第7章　特性関数と中心極限定理

本章では，確率分布を特徴付ける特性関数について学習し，それを基に確率・統計の中心命題の１つである中心極限定理を導出する．

7.1　積率母関数と特性関数

定義 7.1 確率分布 (X, P_X) に対して，

$$\phi(\theta) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X}] \equiv \int_R \mathrm{e}^{\theta x}\mathrm{d}P_X(x) \quad \forall\theta \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

が $\theta = 0$ の近傍で存在するとき，関数 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を X（もしくは P_X）の**積率母関数**という．

注 7.1 所与の $\theta_0, \theta \in \mathbb{R}$ を $0 \leq \theta \leq \theta_0$ もしくは $0 \geq \theta \geq \theta_0$ となるものとする．このとき，

$$\mathrm{e}^{\theta x} \leq 1 + \mathrm{e}^{\theta_0 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

となることから，$\phi(\theta_0)$ が存在すれば $\phi(\theta)$ が存在する．

例 7.1 X は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数とする．このとき，X の積率母関数は次式で与えられる．

$$\phi(\theta) = \mathrm{e}^{\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2} \tag{7.2}$$

問 7.1 (7.2) を導出せよ．

解答例

$f(x;\mu,\sigma)$ を平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数とすると，

$$\mathrm{e}^{\theta x} f(x;\mu,\sigma) = \mathrm{e}^{\theta\mu + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2} f(x;\mu + \sigma^2\theta, \sigma) \tag{7.3}$$

が成立するので[1],

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta x} f(x;\mu,\sigma)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta\mu+\frac{\sigma^2}{2}\theta^2} f(x;\mu+\sigma^2\theta,\sigma)\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\theta\mu+\frac{\sigma^2}{2}\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu+\sigma^2\theta,\sigma)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\theta\mu+\frac{\sigma^2}{2}\theta^2}. \qquad \square \end{aligned}$$

7.2 複素数値関数の積分

以下 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表わし，$\mathbb{C}$ は虚数空間を表わすとする．

定義 7.2 測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上の実数値 $\mathcal{F}$-可測関数 f_1 と f_2 が可積分であるとき，複素数値関数 $f := f_1 + \mathrm{i}f_2$ は，$\mathcal{F}$-**可測**かつ**可積分**であるといい，その積分を

$$\int f\mathrm{d}\mu := \int f_1\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int f_2\mathrm{d}\mu$$

で定義する．

命題 7.1 f と g を $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上の複素数値可積分関数とすると実数値関数と同様に次が成立する．

(1) $\int_{A+B} f\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu + \int_B f\mathrm{d}\mu \quad A,B\in\mathcal{F}$.

(2) $\int \alpha f\mathrm{d}\mu = \alpha\int f\mathrm{d}\mu \quad \forall\,\alpha\in\mathbb{C}$.

(3) $\int(f+g)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu$.

(4) $\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f|\mathrm{d}\mu$.

問 7.2 命題 7.1 を証明せよ．

定理 7.1 (複素数関数に対する Lebesgue の有界収束定理) $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上の複素数値可測関数 $f, f_1, f_2, \cdots$ に対して，実数値可測関数 $h\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が存在して，

$$f_n \to f (n\to\infty),\ |f_n| \le h \quad \mu-\text{a.e.}$$

[1] 容易に確かめられるので各自確かめて欲しい．なお，(7.3) はファイナンスにおける Black=Sholes 式の導出等に威力を発揮する道具となるので記憶されることをお勧めする．

であるならば,

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

証明　$|f_n - f| \to 0 (n\to\infty)$, $|f_n - f| \le 2h$ μ-a.e. であるから，Lebesgue の有界収束定理（定理??）より，

$$0 \le \left|\int f_n \mathrm{d}\mu - \int f \mathrm{d}\mu\right| = \left|\int (f_n - f)\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f_n - f|\mathrm{d}\mu \to 0\,(n\to\infty).$$

□

7.3　特性関数

定義 7.3 (特性関数) 確率分布 (X, P_X) に対して,

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}] \equiv \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}P_X(x) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

によって定義される関数 $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を X（もしくは P_X）の**特性関数**と呼ぶ.

注 7.2 $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right| \equiv 1$ であるから，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，特性関数が存在する.

例 7.2 X は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数とする．このとき, X の特性関数は次式で与えられる.

$$\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t - \frac{\sigma^2}{2}\theta^2} \tag{7.4}$$

問 7.3 (7.4) を導出せよ.

定理 7.2 (Lévy の反転公式) 確率変数 X の分布関数 F に対して次が成立する．a, b を F の任意の連続点として,

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt}}{\mathrm{i}t}\varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

証明　P_X を X の確率分布とする．

$$\begin{aligned} I(\xi) &:= \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt}}{\mathrm{i}t}\varphi_X(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\xi}^{\xi}\left\{\int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda}\mathrm{d}\lambda\varphi_X(t)\right\}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\xi}^{\xi}\left[\int_a^b\left\{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}P_X(x)\right\}\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_a^b\left\{\int_{-\xi}^{\xi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-\lambda)}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}P_X(x) \quad (\because \text{ Fubini の定理}) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-\lambda)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(x-\lambda)}}{\mathrm{i}(x-\lambda)}\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}P_X(x) \\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\left[\int_a^b \frac{\sin(\xi(x-\lambda))}{x-\lambda}\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}P_X(x). \end{aligned}$$

ここで，$u := \xi(\lambda - x)$ という変数置換をし，

$$S(x) := \int_0^x \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

とすると，

$$I(\xi) = 2\int_{\mathbb{R}}(S(\xi(b-x)) - S(\xi(a-x)))\mathrm{d}P_X(x).$$

ここで，公式

$$S(x) \to \pm\frac{\pi}{2}\ (x \to \pm\infty)\ (\text{複合同順})$$

に注意すると[2]，$S(x), x \in \mathbb{R}$ は有界となるから，

$$\exists M \in \mathbb{R};\ |S(x)| \leq M \quad x \in \mathbb{R}.$$

これより，$\xi \to \infty$ となる任意の数列 $\langle \xi_n \rangle$ に対して，

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= S(\xi_n(b-x)) - S(\xi_n(a-x)) \\ &\to f(x) := \begin{cases} \pi; & x \in (a,b) \\ \frac{\pi}{2}; & x = a \text{ または } x = b \\ 0; & x < a \text{ または } x > b \end{cases} \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

[2]例えば，杉浦 (1980)p.321 参照．

かつ

$$|f_n(x)| \leq |S(\xi_n(b-x))| + |S(\xi_n(a-x))| \leq 2M.$$

したがって，Lebsegue の有界収束定理より，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I(\xi_n) &= 2\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}P_X(x) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}P_X(x) \\
&= 2\left\{\int_{(a,b)} \pi\mathrm{d}P_X(x) + \int_{\{a\}} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}P_X(x) + \int_{\{b\}} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}P_X(x)\right\} \\
&= 2\pi P_X((a,b)) + \pi P_x(\{a\}) + \pi P_x(\{b\}).
\end{aligned}$$

ここで，$F(b) - F(a) = P_X((a,b]) = P_X((a,b)) + P_X(\{b\})$ に注意すると，

$$\lim_{n\to\infty} I(\xi_n) = 2\pi(F(b) - F(a)) + \pi(P_X(\{a\}) - P_X(\{b\})).$$

さらに，a は F の連続点であったことに注意すると，

$$\begin{aligned}
P_X(\{a\}) &= P_X\left(\cap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, a\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P_X\left(\left(a - \frac{1}{n}, a\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(F(a) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

同様にして，$P_X(\{b\}) = 0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty} I(\xi_n) = 2\pi(F(b) - F(a)).$$

$\langle\xi_n\rangle$ は $x_n \to \infty$ となる任意の数列であったから，結局，

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\xi\to\infty} I(\xi)$$

を得る． □

補題 7.1 単調非減少関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の不連続点は高々可算個である．

証明　F の不連続点 d に半開区間 $I_d := (F(d-0), F(d)]$ を対応させる．$F(d-0) < F(d)$ であるから，Archimedes の公理の系**??**より，$r_d \in I_d$ と

なる有理数 r_d が存在する．ここで，d' を $d' < d$ となる F の不連続点とすると，$F(d') \leq F(d-0)$ であるから，$I_d \cap I'_d = \emptyset$ となることに注意すると，$d \neq d'$ ならば $r_d \neq r'_d$ であることが分かる．したがって，F の不連続点の集合を D とすると，D は $\{r_d;\, d \in D\}$ と一対一に対応している．$\{r_d;\, d \in D\} \subset \mathbb{Q}$ であるから，高々可算集合である．以上により，D も可算集合となり，題意を得る． □

定理 7.3 (特性関数の一意性) 確率変数 X_1 と X_2 の特性関数が同じならば，$P_{X_1} = P_{X_2}$

証明 任意の確率変数 X の分布関数を F とし，D を F の不連続点の集合とする．任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\left(x, x+\frac{1}{n}\right]$ は非可算集合であるから，補題 7.2 より，

$$\exists\, b_n \in \left(x, x+\frac{1}{n}\right];\ b_n \notin D.$$

$\therefore F(x) = F(x+0) = \lim_{n\to\infty} F(b_n)$. 同様にして，$x > a_n \to -\infty (n \to \infty)$ となる F の連続点 a_n が存在し，

$$0 = F(-\infty) = \lim_{n\to\infty} F(a_n).$$

ここで，Lévy の反転公式 (定理 7.2) より，

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} (F(b_n) - F(a_n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \lim_{\xi\to\infty} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a_n t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_n t}}{\mathrm{i}t} \varphi_X(t) \mathrm{d}t.$$

したがって，分布関数 F が特性関数 φ_X によって，一意に与えられることになる．よって，このことから，確率変数 X_1 と X_2 の特性関数が同じならば，確率分布も同値となる． □

7.4 法則収束と弱収束

定義 7.4 有限 Borel 測度 P に対して，$F(y) := P((-\infty, y])$ で定義される関数 $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を P の**分布関数**という．

定義 7.5 (弱収束と法則収束) 有限 Borel 測度 P_n，P の分布関数を各々 F_n，F としたとき，F のすべての連続点で F_n が F に収束するならば，P_n は P に**弱収束**するという．特に P_n と P が確率測度のときには，P_n は P に

法則収束するという．また，確率変数 X_n，X の分布関数を各々F_{X_n}，F_X としたとき，F_X のすべての連続点で F_{X_n} が F_X に収束するならば，X_n は X に**法則収束**するという．

定理 7.4 X_n が X に確率収束するならば，X_n は X に法則収束する．

証明 y を F の連続点とすると任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\exists\delta > 0;\ P(X \le y) - \frac{\epsilon}{2} < P(X \le y - \delta),\ P(X \le y) + \frac{\epsilon}{2} > P(X \le y + \delta). \tag{7.5}$$

ここで，$X_n < y$，$|X_n - X| < \delta \Rightarrow X < y + \delta$ に注意すると，

$$P((X_n \le y) \cap (|X_n - X| < \delta)) \le P(X \le y + \delta). \tag{7.6}$$

一方，X_n が X に確率収束することから，

$$\exists n_0 \in \mathbb{N};\ n \ge n_0\ \Rightarrow\ P(|X_n - X| > \delta) < \frac{\epsilon}{2}$$

であるから，$n \ge n_0$ とすると

$$P(X_n \le y) - \frac{\epsilon}{2} < P((X_n \le y) \cap (|X_n - X| < \delta)). \tag{7.7}$$

以上 (7.5)〜(7.7) より，$n \ge n_0$ ならば $P(X_n \le y) < P(X \le y) + \epsilon$．同様にして，$P(X_n \le y) > P(X \le y) - \epsilon$ も示せるので題意を得る． □

問 7.4 定理 7.4 の証明において，

$$P(X_n \le y) > P(X \le y) - \epsilon \quad \forall\epsilon > 0$$

を示せ．

注 7.3 次の例 7.3 に示すように定理 7.4 の逆は一般には成立しない．

例 7.3 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \Omega\}$, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$ によって確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を定める．また，確率変数列 $\langle X_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ と確率変数 X を

$$X_n(\omega_1) = 1,\ X_n(\omega_2) = 0,\ n \in \mathbb{N},\ X(\omega_1) = 0,\ X(\omega_2) = 1$$

で定める．このとき，容易に確かめられるように X_n は X に法則収束するが，$\epsilon \in (0, 1)$ とすると

$$P(|X_n - X| > \epsilon) = P(\Omega) = 1$$

となり X_n は X に確率収束しない． □

定理 7.5 $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ が単調増加で右連続な関数で $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ を満たすものとする．このとき，$([0,1], \mathcal{B}, m_{[0,1]})$ 上の確率変数 X で，その分布関数が F となるものが存在する．

証明

$$X^+(\omega) := \inf\{x;\, F(x) > \omega\}, \quad X^-(\omega) := \sup\{x;\, F(x) < \omega\}, \quad \omega \in [0,1]$$

とする (図 7.4 参照)． $F_{X^+} = F_{X^-} = F$ であることを示す．

はじめに，$F_{X^-} = F$ を示す．これには，$F(y) = m(\{\omega;\, X^-(\omega) \le y\})$ を示せばよいが，このためには，$X^-(\omega) \le y \iff \omega \le F(y)$ を示せばよい．

$\omega \le F(y)$ とする．このとき，次が成立する．

$$\{x;\, F(x) < \omega\} \subset \{x;\, F(x) < F(y)\} \subset \{x;\, x \le y\}.$$

よって，$X^-(\omega) \equiv \sup\{x;\, F(x) < \omega\} \le y$.

一方，$X^-(\omega) \le y$ とすると，単調性から $F(X^-(\omega)) \le F(y)$．また，$\omega \le F(X^-(\omega))$ となる．何故ならば，右連続性より，$\omega > F(X^-(\omega))$ とすると，$\exists x_0 > X^-(\omega);\ F(X^-(\omega)) < F(x_0) < \omega$ となるが，これは，$X^-(\omega) \equiv \sup\{x;\, F(x) < \omega\}$ に矛盾する．$\therefore \omega \le F(y)$．したがって，$X^-(\omega) \le y \iff \omega \le F(y)$．同様にして，$F_{X^+} = F$ を示せる． □

問 7.5 定理 7.5 の証明にある $F_{X^+} = F$ を示せ．

定理 7.6 (Skorokhod の表現定理) P_n が P に法則収束するならば，$([0,1], \mathcal{B}, m_{[0,1]})$ 上の確率変数 X_n, X で $P_{X_n} = P_n$, $P_X = P$ かつ $X_n \to X$ a.s. となるものが存在する．

証明 P_n，P の分布関数 F_n，F に対応して，

$$X_n^+(\omega) := \inf\{x;\, F_n(x) > \omega\}, \quad X_n^-(\omega) := \sup\{x;\, F_n(x) < \omega\},$$
$$X^+(\omega) := \inf\{x;\, F(x) > \omega\}, \quad X^-(\omega) := \sup\{x;\, F(x) < \omega\}, \quad \omega \in [0,1]$$

とおくと，定理 7.5 の証明より，$F_{X^+} = F_{X^-} = F$．$F_{X_n^+} = F_{X_n^-} = F_n$．$y$ を $y > X^+(\omega)$ となる F の連続点とすると $F(y) > \omega$ となり，法則収束の

仮定から十分大きな n に対して $F_n(y) > \omega$ となる．したがって $X_n^+(\omega) \le y$ となる．

$$\therefore \quad \limsup_{n\to\infty} X_n^+(\omega) \le y.$$

y_k を F の連続点で $X^+(\omega)$ に上から収束する点列とする．$y = y_k$ として，$k \to \infty$ とすれば，

$$\limsup_{n\to\infty} X_n^+(\omega) \le X^+(\omega).$$

同様にして

$$\liminf_{n\to\infty} X_n^-(\omega) \ge X^-(\omega).$$

$$\therefore \quad X^-(\omega) \le \liminf_{n\to\infty} X_n^-(\omega) \le \limsup_{n\to\infty} X_n^+(\omega) \le X^+(\omega).$$

$F_{X^+} = F_{X^-} = F$ より，$P(X^- = X^+) = 1$．以上より，題意を得る． □

定理 7.7 P_{X_n} が P_X に法則収束するならば，$\varphi_{X_n} \to \varphi_X$.

証明 P_{X_n}，P_X に対応する定理7.6のSkorokhodの表現による確率変数を各々Y_n，Y とする．$Y_n \to Y$ a.s.であるから，有界収束定理より，$\mathbb{E}[e^{itY_n}] \to \mathbb{E}[e^{itY}]$．$X_n$，$X$ と Y_n，Y の分布は同じであるから，$\varphi_{X_n} \to \varphi_X$. □

定理 7.8 (Hellyの定理) $\langle F_n;\, n \in \mathbb{N}\rangle$ を確率測度の分布関数列とする．このとき，ある Borel 測度の分布関数 F に弱収束する部分列 $\langle F_{k_n};\, n \in \mathbb{N}\rangle \subset \langle F_n;\, n \in \mathbb{N}\rangle$ が存在する．

$\{q_n;\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ とする．$F_n(q_1)$ は，有界であるから，

$$F_{k_n^1}(q_1) \to y_1 \in [0,1]$$

となる部分列 $\{k_n^1;\, n \in \mathbb{N}\}$ が存在する ($\because$ Weierstrass-Bolzano の定理)．$F_{k_n^1}(q_2)$ は，有界であるから，$\{k_n^1;\, n \in \mathbb{N}\}$ の部分列 $\{k_n^2;\, n \in \mathbb{N}\}$ で

$$F_{k_n^2}(q_2) \to y_2 \in [0,1], \quad F_{k_n^2}(q_1) \to y_1$$

となるものが存在する．同様にして，

$$F_{k_n^l}(q_m) \to y_m \quad m \le l$$

となる部分列 $\{k_n^l;\, n \in \mathbb{N}\}$，$l = 3, 4\ldots,$ が存在する．そこで，$F_{k_n} := F_{k_n^n}$ とおくと，F_{k_n} は，すべての有理点 $\{q_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ で収束する．ここで，$F_{\mathbb{Q}}(q) := \lim_{n\to\infty} F_{k_n}(q)$, $q \in \mathbb{Q}$, として，

$$F(x) := \inf\{F_{\mathbb{Q}}(q);\, q \in \mathbb{Q},\, q > x\}$$

とおく．F が単調非減少，右連続であることを示す．

<u>単調非減少</u>

F_n が単調非減少であるから，極限の $F_{\mathbb{Q}}$ も単調非減少である．F は，その定義により，$F(x_1) \le F_{\mathbb{Q}}(q), q > x_1$，したがって，$x_1 < x_2$ とすれば，$F(x_1) \le \inf_{x_2<q} F_{\mathbb{Q}}(q) \equiv F(x_2)$.

<u>右連続</u>

$x_n \downarrow x$ とする．F の単調性より，$F(x) \le \lim_{n\to\infty} F(x_n)$．ここで，$F(x) < \lim_{n\to\infty} F(x_n)$ とすると，$\exists q \in \mathbb{Q};\ x < q$，$F_{\mathbb{Q}}(q) < \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. さらに，$\exists n_0 \in \mathbb{N};\ x_{n_0} \in [x, q)$，$F(x_{n_0}) \le F_{\mathbb{Q}}(q)$．ゆえに $F(x_{n_0}) < \lim F(x_n)$ となり，極限の定義に矛盾する．したがって，$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$.

さらに F は，$0 \le F_{\mathbb{Q}}(q_j) \le 1, j \in \mathbb{N}$，より， $0 \le F(x) \le 1, x \in \mathbb{R}$ であるから，$0 \le F(-\infty), F(\infty) \le 1$ を満たす．

最後に，F が x で連続であれば，$F_{k_n}(x) \to F(x)$ を示す．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$q_1, q_3 \in \mathbb{Q}$ を

$$F(x) - \epsilon < F(q_1) \le F(x) \le F(q_3) < F(x) + \epsilon, \quad q_1 < x < q_3$$

となるようにとる．さらに有理数 q_2 を $q_1 < q_2 < x$ とすると，$F_{k_n}(q_2) \to F_{\mathbb{Q}}(q_2) \ge F(q_1)$ であるから，十分大きな n に対して，

$$F(x) - \epsilon < F_{k_n}(q_2).$$

一方，q を $q_3 < q$ となる任意の有理数とすると，$F_{\mathbb{Q}}(q_3) = \lim_{n\to\infty} F_{k_n}(q_3) \le \lim_{n\to\infty} F_{k_n}(q) = F_{\mathbb{Q}}(q)$ より，$\lim_{n\to\infty} F_{k_n}(q_3) \le F(q_3)$. $\therefore$ 十分大きな n に対して，

$$F_{k_n}(q_3) < F(x) + \epsilon.$$

ここで，F_{k_n} が非減少であることに注意すると

$$F_{k_n}(q_2) \le F_{k_n}(x) \le F_{k_n}(q_3).$$

以上より，$|F_{k_n}(x) - F(x)| < \epsilon$ となる． □

定義 7.6 $\mathbb{R}$ 上の確率測度列 $\langle P_n; , n \in \mathbb{N}\rangle$ が

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}; \quad P_n(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) < \epsilon$$

を満たすとき，**タイト**（tight）であるという．

定理 7.9 (Prohorov の定理) 確率測度列 $\langle P_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ がタイトならば，ある確率測度 P に法則収束する部分列 $\langle P_{k_n}; n \in \mathbb{N} \rangle \subset \langle P_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ が存在する．

証明 Helly の定理より，P_n に対する分布関数を F_n とすると，ある測度に対する分布関数 F に弱収束する部分列 $\langle F_{k_n} \rangle$ が存在した．したがって，あとは，F がある確率測度に対する分布関数であることを示せばよい．すなわち，$\lim_{y\to\infty} F(y) = 1$ を示せばよい．

任意の $\epsilon > 0$ に対して $P_n((M,\infty)) \leq P_n(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) < \epsilon$ となる $M \in \mathbb{R}$ が存在する．そこで，各 n に対して，$\epsilon > 0$ を任意として，y を $F_n(y) = P_n((-\infty, y]) > 1 - \epsilon$ となる連続点とする．すると，$F(y) = \lim_{n\to\infty} F_{k_n}(y) \geq 1 - \epsilon$. □

定理 7.10 確率測度列 $\langle P_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ はタイトとする．P を $\langle P_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ の部分列が法則収束する確率測度とする．このとき，φ_n, φ を各々，P_n, P の特性関数として，各 $t \in \mathbb{R}$ において $\varphi_n(t) \to \varphi(t)\ (n \to \infty)$ ならば，P_n は P に法則収束する．

証明 P に法則収束する $\langle P_n \rangle$ の部分列 $\langle P_{k_n} \rangle$ に対応する特性関数列を $\langle \varphi_{k_n} \rangle$ とすると，定理 7.6 と定理 7.7 より，$\varphi_{k_n}(t) \to \varphi(t)$ となる．ここで，P_n が P に法則収束しないとすると，$\langle F_n(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ が $F(x)$ に収束しない F の連続点 x が存在する．したがって，Weierstrass-Bolzano の定理より，$\lim_{n\to\infty} F_{l_n}(x) \neq F(x)$ となる部分列 $\langle F_{l_n}; n \in \mathbb{N} \rangle \subset \langle F_n(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ が選べるが， Prohorov の定理により $\langle P_{l_n}; n \in \mathbb{N} \rangle$ の部分列 $\langle P_{m_n}; n \in \mathbb{N} \rangle$ で，ある確率測度 P' に法則収束するものが存在する．したがって，冒頭の議論と同様にして，$\langle P_{m_n}; n \in \mathbb{N} \rangle$ に対応する特性関数列は，P' に対応する特性関数に各点収束することになるが，仮定により，各 $t \in \mathbb{R}$ において $\varphi_n(t) \to \varphi(t)\ (n \to \infty)$ であるから，P' の特性関数は $\varphi(t)$ となり，特性関数の一意性より，$P = P'$ となる．これは矛盾である．何故ならば，$\lim_{n\to\infty} F_{l_n}(x) \neq F(x)$ であるのに関わらず，$\lim_{n\to\infty} F_{m_n}(x) = F(0)$ となるからである．したがって背理法により，P_n は P に法則収束する． □

7.5 中心極限定理

補題 7.2 φ を確率測度 P の特性関数とする．次が成立する．

$$P(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) \leq 7M \int_0^{\frac{1}{M}} [1 - \mathrm{Re}\varphi(u)]\mathrm{d}u.$$

証明

$$
\begin{aligned}
M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\varphi(u)]\mathrm{d}u &= M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\mathrm{d}P(x)]\mathrm{d}u \\
&= M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\int_{\mathbb{R}}\cos(xu)\mathrm{d}P(x)]\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}} M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\cos(xu)\mathrm{d}u]\mathrm{d}P(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin\left(\frac{x}{M}\right)}{\frac{x}{M}}\right)\mathrm{d}P(x) \\
&\geq \int_{\left|\frac{x}{M}\right|\geq 1}\left(1-\frac{\sin\left(\frac{x}{M}\right)}{\frac{x}{M}}\right)\mathrm{d}P(x) \\
&\geq \inf_{|t|\geq 1}\left(1-\frac{\sin(t)}{t}\right)\int_{\left|\frac{x}{M}\right|\geq 1}\mathrm{d}P(x) \\
&\geq \frac{1}{7}P(\mathbb{R}\setminus[-M,M]).
\end{aligned}
$$

ただし，最初の不等式には，$1-\frac{\sin x}{x}>0,\ |x|<1$, を用いた．また，最後の不等式には，$1-\frac{\sin x}{x}\geq 1-\sin 1>\frac{1}{7},\ |x|\geq 1$, を用いた[3]． □

---

[3] $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in\mathbb{R}$, より，

$$
\begin{aligned}
1-\frac{\sin x}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n-2}}{(4n-1)!}-\frac{x^{4n}}{(4n+1)!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-1)!}\left(1-\frac{x^2}{n(4n+1)}\right) \\
&> \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-1)!}\left(1-\frac{1}{n(4n+1)}\right)\geq 0,\quad |x|<1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin 1-\frac{\sin x}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(1-x^{2n}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(4n+1)!}\left(1-x^{4n}\right)-\frac{1}{(4n+3)!}\left(1-x^{4n+2}\right)\right)\geq 0,\ |x|\geq 1, \\
1-\sin 1 &= \left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(4n-1)!}-\frac{1}{(4n+1)!}\right) \\
&> \left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\right)=\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{4\times 5}\right)=\frac{1}{6}\times\frac{19}{20}>\frac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

定理 7.11 (Lévy の定理) φ_n を P_n の特性関数とする．φ を $\varphi_n \to \varphi$ となる関数で，ゼロで連続となるものとする．このとき φ は，ある確率測度 P の特性関数で，P_n は，P に弱収束する．

証明　定理 7.9，定理 7.10 より，P_n がタイトであることを示せばよい．
補題 7.2 より，

$$P_n(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) \le 7M \int_0^{\frac{1}{M}} [1 - \mathrm{Re}\varphi_n(u)] \mathrm{d}u.$$

$|\varphi_n| \le 1$ より，有界収束定理を用いると，

$$7M \int_0^{\frac{1}{M}} [1 - \mathrm{Re}\varphi_n(u)] \mathrm{d}u \to 7M \int_0^{\frac{1}{M}} [1 - \mathrm{Re}\varphi(u)] \mathrm{d}u.$$

さらに，φ がゼロで連続であり，$\varphi(0) = 1$ であることに注意すると，

$$7M \int_0^{\frac{1}{M}} [1 - \mathrm{Re}\varphi(u)] \mathrm{d}u \le 7M \frac{1}{M} \sup_{[0, \frac{1}{M}]} |1 - \mathrm{Re}\varphi(u)| \to 0 \ (M \to \infty).$$

したがって，$\epsilon > 0$ に対して，$\exists M_0,\, n_0 \in \mathbb{N}$;

$$7 \sup\nolimits_{[0, \frac{1}{M_0}]} |1 - \mathrm{Re}\varphi(u)| < \tfrac{\epsilon}{2},$$

$$\left| 7M_0 \textstyle\int_0^{\frac{1}{M_0}} [1 - \mathrm{Re}\varphi_n(u)] \mathrm{d}u - 7M_0 \int_0^{\frac{1}{M_0}} [1 - \mathrm{Re}\varphi(u)] \mathrm{d}u \right| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad n \ge n_0.$$

$$\begin{aligned}
\therefore \qquad & P_n(\mathbb{R} \setminus [-M_0, M_0]) \\
\le\ & \left| 7M_0 \int_0^{\frac{1}{M_0}} [1 - \mathrm{Re}\varphi_n(u)] \mathrm{d}u \right| \\
\le\ & 7 \sup_{[0, \frac{1}{M_0}]} |1 - \mathrm{Re}\varphi(u)| \\
& + \left| 7M_0 \int_0^{\frac{1}{M_0}} [1 - \mathrm{Re}\varphi_n(u)] \mathrm{d}u - 7M_0 \int_0^{\frac{1}{M_0}} [1 - \mathrm{Re}\varphi(u)] \mathrm{d}u \right| \\
\le\ & \epsilon, \quad n \ge n_0.
\end{aligned}$$

ここで，$n = 1, 2, \ldots, n_0$ に対して，M_n を $P_n([-M_n, M_n]) > 1 - \epsilon$ となるようにとり，$M := \max\{M_0, M_1, \ldots, M_{n_0}\}$ とすれば，$P_n([-M, M]) \ge 1 - \epsilon$，$n \in \mathbb{N}$.　□

$\therefore\ 1 - \frac{\sin x}{x} \ge 1 - \sin 1 > \frac{1}{7},\ |x| \ge 1$

定理 7.12 (Lindeberg-Feller の中心極限定理) $\langle X_k;\, k\in\mathbb{N}\rangle$ を有限な期待値 $m_k=\mathbb{E}[X_k]$ と分散 $\sigma_k^2=\mathrm{Var}[X_k]$ をもつ独立な確率変数の列とする．このとき，$c_n^2:=\sum_{k=1}^n\sigma_k^2$ として

$$\frac{1}{c_n^2}\sum_{k=1}^n\int_{\{x;\,|x-m_k|\geq\epsilon c_n\}}(x-m_k)^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)\to 0\ (n\to\infty) \tag{7.8}$$

となるならば，$S_n:=\sum_{k=1}^n X_k$ として

$$T_n:=\frac{S_n-\mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}}$$

は，標準正規分布に従う確率変数に法則収束する．

証明 $m_k=0$ として定理を証明すればよい[4]．これには，定理 7.11 より，

$$\begin{aligned}
&\varphi_{T_n}(u)=\prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right)\to\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\\
\iff\quad&\log\prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right)\to-\frac{1}{2}u^2\ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

を示せばよい．$\epsilon>0$ を任意として，Taylor 展開の公式より，

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_k}(u) &= \int_{|x|\geq\epsilon c_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}P_{X_k}(x)+\int_{|x|<\epsilon c_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}P_{X_k}(x)\\
&= \int_{|x|\geq\epsilon c_n}\left(1+\mathrm{i}ux+\frac{1}{2}\theta_2u^2x^2\right)\mathrm{d}P_{X_k}(x)\\
&\quad+\int_{|x|<\epsilon c_n}\left(1+\mathrm{i}ux-\frac{1}{2}u^2x^2+\frac{1}{6}\theta_3|u|^3|x|^3\right)\mathrm{d}P_{X_k}(x)\\
&= 1+\frac{1}{2}u^2\int_{|x|\geq\epsilon c_n}\theta_2x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)-\frac{1}{2}u^2\int_{|x|<\epsilon c_n}x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)\\
&\quad+\frac{1}{6}|u|^3\int_{|x|<\epsilon c_n}\theta_3|x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x)
\end{aligned}$$

[4] $\because$ $\mathbb{E}[X_k]=0$ としたとき，$\langle m_k;\, k\in\mathbb{N}\rangle$ を任意の実数列として，$Y_k:=X_k+m_k$ とおくと，$\mathbb{E}[Y_k]=m_k$ であり，

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k-\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right]}}=\frac{\sum_{k=1}^n Y_k-\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n Y_k\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^n Y_k\right]}}.$$

となる．

となる θ_i; $|\theta_i| \leq 1$, $i = 2, 3$ が存在する．ここで，記号の簡略化のため，

$$\begin{aligned} \alpha_{nk} &:= \int_{|x| \geq \epsilon c_n} x^2 \mathrm{d}P_{X_k}(x), \\ \beta_{nk} &:= \int_{|x| < \epsilon c_n} x^2 \mathrm{d}P_{X_k}(x) \leq \epsilon^2 c_n^2 \end{aligned}$$

とする．

$$\left| \int_{|x| \geq \epsilon c_n} \theta_2 x^2 \mathrm{d}P_{X_k}(x) \right| \leq \int_{|x| \geq \epsilon c_n} x^2 \mathrm{d}P_{X_k}(x),$$
$$\left| \int_{|x| < \epsilon c_n} \theta_3 |x|^3 \mathrm{d}P_{X_k}(x) \right| \leq \int_{|x| < \epsilon c_n} |x|^3 \mathrm{d}P_{X_k}(x) \leq \int_{|x| < \epsilon c_n} \epsilon c_n x^2 \mathrm{d}P_{X_k}(x)$$

より，

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \epsilon c_n} \theta_2 x^2 \mathrm{d}P_{X_k}(x) &= \theta_2' \alpha_{nk}, \\ \int_{|x| < \epsilon c_n} \theta_3 |x|^3 \mathrm{d}P_{X_k}(x) &= \theta_3' \epsilon c_n \beta_{nk}, \quad |\theta_2'| \leq 1, |\theta_3'| \leq 1 \end{aligned}$$

となる θ_2', θ_3' が存在する．

$$\therefore \quad \varphi_{X_k}(u) = 1 + \frac{1}{2} u^2 \theta_2' \alpha_{nk} - \frac{1}{2} u^2 \beta_{nk} + \frac{1}{6} |u|^3 \theta_3' \epsilon c_n \beta_{nk}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n} \right) &= 1 + \gamma_{nk}, \\ \gamma_{nk} &:= \frac{1}{2} u^2 \theta_2' \frac{\alpha_{nk}}{c_n^2} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\beta_{nk}}{c_n^2} + \frac{1}{6} |u|^3 \theta_3' \epsilon \frac{\beta_{nk}}{c_n^2}. \end{aligned}$$

(7.8) より，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{nk}}{c_n^2} \to 0 \ (n \to \infty). \tag{7.9}$$

よって，$\sum_{k=1}^n (\alpha_{nk} + \beta_{nk}) \equiv c_n^2$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_{nk}}{c_n^2} \to 1 \ (n \to \infty). \tag{7.10}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} \to -\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{6} |u|^3 \theta_3' \epsilon \ (n \to \infty). \tag{7.11}$$

さらに，ここで，log に対する Taylor 展開の公式を適用すると，ある $|\theta_1| \leq 1$ に対して，

$$\log \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_{nk} + \theta_1 |\gamma_{nk}|^2\right)$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
& \left|\log \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) + \frac{1}{2}u^2\right| \\
\leq \;& \left|\sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} + \frac{1}{2}u^2\right| + |\theta_1| \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 \\
\leq \;& \left|\sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}|u|^3 \theta_3' \epsilon\right| + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 + |u|^3 |\theta_3'| \epsilon.
\end{aligned}$$

上式，最右辺の第一項は，(7.11) より，ゼロに収束し，$|u|^3 |\theta_3'| \epsilon \to 0 \ (\epsilon \to 0)$ となる．したがって，あとは，

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 \to 0 \ (n \to 0)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 &\leq \max_{k=1,\ldots,n} |\gamma_{nk}| \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|, \\
&\leq \left(\frac{1}{2}u^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{nk}}{c_k^2} + \frac{1}{2}u^2\epsilon^2 + \frac{1}{6}|u|^3\epsilon^3\right)\left(\frac{1}{2}u^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{nk}}{c_k^2} + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}|u|^3\epsilon\right).
\end{aligned}$$

したがって，(7.9) より，$\epsilon \to 0$ とすれば，

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 \to 0 \ (n \to 0)$$

となる． □

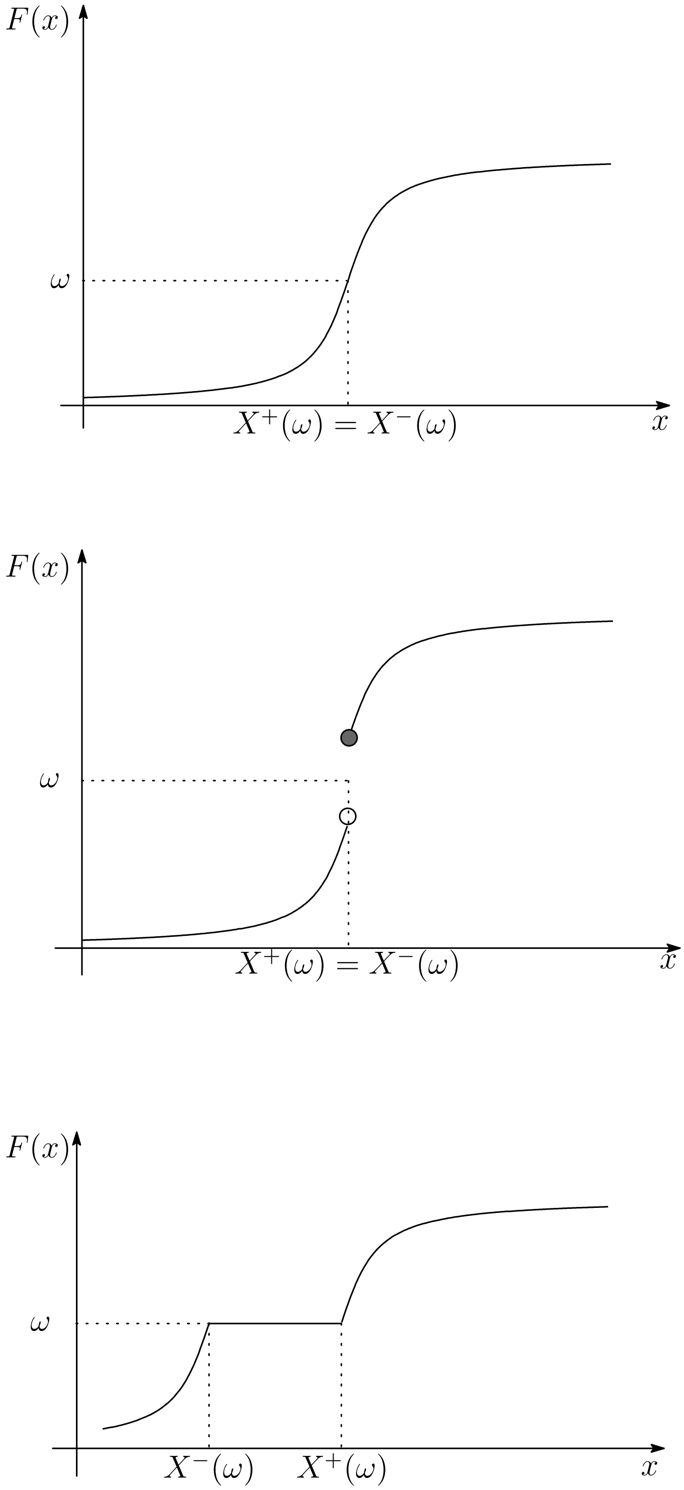

図 7.1: $X^+(\omega)$ と $X^{-1}(\omega)$.