Chapter 14.

无套利定价分析.

衍生品. 期货 期权 ⇒ 也是次贷危机的原因之一.

远期合约：不灵活. 必须履约.

期货：标准的远期合约. 交易所来保证履约. 可以随时买卖期货合约

(现在认为期货和远期是一种).

Assumptions：不产生收入.

spot price 现价. S_0.

forward price 未来价格 F_0

risk free rate (continuous) r.

S_0, F_0, r 的关系?

$F_0 = S_0 e^{rt}$. (连续复利).

如果 $F_0 > S_0 e^{rt}$. 则买入 S_0. 等待 t 时再卖出 F_0 即可.

$F_0 < S_0 e^{rt}$ 也同样可以套利.

远期衍生品. derivatives.

预测价格：⇒ 直观想法 $F_0 = E(S_T)$.

等号关系是不成立的.

因为有风险.

S_0, F_0, $E(S_T)$.

S_0 ↑ 现货价格

F_0 ↑ 远期价格

$E(S_T)$ ↑ 未来的现货价格期望.

想要在3个月后买一些螺纹钢.

① 在当时签期货合约, 3个月后再买. 那么现值应该是 $F_0 \cdot e^{-rt}$ (存无风险).

② 在3个月后, 在现货市场在 $E(S_T)$ 去买

贴现: $E(S_T)e^{-kT}$.

只有当: $F_0 = E(S_T) \cdot e^{(r-k)T}$ 相等时. F_0 才等于 $E(S_T)$.

当: $k=r$ 时. $\beta=0$ 时.

F_0、S_0 基于现在的信息集上的预期.

期权: European Call (Put).

买入期权(看涨期权)、卖出期权(看跌期权)

⇒ 有 Maturity Date. 到期日.

行权价格: Exercise Price. K.

标的资产. Underlying Asset. (这里是股票)

美式期权: 在签完之后. 可以在任何时间行权.

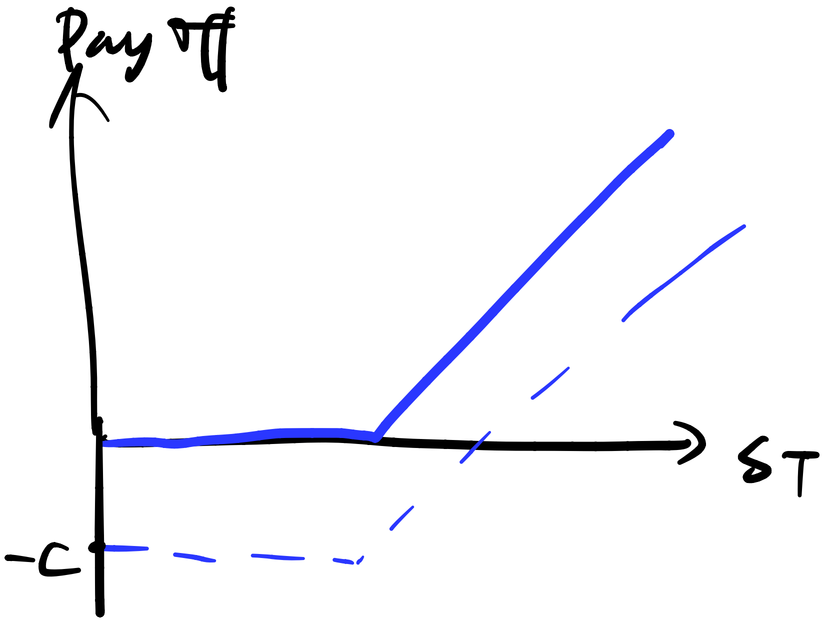
American Option.

Vanilla Option: 普通期权

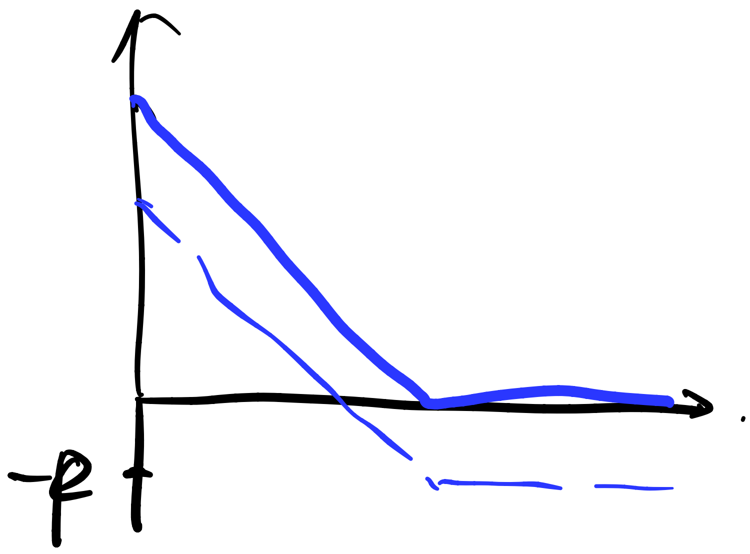
Exotic Option: 奇异期权

Payoff:

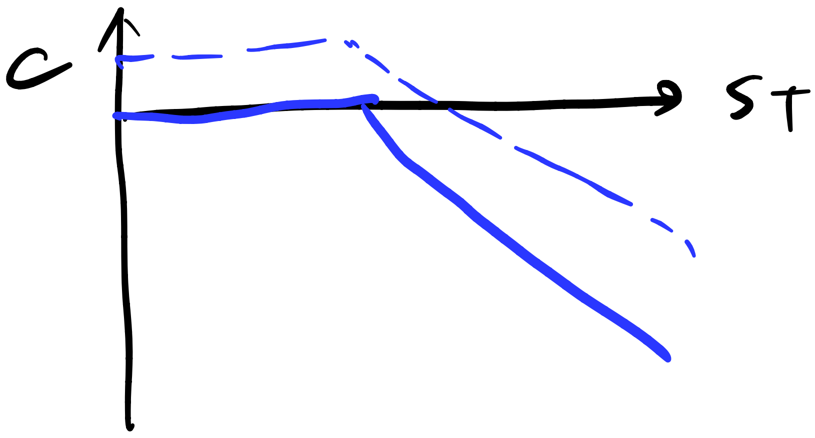
买入期权多头的支付



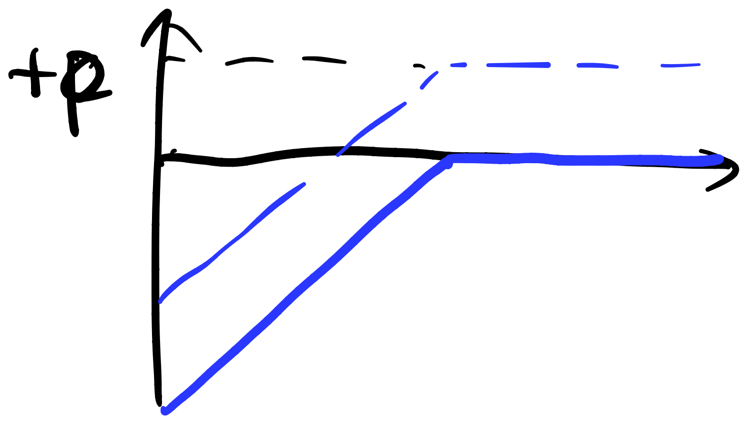
卖出期权多头的支付



买入期权空头



卖出期权空头



中行油. 套期保值变成赌博了。

Put-Call Parity.

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

C: 买入股票的钱　　P: 卖出的价格

K: 行权价准备的钱　　S_0.

$\max\{S_T, K\}$.　　$\max\{S_T, K\}$.　　未来支付是一样的

是组合的payoff

P　　S_0.

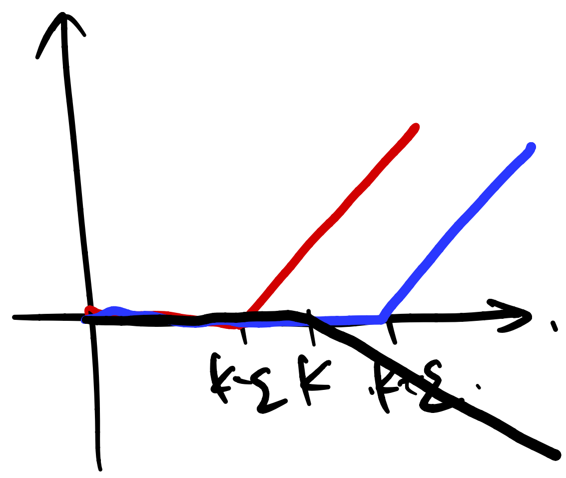
买入期权 C + 为了行权准备的钱 Ke^{-rT} = 手上的股票 + 卖出期权.

$\max\{S_T, K\}$. K是行权价, S_T是股票的价格

⟹ 左右两边可以一样

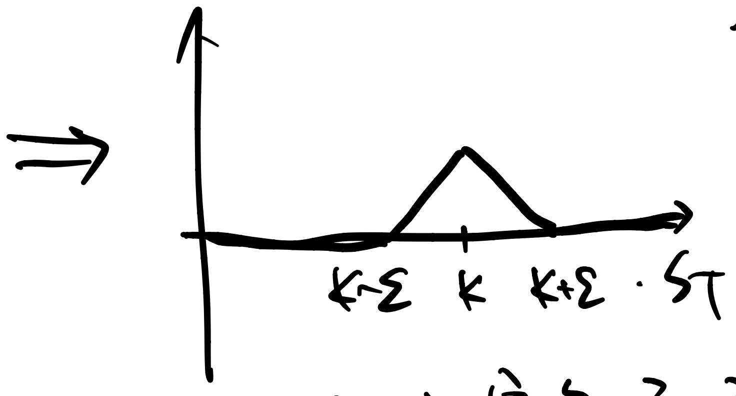
期权payoff是非线性的. 能构造有趣的东西.

蝶式价差



买入两个call: $K-\varepsilon$, $K+\varepsilon$.

再卖两个K的空头：两次购买黑线.



会得到一个 Butterfly Spread.

如果 $\varepsilon \to 0$. 那么就是冲击函数.

构造出了个阿罗证券.

⇒ 这说明完备市场需要有阿罗证券 ⇒ 市场更完备.

异信交易：看涨股票：都看涨，一个预期10，一个预期20.

如果没有期权，那么两个人是赚一样的钱.

但如果有 butterfly spread，那么就有10块的人可以卖出一个 put，或者买入 butterfly，只有在10块钱的时候有支付.

衍生品定价：

Stock Bond Derivative Payoff Matrix.

$$
\begin{bmatrix} uS_0 & e^r & C_u \\ dS_0 & e^r & C_d \end{bmatrix}
\quad
\begin{array}{c} \xleftarrow{\quad p \quad} \\ \xleftarrow{\quad 1-p \quad} \end{array}
\quad S_0,\ 1,\ C_0\ ?
$$

只有：现在的衍生品价格 C_0 不知道

股票价格信息可以增加衍生品的价格信息，了解衍生品的支付.

三种方式来确定：

Method 1：利用APT的思想：

股票+衍生品组合 ⇒ 去掉风险 ⇒ 等于无风险利率.

(Derivative, Stock) $\Pi_0 = C_0 - \Delta S_0$ (Period 1 Price).

$(1, \ -\Delta)$

$$\left.\begin{aligned}\Pi_u &= C_u - \Delta u S_0 \\ \Pi_d &= C_d - \Delta d S_0\end{aligned}\right\}$$ period 1. 选择 Δ s.t. 风险被消除.

∵ 无风险 ∴ $\Pi_u = \Pi_d$ (所以认为没有波动).

$$\Rightarrow \Pi_u = \Pi_d \Rightarrow \Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}$$

$$\Rightarrow \Pi_0 = C_0 - \frac{C_u - C_d}{u-d}, \quad \Pi_u = \Pi_d = C_u - \frac{u}{u-d}(C_u - C_d).$$

是无风险组合. (否侯套利).

$$\therefore \Pi_0 \cdot e^{rt} = \Pi_u = \Pi_d \quad (t=1)$$

$$\Rightarrow C_0 = e^{-r}\left(\frac{e^r - d}{u-d}C_u + \frac{u - e^r}{u-d}C_d\right).$$

Method 2: 复制法实行.

股票 + Bond 复制衍生品.

$(\Delta, B) \Rightarrow$ 组合 Payoff = 衍生品 Payoff.

Stock Bond.

$$\begin{aligned}C_u &= \Delta u S_0 + Be^r \\ C_d &= \Delta d S_0 + Be^r\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases}\Delta = \dfrac{C_u - C_d}{(u-d)S_0} \\[2ex] B = \dfrac{uC_d - dC_u}{e^r(u-d)}\end{cases}$$

如果无套利 则 period 1 period 0 相等.

$$C_0 = \Delta S_0 + B = e^{r}\left[\frac{e^r - d}{u-d}C_u + \frac{u - e^r}{u-d}C_d\right].$$

相加为 1. C_u, C_d 都是 Payoff.

所以 C_0 是未来的 Payoff. C_u, C_d 相加概率为 1.

$\therefore C_0 = e^{-r} E[\tilde{c}]$. 计算的 w. 7是我们的 p 和 $1-p$.

Method 3: 风险中性定价.

假设在世界中，股价上涨和下跌的概率是 q 与 $1-q$.

$S_0 = e^{-r}[q u S_0 + (1-q) d S_0]$. 它不care风险，只关心payoff.

$\Rightarrow q = \frac{e^r - d}{u-d}$.

$\therefore C_0 = e^{-r}E(\tilde{C}) = e^{-r}[q C_u + (1-q) C_d]$

$= e^{-r}\left[\frac{e^r-d}{u-d}C_u + \frac{u-e^r}{u-d}C_d\right]$ 自洽

p 为啥没有影响？

p 在 C_0 定价里没有影响，但 p 影响了 S_0.

Δ 其实是一个导数：$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}$. 对 S_0 的敏感程度.

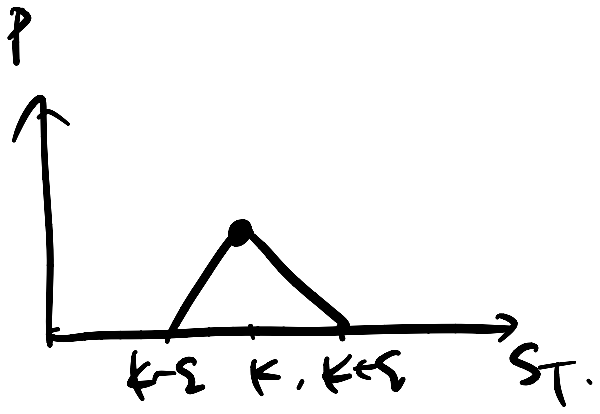
Homework 14:

(14.1). 蝶式价差的Payoff函数：

买入期权多头： $p = \max(S_T - K - \varepsilon, 0)$

买入期权多头： $p = \max(S_T - K + \varepsilon, 0)$.

买入期权空头. $P = \min(-S_T - K, 0)$.



$\therefore$ 当: $S_T \in (K-\varepsilon, K)$ 时，

$P = S_T - K + \varepsilon$.

当: $S_T \in (K, K+\varepsilon)$ 时，

$P = -S_T + K + \varepsilon$.

else:

$P = 0$.

(4-7).

		Stock	Bond	Derivatives.	
Period 0. S_0, 0, C_0 100.	$\frac{2}{3}$	200	100	110	up
	$\frac{1}{3}$	50.	100.	110	down.

股票.

$$S_0 = 100 \begin{cases} \xrightarrow{\frac{2}{3}} uS_0 = 200, \quad u = 2. \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}} dS_0 = 50, \quad d = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

债券:

$B_0 = 80$, $B_1 = (1+r)B_0 = 100$. $r = 0.25$

P_0 我们要求的:

$$P_0 = ? \qquad P_1 = \max(K - S_T, 0). \begin{cases} \xrightarrow{\frac{2}{3}} 0 = P_u \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}} P_d = 110 - 50 = 60. \end{cases}$$

Method 1: 风险消除法: $\Pi_0 = P_0 - \Delta S_0 = P_0 - \Delta \times 110$.

$(-\Delta, \ 1)$

Stock Derivative.

$\Pi_u = P_u - \Delta u S_0 = 0 - \Delta \times 2 \times 100$

$\Pi_d = P_d - \Delta d S_0 = 60 - \Delta \times 50$.

$$\Rightarrow \Delta = -0.4.$$

$\Rightarrow \Pi_0(1+r) = \Pi_1$

$\Rightarrow (P_0 + 40) \times 1.25 = 50 \Rightarrow P_0 = 24$

Method 2:

股票 + 债券:

$C + \Delta$, (1).

$$\Delta u \cdot S_0 + (1+r) B = P_u$$
$$\Delta d S_0 + (1+r) B = P_d$$

$$\begin{cases} 200\Delta + 1.25B = 0 \\ 50\Delta + 1.25B = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = -0.4 \\ B = 64 \end{cases}$$

$\therefore C_0 = \Delta S_0 + B = -0.4 \times 100 + 64 = 24$

Method 3：风险中性定价：

$$100 = \frac{1}{1+r} \left[q \cdot 200 + (1-q) \cdot 50 \right]$$

$$125 = 200q + 50 - 50q \Rightarrow q = \frac{75}{150} = 0.5$$

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \left(0 \times 0.5 + 0.5 \times 60 \right) = 24$$

目恰，均是 $P_0 = 24$.