専攻科　応用数学 II　第 11 回　講義資料　特性関数

1　特性関数の定義と性質

前回の講義でモーメント母関数を学習した．モーメント母関数は分布に関する全ての情報を含んでいる関数であったが, Cauchy 分布などモーメント母関数が存在しない分布も存在するので, 議論の上で不便なこともある．そこで, どんな分布でも定義される特性関数について学ぶ.

確率変数 X に対して, 次の式で定義される $t \in \mathbb{R}$ の関数 ϕ_X を X の**特性関数**という:

$$\phi_X(t) = E(e^{itX})$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ である．現在まで平均 $E(\cdot)$ は実数値をとる確率変数についてのみ定義されているのに対し, e^{itX} は複素数値をとる確率変数であるために, これをどのように考えるか問題が生じるところであるが, $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$ であることに注意して, $E(\cos tX)$, $E(\sin tX)$ の両方が存在するとき

$$\phi_X(t) = E(\cos tX) + iE(\sin tX)$$

と定義してよい．また, X が確率密度関数 f_X をもつ分布に従うとき, $g(x) = e^{itx}$ とおくことにより

$$\phi_X(t) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx$$

関数 f の Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx \ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx \text{ で与えられることもある} \right)$$

で与えられることに注意すれば, 特性関数は確率密度関数の Fourier 変換と思える．特性関数の性質を述べよう.

命題 特性関数 ϕ_X は次の性質をもつ:

(1) $|\phi_X(x)| \leq 1$

(2) $\phi_X(0) = 1$

(3) $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$

(4) $\phi_X(t)$ は (一様) 連続な関数である.

証明 略

問 任意の正整数 l, 複素数 z_k, $k = 1, 2, \cdots, l$, $t_k \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{k,j=1}^{l} z_j \overline{z}_k \phi_X(t_j - t_k) \geq 0$$

が成り立つことを示せ.

特性関数の例を述べよう.

$\boxed{\textbf{例}}$

(1) X がパラメータ n, p の二項分布に従うとき,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{N} e^{itk}{}_N\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} {}_N\mathrm{C}_k (e^{it}p)^k (1-p)^{N-k} = (e^t p + (1-p))^N$$

となる.

(2) X がパラメータ μ, σ^2 の正規分布に従うとき, X の確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

よって

$$\begin{aligned}\phi_X(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) dz \\ =& e^{it\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) dz\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = z$ と変数変換すれば,

$$\phi_X(t) = e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma tz} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

ここで

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma tz} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

は関数 $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ の Fourier 変換の $-\sigma t$ における値であるから $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ となる. よって

$$\phi_X(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

となる. 特に, 平均 0, 分散 1 の正規分布の特性関数は $\phi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ となる. $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の Fourier 変換は本来複素関数論を用いて計算することに注意する.

(3) X がパラメータ λ の指数分布に従うとき, X の確率密度関数は $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. よって

$$\phi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \lambda (e^{-\lambda x} \cos tx + i e^{-\lambda x} \sin tx) dx$$

ここで

$$\begin{aligned}\int e^{-\lambda x} \cos tx dx &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2 + t^2}(-\lambda \cos tx + t \sin tx) + C \\ \int e^{-\lambda x} \sin tx dx &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2 + t^2}(-\lambda \sin tx - t \sin tx) + C\end{aligned}$$

となるので

$$\phi_X(t) = \lambda \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} + i \frac{t}{\lambda^2 + t^2}\right) = \lambda \frac{\lambda + it}{\lambda^2 + t^2} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

となる.

問 X が (a,b) 上の一様分布に従うとき, X の特性関数 ϕ_X を求めよ.

例 平均が存在しない Cauchy 分布は当然モーメント母関数も存在しないが, 特性関数は存在する. このことを見よう. まず, X が Cauchy 分布に従うとき, 確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

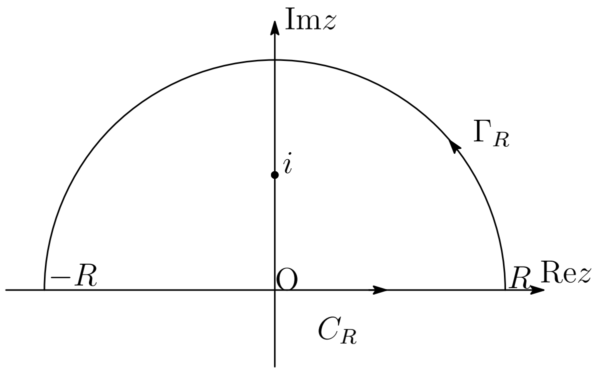
特性関数は

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi(x^2+1)} dx$$

で与えられる. この積分は複素関数の留数定理を用いて示される. 複素関数論が未習の場合は, 結果だけ知っておけば十分である. まず

$$h(z) = \frac{e^{itz}}{\pi(z^2+1)}$$

とおく. まず $t > 0$ の場合を調べる. この関数を次の積分路 C_R に沿って積分しよう. また, $z = R$ から $z = -R$ へいたる半円を Γ_R とする.



C_R で囲まれた領域の中の点 $z = i$ は $h(z)$ の 1 位の極であり, 特異点はそれだけである. したがって, 留数定理により

$$\int_{C_R} \frac{e^{itz}}{\pi(x^2+1)} dz = 2\pi i \mathrm{Res}(h, i).$$

ここで, $h(z) = \dfrac{e^{itz}}{\pi(z+i)(z-i)}$ とかけることに注意し

$$\mathrm{Res}(h, i) = \lim_{z \to i} (z-i)h(z) = \frac{e^{-t}}{2\pi i}$$

であるから,

$$\int_{C_R} h(z) dz = 2\pi i \frac{e^{-t}}{2\pi i} = e^{-t}$$

となる. C_R 上の積分の中で, 実軸の $z = -R$ から $z = R$ へ至る線分上の積分は

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{itx}}{\pi(x^2+1)} dx$$

となるので, $R \to \infty$ とすると, 我々が求める積分になる. よって, あとは Γ_R 上の積分が $R \to \infty$ とともに 0 にいくことを示せばよい. 曲線 Γ_R のパラメータ表示は $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ と書けるので

$$\int_{\Gamma_R} h(z)dz = \int_0^\pi \frac{e^{itRe^{i\theta}}}{\pi(R^2e^{2i\theta}+1)} iRe^{i\theta}d\theta$$

となる. ここで

$$itRe^{i\theta} = itR(\cos\theta + i\sin\theta) - Rt\sin\theta + iRt\cos\theta$$

より

$$|e^{itRe^{i\theta}}| \leq e^{-Rt\sin\theta}$$

となる. また, 十分大きな $R > 0$ に対して $|R^2e^{2i\theta}+1| \geq R^2 - 1$ となるので

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R} h(z)dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{itRe^{i\theta}}}{\pi(R^2e^{2i\theta}+1)} iRe^{i\theta}d\theta\right| \\ &\leq \int_0^\pi \left|\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{\pi(R^2e^{2i\theta}+1)} iRe^{i\theta}\right| d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-Rt\sin\theta}}{R^2-1} Rd\theta \\ &\leq \frac{R}{\pi(R^2-1)} \int_0^\pi e^{-Rt\sin\theta}d\theta\end{aligned}$$

ここで, $R, t > 0$ に注意すれば $e^{-R\sin\theta} \leq 1$ より

$$\left|\int_{\Gamma_R} h(z)dz\right| \leq \frac{R}{R^2-1} \to 0 \text{ (as } R \to \infty)$$

を得る. よって $t > 0$ のとき $\phi_X(t) = e^{-t}$ となる. $t < 0$ のときは $\phi_X(t) = \overline{\phi_X(-t)}$ より $\phi_X(t) = \overline{e^{-(-t)}} = e^t$. 以上より $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ となる.

2　特性関数とモーメント

モーメント母関数のときと同じように, パラメータに関する微分と平均の交換 (積分記号下の微分) を行うことにより, 特性関数からモーメントを求めることができる,

命題 確率変数 X の n 次モーメント $E(X^n)$ が存在すれば, つまり $E(X^n) < \infty$ であれば, X の特性関数 $\phi_X(t)$ は n 回微分可能で

$$\phi^{(n)}(t) = i^nE(X^ne^{itx})$$

が成り立ち,

$$E(X^n) = i^{-n}\phi_X^{(n)}(0)$$

が成り立つ.

上の命題を認めれば, Taylor の定理により次のことがわかる.

命題 ある正の整数 N に対して $E(|X^N|) < \infty$ であるとき

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(it)^k E(X^k) + o(t^N) \quad (\text{as } t \to 0)$$

が成り立つ.

上の命題は中心極限定理の証明で用いられる.

3 独立確率変数の和

モーメント母関数と同様に特性関数も独立な確率変数の和について便利な公式がある.

命題 X, Y がともに独立な確率変数で, その特性関数がそれぞれ ϕ_X, ϕ_Y とするとき, 次が成り立つ.

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $Z = aX + b$ とおくと Z の特性関数 ϕ_Z は

$$\phi_Z(t) = e^{itb}\phi_X(at)$$

(2) $X + Y$ の特性関数は

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

証明

(1) $e^{itZ} = e^{it(aX+b)} = e^{ibt}e^{i(at)X} = \cos(bt)e^{i(at)X} + i\sin(bt)e^{i(at)X}$ であるので

$$\begin{aligned}
E(e^{itZ}) &= E(\cos(bt)e^{i(at)X}) + iE(\sin(bt)e^{i(at)X}) \\
&= \cos(bt)E(e^{i(at)X}) + i\sin(bt)E(e^{i(at)X}) \\
&= (\cos(bt) + i\sin(bt))E(e^{i(at)X}) = e^{ibt}E(e^{i(at)X}) = e^{ibt}\phi_X(at)
\end{aligned}$$

(2) $e^{it(X+Y)} = (\cos tX \cos tY - \sin tX \sin tY) + i(\cos tX \sin tY + \sin tX \cos tY)$ であるから, 平均の線形性と, X と Y の独立性を用いる $(E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)))$ と

$$\begin{aligned}
E(e^{it(X+Y)}) &= E(\cos tX \cos tY - \sin tX \sin tY) + iE(\cos tX \sin tY + \sin tX \cos tY) \\
&= E(\cos tX)E(\cos tY) - E(\sin tX)E(\sin tY) \\
&\qquad + i(E(\cos tX)E(\sin tY) + E(\sin tX)E(\cos tY)) \\
&= (E(\cos tX) + iE(\sin tX))(E(\cos tY) + iE(\sin tY)) = E(e^{itX})E(e^{itY})
\end{aligned}$$

となり証明が終わる.

問 パラメータ 0, 1 の正規分布に従う確率変数 Z の特性関数 ϕ_Z は $\phi_Z(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ を既知とするとき, μ, σ^2 の正規分布に従う確率変数 X の特性関数 ϕ_X を上の公式で求めよ.

問 X, Y が独立で同じ分布 (独立同分布) に従う確率変数であるとき, $\phi_{X-Y}(t) = |\phi_X(t)|^2$ を証明せよ.

4 Lévy の反転公式

X のモーメント母関数から X の従う分布がただ一つに定まることを学んだ．特性関数もいわゆる逆 Fourier 変換を行うことによって，分布関数を復元できるという驚くべき定理が知られている．今まで，確率変数を離散型とそうでない場合に分けて学んできたが，「測度」の概念を積極的に用い，積分の概念をルベーグ式に拡張することによってこれらを統一的に扱うことができるのである．本講義ではこのことには深入りできないが，離散型，連続型という区別は計算上の手法 (Σ か $\int$ か) ということを念頭において考えられた区別であり，実際は分布関数という共通の概念を通して両者のわけ隔てなく議論を展開することが可能である．興味のある読者は確率論のさらに進んだ本を読むことをお勧めする．Lévy の反転公式の驚くべき結果はそうして考えると納得できると思われる．すこし横道にそれたが，Lévy の反転公式を述べよう:

定理 (**Lévy の反転公式**) 確率変数 X の分布関数を F，特性関数を ϕ_X とすると，F の連続な点 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \phi_X(t) dt$$

上の極限はあくまで $[-T, T]$ という区間で積分し，$T \to \infty$ としているだけである．これが $(-\infty, \infty)$ の広義積分となるわけではないことに注意する．もちろん広義積分は $[-M, N]$ 上で積分し，$M, N \to \infty$ とするのである．もちろん広義積分が存在するときは上の極限は広義積分に一致する．Lévy の反転公式の証明は本講義の内容を超えるので省略するが，形式的には

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \phi_X(t) dt = \int_{-T}^{T} \left(\int_a^b e^{-itx} dx \right) \phi_X(t) dt$$

であり，順序交換によって上の式は

$$\int_a^b \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \phi_X(t) dt \right\} dx$$

となる．上の式の $\{\cdots\}$ 内は $T \to \infty$ のとき $\phi_X(t)$ の逆 Fourier 変換に相当 ($1/2\pi$ などの差はあるが) するものである．もしこれの積分が $T \to \infty$ のとき x の関数として存在すれば，それを f_X とおくと，それが X の確率密度関数となり，それを $x = a$ から $x = b$ まで積分することにより $F(b) - F(a)$ が得られるという寸法である．しかし，これは極めて形式的な議論であるため，証明にはなっていない．しかし，上の形式的な議論を保障する次の定理がある．

定理 確率変数 X の特性関数 $\phi_X(t)$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_X(t)| dt < \infty$$

を満たせば，X の分布関数は確率密度関数 f_X をもち

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(t) e^{-itx} dt$$

で与えられる．

上の定理は X が絶対連続な分布に従うための特性関数 ϕ_X に対する十分条件を与えるのであるが，指数分布の特性関数はこの十分条件を満たさないことに注意する．

Lévy の反転公式から次のことがわかる.

定理 確率変数 X と Y が同じ特性関数 ϕ_X, ϕ_Y をもてば, X と Y の分布関数は一致する.

X が非負整数値をとる離散型確率変数と限った場合は, Fourier 級数展開と対応がつく. X が非負整数値をとる確率変数の場合, その確率質量関数を $p(k)$ とする. つまり $p(k) = P(X = k)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. このとき, X の特性関数は

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)e^{ikt}$$

で与えられる. これは $p(k)$ が ϕ_X の周期 2π の指数関数 $\{e^{ikt}\}$ による複素 Fourier 級数であることを意味する. $\phi_X(t)$ から $p(k)$ を求めたければ, 複素 Fourier 係数を求める良く知られた公式

$$p(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\phi_X(t)dt$$

から求めることができる. これは非負整数値をとる場合に限った場合の反転公式と見ることが出来る.

例 X が離散型確率変数のとき, その確率質量関数を $p(k)$ とする.

最後に, 上の Lévy の反転公式や上の公式を具体的な計算で実感してみよう.

例題 11.1 確率変数 X の特性関数が $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ で与えられたとき, X はどのような分布に従うか.

解 まず

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_X(t)|dt$$

が有限の値として存在するので, 確率密度関数が存在する. 確率密度関数を f_X とすると

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-itx}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-ix)t}dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+ix)tx}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(1-ix)t}}{1-ix}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-i(1+ix)t}}{1+ix}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-ix} - \frac{1}{1+ix}\right) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}
\end{aligned}$$

となり, Cauchy 分布の分布関数となる. よって X は Cauchy 分布に従う.

最後に, 確率密度関数が存在しない分布に従う例を示して終わりにしよう.

例 確率変数 X の特性関数 $\phi_X(t)$ が $\phi_X(t) = 1$ で与えられている場合, X はどのような分布に従うか. まず, 確率密度関数が存在するための十分条件は明らかに満たさないので直接 Lévy の反転公式による他ない. そのために, まず $a < b$ として次の積分を計算しよう.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\cdot 1dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left\{\int_a^b e^{-itx}dx\right\}dt$$

有限区間なので積分の順序交換は全く問題なく, 上の積分は

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b\left\{\int_{-T}^{T} e^{-itx}dt\right\}dx$$

に等しい. $e^{iTx} = \cos Tx + i \sin Tx$, $e^{-itx} = \cos Tx - i \sin Tx$ より, 上の積分は

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sin Tx}{x} dx \tag{1}$$

に等しい. よって (1) の積分を $Tx = y$ で変数変換すれば

$$I_T := \frac{1}{2\pi} \int_{Ta}^{Tb} \frac{\sin y}{y} dy \tag{2}$$

となる. ここで微積分などでよく知られている積分の値

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を思い出す (求めるのは難しい). このことを用いると (2) の積分は $T \to \infty$ のとき

(1) $0 < a < b$ ならば $I_T \to 0$

(2) $0 = a < b$ ならば $I_T \to \dfrac{1}{2}$

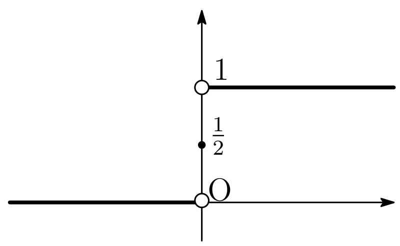
(3) $a < 0 < b$ ならば $I_T \to 1$

(4) $a < b = 0$ ならば $I_T \to \dfrac{1}{2}$

(5) $a < b < 0$ ならば $I_T \to 0$

となることがわかる. よって F は次のようになる:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

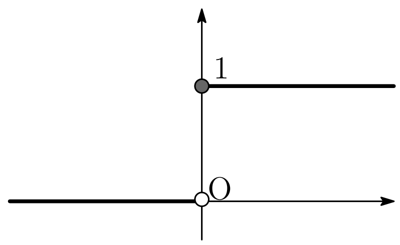


この分布は**ディラックの $\delta-$ 分布** といい, 絶対連続である前に連続ですらないので当然, 確率密度関数を持たない. 上の関数は右連続ではないので, 分布関数の条件は満たさない. Lévy の反転公式は分布関数 が点 a, b が連続とは限らない場合, 定理の式に現れる右辺の積分は

$$\frac{1}{2}(F(b) + F(b+0)) - \frac{1}{2}(F(a) + F(a+0))$$

に収束することが示されるので分布関数としては右連続となるように修正すればよい. したがって, この場合の分布関数は $x = 0$ における値を $F(x) = 1$ とした次の関数である.

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$


1
O