## Chapter 13

Equilibrium Pricing (Absolute Pricing).

在现实中并不好用. 在计算定价时. 需要有更好的工具:

Non-Arbitrage Pricing. (相对定价. Relative Pricing).

Law of one Price (LOOP).

Arbitrage Pricing Theory: 套利定价理论.

计量模型

价

SML: $E[\tilde{r}_i] = r_f + \beta_{Mi}[E(\tilde{r}_M) - r_f)]$.

Single Index Model: $\tilde{r}_i - r_f = \alpha_i + \beta_{iM}(\tilde{r}_M - r_f) + \tilde{\varepsilon}_i$.

拟合的效果很差

Fama & French (1993) 三因子模型:

$+\beta_{is}\widetilde{SMB} + \beta_{ih}\widetilde{HML}$

$\widetilde{SMB}$ 股票上市公司规模. $\widetilde{HML}$ 股票上市公司价格.

Multi-factor Model.

解释性: 如何判断. 加入的因子是有意义的?

因子: 影响价值. 不确定性的来源.

多因子模型的直觉:

$$\max\ u(c_0) + \delta E[u(\tilde{c}_1)]$$

$$\text{s.t.}\quad \tilde{c}_1 = (1+\tilde{r}_W)(W_0 - c_0).$$

$$\Rightarrow 1 = E\Big[\overbrace{\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}}^{\tilde{m}}(1+\tilde{r}_W)\Big].$$

$$u(c) = -\frac{1}{2}(a-c)^2 \qquad u'(c) = a-c. \ \because 边际效应为正 \ \therefore a \gg 0.$$

$$\tilde{m} = A - B\tilde{r}_W. \qquad A = \delta\frac{a}{a-c_0} - \delta\frac{W_0-c_0}{a-c_0}$$

$$B = \delta\frac{W_0-c_0}{a-c_0}$$

$$\Rightarrow E[\tilde{r}_j] = r_f + \beta_j \lambda_W.$$

$$\tilde{c}_1 = (1+\tilde{r}_w)(w_0 - c_0 + y_0) + \tilde{y}_1$$

$$\Rightarrow E[\tilde{r}_j] = r_f + \beta_{j,w}\lambda_w + \beta_{j,y}\lambda_y$$

加入因子的形式，是什么原因是线性的？

$\Rightarrow$ APT 的论证

所有资产都受到共同的不确定性的影响（因子组）。

当所有资产的期望回报率都由一组因子决定的时候，基于无套利思想不同资产期望回报率之间具有线性关系 —— APT.

factor risk：$\lambda_w$. $\lambda_y$ 直接.

factor loading：$\beta$ 即是 factor loading

idiosyncratic risk：个体性风险

$$\tilde{r}_i = \bar{r}_i + \beta_i \tilde{f} + \cancel{\tilde{\varepsilon}}$$

$$\tilde{r}_j = \bar{r}_j + \beta_j \tilde{f}$$

先考虑单因子模型

没有个体风险.

$\beta_i \neq \beta_j$.

求 $\bar{r}_i$ 与 $\bar{r}_j$ 的关系.

$E[\tilde{f}] = 0$ 因子期望是0

考虑两个资产构成两个组合：$\begin{pmatrix} r_i & r_j \\ w & 1-w \end{pmatrix}$

$$\tilde{r}_p = w\tilde{r}_i + (1-w)\tilde{r}_j$$

$$= w(\bar{r}_i + \beta_i\tilde{f}) + (1-w)(\bar{r}_j + \beta_j\tilde{f})$$

$$= (w\bar{r}_i + (1-w)\bar{r}_j) + (w\beta_i\tilde{f} + (1-w)\beta_j\tilde{f})$$

$(w_0\beta_i + (1-w_0)\beta_j)\tilde{f} = 0 \Rightarrow w_0 = \dfrac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \Rightarrow$ 风险因素消除.

无风险.

$$\Rightarrow \tilde{r}_{p_0} = \frac{\beta_j\bar{r}_i - \beta_i\bar{r}_j}{\beta_j - \beta_i}$$

$\because \tilde{r}_{p_0}$ 是无风险 $\therefore \tilde{r}_{p_0} = r_f \Rightarrow \dfrac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} = \dfrac{\bar{r}_j - r_f}{\beta_j} \triangleq \lambda$.

如果无套利机会.

所以，对任意资产 $i$ 都成立 定义为入

$$\lambda = \frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{\beta_j - \beta_i}.$$

$$\bar{r}_k = r_f + \beta_k \lambda.$$

求：$\tilde{f}$ 的载荷是 1 的：

$$w_1 \beta_i + (1-w_1)\beta_j = 1 \Rightarrow w_1 = \frac{1-\beta_j}{\beta_i - \beta_j}.$$

把 $w_1$ 代回 $\tilde{r}_p$ 的表达式中：

$$\tilde{r}_{p_1} = \left[\frac{1-\beta_j}{\beta_i-\beta_j}\cdot\bar{r}_i + \left(1-\frac{1-\beta_j}{\beta_i-\beta_j}\right)\cdot\bar{r}_j\right] + \tilde{f}.$$

$$= \left[\left(\frac{1-\beta_j}{\beta_i-\beta_j}\right)\bar{r}_i + \left(\frac{\beta_i-1}{\beta_i-\beta_j}\right)\bar{r}_j\right] + \tilde{f}.$$

$$= \frac{\bar{r}_i - \beta_j\bar{r}_i + \beta_i\bar{r}_j - \bar{r}_j}{\beta_i - \beta_j} + \tilde{f}$$

$$= \frac{\beta_i\cdot\bar{r}_j - \beta_j\bar{r}_i}{\beta_i-\beta_j} + \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{\beta_i-\beta_j} + \tilde{f}$$

$$= r_f + \lambda + \tilde{f}.$$

对两边取期望：$\lambda = \bar{r}_{p_1} - r_f$.

$$E[\tilde{f}] = 0. \Rightarrow \bar{r}_{p_1} = r_f + \lambda \Rightarrow \lambda = \bar{r}_{p_1} - r_f.$$

也就是说：$\lambda$ 是因子载荷为 1 的资产的超额回报率.

将因子载荷为 1 的因子组合 factor Portfolio.

风险溢价 $\lambda$ 叫做因子溢价 factor premium.

$$\tilde{r}_i - r_f = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{因子载荷}}}{\beta_i}\,(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{因子组合 } p_1 \text{ 的超额}}}{\bar{r}_{p_1} - r_f}).$$

# 多因子模型下的APT.

$$\tilde{r}_i = \bar{r}_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{i,k} \tilde{f}_k + \tilde{\varepsilon}_i$$

$i=1, \cdots, N$. $N \gg K$ 资产数目≫因子数.

$E(\tilde{f}_k) = 0$. $E(\tilde{\varepsilon}_i^2) = \sigma_\varepsilon^2 < +\infty$.

$E(\tilde{f}_k^2) = 1$.

$E(\tilde{f}_k \tilde{f}_{k'}) = E(\tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_j) = E(\tilde{f}_k \tilde{\varepsilon}_i) = 0$.
独立.

类似的:

构造一个组合, s.t. 因子对所有暴露均为0 有N个资产的组合

$$\tilde{r}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \tilde{r}_i.$$

$$= \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{r}_i + \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_{i,1}\right) \tilde{f}_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_{i,k}\right) \tilde{f}_k + \sum_{i=1}^{N} w_i \tilde{\varepsilon}_i$$

通过选择权重,来将p中的因子风险消除.

K个方程 N个未知数 ⇒ 找出一组解(一定存在). $w_{0,i}$.

$$\tilde{r}_{p_0} = \sum_{i=1}^{N} w_{0,i} \cdot \bar{r}_i + \sum_{i=1}^{N} w_{0,i} \tilde{\varepsilon}_i.$$ 虽然因子风险被去除.
但个体风险依然有:

算方差 $\sigma^2(\tilde{r}_{p_0}) = (w_{0,1}^2 + \cdots + w_{0,N}^2) \cdot \sigma_\varepsilon^2$.

当 $N \gg 0$ 时. $\sigma^2(\tilde{r}_{p_0})$ 的量级是 $(\frac{1}{N})^2 \times N \cdot \sigma_\varepsilon^2$. (估算)

当 $N \to +\infty$ 时: $\lim_{N \to +\infty} (\frac{1}{N})^2 \times N \cdot \sigma_\varepsilon^2 \to 0$. 近似与无风险资产:方差为0.

$$\tilde{r}_{p_0} \approx \sum_{i=1}^{N} w_{0,i} \bar{r}_i = r_f.$$ (与单因子模型一样, 与 $r_f$ 联系起来了)

同样构造: 构造 K个 factor Portfolio.

s.t. $\tilde{f}_k$ 的暴露为1. 同样可得:

$$\bar{r}_i = r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{i,k} \lambda_k$$ 期望回报表达式.

找什么因子, 都什么样的都可以.

latent factor.

多因子模型的对冲

① Alpha Beta 分离：

$$\tilde{r}_0 - r_f = \alpha_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \beta_{0,n} \tilde{r}_n}_{} + \tilde{\varepsilon}_0$$

这里是资产，本身是个组合

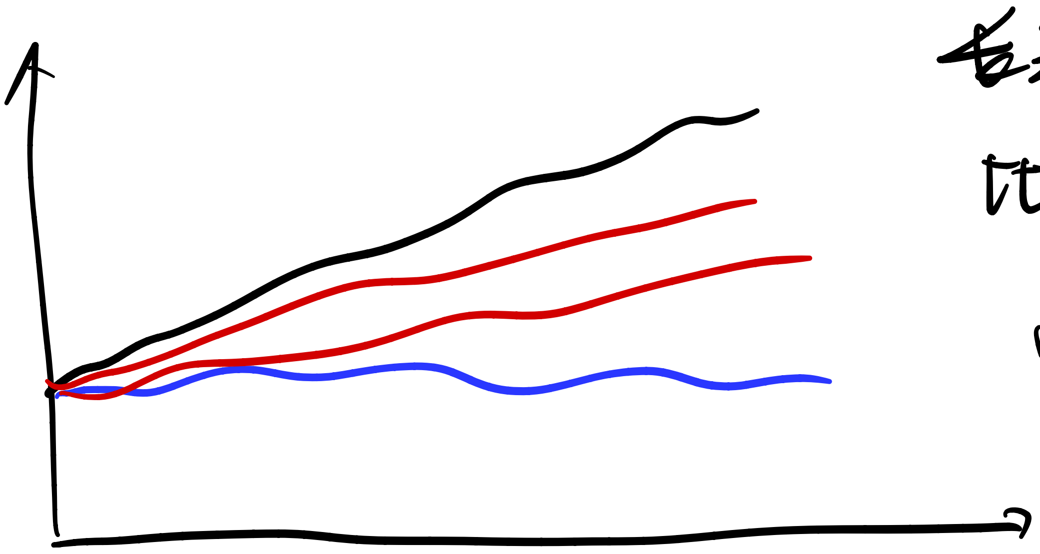
对冲 $r_0$ 的系统性风险

$\underbrace{\alpha_0}_{} + \tilde{\varepsilon}_0$

② 因子选股，PMI 采购经理指数，GDP 等。

计算股票与 PMI 风险暴露大的去做多。

书上：按市值因子做回测 用历史数据来测试因子有效性是回测。



长期来看，小市值股票涨的比大市值股票要多。

17年白马行情市值因子失效了，坑了好多机构。

2013

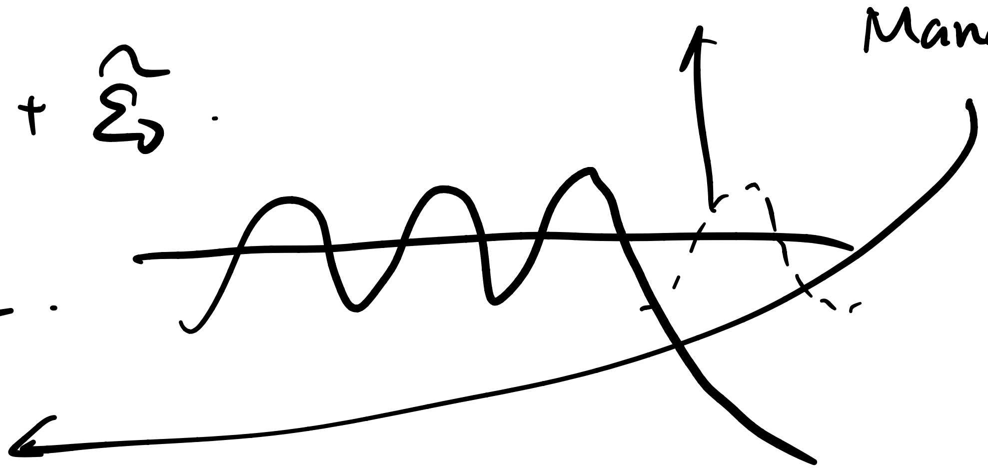
因子模型文章，发的最多的是 AQR。

统计套利：

$$\tilde{r}_0 - r_f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \tilde{f}_n + \tilde{\varepsilon}_0$$

均值回归未必会发生。

LTCM. Long Term Capital Management.



在俄罗斯债券做的，

做空德国，做多俄罗斯，然后就没了。

黄奇辅 → 写了一篇金融学教材。

→ LTCM 和另外一个基金，也是次贷危机就

# Homework

(3.1).

$$\tilde{r}_1 = \alpha_1 + 0.5\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 \qquad r_f = 0.02.$$

$$\tilde{r}_2 = \alpha_2 + 0.4\tilde{f}_1 + 0.8\tilde{f}_2 \qquad E[\tilde{r}_1] = 0.04 \ (=\alpha_1) \qquad E[\tilde{f}_1] = 0$$

$$\tilde{r}_3 = \alpha_3 + 0.8\tilde{f}_1 + 0.4\tilde{f}_2. \qquad E[\tilde{r}_2] = 0.04 \ (=\alpha_2). \qquad E[\tilde{f}_2] = 0.02.$$

设: $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$, $\tilde{r}_3$

$(w_1, w_2, 1-w_1-w_2)$. $w_3 = 1-w_1-w_2$.

$$\Rightarrow \tilde{r}_p = (w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + w_3\alpha_3) + (0.5w_1 + 0.4w_2 + 0.8w_3)\tilde{f}_1 + (w_1 + 0.8w_2 + 0.4w_3)\tilde{f}_2.$$

为了得到无风险:

$$\begin{cases} 0.5w_1 + 0.4w_2 + 0.8 - 0.8w_1 - 0.8w_2 = 0 \\ w_1 + 0.8w_2 + 0.4 - 0.4w_1 - 0.4w_2 = 0 \\ w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + (1-w_1-w_2)\alpha_3 = r_f. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3w_1 + 4w_2 = 8. \\ -6w_1 - 2w_2 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = -\frac{4}{7} \\ w_2 = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

$$r_i = r_f + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2$$

$r_f$. $\beta_1$. $\beta_2$已知, 现在求$\lambda_1$和$\lambda_2$: $\lambda_1 = 0.04 - r_f$. $\lambda_2 = 0.04 - r_f = 0.02$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{r}_1 = 0.02 + 0.5 \times 0.02 + 0.02 = 0.05 \\ \tilde{r}_2 = 0.02 + 0.4 \times 0.02 + 0.8 \times 0.02 = 0.044 \\ \tilde{r}_3 = 0.02 + 0.8 \times 0.02 + 0.4 \times 0.02 = 0.044. \end{cases}$$

2). 不利用APT结论下, 仿照APT推导过程:

$\tilde{r}_1 = \alpha_1 + 0.5\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$

$\tilde{r}_2 = \alpha_2 + 0.4\tilde{f}_1 + 0.8\tilde{f}_2$

$\tilde{r}_3 = \alpha_3 + 0.8\tilde{f}_1 + 0.4\tilde{f}_2$.

$\Rightarrow$ 因子1载荷为1. 因子2.载荷为0 $\Rightarrow r_{p_1}$

因子1 ... 0. 因子2 ... 0 $\Rightarrow r_{p_2}$

... 1 ... 0, ... 2 ... 0 $\Rightarrow r_f$.

对组合 $r_{p_1}$, $r_{p_2}$, $r_f$:

$$\begin{cases} 0.5w_1 + 0.4w_2 + 0.8w_3 = 1 \\ w_1 + 0.8w_2 + 0.4w_3 = 0 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -\frac{2}{3} \\ w_2 = 0 \\ w_3 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$\tilde{r}_{p_1} = -\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{5}{3}\alpha_2 + E(\tilde{f}_1) = 0.04$

对于 $r_{p_2}$:

$$\begin{cases} 0.5w_1 + 0.4w_2 + 0.8w_3 = 0 \\ w_1 + 0.8w_2 + 0.4w_3 = 1 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -\frac{2}{3} \\ w_2 = \frac{5}{2} \\ w_3 = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \tilde{r}_{p_2} = 0.04$$

$= -\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{5}{2}\alpha_2 + \frac{5}{6}\alpha_3 + E(\tilde{f}_2)$

对于 $r_f$:

$$\begin{cases} \text{. . . . . .} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -4 \\ w_2 = 5 \\ w_3 = 0 \end{cases}$$

$\tilde{r}_f = -4\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0.02$.

$\Rightarrow \alpha_1 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.044$ $\alpha_3 = 0.044$.