Chapter 7.

CAPM(SML):

$$\forall i \quad \underbrace{E(r_i)-r_f}_{\text{Risk Premium}} = \underbrace{\beta_i}_{\text{measure of risk}} \underbrace{(E(r_M)-r_f)}_{\text{price of risk}}. \quad \beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}.$$

为什么在定价时是方差，但最后 CAPM 里的 β 用的都是协方差？

原因：因为单个资产的风险是 σ，多个资产的风险是 β。

所以人会分散风险，最后通过组合，面临的风险小于单个资产。

β 才是真正需要面对的风险。

分散化投资的极致：所有资产都买 ⇒ 市场组合（真正的风险）.

σ_i
- correlated to σ_M ⇒ σ_{iM} β_i.
  undiversifiable risk systematic risk
- uncorrelated to σ_M ⇒ idiosyncratic risk.
  diversifiable risk.

Box 1-3:

① Steel

P_s
- 25 ($\frac{1}{2}$)
- 15 ($\frac{1}{2}$)

Pharmaceutical

P_p
- 40 ($\frac{1}{2}$)
- 0 ($\frac{1}{2}$).

问：谁的股价更高？ $E(r_s)$? $E(r_p)$?

正常来说：P 的股价 > S 的股价.

$$E(r_p) < E(r_s)$$

↑ low risk　　↑ high risk

$$\beta_p < \beta_s. \Rightarrow \sigma_{sM} > \sigma_{pM}.$$

钢铁与市场相关性更强（周期性表现）.

制药企业的最后制药结果与市场相关性小. $\sigma_s < \sigma_p$.

比如：投十家钢铁企业，分散化投资可以减少风险

但钢铁企业真正的风险是市场，无法分散化。

② $\beta<0$ 的资产？ $\Rightarrow$ $E(r_i)-r_f<0$

期望回报率比无风险还低

$\beta<0 \Rightarrow \sigma_{iM}<0$ 波动与经济波动相反 $\rightarrow$ Insurance, e.x. 失业保险

③ $E(r_i)=E(r_j)$　　$\sigma_i<\sigma_j$

是否永远投资选择 i？

$\Rightarrow$ $\beta_i=\beta_j$ 时，则应该无差异选择，

但在效用函数上：$u(r_i)>u(r_j)$

解释：不是 CML 和 SML 的区别；对效用函数的不能是单个资产，只能是充分分散化风险的组合资产

Estimation of CAPM

$\tilde{r_i} \triangleq r_i-r_f$　超额

$\tilde{r_M} \triangleq r_M-r_f$

$>$ 历史数据观测

SML $\Rightarrow$ $\tilde{r_i}=\beta_i\tilde{r_M}$ $\Rightarrow$ $\tilde{r_i}=\alpha_i+\beta_i\tilde{r_M}+\tilde{\varepsilon_i}$

可以用计量学方法 OLS 来估计 $\Rightarrow \hat{\beta_i}=\dfrac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ (回归系数)

对任意资产：

$Var(\tilde{r_i})=\beta_i^2 Var(\tilde{r_M})+Var(\tilde{\varepsilon_i})+2\beta_i Cov(\tilde{r_M},\tilde{\varepsilon_i})$　$\neq 0$

$=\underbrace{\beta_i^2\sigma_M^2}_{\text{systematic risk}}+\underbrace{\sigma_\varepsilon^2}_{\text{idiosyncratic risk}}$

无论DDM还是Gordon，重要的都是确定 r.

Example: $D_1=10$. $g=0.1$. $r_f=0.05$ $r_M-r_f=0.1$. $\beta=1.5$.

$$r=r_f+\beta(r_M-r_f)=0.05+1.5\times0.1=0.2$$

$$S_0=\frac{D_1}{r-g}=\frac{10}{0.2-0.1}=100$$ 定价模型就走通了.

William Sharpe 和老师一起发现. 他是在推导 n 个资产.

$$\vec{r}=\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} \quad \Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

N $\qquad \frac{N\times(N+1)}{2}$

问题：参数太多了.

$\sigma_{ij}=Cov(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j)$

$=Cov(\alpha_i+\beta_i\tilde{r}_M+\varepsilon_i,\ \alpha_j+\beta_j\tilde{r}_M+\varepsilon_j)$.

$=\beta_i\beta_j\sigma_M^2$.

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \beta_1\beta_1 & \beta_1\beta_2 & \cdots & \beta_1\beta_N \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \beta_N\beta_1 & & & \beta_N\beta_N \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 变成为 $N+N+1$ $\Rightarrow$ $2N+1$ 个参数.

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$r_i\ \ \beta_i\ \ \sigma_M$.

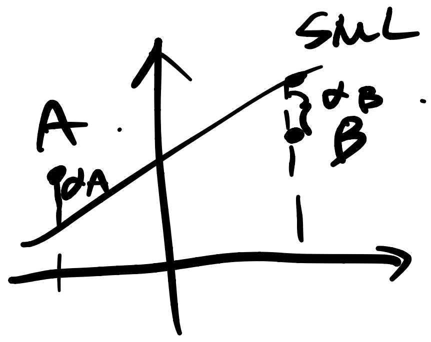
· Investment Performance Evaluation:

$SR_i=(\bar{r}_i-r_f)/\sigma_i$. 只适用于充分分散化基金.

只投医药、打新股的. 不适用于 sharpe ratio.

· Jensen's Alpha.

如果有一个 alpha 为正，则可以打败市场组合.



SML 正：理论上市场均衡时，所有资产应该是都在 SML 上.

alpha 不是一定永远的，而是连续的事情.

Alpha-Beta-Separation:

$$r_\alpha=r_f+\underbrace{0.03}_{alpha}+1.5(r_M-r_f)+\varepsilon \quad (100M).$$

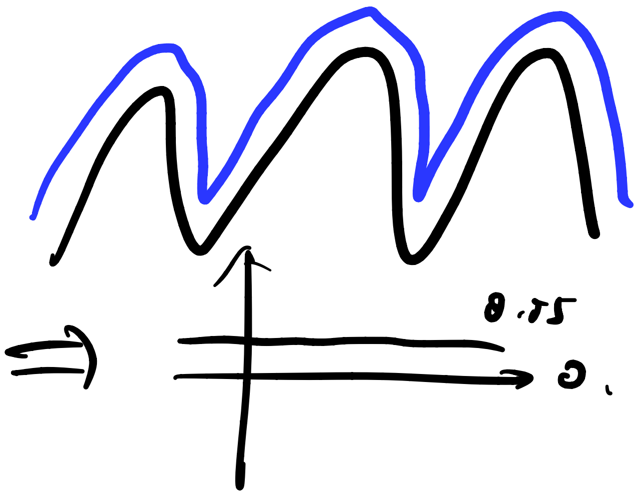
构造: $r_H = -0.5 r_f + 1.5 r_M$.

$= r_f + 1.5(r_M - r_f)$ 100M.

⇒ 无风险借5kw. 去买. r_M.

⇒ 做多 r_α, 做空 r_H: $r_\alpha - r_H = 0.03 + \varepsilon$.

分离了 0.03 的 alpha 收益.



有一个 $\bar{r}_p = 0.1$

$\bar{r}_p + \alpha = 0.13$ ⇒ 意义: 分离 alpha 之后. alpha 做小体量很难.

大体量好卖 ⇒ BridgeWater. portable Alpha. 大仓位.

Limitations of CAPM:

① Partial Equilibrium: 回报的本身是如何来的.

需要从 Partial → General. (Consumption CAPM)

② 静态的 ⇒ Dynamic CAPM. ⇒ I-CAPM.

③ Single Index (只和市场组合相关).

Bill Gates:

1990 45% MicroSoft.

Now. 1%.

900亿 ⇒ 4000亿.

→ 事前和事后的是不一样.

资产定价都是基于预期来做出决策. 所以不可能完全一样. 预测和结果

Homework:

7.1). $E(r_M) = 0.8\%$. $\sigma(r_M) = 2.5\%$.

$r_f = 0.1\%$.

$E(r_A) = 0.5\%$ $\sigma(r_A) = 2.0\%$. $\beta = 0.5$.

$$SR_M = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} = \frac{0.8\% - 0.1\%}{2.5\%} = 0.28$$

$$SR_A = \frac{E(r_A) - r_f}{\sigma_M} = \frac{0.5\% - 0.1\%}{2.0\%} = 0.20$$

b). $E(r_A) - r_f = \beta \cdot (E(r_M) - r_f)$.

$\Rightarrow E(r_A) = 0.5 \times 0.7\% + 0.1\% = 0.45\%$..

$\alpha_A = r_A - E[r_A] = 0.05\%$.

$\alpha_A = \bar{r}_A - r_f - \beta(\bar{r}_M - r_f) = 0.05\%$.

$\tilde{r}_i = r_f + \alpha_i + \beta_i(\tilde{r}_M - r_f)$.

c). 市场组合和基金A一起:

还是丢掉了: 设: $\left(\underset{w}{r_A}, \underset{1-w}{r_M}\right) \to r_p$.

$Cov = \sigma_A^2 \cdot \beta$.

$$E_p = w(E_A - E_M) + E_M.$$

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_M^2 + 2w(1-w) \cdot Cov.$$

$$= w^2(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2Cov) + w(-2\sigma_M^2 + 2Cov) + \sigma_M^2.$$

$$SR_p = \frac{E_p - r_f}{\sigma_p} \Rightarrow SR_p^2 = \frac{(E_p - r_f)^2}{\sigma_p^2}.$$

$$\frac{dSR_p^2}{dw} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma_p^4}\left(2(E_p - r_f) \cdot \frac{dr_p}{dw} \cdot \sigma_p^2 - (E_p - r_f)^2 \cdot \frac{d\sigma_p^2}{dw}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow 2(E_A - E_M) \cdot \sigma_p^2 = (E_p - r_f) \cdot \left(2w(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2Cov) + 2Cov - 2\sigma_M^2\right)$$

$$\Rightarrow (E_A - E_M)\left(w^2(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2Cov) + w(-2\sigma_M^2 + 2Cov) + \sigma_M^2\right).$$

$$= \left(w(E_A - E_M) + E_M - r_f\right)\left(w(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2Cov) + 2Cov - 2\sigma_M^2\right).$$

$\Rightarrow w^2$ 的系数:

$$(E_A - E_M)(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2Cov) - (E_A - E_M) \cdot (\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2Cov) = 0.$$

w 的系数.

$$(E_A - E_M) \cdot (-2\sigma_M^2 + 2Cov) - (E_A - E_M) \cdot (2Cov - 2\sigma_M^2)$$

$$- (E_M - r_f)(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2Cov) = -(E_M - r_f)(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2Cov).$$

常数: $(E_A - E_M) \cdot \sigma_M^2 - (E_M - r_f) \cdot (2Cov - 2\sigma_M^2)$

$=$

$$W=\frac{(E_A-r_f)\cdot\sigma_M^2-(E_M-r_f)\cdot Cov}{(E_M-r_f)\cdot\sigma_A^2+(E_A-r_f)\cdot\sigma_M^2-(E_A+E_M-2r_f)\cdot Cov}$$

$\Rightarrow W=0.1678$

$$SR_p=\frac{0.1678\times 0.5+(1-0.1678)\times 0.8-0.1}{\sqrt{0.1678^2\times 2^2+(1-0.1678)^2\times 2.5^2+2\times 0.1678\times(1-0.1678)\times 0.5\times 2.5^2}}$$

$=0.2818$

7.2) $r_f=2\%$ $E_M=8\%$ $\sigma_M=15\%$

$\sigma_{xyz}=20\%$ $\beta_{xyz}=0.9$

(a) $S=\frac{D}{r-g}=\frac{1}{r_{xyz}-5\%}$

$r_{xyz}-r_f=\beta\cdot(r_M-r_f)$

$\Rightarrow r_{xyz}=2\%+\frac{0.9\times 20\%}{15\%}\times 6\%=9.2\%$

$S=\frac{1}{9.2\%-5\%}=\frac{1}{4.2\%}=23.8\%$

(b) $S_0=\frac{D_1}{1+r}+\frac{D_2}{(1+r)^2}+\frac{S_2}{(1+r)^2}$

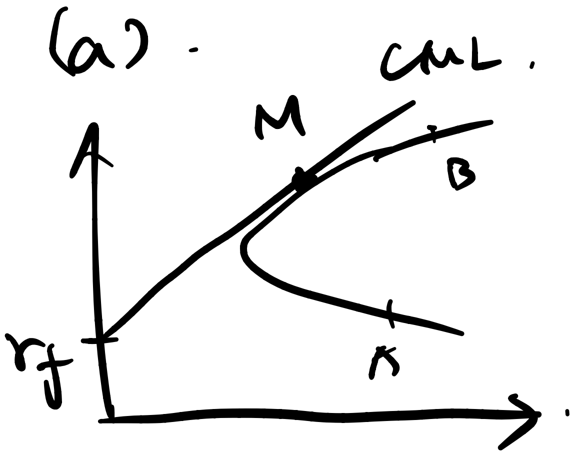
$=\frac{D_1}{(1+r)}+\frac{D_1(1+g_1)}{(1+r)^2}+\frac{D_1(1+g_1)(1+g_2)}{(1+r)^2(r-g_2)}=24.9$(元)

7.3)

~~区~~是设: r_A r_B

w $1-w$

(a)



$$w^*=\frac{(E_A-r_f)\sigma_B^2-(E_B-r_f)Cov}{(E_A-r_f)\cdot\sigma_B^2+(E_B-r_f)\sigma_A^2-(\sigma_A^2+\sigma_B^2-2Cov)}$$

$=0.25$

$$\Rightarrow SR_p=\frac{0.25\times 8\%+0.75\times 12\%-4\%}{\sqrt{0.25^2\times 15\%^2+0.75^2\times 30\%^2+2\times 0.75\times 0.25\times 0.5}}$$

$=0.4075$

(b) $a=b=0.33$

(c) CML: $r - r_f = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \sigma$

$\Rightarrow r = 0.4075\sigma + 4\%$.

SML: $r - r_f = \beta(\bar{r}_M - r_f)$.

$r = 7\%\beta + 4\%$.

(d) 设: $\mu r_c + (1-\mu) r_M$.

$\alpha = \bar{r}_c - r_f - \beta(\bar{r}_M - r_f)$.

$3\% = \bar{r}_c - 4\% - 0.5 \times 7\%$.

$\bar{r}_c = 10.5\%$. $\beta = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ $\beta\sigma_M^2 = \rho\sigma_c\sigma_M$.

$\sigma_c = 17.18\%$.

$SR_p = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} \Rightarrow \frac{\partial SR_p}{\partial \mu} = 0$. $\mu^* = 0.44$.

$SR_p \cong 0.4547$.