．

証明 $t \ge 0$ として，

$$\tau := \begin{cases} t, & \omega \in F, \\ \infty, & \omega \in F^c := \Omega \setminus F, \end{cases} \qquad F \in \mathcal{F}_t.$$

とする．このとき τ は停止時となり，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(\tau)] &= \mathbb{E}[X(\tau)1_F] + \mathbb{E}[X(\infty)1_{F^c}] = 0, \\ \mathbb{E}[X(\infty)] &= \mathbb{E}[X(\infty)1_F] + \mathbb{E}[X(\infty)1_{F^c}] = 0. \end{aligned}$$

よって，$\mathbb{E}[X(\tau)1_F] = \mathbb{E}[X(\infty)1_F]$ となり，$X(t) = \mathbb{E}[X(\infty)|\mathcal{F}_t]$ を得る．
$\square$

11.5 局所化と局所マルチンゲール

定義 11.7 確率過程 $X = \{X(t);\ t \ge 0\}$ に対して $\tau_n \uparrow \infty\ (n \to \infty)$ となる停止時列 $\{\tau_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ が存在し，各 $n \in \mathbb{N}$ において $\{X(t \wedge \tau_n);\ t \ge 0\}$ について，ある性質が成立するとする．このとき，その性質は，X に関して**局所的に** (locally) 成立するという．

定義 11.8 $X = \{X(t);\ t \ge 0\}$ を適合過程とする．$\tau_n \uparrow \infty\ (n \to \infty)$ となる停止時列 $\{\tau_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ が存在し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{X(t \wedge \tau_n);\ t \ge 0\}$ が一様可積分マルチンゲールとなるとき，X を**局所マルチンゲール** (local martingale) と呼ぶ．

定理 11.25 局所マルチンゲール $X = \{X(t);\, t \in [0,\infty)\}$ が，$\mathbb{E}[Y] < \infty$ となる確率変数によって，$|X(t)| < Y$ となるならば，X は一様可積分マルチンゲールとなる．

証明 局所マルチンゲールの定義より，$\{\tau_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ を $\tau_n \uparrow \infty\, (n \to \infty)$ となる停止時列として，

$$\mathbb{E}[X(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s] = X(s \wedge \tau_n), \quad 0 \le s < t \tag{11.19}$$

となる．また，$\mathbb{E}[|X(t)|] \le \mathbb{E}[Y] < \infty$ であるから X は可積分である．さらに $\lim_{n\to\infty} X(t \wedge \tau_n) = X(t)$ より，Lebesgue の有界収束定理によって，$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X(t \wedge \tau_n)] = \mathbb{E}[X(t)]$．したがって，(11.19) において，$n \to \infty$ とすれば，

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s), \quad 0 \le s < t.$$

さらに定理 11.3 より，X は一様可積分マルチンゲールとなる． □

系 11.5 $X = \{X(t);\, t \ge 0\}$ が，$\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t]} |X(s)|] < \infty$，$t \in [0,T]$, $T < \infty$, となる局所マルチンゲールならば，X は，$[0,T]$ 上で一様可積分マルチンゲールとなる．

定理 11.26 $X = \{X(t);\, t \ge 0\}$ が，非負値局所マルチンゲールならば，優マルチンゲールとなる．

証明 Fatou の補題より，

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X(t \wedge \tau_n)] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X(t \wedge \tau_n)]. \tag{11.20}$$

極限の存在によって，$\lim_{n\to\infty} X(t \wedge \tau_n) = \liminf_{n\to\infty} X(t \wedge \tau_n) = X(t)$. また，局所マルチンゲールの定義より $\mathbb{E}[X(t \wedge \tau_n)] = \mathbb{E}[X(0)]$．したがって，$\mathbb{E}[X(t)] \le \mathbb{E}[X(0)] < \infty$. 同様に，

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s] = \liminf_{n\to\infty} X(s \wedge \tau_n) \tag{11.21}$$

より，$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] \le X(s)$ を得る． □

定義 11.9 確率過程 $X = \{X(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ において $\{X(\tau);\, \tau = \text{有限な停止時}\}$ が一様可積分な確率変数の族であるとき，X は**ディリクレ (Dirichlet) 族**に属すという．以下，ディリクレ族を $(\mathbb{D})$ で表わす．

定理 11.27 $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ が一様可積分マルチンゲールならば，$X \in (\mathbb{D})$.

証明 Doob の任意抽出定理（定理 11.23）より明らか. □

定理 11.28 τ を停止時とする．M が一様可積分マルチンゲールならば，$M^*(t) = \sup_{s\in[0,t]} |M(s)|$ として，次の不等式が成立する．

$$P(M^*(\tau) \geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[|M(\tau)|1_{\{M^*(\tau)\geq a\}}] \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[|M(\tau)|], \quad \forall a > 0. \tag{11.22}$$

さらに，$\mathbb{E}[|M(\tau)|^p] < \infty$, $p > 1$ ならば，次の不等式が成立する．

$$\mathbb{E}[M^*(\tau)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M(\tau)|^p]. \tag{11.23}$$

証明

(11.22) の証明： $\tau_a := \inf\{t \geq 0; |M(t)| > a\} \wedge \tau$ とすると，$P(M^*(\tau) > a) \leq P(|M(\tau_a)| \geq a)$ となるので

$$P(M^*(\tau) > a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[|M(\tau_a)|1_{\{M(\tau_a)\geq a\}}].$$

任意抽出定理より $M(\tau_a) = \mathbb{E}[M(\tau)|\mathcal{F}_{\tau_a}]$ となること及び Jensen の不等式を用いると，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M(\tau_a)|1_{\{M(\tau_a)\geq a\}}] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|M(\tau)||\mathcal{F}_{\tau_a}]1_{\{M(\tau_a)\geq a\}}] \\ &= \mathbb{E}[|M(\tau)|1_{\{M(\tau_a)\geq a\}}].\end{aligned}$$

また，$\{|M(\tau_a)| \geq a\} \subset \{M^*(\tau) \geq a\}$ となることから，

$$\mathbb{E}[|M(\tau)|1_{\{M(\tau_a)\geq a\}}] \leq \mathbb{E}[|M(\tau)|1_{\{M^*(\tau)\geq a\}}].$$

以上により，$\{a_k; k \in \mathbb{N}\}$ を $a_k \uparrow a\,(k \to \infty)$ となる任意の実数列として，

$$P(M^*(\tau) > a_k) \leq \frac{1}{a_k}\mathbb{E}[|M(\tau)|1_{\{M^*(\tau)\geq a_k\}}]$$

が成立する．ここで，$k \to \infty$ とすれば (11.22) を得る．

(11.23) の証明： はじめに，$\mathbb{E}[(M^*(\tau))^p] < \infty$ として証明する．(11.22) より，

$$P(M^*(\tau) \geq a^{\frac{1}{p}}) \leq a^{-\frac{1}{p}}\mathbb{E}\left[|M(\tau)|1_{\left\{M^*(\tau)\geq a^{\frac{1}{p}}\right\}}\right], \quad \forall a > 0.$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M^*(\tau))^p] &= \int_0^\infty P(M^*(\tau) \geq a^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}a \\
&\leq \mathbb{E}\left[|M(\tau)| \int_0^{(M^*(\tau))^p} a^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}a\right] \\
&= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|M(\tau)|(M^*(\tau))^{p-1}\right].
\end{aligned}
$$

上式最右辺に Hölder の不等式を用いれば，

$$
\mathbb{E}[(M^*(\tau))^p] \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|M(\tau)|^p\right]^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}\left[(M^*(\tau))^p\right]^{\frac{p-1}{p}}.
$$

これより (11.23) を得る．次に $\mathbb{E}[(M^*(\tau))^p] = \infty$ の場合を証明する．$\tau_k := \inf\{t \geq 0; |M(t)| \geq k\} \wedge \tau$ とする．すると

$$
M^*(\tau_k) \leq M^*(\tau_k-) + |\Delta M(\tau_k)| \leq 2M^*(\tau_k-) + |M(\tau_k)| \leq 2k + |M(\tau_k)|.
$$

ここで，$x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^p$ が凸関数となることに注意すると，

$$
(M^*(\tau_k))^p \leq 2^{p-1}[(2k)^p + |M(\tau_k)|^p]. \tag{11.24}
$$

さらに任意抽出定理より $\mathbb{E}[M(\tau)|\mathcal{F}_{\tau_k}] = M(\tau_k)$ となること及び Jensen の不等式を用いると

$$
\mathbb{E}[|M(\tau_k)|^p] \leq \mathbb{E}[|M(\tau)|^p]. \tag{11.25}
$$

(11.24) と (11.25) より，$\mathbb{E}[(M^*(\tau_k))^p] < \infty$ となるので，

$$
\mathbb{E}[M^*(\tau_k)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M(\tau_k)|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M(\tau)|^p].
$$

ここで，$k \to \infty$ とすれば，Fatou の補題より，(11.23) を得る． □

(??) において，$p = 2$ とすると直ちに次の系を得る．

系 11.6 (Doob の最大不等式)

$$
\mathbb{E}\left[(\sup_{s<\infty} M(s))^2\right] \leq 4E[M(\infty)^2]. \tag{11.26}
$$

11.6 マルチンゲール表現定理

定理 11.29 $\mathbb{F}^B := \{\mathcal{F}_t^B;\, t \in \mathbb{R}^+\}$ をブラウン運動 $B = \{B(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ から生成された零拡大情報増大系とする．このとき $T > 0$ を任意の正値定数として任意の $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ に対して，$\mathbb{E}\left[\int_0^T H(s)^2 \mathrm{d}s\right] < \infty$ かつ,

$$\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t^B\right] = \mathbb{E}[Y] + \int_0^T H(s)\mathrm{d}W(s), \quad \text{a.s.}$$

となる $\mathbb{F}^B$-可予測過程 $H = \{H(t);\, t \in [0,T]\}$ が存在する．

証明 $\mathbb{F}^B$-可予測過程 $H = \{H(t);\, t \in [0,T]\}$ に対して,

$$\|H\|_2 := \left(\mathbb{E}\left[\int_0^T H(t)^2 \mathrm{d}t\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

とすると，$\mathrm{L}_T^2[B] := \{H = \mathbb{F}^B\text{-可予測過程};\, \|H\|_2 < \infty\}$ は Hilbert 空間となる．写像 $I : \mathrm{L}_T^2[B] \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ を

$$I(H) := \int_0^T H(s)\mathrm{d}B(s)$$

で定義すると，$V := I(\mathrm{L}_T^2[B])$ は，$L_0^2(\mathcal{F}_T^B) := \left\{Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P);\, \mathbb{E}[Z] = 0\right\}$ の完備な部分空間となる．定理の証明には，$V = L_0^2(\mathcal{F}_T^B)$ を示せばよい．そのために，$Z \in L_0^2(\mathcal{F}_T^B)$ を V の直交補空間に属する要素として $Z = 0$ を示す.

$Z(t) := \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t^B]$ とおくと $\{Z(t);\, t \in [0,T]\}$ は，2 乗可積分マルチンゲールとなる．

$H \in \mathrm{L}_T^2[B]$ に対して，$N(t) := \mathbb{E}[I(H)|\mathcal{F}_t^B]$, $t \in [0,T]$, とおくと，$N(T) \in V$，かつ任意の停止時 $\tau \in [0,T]$ に対して，$N(\tau) \in V$ となる．よって，$\mathbb{E}[ZN(\tau)] = \mathbb{E}[Z(\tau)N(\tau)] = 0$，さらに，$N(T)$ と $Z(T)$ は 2 乗可積分であるから，系 11.5 より $\{Z(t)N(t);\, t \in [0,T]\}$ は一様可積分マルチンゲールとなる．

ここで，任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，$M^\theta(t) := \exp\left(i\theta B(t) + \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$ とおくと，伊藤の公式より，$i\theta M^\theta(t) \in \mathrm{L}_T^2[B]$ となり，$\{Z(t)M^\theta(t);\, t \in [0,T]\}$ はマルチンゲールとなる．よって,

$$\mathbb{E}\left[Z(t)\exp\left(i\theta B(t)\right)|\,\mathcal{F}_s\right] = Z(s)\exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2(t-s)\right),\ 0 \le s \le t \le T. \tag{11.27}$$

これより，$0=t_0<t_1<\cdots<t_m\le T$ として，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[Z(T)\exp\left(i\sum_{j=1}^{m}\theta_j(B(t_j)-B(t_{j-1}))\right)\right]\\
=\ & Z(0)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2(t-s)\right)\\
=\ & 0. \qquad (11.28)
\end{aligned}$$

ここで，θ と $m\in\mathbb{N}$ は任意であったので $Z(T)=0$ を得る． □

定理 11.30 (ブラウン運動マルチンゲール表現定理) $M=\{M(t);\,t\in[0,T]\}$ を $\mathbb{F}^W$-適合的局所マルチンゲールとする．このとき，M の見本路は連続となる．また，$\int_0^T H(s)^2\mathrm{d}s<\infty$ a.s.，かつ

$$M(t)=M(0)+\int_0^t H(s)\mathrm{d}B(s),\ t\in[0,T] \qquad (11.29)$$

となる可予測過程 H が存在する．

証明　M を $M(0)=0$ となる一様可積分マルチンゲールとして証明する．$M(t)=\mathbb{E}[M(\infty)|\mathcal{F}_t^B]$ とする．また，このとき，$\mathbb{E}[|M(\infty)-M^{(n)}(\infty)|]\le\frac{1}{3^n}$ となる有界な確率変数 $M^{(n)}(\infty)$ が存在する．ここで，$M^{(n)}(t):=\mathbb{E}[M^{(n)}(\infty)|\mathcal{F}_t^B]$ とおくと，Doob の劣マルチンゲール最大不等式によって，

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]}|M(t)-M^{(n)}(t)|>2^{-n}\right)\le 2^n\mathbb{E}[|M(\infty)-M^{(n)}(\infty)|]\le\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

よって，Borel-Cantelli の補題により，$M^{(n)}$ は一様に M に概収束する．さらに $M^{(n)}(\infty)\in L^\infty\subset L^2$ であらるから，定理 11.29 より，M も連続となる．M が連続であるから，$\{M^{(\tau\wedge t)};t\ge 0]\}$ が有界になるように停止時 τ をとれる．したがって，定理 11.29 より，ある可予測過程 H によって

$$M(\tau\wedge t)=\int_0^\tau H(s)\mathrm{d}B(s)$$

となる． □

定理 11.31 (ポアソン・マルチンゲール表現定理) $M = \{M(t);\, t \in [0,T]\}$ をポアソン過程 $N = \{N(t);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ から生成される情報増大系に適合的な局所マルチンゲールとする．このとき，$\int_0^T |H(s)|\mathrm{d}s < \infty$ a.s.，かつ

$$M(t) = M(0) + \int_0^t H(s)\mathrm{d}(N(s) - s),\ t \in [0,T] \tag{11.30}$$

となる可予測過程 H が存在する．