

Chapter 17.

Optimal Stopping.

- ⇒ { 1. American Options.
2. Mortgage (按揭贷款)

什么样的美式期权会提前行使？

① 一个美式期权标的物是不分红买入期权：是不会提前行使

Put-Call Parity: $C + Ke^{-rT} = P + S_0$

对美式期权未必成立。

$$C_t = \underbrace{(S_t - K)}_{\text{intrinsic value}} + \underbrace{P_t}_{>0} + \underbrace{K(1 - e^{-rT})}_{>0} \quad \text{买入期权价格 Payoff}$$

C_t 一定大于 intrinsic value。所以一定持有到期。(不这样)

$$S_0 = 10, K = 10, S_t = 1000$$

如果提前行使：得到 $S_t - S_0 = 990$ 元。

但一直持有：是有可能赚也有可能亏。所以还是继续持有。

美式卖权是很有可能提前行使（因为卖权的行权收益有上限）

Example:

盒子：20个红球，20个绿球。T2球：+1。绿球 -1。

在过程中随时可以停止。这个赌局期望收益一定是正的。

Define Value function. $V(R, G)$.

我们想要计算: $V(20, 20)$

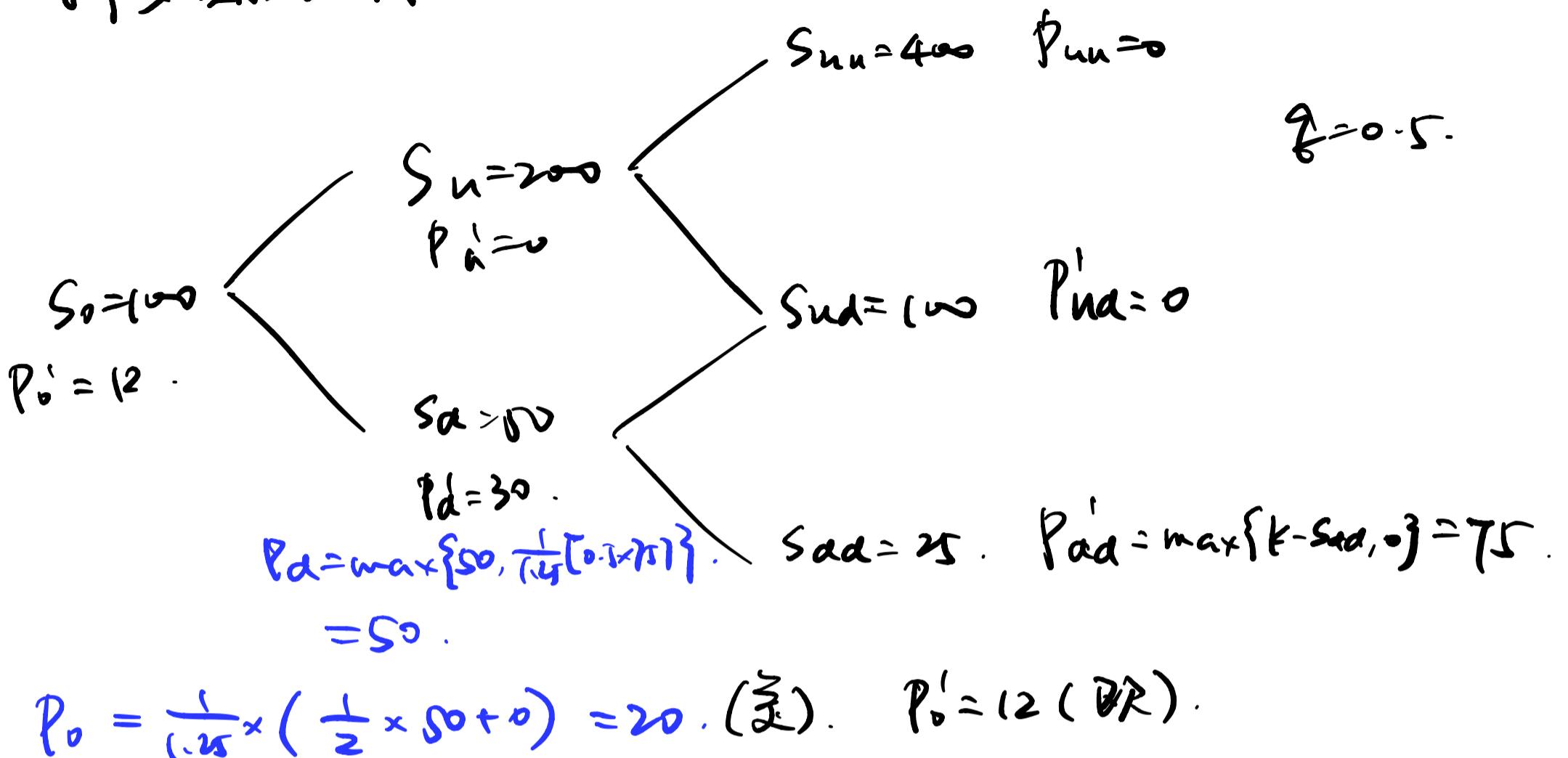
逆向递推: $V(0, 0) = 0$. $V(1, 0) = 1$. $V(0, 1) = -1$.
 $V(R, 0) = R$ $V(0, G) = -G$.

$$V(R, G) = \max \left(\frac{R}{R+G} (V(R-1, G)+1) + \frac{G}{R+G} \cdot (V(R, G-1)-1), 0 \right)$$

动态归化的求解: Bellman Equation.

$$V(20, 20) = 2.296(\text{元})$$

对于多期二叉树的情况也同样用 DP 方法来推



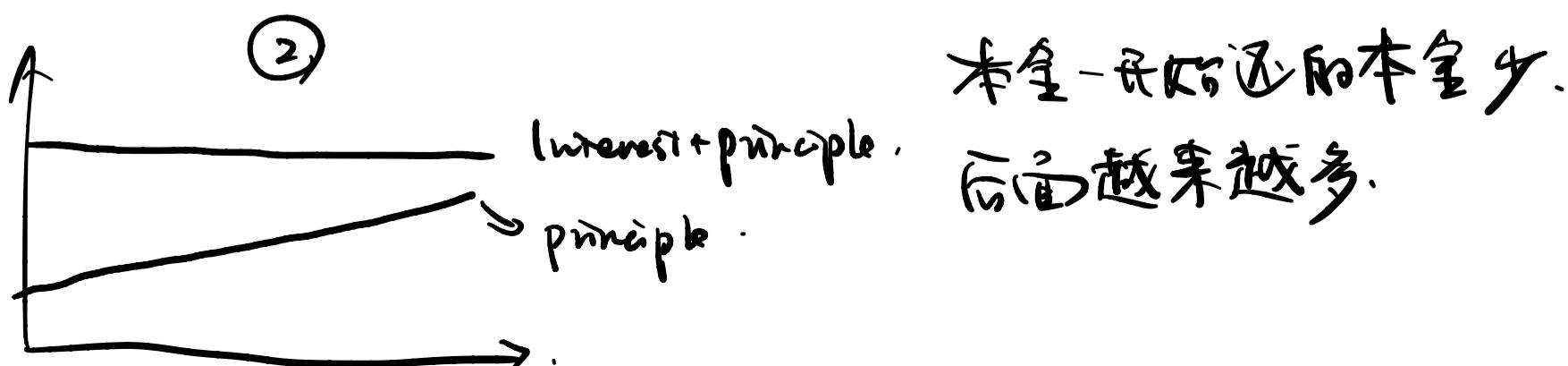
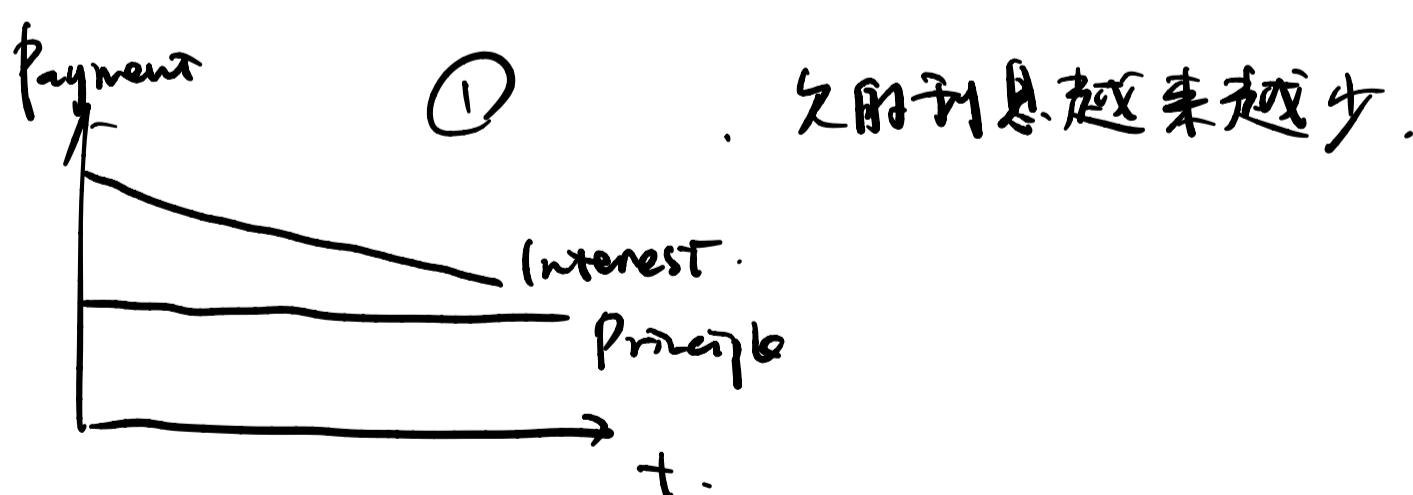
$$P_0 = \frac{1}{1.25} \times \left(\frac{1}{2} \times 50 + 0 \right) = 20. (\text{支}) \quad P'_0 = 12 (\text{BR})$$

因为银行家，所以美元的比欧元更贵。

Mortgage 前付 Down Payment. 逐步还款: Even Principle Payments.

① Even Principle Payments 等额本金还款法 \Rightarrow 每期数额一样. 利已款下降.

② Even Total Payments 等额本息还款法.



Embedded Option of advance payment.

提前还款期权.

比如房子，抵押的时候无法出售。

利率互换定价对 Mortgage 的方法.

Mortgage 其实是利率的衍生品：定期限 r_0 .

q B_t : 没还的本金. Repaid +.

r_u r_{ud} r_{du} upward principle.

$B_{t+1} - B_t$: 在 period $t+1$ 偿还的本金.

\bar{r} : mortgage interest rate.

贷款利率(不变).

F. B_{t+1} : interest payment.

$t_t + t+1$ 支付本金 + 利息:

$B_{t+1} - B_t + \bar{r} \cdot B_{t+1}$: $t+1$ 本息支付.

Define Value Function:

V_s : value of mortgage after total payment at node s .

$V_s < V_{su}$ 值函数. 随上涨下跌的情况
 $V_s < V_{sd}$.

$$V_s' = \frac{1}{1+r_s} \left[q(\bar{r} B_s + B_s - B_{su} + V_{su}') + (1-q)(\bar{r} \cdot B_s + B_s - B_{sd} + V_{sd}') \right].$$

$B_{su} = B_{sd}$ (等额本金还款).

$$= \frac{1}{1+r_s} \left[q(\bar{r} B_t + B_t - B_{t+1} + V_{su}') + (1-q)(\bar{r} \cdot B_t + B_t - B_{t+1} + V_{sd}') \right].$$

Bellman Equation.

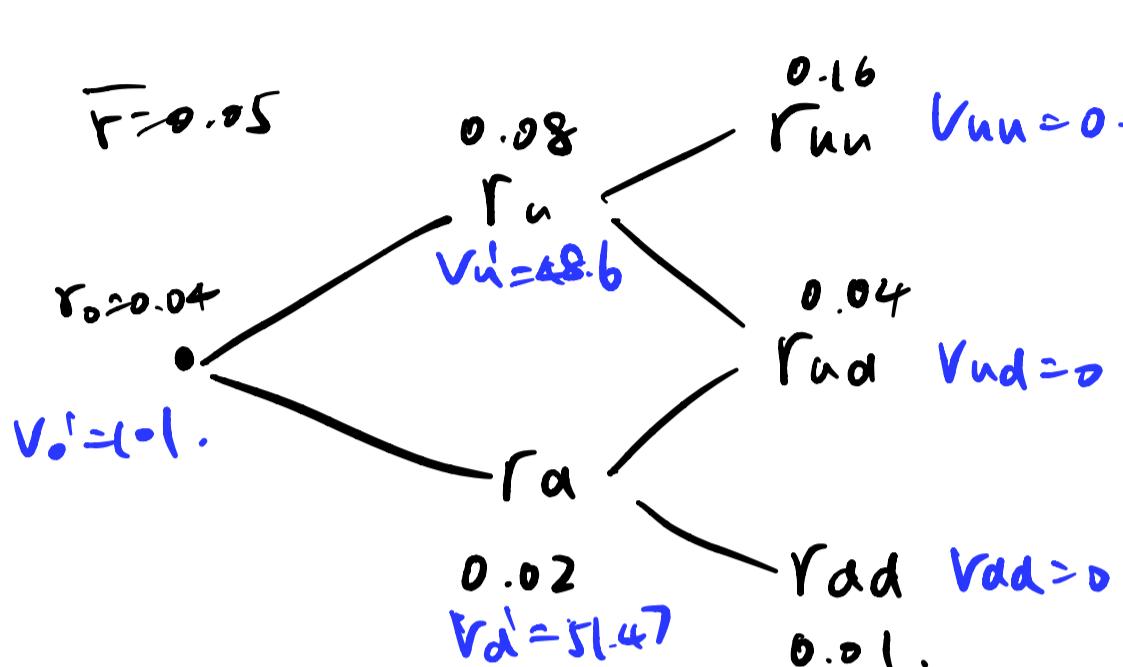
那麽：

$$V_s = \min(B_t, \frac{1}{1+r_B} \left[g(\bar{r}B_t + B_t - B_{t+1} + V_{sd}) + \right])$$

\downarrow

$$\min(g(\bar{r}B_t + B_t - B_{t+1} + V_{sd}))$$

直接支付剩余全部本金。



$$B_0 = 100, \quad B_1 = 50, \quad B_2 = 0.$$

V_u' : 不提前还款。

$$V_{u'} = \frac{1}{1+0.08} \cdot [0.5 \times (0.05 \times 50 + 100 - 0 + V_{uu}) + 0.5 \times (0.05 \times 50 + 100 + V_{ua})] = 48.6$$

$$V_{d'} = \min(50,$$

$$\frac{1}{1+0.02} \cdot [0.5 \times (0.05 \times 50 + 100 + V_{ud}) + 0.5 \times (0.15 \times 50 + V_{da})].$$

$$V_d = 50.$$

$$V_{u'} = 48.61$$

$$V_0 = 100.29 < r_0'.$$

所以可以提前还款的时候，那么此时，可以提前还款，借款人受益。

MBS = 陈贷款，次贷小心。

发放之后，直接卖掉。

房价高涨 \rightarrow 发放 subprime loan.

MNJA (No Income, No Job, No Asset)

二阶贷款还在发。

但07年房价触顶回落之后，就完了。

次贷危机爆发。