第6章　収束定理

6.1　収束概念

定義 6.1 $f, f_1, f_2, \cdots \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．

概収束 $\exists\, \mu$-零集合 N；

$$f_n(\omega) \to f(\omega)\ (n \to \infty) \quad \forall\, \omega \in \Omega \setminus N$$

であるとき，f_n は f に**概収束**するといい，$f_n \to f\,(n \to \infty)\,\mu$−a.e. と表わす．特に μ が確率測度の場合には，$f_n \to f\,(n \to \infty)$ a.s. と表わす．

p **乗平均収束** ($1 \leq p < \infty$)

$$\|f_n - f\|_p \to 0\ (n \to \infty)$$

であるとき，f_n は f に p **乗平均収束**するといい，$f_n \xrightarrow{L^p} f\,(n \to \infty)$ と表わすことにする．特に $p = 1$ のとき p 乗平均収束は**平均収束**と言う．

以下，本章では，特に断ならい限り，$X, X_1, X_2, \cdots$ を所与の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の確率変数とする．

定義 6.2 (確率収束)

$$P(\{|X_n - X| \geq \epsilon\}) \to 0\ (n \to \infty) \quad \forall \epsilon > 0$$

であるとき，X_n は X に**確率収束**するといい，$\mathrm{plim}_{n\to\infty} X_n = X$ と表わす．

補題 6.1

$$X_n \to X\,(n \to \infty)\,\text{a.s.} \iff P\left(\cup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| \geq \epsilon\}\right) \to 0\,(n \to \infty)\,\forall \epsilon > 0.$$

証明　$A_{n_\epsilon} := \{|X_n - X| \geq \epsilon\}$，$A_\epsilon := \cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty A_{k_\epsilon}$ とおく．このとき，$\cup_{k=n}^\infty A_{k_\epsilon} \downarrow A_\epsilon \, (n \to \infty)$, $P(\Omega) = 1$ だから，

$$P(\cup_{k=n}^\infty A_{k_\epsilon}) \to P(A_\epsilon) \ (n \to \infty).$$

$$\begin{aligned} \therefore f_n \to f \, (n \to \infty) \, \text{a.s.} \quad &\iff \quad \Omega \setminus N = \cap_{\epsilon>0} \cup_{n=1}^\infty \cap_{k=n} A_{k_\epsilon}^c = \cap_{\epsilon>0} A_\epsilon^c \\ &\iff \quad P(\cup_{\epsilon>0} A_\epsilon) = 0 \\ &\iff \quad P(A_\epsilon) = 0 \ \forall \epsilon > 0 \\ &\iff \quad P(\cup_{k=n}^\infty A_{k_\epsilon}) \to 0 \, (n \to \infty) \ \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

□

定理 6.1 (概収束 ⇒ 確率収束)

$$X_n \to X \, \text{a.s.} \ \Rightarrow \ \mathrm{plim}_{n\to\infty} X_n = X.$$

証明

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\cup_{k=n}^\infty \{|X_k - X| \geq \epsilon\}\right) \geq \lim_{n\to\infty} P\left(\{|X_n - X| \geq \epsilon\}\right)$$

に注意すると，補題 6.1 より題意を得る．　□

定理 6.2 (Chebyshev の不等式) X を非負の確率変数とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ と $p \in (0, \infty)$ に対して，次が成立する．

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X^p]}{\epsilon^p}. \tag{6.1}$$

証明　$A := \{\omega \in \Omega; \, X \geq \epsilon\}$ とすると，

$$\mathbb{E}[X^p] \quad \geq \int_A X^p \mathrm{d}P \geq P(A)\epsilon^p.$$

両辺を ϵ^p で割れば (6.1) を得る．　□

系 6.1 $\mathbb{E}[X] = m$，$\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$ を有限とする．このとき，次が成立する．

$$P(|X - m| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

証明　$X := |X-m|$, $p := 2$, $\epsilon := a\sigma$ として，Chebyshev の不等式を適用すると，

$$P(|X-m| \geq a\sigma) \leq \frac{\mathbb{E}[|X-m|^2]}{a^2\sigma^2} = \frac{1}{a^2}.$$

□

注 6.1 Chebyshev の不等式より,「p **乗平均収束** $\Longrightarrow$ **確率収束**」となる．しかし，次の例に示すように，一般に逆は成り立たない．

例 6.1 $\Omega := [0,1]$ として，Lebesgue 測度空間を考える．$X_n := n1_{[0,\frac{1}{n}]}$, $n \in \mathbb{N}$，$X := 0$ とする．このとき，

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n} \to 0.$$

しかしながら，

$$\|X_n - X\|_p = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} n^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} = \left(n^p \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{p-1}{p}}$$

であるから，$\|X_n - X\|_p \not\to 0$

6.1.1　大数の弱法則

定理 6.3 X_n, $n \in N$ が独立，$\mathbb{E}[X_i] = m$, $\mathrm{Var}[X_i] \leq K < \infty$ ならば，$S_n := X_1 + \cdots + X_n$ とすると，

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &\xrightarrow{L^2} m, \\ \mathrm{plim}_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} &= m. \end{aligned}$$

証明

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] &= m, \\ \mathrm{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] &\leq \frac{\max_{i=1,\cdots,n} \mathrm{Var}[X_i]}{n} \leq \frac{K}{n} \to 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

$\therefore$　$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} m.$ また注 6.1 より確率収束する．　□.

補題 6.2 $X \geq 0$，$p > 0$ のとき，

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p x^{p-1} P(X > x) \mathrm{d}x.$$

証明

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p x^{p-1} P(X > x) \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \int_{\{\omega \in \Omega\}} p x^{p-1} 1_{\{X > x\}} \mathrm{d}P \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty p x^{p-1} 1_{\{X > x\}} \mathrm{d}x \mathrm{d}P \ (\because \text{ Fubini の定理}) \\
&= \int_\Omega \int_0^{X(\omega)} p x^{p-1} \mathrm{d}x \mathrm{d}P \\
&= \int X^p \mathrm{d}P \\
&= \mathbb{E}[X^p]. \qquad \square
\end{aligned}$$

定理 6.4 $X_n, n \in \mathbb{N}$, を

$$aP(|X_1| > a) \to 0 \ (a \to \infty) \tag{6.2}$$

となる i.i.d. 確率変数とする[1]．このとき，$m_n := \mathbb{E}[X_1 1_{\{|X_1| \leq n\}}]$ とおくと，

$$\mathrm{plim}_{n \to \infty} \left(\frac{S_n}{n} - m_n \right) = 0. \tag{6.3}$$

証明

$$\hat{S}_n := X_1^{(n)} + \cdots X_n^{(n)}, \quad X_k^{(n)} := X_k 1_{\{|X_k| \leq n\}}, \ k \in \mathbb{N}$$

とおくと，

$$P\left(\left| \frac{S_n}{n} - m_n \right| \geq \epsilon \right) \leq P\left(\left| \frac{\hat{S}_n}{n} - m_n \right| \geq \epsilon \right) + P\left(\hat{S}_n \neq S_n \right).$$

[1] i.i.d. = idependent identically distributed = 独立で同一の分布に従う.

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{\hat{S}_n}{n}-m_n\right|\geq\epsilon\right) &\leq \frac{\mathbb{E}\left[\left|\frac{\hat{S}_n}{n}-m_n\right|^2\right]}{\epsilon^2} \quad (\because \text{Chebyshev 不等式}) \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^n X_k^{(n)}-nm_n\right|^2\right]}{n^2\epsilon^2} \\
&= \frac{\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^n X_k^{(n)}\right]}{n^2\epsilon^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}\left[X_k^{(n)}\right]}{n^2\epsilon^2} \\
&= \frac{\mathrm{Var}\left[X_k^{(n)}\right]}{n\epsilon^2} \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left[(X_k^{(n)})^2\right]}{n\epsilon^2} \\
&= \frac{1}{n\epsilon^2}\int_0^\infty 2xP(|X_k^{(n)}|>x)\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{n\epsilon^2}\int_0^n 2xP(|X_k|>x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

ここで，$2xP(|X_k|>x)\to 0\,(x\to\infty)$ より，

$$
\forall\,\delta>0;\ \exists x_0;\ 2xP(|X_k|>x)\leq\delta\epsilon^2\ \forall\,x\geq x_0.
$$

となることに注意すると，十分大きな $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n\epsilon^2}\int_0^n 2xP(|X_k|>x)\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{n\epsilon^2}\int_0^{x_0} 2xP(|X_k|>x)\mathrm{d}x+\frac{1}{n\epsilon^2}\int_{x_0}^n 2xP(|X_k|>x)\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{n\epsilon^2}x_0^2+\frac{1}{n\epsilon^2}n\delta\epsilon^2 \\
&= \frac{1}{n\epsilon^2}x_0^2+\delta.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad P\left(\left|\frac{\hat{S}_n}{n}-m_n\right|\geq\epsilon\right)\to 0\ (n\to\infty).
$$

一方,

$$\begin{aligned} P\left(\hat{S}_n \neq S_n\right) &\leq P\left(\exists k \leq n;\ X_k^{(n)} \neq X_k\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} P\left(\ X_k^{(n)} \neq X_k\right) \\ &= nP\left(\ X_1^{(n)} \neq X_1\right) \\ &= nP(\ |X_1| > n) \to 0\ (n \to \infty). \qquad \square \end{aligned}$$

6.1.2 Borel-Cantelli の補題

定理 6.5 (Borel-Cantelli の補題)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \ \Rightarrow\ P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

証明

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leq P(\cup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

かつ,仮定より,$\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \to 0\ (k \to \infty)$. $\square$

次の定理は $\langle X_n \rangle$ が X に確率収束するならば,X に概収束する $\langle X_n \rangle$ の部分列が存在することを示している.

定理 6.6

$\mathrm{plim}_{n\to\infty} X_n = X \ \Rightarrow\ \exists \{X_{k_n};\, n \in \mathbb{N}\} \subset \{X_k;\, k \in \mathbb{N}\};\ X_{k_n} \to X\ (n \to \infty)$ a.s.

証明 仮定より

$$\begin{aligned} \exists k_1 \in \mathbb{N};\quad & P(|X_n - X| > 1) < 1\ \forall\, n \geq k_1, \\ \exists k_2 \in \mathbb{N};\ k_2 \geq k_1 \quad & P(|X_n - X| > \frac{1}{2}) < \frac{1}{4}\ \forall\, n \geq k_2, \\ & \vdots \\ \therefore \exists k_n \in \mathbb{N};\ k_n \geq k_{n-1} \quad & P(|X_{k_n} - X| > \frac{1}{n}) < \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

$\therefore\quad A_n := \left[|X_{k_n} - X| > \frac{1}{n}\right]$ とおくと，$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$[2]. $\therefore$　Borel-Cantelli の補題より，$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

$$\therefore\quad \omega \in \Omega \setminus (\limsup_{n\to\infty} A_n) \;\Rightarrow\; X_{k_n}(\omega) \to X(\omega)\ (n \to \infty).$$

□

定理 6.7 $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, が独立ならば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \;\Rightarrow\; P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

証明

$$P(\cup_{n=k}^{\infty} A_n) = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

を示せばよい[3].

$$\begin{aligned} P(\cap_{n=k}^{m} A_n^c) &= \prod_{n=k}^{m} P(A_n^c) \quad (\because A_n \text{ の独立性}) \\ &= \prod_{n=k}^{m} (1 - P(A_n)) \\ &\leq \prod_{n=k}^{m} \mathrm{e}^{-P(A_n)} \quad \forall m > k \quad (\because \mathrm{e}^{-x} > 1 - x). \end{aligned}$$

仮定より，最右辺は $m \to \infty$ とするとゼロに収束するから,

$$P(\cap_{n=k}^{m} A_n^c) = 1 - P(\cup_{n=k}^{m} A_n) \to 0\ (m \to \infty).$$

$\therefore$　所期の結果を得る.　　□

問 6.1 有限個の $A_n, n = 1, \cdots, m$, が互いに独立ならば $A_n^c, n = 1, \cdots, m$, も互いに独立となることを示せ.

---

[2] $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ を**ゼータ関数**という．ゼータ関数の公式として次のものが知られている.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

[3] 何故か？　読者各自の練習問題とする.

6.1.3　大数の強法則

定理 6.8 X_n，$n \in \mathbb{N}$ を $\mathbb{E}[X_n] = m$，$\mathbb{E}[X_n^4] \le K < \infty$ となる独立な確率変数とすると，次が成立する．

$$\frac{S_n}{n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to m \quad \text{a.s.}$$

証明　$X_n := X_n - m$ とおく．

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^4 + \sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j X_k^2 + \sum_{i\neq j\neq k\neq l} X_i X_j X_k X_l\right].$$

独立の仮定より，

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i\neq j} X_i X_j X_k^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\neq j\neq k\neq l} X_i X_j X_k X_l\right] = 0.$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^4\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i^4\right] \le nK.$$

Schwarz の不等式より，

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2\right] \le \sum_{i\neq j} \sqrt{\mathbb{E}\left[X_i^4\right]\mathbb{E}\left[X_j^4\right]} \le 3n(n-1)K^4.$$

$$\therefore \quad \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4\right] \le K(n + 3n(n-1)) \le 3Kn^2.$$

Chebyshev の不等式より，

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \ge \epsilon\right) = P\left(|S_n| \ge n\epsilon\right) \le \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{(n\epsilon)^4} \le \frac{3K}{n^2\epsilon^4} \quad \forall \epsilon > 0.$$

したがって，$A_n := \left\{\omega \in \Omega;\ \left|\frac{S_n}{n}\right| \ge \epsilon\right\}$ とおくと，Borel-Cantelli の補題より，$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. $\therefore$　$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} \cap_{n=i}^{\infty} A_n^c\right) = 1$　となり，題意を得る． □

[4] n 個から異なる 2 つの i, j を選ぶ組み合わせの数は，$\frac{n(n-1)}{2}$．(i, j, k, l) の順列のうち，i, j のみの並びの数は，$\frac{4\times 3}{2} = 6$. $\therefore$　和の計算において $i \neq j$ となるのは，$3n(n-1)$ とおり．

定理 6.9 (Kolmogorov の不等式) X_i, $i = 1, \ldots, n$ は，独立な確率変数で，$\mathbb{E}[X_i] = 0$ かつ，分散は有限とする．このとき，$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i$, $k = 1, \ldots, n$ とすると次が成立する．

$$P\left(\max_{k=1,\ldots,n} |S_k| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{\epsilon^2}.$$

証明　所与の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\varphi_k := \begin{cases} 1; & |S_1| < \epsilon, \ldots, |S_{k-1}| < \epsilon, |S_k| \geq \epsilon \\ 0; & |S_i| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, k \end{cases}, \quad k = 1, \ldots, n$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \max_{k=1,\ldots,n} |S_k| < \epsilon, \\ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \max_{k=1,\ldots,n} |S_k| \geq \epsilon. \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad P\left(\max_{k=1,\ldots,n} |S_k| \geq \epsilon\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 1\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right].$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[S_n^2\right] &\geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i S_n^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(S_i^2 + 2S_i(S_n - S_i) + (S_n - S_i)^2\right)\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(S_i^2 + 2S_i(S_n - S_i)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i S_i^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i S_i (S_n - S_i)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i S_i (S_n - S_i)\right] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\varphi_i S_i (\sum_{k=i+1}^{n} X_k)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\varphi_i S_i\right] \mathbb{E}\left[\sum_{k=i+1}^{n} X_k\right] (\because \text{独立性}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i S_i^2\right] \leq \mathbb{E}\left[S_n^2\right].$$

ここで $\varphi_i S_i^2 \geq \varphi_i \epsilon^2$ に注意すると，

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i S_i^2\right]}{\epsilon^2}.$$

以上により，

$$P\left(\max_{k=1,\ldots,n} |S_k| \geq \epsilon\right) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i] \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{\epsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}[S_n^2]}{\epsilon^2}.$$

□

定理 6.10 (Kolmogorov の大数強法則) $X_n; n \in \mathbb{N}$ を $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}[X_n] < \infty$ となる独立な確率変数とする．このとき，次が成立する．

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \quad \text{a.s.}$$

証明

$$Y_m := \max_{k \leq 2^m} |S_k|$$

とおく．$n \in [2^{m-1}, 2^m]$ に対して，

$$\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{\max_{k \leq 2^m} |S_k|}{n} \leq \frac{Y_m}{2^{m-1}}.$$

したがって，補題 6.1 より，

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{Y_m}{2^m}\right| \geq \epsilon\right) < \infty$$

を示せばよい．Kolmogorov の不等式（定理 6.9）より，

$$P\left(|Y_m| \geq 2^m \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}[S_{2^m}]}{\epsilon^2 2^{2m}}.$$

したがって，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}[S_{2^m}]}{4^m} < \infty.$$

が示されればよい.

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}[S_{2^m}]}{4^m} &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m} \mathrm{Var}[X_k] \frac{1}{4^m} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}[X_k] \sum_{m;\, 2^m > k} \frac{1}{4^m} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}[X_k] \frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}[X_k]}{k^2} < \infty
\end{aligned}
$$

□

定理 6.11 X_n, $n \in \mathbb{N}$ を $\mathbb{E}[X_n] = m < \infty$ となる i.i.d. 確率変数とすると,

$$
\frac{S_n}{n} \to m \quad \text{a.s.}
$$

証明

$$
Y_n := X_n 1_{\{|X_n| \leq n\}}
$$

とすると,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n \neq X_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n) \quad (\because X_n,\, n \in \mathbb{N}, \text{ i.i.d.}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} P(|X_1| > n) \mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} P(|X_1| > x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} P(|X_1| > x) \mathrm{d}x \\
&= \mathbb{E}[X_n] \quad (\because \text{補題 } 6.2) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

したがって，Borel-Cantelli の補題から，高々有限個の n を除いて $X_n = Y_n$ a.s.. $\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ a.s. よって，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} < \infty$ が示せされれば，定理 6.10 より，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \mathbb{E}[Y_k]) \to 0 \quad \text{a.s.}$$

さらに，$X_1 1_{\{|X_1|\le k\}} \to X_1$ であるから，有界収束定理より，

$$\mathbb{E}[Y_k] = \mathbb{E}[X_k 1_{\{|X_k|\le k\}}] = \mathbb{E}[X_1 1_{\{|X_1|\le k\}}] \to m\ (k\to\infty).$$

以上より，

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - m\right| &\le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \mathbb{E}[Y_k])\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[Y_k] - m\right| \\ &\to 0\ (n\to\infty)\ \text{a.s.} \end{aligned}$$

すなわち，$\frac{S_n}{n} \to m$ a.s. を得る．

最後に $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} < \infty$ を示す．

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_n^2] &= \int_0^{\infty} 2xP(|Y_n| > x)\mathrm{d}x \quad (\because \text{補題 } 6.2) \\ &= \int_0^{n} 2xP(|Y_n| > x)\mathrm{d}x \quad (\because P(|Y_n| > n) = 0) \\ &= \int_0^{n} 2xP(|X_n| > x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{n} 2xP(|X_1| > x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^{n} 2xP(|X_1| > x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^{\infty} 2x1_{[0,n)}(x)P(|X_1| > x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}x1_{[0,n)}(x)P(|X_1| > x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

ここで，$x \in [0,1]$ のとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x1_{[0,n)}(x) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2$$

となり，$x>1$ のとき，$m:=x$ 以下の最大整数として，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x1_{[0,n)}(x)=x\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq x\int_m^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=x\frac{1}{m}\leq 2$$

となることに注意すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2}\leq 4\int_0^{\infty}P(|X_1|>x)\mathrm{d}x=4\mathbb{E}[|X_1|]<\infty.$$

□

6.1.4 弱収束

定義 6.3 (弱収束) (1) Borel 測度 P_n，P の累積分布関数を各々F_n，F としたとき，F のすべての連続点で F_n が F に収束するならば，P_n は P に**弱収束**するという．

(2) 確率変数 X_n，X の累積分布関数を各々F_n，F としたとき，F のすべての連続点で F_n が F に収束するならば，X_n は X に**弱収束**するという．

定理 6.12 X_n が X に確率収束するならば，X_n は X に弱収束する．

証明 F の連続性から，任意の $\epsilon>$ に対して，

$\exists\delta>0;\ P(X\leq y)-\dfrac{\epsilon}{2}<P(X\leq y-\delta),\ P(X\leq y)+\dfrac{\epsilon}{2}>P(X\leq y+\delta).$

ここで，$X_n<y$，$|X_n-X|<\delta\Rightarrow X<y+\delta$ より，

$$P((X_n\leq y)\cap(|X_n-X|<\delta))\leq P(X\leq y+\delta).$$

一方，X_n が X に確率収束することから，任意の $\epsilon>$ に対して，

$$\exists\delta>0;\ P(|X_n-X|>\delta)<\frac{\epsilon}{2}$$

であるから，

$$P(X_n\leq y)-\frac{\epsilon}{2}<P((X_n\leq y)\cap(|X_n-X|<\delta)).$$

以上より，$P(X_n\leq y)<P(X\leq y)+\epsilon$．同様にして，$P(X_n\leq y)>P(X\leq y)-\epsilon$ も示せるので題意を得る． □

問 6.2 定理 6.12 の証明において,

$$P(X_n \leq y) > P(X \leq y) - \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

を示せ.

定理 6.13 $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ が単調増加で右連続な関数で $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1,\ \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ を満たすものとする．このとき，$([0,1], \mathcal{B}, m_{[0,1]})$ 上の確率変数 X で，その分布関数が F となるものが存在する．

証明

$$X^+(\omega) := \inf\{x;\ F(x) > \omega\}, \quad X^-(\omega) := \sup\{x;\ F(x) < \omega\}, \quad \omega \in [0,1]$$

とする．$F_{X^+} = F_{X^-} = F$ であることを示す.

はじめに，$F_{X^-} = F$ を示す．これには，$F(y) = m(\{\omega;\ X^-(\omega) \leq y\})$ を示せばよいが，このためには，$X^-(\omega) \leq y \iff \omega \leq F(y)$ を示せばよい.

$\omega \leq F(y)$ とする．このとき，次が成立する.

$$\{x;\ F(x) < \omega\} \subset \{x;\ F(x) < F(y)\} \subset \{x;\ x \leq y\}.$$

よって，$X^-(\omega) \equiv \sup\{x;\ F(x) < \omega\} \leq y$.

一方，$X^-(\omega) \leq y$ とすると，単調性から $F(X^-(\omega)) \leq F(y)$．また，$\omega \leq F(X^-(\omega))$ となる（$\because$ 右連続性より，$\omega > F(X^-(\omega))$ とすると，$\exists x_0 > X^-(\omega);\ F(X^-(\omega)) < F(x_0) < \omega$ となるが，これは，$X^-(\omega) \equiv \sup\{x;\ F(x) < \omega\}$ に矛盾する.）．$\therefore \omega \leq F(y)$．したがって，$X^-(\omega) \leq y \iff \omega \leq F(y)$．同様にして，$F_{X^+} = F$ を示せる． □

問 6.3 定理 6.13 の証明にある $F_{X^+} = F$ を示せ.

定義 6.4 任意の確率変数 X に対して,

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$

で定義される可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度 P_X を X の**確率分布**という.

定理 6.14 (Skorokhod の表現定理) P_n が P に弱収束するならば，$([0,1], \mathcal{B}, m_{[0,1]})$ 上の確率変数 X_n, X で $P_{X_n} = P_n,\ P_X = P$ かつ $X_n \to X$ a.s. となるものが存在する.

証明　P_n，P の分布関数 F_n，F に対応して，

$$\begin{aligned}X_n^+(\omega) &:= \inf\{x;\, F_n(x) > \omega\}, \quad X_n^-(\omega) := \sup\{x;\, F_n(x) < \omega\},\\ X^+(\omega) &:= \inf\{x;\, F(x) > \omega\}, \quad X^-(\omega) := \sup\{x;\, F(x) < \omega\}, \quad \omega \in [0,1]\end{aligned}$$

とおくと，定理 6.13 の証明より，$F_{X^+} = F_{X^-} = F$．$F_{X_n^+} = F_{X_n^-} = F_n$．$y$ を $y > X^+(\omega)$ となる F の連続点とすると $F(y) > \omega$ となる．弱収束の仮定から十分大きな n に対して $F_n(y) > \omega$ となる．したがって $X_n^+(\omega) \leq y$ となる．

$$\therefore \quad \limsup X_n^+(\omega) \leq y.$$

y_k を F の連続点で $X^+(\omega)$ に上から収束する点列とする．$y = y_k$ として，$k \to \infty$ とすれば,

$$\limsup X_n^+(\omega) \leq X^+(\omega).$$

同様にして

$$\liminf X_n^-(\omega) \geq X^-(\omega).$$

$$\therefore \quad X^-(\omega) \leq \liminf X_n^-(\omega) \leq \limsup X_n^+(\omega) \leq X^+(\omega).$$

$F_{X^+} = F_{X^-} = F$ より，$P(X^- = X^+) = 1$．以上より，題意を得る．　□

定理 6.15 P_{X_n} が P_X に弱収束するならば，$\varphi_{X_n} \to \varphi_X$.

証明　P_{X_n}，P_X に対応する定理 6.14 の Skorokhod の表現による確率変数を各々Y_n, Y とする．$Y_n \to Y$ a.s. であるから，有界収束定理より，$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY_n}] \to \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY}]$．$X_n$，$X$ と Y_n，Y の分布は同じであるから，$\varphi_{X_n} \to \varphi_X$.
□

定義 6.5 (特性関数) 任意の確率変数 X に対して，

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{itX}] \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

によって定義される関数 $\varphi_X(\cdot)$ を X の**特性関数**と呼ぶ.

定理 6.16 (Helly の定理) $\{F_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ を確率測度の分布関数列とする．このとき，ある測度の分布関数 F が存在し，F の連続点で $F_{k_n} \to F$ となる部分列 $\{k_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ が存在する.

$\{q_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ とする．$F_n(q_1)$ は，有界であるから，

$$F_{k_n^1}(q_1) \to y_1 \in [0,1]$$

となる部分列 $\{k_n^1; n \in \mathbb{N}\}$ が存在する．$F_{k_n^1}(q_2)$ は，有界であるから，$\{k_n^1; n \in \mathbb{N}\}$ の部分列 $\{k_n^2; n \in \mathbb{N}\}$ で

$$F_{k_n^2}(q_2) \to y_2 \in [0,1], \quad F_{k_n^2}(q_1) \to y_1$$

となるものが存在する．同様にして，

$$F_{k_n^l}(q_m) \to y_m \quad m \le l$$

となる部分列 $\{k_n^l; n \in \mathbb{N}\}$，$l = 3, 4 \ldots,$ が存在する．そこで，$F_{k_n} := F_{k_n^n}$ とおくと，F_{k_n} は，すべての有理点 $\{q_n; n \in \mathbb{N}\}$ で収束する．ここで，$F_{\mathbb{Q}}(q) := \lim_{n\to\infty} F_{k_n}(q)$, $q \in \mathbb{Q}$, として，

$$F(x) := \inf\{F_{\mathbb{Q}}(q); q \in \mathbb{Q}, q > x\}$$

とおく．F が単調非減少，右連続であることを示す．

<u>単調非減少</u>

F_n が単調非減少であるから，極限の $F_{\mathbb{Q}}$ も単調非減少である．F は，その定義により，$F(x_1) \le F_{\mathbb{Q}}(q)$, $q > x_1$，したがって，$x_1 < x_2$ とすれば，$F(x_1) \le \inf_{x_2<q} F_{\mathbb{Q}}(q) \equiv F(x_2)$.

<u>右連続</u>

$x_n \downarrow x$ とする．F の単調性より，$F(x) \le \lim_{n\to\infty} F(x_n)$．ここで，$F(x) < \lim_{n\to\infty} F(x_n)$ とすると，$\exists q \in \mathbb{Q}; x < q$，$F_{\mathbb{Q}}(q) < \lim_{n\to\infty} F(x_n)$．さらに，$\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $x_{n_0} \in [x, q)$，$F(x_{n_0}) \le F_{\mathbb{Q}}(q)$．ゆえに $F(x_{n_0}) < \lim F(x_n)$ となり，極限の定義に矛盾する．したがって，$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$.

最後に，F が x で連続であれば，$F_{k_n}(x) \to F(x)$ を示す．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$q_1, q_3 \in \mathbb{Q}$ を

$$F(x) - \epsilon < F(q_1) \le F(x) \le F(q_3) < F(x) + \epsilon, \quad q_1 < x < q_3$$

となるようにとる．さらに有理数 q_2 を $q_1 < q_2 < x$ とすると，$F_{k_n}(q_2) \to F_{\mathbb{Q}}(q_2) \ge F(q_1)$ であるから，十分大きな n に対して，

$$F(x) - \epsilon < F_{k_n}(q_2).$$

ここで，F_{k_n} が非減少であることに注意すると

$$F_{k_n}(q_2) \leq F_{k_n}(x) \leq F_{k_n}(q_3).$$

一方，$F_{k_n}(q_3) \to F_{\mathbb{Q}}(q_3) \leq F(x)$ より，十分おおきな n に対して，

$$F_{k_n}(q_3) < F(x) + \epsilon.$$

以上より，$|F_{k_n}(x) - F(x)| < \epsilon$ となる． □

定義 6.6 $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度列 $\{P_n\}$ が

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M; \quad P_n(\mathbb{R}^d \setminus [-M, M]^d) < \epsilon$$

を満たすとき，**タイト**（tight）であるという．

定理 6.17 (Prokhorov の定理) $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ がタイトならば，ある確率測度 P に弱収束する部分列 $\{P_{k_n}\} \subset \{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ が存在する．

証明 Helly の定理より，P_n に対する分布関数を F_n とすると，ある測度に対する分布関数 F に収束する部分列 F_{k_n} が存在した．したがって，あとは，F がある確率測度に対する分布関数であることを示せばよい．すなわち，$\lim_{y\to\infty} F(y) = 1$ を示せばよい．

任意の ϵ に対して $P_n(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) < \epsilon$ となる M が存在する．そこで，各 n に対して，$\epsilon > 0$ を任意として，y を $F_n(y) = P_n((-\infty, y]) > 1 - \epsilon$ となる連続点とする．すると，$F(y) = \lim_{n\to\infty} F_{k_n}(y) \geq 1 - \epsilon$. □

定理 6.18 確率測度列 $\{P_n\}$ はタイトとする．P を $\{P_n\}$ の部分列が弱収束する確率測度とする．このとき，φ_n, φ を各々，P_n, P の特性関数として，$\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ ならば，P_n は P に弱収束する．

証明 P に弱収束する $\{P_n\}$ の部分列に対応する分布関数列 $\{F_{k_n}\}$ に対して，$\{F_{\ell_n}\}$ を，その部分列で，ある分布関数 F' に収束するものとする．このとき，$\{F_{\ell_n}\}$，F' に対応する確率測度の特性関数を各々，φ_{ℓ_n}，φ' とすると，$\varphi_{\ell_n} \to \varphi'$．一方，仮定より，$\varphi_{\ell_n} \to \varphi$．したがって，$\varphi' = \varphi$ となり，$P = P'$ を得る． □

6.1.5　中心極限定理

補題 6.3 φ を確率測度 P の特性関数とする．次が成立する．

$$P(\mathbb{R}\setminus[-M,M]) \le 7M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\varphi(u)]\mathrm{d}u.$$

証明

$$\begin{aligned}
M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\varphi(u)]\mathrm{d}u &= M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\mathrm{d}P(x)]\mathrm{d}u \\
&= M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\int_{\mathbb{R}}\cos(xu)\mathrm{d}P(x)]\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}} M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\cos(xu)\mathrm{d}u]\mathrm{d}P(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin\left(\frac{x}{M}\right)}{\frac{x}{M}}\right)\mathrm{d}P(x) \\
&\ge \int_{\left|\frac{x}{M}\right|\ge 1}\left(1-\frac{\sin\left(\frac{x}{M}\right)}{\frac{x}{M}}\right)\mathrm{d}P(x) \\
&\ge \inf_{|t|\ge 1}\left(1-\frac{\sin(t)}{t}\right)\int_{\left|\frac{x}{M}\right|\ge 1}\mathrm{d}P(x) \\
&\ge \frac{1}{7}P(\mathbb{R}\setminus[-M,M]).
\end{aligned}$$

ただし，最後の不等式の導出には，$1-\frac{\sin(t)}{t}\ge 1-\sin 1\ge \frac{1}{7}$ を用いた．
□

定理 6.19 (Lévy の定理) φ_n を P_n の特性関数とする．φ を $\varphi_n\to\varphi$ となる関数で，ゼロで連続となるものとする．このとき φ は，ある確率測度 P の特性関数で，P_n は，P に弱収束する．

証明　定理 6.17，定理 6.18 より，P_n がタイトであることを示せばよい．
補題 6.3 より，

$$P_n(\mathbb{R}\setminus[-M,M]) \le 7M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\varphi_n(u)]\mathrm{d}u.$$

$|\varphi_n|\le 1$ より，有界収束定理を用いると，

$$7M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\varphi_n(u)]\mathrm{d}u \to 7M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\varphi(u)]\mathrm{d}u.$$

さらに，φ がゼロで連続であり，$\varphi(0)=1$ であることに注意すると，

$$7M\int_0^{\frac{1}{M}}[1-\mathrm{Re}\varphi(u)]\mathrm{d}u \le 7M\frac{1}{M}\sup_{[0,\frac{1}{M}]}|1-\mathrm{Re}\varphi(u)| \to 0\ (M\to\infty).$$

したがって，$\epsilon>0$ に対して，$\exists M_0,\, n_0\in\mathbb{N}$;

$$\begin{gathered}7\sup_{[0,\frac{1}{M_0}]}|1-\mathrm{Re}\varphi(u)|<\tfrac{\epsilon}{2},\\ \left|\int_0^{\frac{1}{M_0}}[1-\mathrm{Re}\varphi_n(u)]\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{1}{M_0}}[1-\mathrm{Re}\varphi(u)]\mathrm{d}u\right|<\tfrac{\epsilon}{2}\quad n\ge n_0.\end{gathered}$$

したがって，$P_n(\mathbb{R}\setminus[-M_0,M_0])<\epsilon,\ n\ge n_0$ となる．ここで，$n=1,2,\ldots,n_0$ に対して，M_n を $P_n([-M_n,M_n])>1-\epsilon$ となるようにとり，$M:=\max\{M_0,M_1,\ldots,M_{n_0}\}$ とすれば，$P_n([-M,M])\ge 1-\epsilon,\ n\in\mathbb{N}$.
□

定理 6.20 (Lindeberg-Feller の中心極限定理) $\{X_n\}$ を有限な期待値 $m_n=\mathbb{E}[X_n]$ と分散 $\sigma_n^2=\mathrm{Var}[X_n]$ をもつ独立な確率変数の列とする．このとき，$c_n^2:=\sum_{k=1}^n\sigma_k^2$ として

$$\frac{1}{c_n^2}\sum_{k=1}^n\int_{\{x;\,|x-m_k|\ge\epsilon c_n\}}(x-m_k)^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)\to 0\ (n\to\infty) \tag{6.4}$$

となるならば，$S_n:=\sum_{k=1}^n X_k$ として

$$T_n:=\frac{S_n-\mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}}$$

は，標準正規分布に従う確率変数に弱収束する．

証明　$m_k=0$ として定理を証明する．これには，定理 6.19 より，

$$\begin{aligned}&\varphi_{T_n}(u)=\prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right)\to \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\\ \iff\quad &\log\prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right)\to-\frac{1}{2}u^2\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

を示せばよい．$\epsilon > 0$ を任意として，Taylor 展開の公式より，

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_k}(u) &= \int_{|x|\geq\epsilon c_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}P_{X_k}(x) + \int_{|x|<\epsilon c_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\
&= \int_{|x|\geq\epsilon c_n} \left(1 + \mathrm{i}ux + \frac{1}{2}\theta_2 u^2 x^2\right)\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\
&\quad + \int_{|x|<\epsilon c_n} \left(1 + \mathrm{i}ux - \frac{1}{2}u^2x^2 + \frac{1}{6}\theta_3|u|^3|x|^3\right)\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\
&= 1 + \frac{1}{2}u^2\int_{|x|\geq\epsilon c_n} \theta_2 x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x) - \frac{1}{2}u^2\int_{|x|<\epsilon c_n} x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\
&\quad + \frac{1}{6}|u|^3\int_{|x|<\epsilon c_n} \theta_3|x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x)
\end{aligned}$$

となる θ_i; $|\theta| \leq 1$, $i = 2, 3$ が存在する．ここで，記号の簡略化のため，

$$\begin{aligned}
\alpha_{nk} &:= \int_{|x|\geq\epsilon c_n} x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x), \\
\beta_{nk} &:= \int_{|x|<\epsilon c_n} x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x) \leq \epsilon^2 c_n^2
\end{aligned}$$

とする．

$$\left|\int_{|x|\geq\epsilon c_n} \theta_2 x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)\right| \leq \int_{|x|\geq\epsilon c_n} x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x),$$

$$\left|\int_{|x|<\epsilon c_n} \theta_3|x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x)\right| \leq \int_{|x|<\epsilon c_n} |x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x) \leq \int_{|x|<\epsilon c_n} \epsilon c_n x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)$$

より，

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\epsilon c_n} \theta_2 x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x) &= \theta_2'\alpha_{nk}, \\
\int_{|x|<\epsilon c_n} \theta_3|x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x) &= \theta_3'\epsilon c_n\beta_{nk}, \quad |\theta_2'| \leq 1, |\theta_3'| \leq 1
\end{aligned}$$

となる θ_2', θ_3' が存在する．

$$\therefore \quad \varphi_{X_k}(u) = 1 + \frac{1}{2}u^2\theta_2'\alpha_{nk} - \frac{1}{2}u^2\beta_{nk} + \frac{1}{6}|u|^3\theta_3'\epsilon c_n\beta_{nk}.$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) &= 1 + \gamma_{nk}, \\
\gamma_{nk} &:= \frac{1}{2}u^2\theta_2'\frac{\alpha_{nk}}{c_n^2} - \frac{1}{2}u^2\frac{\beta_{nk}}{c_n^2} + \frac{1}{6}|u|^3\theta_3'\epsilon\frac{\beta_{nk}}{c_n^2}.
\end{aligned}$$

(6.4) より，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{nk}}{c_n^2} \to 0 \ (n \to \infty). \tag{6.5}$$

よって，$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{nk} + \beta_{nk}) \equiv c_n^2$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_{nk}}{c_n^2} \to 1 \ (n \to \infty). \tag{6.6}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} \to -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}|u|^3\theta_3'\epsilon \ (n \to \infty). \tag{6.7}$$

さらに，ここで，log に対する Taylor 展開の公式を適用すると，ある $|\theta_1| \leq 1$ に対して，

$$\log \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_{nk} + \theta_1 |\gamma_{nk}|^2\right)$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
& \left|\log \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) + \frac{1}{2}u^2\right| \\
\leq \ & \left|\sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} + \frac{1}{2}u^2\right| + |\theta_1| \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 \\
\leq \ & \left|\sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}|u|^3\theta_3'\epsilon\right| + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 + |u|^3|\theta_3'|\epsilon.
\end{aligned}$$

上式，最右辺の第一項は，(6.7) より，ゼロに収束し，$|u|^3|\theta_3'|\epsilon \to 0 \ (\epsilon \to 0)$ となる．したがって，あとは，

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 \to 0 \ (n \to 0)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 \ & \leq \ \max_{k=1,\ldots,n} |\gamma_{nk}| \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|, \\
& \leq \ \left(\frac{1}{2}u^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{nk}}{c_k^2} + \frac{1}{2}u^2\epsilon^2 + \frac{1}{6}|u|^3\epsilon^3\right)\left(\frac{1}{2}u^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{nk}}{c_k^2} + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}|u|^3\epsilon\right).
\end{aligned}$$

したがって，(6.5) より，$\epsilon \to 0$ とすれば，

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|^2 \to 0 \ (n \to 0)$$

となる． $\square$