平行多面体の体積と行列式

2008 年 7 月 30 日　下崎義人

n 行 n 列の行列

$$\left(\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n\right)$$

の各成分は独立であるものと仮定し、シュミットの方法でそれぞれの成分を正規直交ベクトル

$$\left(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n\right)$$

に変換する。

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \left(\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{x}_2\right)\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \left(\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{x}_3\right)\mathbf{u}_1 - \left(\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{x}_3\right)\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|}$$

$\cdots$

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{x}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathbf{u}_k \bullet \mathbf{x}_n\right)\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}$$

まず $\mathbf{v}_2$ に着目。$\mathbf{v}_2$ は、$\mathbf{x}_2$ から「$\mathbf{x}_2$ の $\mathbf{u}_1$ 方向に平行な成分」を引いたベクトル、すなわち平行四辺形の面積を「底辺の長さ×高さ」として、$\mathbf{u}_1$ の絶対値を底辺の長さとすると、$\mathbf{v}_2$ の長さは高さに相当する。故に $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ で構成される平行四辺形の面積（底辺の長さ×高さ）は、$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$ と $\mathbf{v}_2$ で構成される長方形の面積と等しい。同様の議論を繰り返していくと

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

で構成される平行 $2n$ 面体の体積は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

で構成される超直方体の体積と等しくなることがわかる。超直方体の体積は

$$\prod_{k=1}^{n} \|\mathbf{v}_k\|$$

になる。

さて

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

の行列式をシュミットの方法と絡めながら求める。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{vmatrix} = \|\mathbf{x}_1\| \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{vmatrix}$$

（∵　行列式の性質：「ある列を c 倍したもの」の行列式は、元の行列式の c 倍になる）

$$= \|\mathbf{x}_1\| \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{vmatrix}$$

$$= \|\mathbf{x}_1\| \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{x}_2 - (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{x}_2)\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{vmatrix}$$

（∵　行列式の性質：「ある列を何倍かしたもの」を別の列に足しても行列式は変わらない）

$$= \|\mathbf{x}_1\| \bullet \|\mathbf{x}_2 - (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{x}_2)\mathbf{u}_1\| \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \dfrac{\mathbf{x}_2 - (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{x}_2)\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{x}_2 - (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{x}_2)\mathbf{u}_1\|} & \cdots & \mathbf{x}_n \end{vmatrix}$$

$$=\|\mathbf{x}_1\|\bullet\|\mathbf{x}_2-(\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{x}_2)\mathbf{u}_1\|\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=\|\mathbf{x}_1\|\bullet\|\mathbf{x}_2-(\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{x}_2)\|\bullet\cdots\bullet\left\|\mathbf{x}_n-\sum_{k=1}^{n-1}(\mathbf{u}_k\bullet\mathbf{x}_n)\mathbf{u}_k\right\|\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n\end{vmatrix}\prod_{k=1}^{n}\|\mathbf{v}_k\|$$

を得る。

正規直交ベクトルで構成された行列

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n\end{pmatrix}$$

は直交行列

$$^{t}AA=E$$

を成し

$$|A|=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n\end{vmatrix}=\pm 1$$

である。

よって

$$abs\begin{vmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}\|\mathbf{v}_k\|$$

を得る。すなわち

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}$$

の行列式の絶対値は、これが成す平行 $2n$ 面体の体積と等しい。

参考文献

シュミットの方法、行列式の性質について：培風館　基礎線形代数