# フーリエ級数

## 1　フーリエ級数とは？

周期 $T$ の関数 $f(t)$ を考えます．関数はどんなに複雑でもかまいません．この関数 $f(t)$ を，つぎのように三角関数 $\cos, \sin$ の重ね合わせで表したものを，関数 $f(t)$ のフーリエ級数といいます．

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2}a_0 &+ (a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t) + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) \\ &+ (a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t) + (a_4 \cos 4\omega t + b_4 \sin 4\omega t) + \cdots \end{aligned}} \tag{1}$$

関数 $f(t)$ は周期 $T$ をもつので，上の等式がなりたつためには，右辺も周期 $T$ をもたなければいけません．そのためには振動数 $\omega$ はどんな値でなければならないでしょうか？

定数項 $\frac{1}{2}a_0$ は $\omega$ を含んでいないから，とくに考える必要はありません．そこで三角関数 $\cos\omega t, \sin\omega t$ について考えると，これらの周期は $2\pi/\omega$ ですから，

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{すなわち} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{2}$$

でなければいけない事がわかります．

では残りの三角関数について考える必要はないのでしょうか？．たとえば三角関数 $\cos 2\omega t, \sin 2\omega t$ の周期は $(2\pi) \div (2\omega) = \pi/\omega$ です．さて周期が $\pi/\omega$ ということは，変数 $t$ が $\pi/\omega$ だけ増減するときに関数の値が変化しないことを意味します．ですから，変数 $t$ が $2 \times \pi/\omega$ だけ増減するときにも，関数の値はもちろん変化しません．言いかえれば，周期 $\pi/\omega$ をもつ関数は，必ず周期 $2 \times \pi/\omega = T$ をもつわけです．同様のことが，ほかの三角関数 $\cos 3\omega t, \sin 3\omega t, \cdots$ に対しても言えます．こうして，フーリエ級数すなわち式 (1) の右辺が周期 $T$ をもっていることを確かめることができました．

関数 $f(t)$ が振動現象を表している場合，フーリエ級数は，

> $f(t)$ がどんなに複雑な振動であっても，それは，振動数 $\omega$ の正弦振動，２倍の振動数の正弦振動，３倍の振動数の正弦振動、等の重ね合わせになっている

ことを示しています．この事実を利用して，振動現象に関する多くの難しい問題を，正弦振動に関する比較的に易しい問題に直すことが可能になります．

## 2　三角関数の積分

フーリエ級数に表れる正弦振動の振幅 $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ のことをフーリエ係数といいます．関数 $f(t)$ のフーリエ係数を求める公式を導くために，三角関数 $\cos, \sin$ の積分に関する重要な性質を証明しておきます．以下では，振動数は式 (2) を満たしているとし，また $m, n = 1, 2, 3, \cdots$ であるとします．

**三角関数の積分 1**

$$\int_0^T \cos n\omega t\, dt = \int_0^T \sin n\omega t\, dt = 0 \tag{3}$$

（証明）簡単です．

$$\int_0^T \cos n\omega t\, dt = \left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega}\right]_0^T = \frac{\sin n\omega T}{n\omega} = \frac{\sin 2\pi n}{n\omega} = 0$$

関数 $\sin n\omega t$ の積分についても同様にして証明できます．（証明終わり）

**三角関数の積分 2**

$$\int_0^T \cos^2 n\omega t\, dt = \int_0^T \sin^2 n\omega t\, dt = \frac{T}{2} \tag{4}$$

（証明）『倍角の公式』を用います．

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos^2 n\omega t\, dt &= \int_0^T \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2n\omega t\right)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2n\omega t}{2n\omega}\right]_0^T = \frac{1}{2}\left(T + \frac{\sin 4\pi n}{2n\omega}\right) = \frac{T}{2}\end{aligned}$$

関数 $\sin^2 n\omega t$ の積分についても同様にして証明できます．（証明終わり）

**三角関数の積分 3**　<u>$m \neq n$ であると仮定します</u>

$$\int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t\, dt = \int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t\, dt = 0 \tag{5}$$

（証明）『加法公式』を用います．

$$\begin{aligned}&\int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t\, dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)\omega t + \cos(m-n)\omega t\right)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)\omega t}{(m+n)\omega} + \frac{\sin(m-n)\omega t}{(m-n)\omega}\right]_0^T = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\pi(m+n)}{(m+n)\omega} + \frac{\sin 2\pi(m-n)}{(m-n)\omega}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

関数 $\sin m\omega t \sin n\omega t$ 積分についても同様にして証明できます.（証明終わり）

三角関数の積分 4

$$\int_0^T \sin n\omega t \cos n\omega t \, dt = 0 \tag{6}$$

問 1　上の「三角関数の積分 4」を証明せよ.

## 3　フーリエ係数

関数 $f(t)$ が与えられたとき，そのフーリエ係数を求める公式を導きましょう.

まず，式 (1) の両辺を，そのまま積分してみます.

$$\begin{aligned}&\int_0^T f(t)\,dt \\ = \quad & \int_0^T \frac{1}{2}a_0\,dt + \int_0^T (a_1\cos\omega t + b_1 \sin\omega t)\,dt + \int_0^T (a_2\cos 2\omega t + b_2\sin 2\omega t)\,dt + \cdots\end{aligned}$$

ここで「三角関数の積分 1」を用います．すると

$$\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0 \cdot T + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}a_0 \cdot T$$

こうして公式

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{7}$$

が導かれました.

つぎに，式 (1) の両辺に $\cos n\omega t$ を掛けてから，積分します.

$$\begin{aligned}&\int_0^T f(t)\,\cos n\omega t\,dt \\ = \quad & \frac{1}{2}a_0 \int_0^T \cos n\omega t\,dt \\ & +a_1 \int_0^T \cos\omega t\,\cos n\omega t\,dt + b_1 \int_0^T \sin\omega t\,\cos n\omega t\,dt \\ & \vdots \\ & +a_n \int_0^T \cos n\omega t\,\cos n\omega t\,dt + b_n \int_0^T \sin n\omega t\,\cos n\omega t\,dt \\ & \vdots\end{aligned}$$

ここで「三角関数の積分 1」と「三角関数の積分 3」を用います．すると

$$\int_0^T f(t)\,\cos n\omega t\,dt = a_n \int_0^T \cos^2 n\omega t\,dt + b_n \int_0^T \sin n\omega t\,\cos n\omega t\,dt$$

さらに「三角関数の積分 2」と「三角関数の積分 4」を用います．すると

$$\int_0^T f(t)\,\cos n\omega t\,dt = a_n \cdot \frac{T}{2} + 0 = a_n \cdot \frac{T}{2}$$

こうして公式

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\,\cos n\omega t\,dt \tag{8}$$

を導びくことができました．

同様に，式 (1) の両辺に $\sin n\omega t$ を掛けてから，積分することにより，つぎの公式

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\,\sin n\omega t\,dt \tag{9}$$

を導くことができます．

なお，公式 (8) において $n = 0$ とおくと，公式 (7) をえることができますから，公式 (7) を記憶する必要はありません．

また公式 (8) と (9) では，積分範囲を $t = 0$ から $t = T$ までとしていますが，積分される関数は周期 $T$ ですから，積分範囲を $t = -\frac{T}{2}$ から $t = \frac{T}{2}$ と変えても，積分の値は変わりません．じつは積分範囲をこのように変えた場合の方が利用しやすいので，その場合の公式をあらためて書いておきます．

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos n\omega t\,dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin n\omega t\,dt \end{aligned}} \tag{10}$$

## 4　簡単な関数のフーリエ級数

例 1　<u>方形波</u>

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-1 < t \leqq 0) \\ 1 & (0 < t \leqq 1) \end{cases} \quad ; \quad f(t+2) = f(t)$$

（解）関数 $f(t)$ は周期 2 の奇関数です．また cos は偶関数ですから，積 $f(t)\cos n\omega t$ は奇関数となるので，$a_n$ は実際に積分をしなくてもゼロである

ことがわかります．一方 sin は奇関数ですから，積 $f(t)\sin n\omega t$ は偶関数となるので，

$$b_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\, \sin n\omega t\, dt$$

周期 $T = 2$ ですから，$\omega = \pi$ とします．すると

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 f(t)\, \sin \pi n t\, dt = 2 \int_0^1 1 \cdot \sin \pi n t\, dt \\ &= 2 \left[ -\frac{\cos \pi n t}{\pi n} \right]_0^1 = \frac{2(1 - \cos \pi n)}{\pi n} \end{aligned}$$

ここで $\underline{\cos \pi n = (-1)^n}$ に注意しましょう．すると $n$ が偶数の場合 $b_n = 0$ であり，また $n$ が奇数の場合

$$b_n = \frac{4}{\pi n}$$

となることがわかります．したがってフーリエ級数は

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\cdots} \frac{4}{\pi n} \sin \pi n t \tag{11}$$

となります．

例 2　<u>三角波</u>

$$f(t) = 1 - |t| \ (-1 < t \leqq 1); \quad f(t+2) = f(t)$$

（解）関数 $f(t)$ は周期 2 の偶関数です．また sin は奇関数ですから，積 $f(t)\sin n\omega t$ は奇関数となるので，$b_n$ は実際に積分をしなくてもゼロであることがわかります．一方 cos は偶関数ですから，積 $f(t)\cos n\omega t$ は偶関数となるので，

$$a_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\, \cos n\omega t\, dt$$

周期 $T = 2$ ですから，$\omega = \pi$ とします．はじめに

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(t)\, dt = 2 \int_0^1 (1 - t)\, dt = 1$$

また $n \geqq 1$ の場合，

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 f(t)\, \cos \pi n t\, dt = 2 \int_0^1 (1-t)\, \cos \pi n t\, dt \\ &= 2 \int_0^1 (1-t) \left( \frac{\sin \pi n t}{\pi n} \right)' dt \\ &= 2 \left[ (1-t) \frac{\sin \pi n t}{\pi n} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 (1-t)' \frac{\sin \pi n t}{\pi n}\, dt \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \sin \pi n t\, dt \\ &= \frac{2(1 - \cos \pi n)}{(\pi n)^2} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{(\pi n)^2} \end{aligned}$$

したがってフーリエ級数は

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1,3,5,\cdots} \frac{4}{(\pi n)^2} \cos \pi n t \tag{12}$$

となります．

問 2　つぎの 鋸波 のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t) = t \ (-1 < t \leqq 1); \quad f(t+2) = f(t)$$

問 3　つぎの正弦波を 両波整流 した波のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t) = |\sin t|$$

問 4　つぎの正弦波を 半波整流 した波のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t \leqq 0) \\ \sin t & (0 < t \leqq \pi) \end{cases} \quad ; \quad f(t+2\pi) = f(t)$$

# 5　フーリエ級数の収束

フーリエ級数が，もとの関数 $f(t)$ を正確に表していることを，グラフを描くことにより，確かめてみましょう．グラフを描く作業は，たとえば C 言語でプログラムを作成したり，またたとえば Excel のような表計算ソフトウェアを用いても行うことができますが，ここでは最も有名なグラフ描画ソフトウェアである gnuplot を利用することにします．

はじめに例 2 の三角波の場合にグラフを描いてみましょう．エディタでつぎのファイルを作成します．

```
x(t)=t-2*floor((t+1)/2)
k=4/(pi*pi)
f(t)=1-abs(x(t))
f0(t)=0.5
f1(t)=f0(t)+k*cos(pi*x(t))
f3(t)=f1(t)+k/9*cos(3*pi*x(t))
set samples 400
plot [t=-4:4] f(t),f0(t),f1(t),f3(t)
```

このファイルにおいて，少し理解しにくい最初の行だけで，あとの行は gnuplot の入門的解説を読めばすぐ理解できるでしょう．

関数 floor(t) は数 t を越えない最大の整数を求めるものです．いま考えている三角波の場合は，周期 2 ですから，時刻 $t$ が $2n-1 \leqq t < 2n+1$ （ただし $n$ は整数）のときの関数の値は，時刻 $t-2n$ の関数の値と一致しているはずです．すなわち $f(t) = f(t-2n)$.

$$\begin{aligned} 2n-1 \leqq & \quad t & < 2n+1 \\ 2n \leqq & \quad t+1 & < 2n+2 \\ n \leqq & \quad \frac{t+1}{2} & < n+1 \end{aligned}$$

したがって

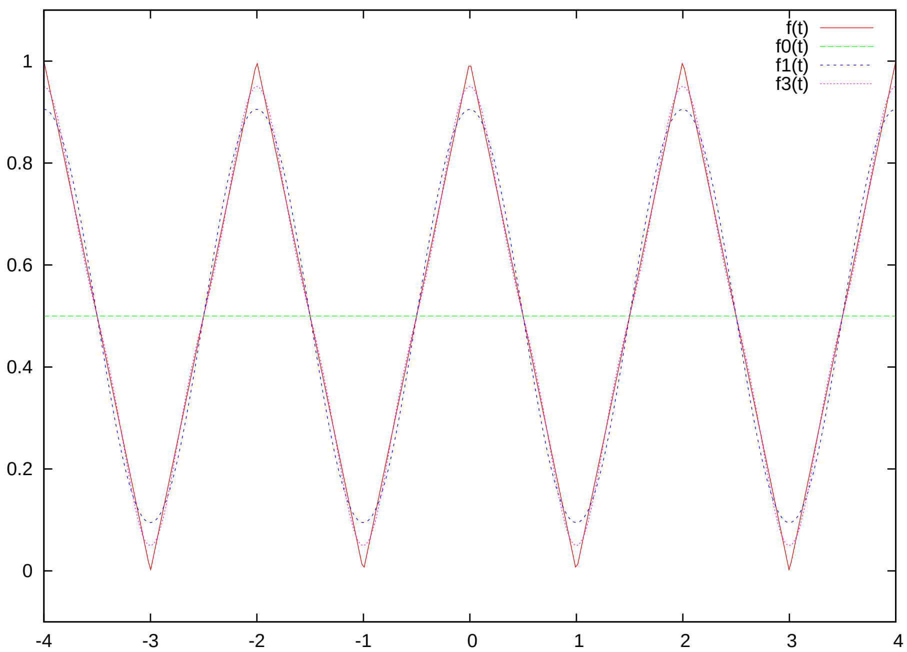
$$\begin{aligned} n &= \operatorname{floor}\left(\frac{t+1}{2}\right) \\ t-2n &= t-2\operatorname{floor}\left(\frac{t+1}{2}\right) \end{aligned}$$

となります．この $t-2n$ を x(t) と書くことにします．

上のファイルを作成したら，それに適当に名前を付けて保存します（今回は "triangular.plt" と名前を付けました）．あとは gnuplot を起動したあと，

```
load "triangular.plt"
```

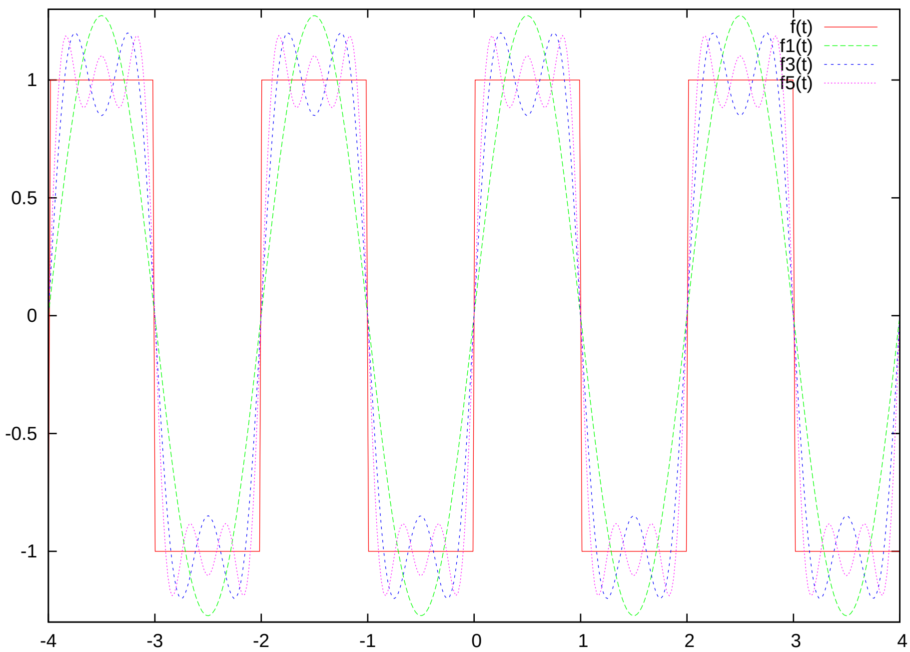
と入力すれば，つぎのグラフが描かれます．



方形波の場合は，つぎのようなファイルを作ればよいでしょう（ファイル名はたとえば "square.plt" とします）．

```
x(t)=t-2*floor((t+1)/2)
k=4/pi
f(t)=(x(t)>0) ? 1 : (-1)
f1(t)=k*sin(pi*x(t))
f3(t)=f1(t)+k/3*sin(3*pi*x(t))
f5(t)=f3(t)+k/5*sin(5*pi*x(t))
set samples 400
plot [t=-4:4] [-1.3:1.3] f(t),f1(t),f3(t),f5(t)
```

これを用いると，つぎのグラフを描くことができます．




**問題 5**　鋸波のフーリエ級数のグラフを描け．

**問題 6**　正弦波を両波整流した波のフーリエ級数のグラフを描け．

**問題 7**　正弦波を半波整流した波のフーリエ級数のグラフを描け．