Chapter 9. Hedge.

Complete + Non Arbitage.(资产定价基本定理)

$\Longrightarrow$ $\exists\ \psi$. ψ可以给所有资产定价. $P=\sum_s \psi_s x_s$. $e^{-r}=\sum_s \psi_s$.

定义 $q_s \triangleq \psi_s / \sum_{s=1}^{S} \psi_s$. (风险中性世界概率).

$\Rightarrow P = e^{-r}\sum_s e^{-r}\psi_s x_s = e^{-r}\sum q_s x_s$. $(\sum_s q_s = 1)$ q_s是概率.

$\Rightarrow P = E^Q[\tilde{x}]$. (无套利定价理论基础).

Dynamic: $E_t[\tilde{x}] = E_t[E_{t+1}[\tilde{x}]]$. Backward Induction. 逆推

连续: $\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = \mu dt + dz_t \\ \dfrac{dB_t}{B_t} = r dt \end{cases} \Rightarrow C_0 = \tilde{E}[\max\{S_T - K, 0\}]$

$=$ B-S Formula.

$E_t[e^{-r(T-t)}S_T] = S_t$ Martingale.

Replication: 复制的概念.

Hedge: 对冲.

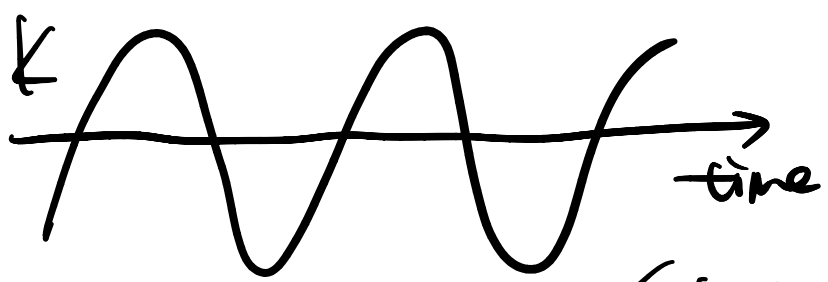
多头、空头 $\Rightarrow$ 都会有暴露 $\Rightarrow$ 多空就可以 Hedge.

不成功 Hedge: Naked Position:

Covered Position: 低补头寸.

有option和股票.

股价涨: 空方损失↑. 但股票价格也↑.



但股票价格↑时: 被暴露了很多风险.

Stop-loss-Strategy:

股票价格高于K时买入低于K就卖出.

但Stop Loss Strategy 的存：

① transaction cost (买入卖出价格不一样完全相等).

② 买卖的资金有时间价值

③ 手续费

Delta Hedge

Stock, r_f

Δ B

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta u S_0 + e^r B &= C_u \\ \Delta d S_0 + e^r B &= C_d \end{aligned}\right\} \text{复制衍生品}$$

S_0 → uS_0, C_u

S_0 → dS_0, C_d

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{u-d} \Big/ S_0$$

Δ：偏导数，表示标的资产的数量.

组合：买入期权空头 + 买入期权多头

动态对冲：Dynamic Hedge.

$e^r = 1.25$

$q = 0.5$

$S_0 = 100$, $C_0 = 48$ → $S_u = 200$, $C_u = 120$. → $S_{uu} = 400$ $C_{uu} = \max\{S_t - C, 0\} = 300$

$S_u = 200$ → $S_{ud} = 100$ $C_{ud} = \max\{0, 0\} = 0$

$S_0 = 100$ → $S_d = 50$, $C_d = 0$ → $S_{ud} = 100$

$S_d = 50$ → $S_{dd} = 25$. $C_{dd} = 0$.

构造组合，复制期权，还要求在0,1,2三个时间点现金流一样.

$$\Delta_u = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = \frac{300 - 0}{400 - 100} = 1$$

$$\Delta_d = \frac{C_{ud} - C_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = 0.$$

解B：

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{e^r(u-d)} \Rightarrow B_u = -80 \quad B_d = 0$$

$$\Delta_0 = \frac{120-0}{200-50} = 0.8$$

$$B_0 = -32$$

一единица: 0.8 stock + (−32) r_f

四 确是否能完美复制:

Period: 1:

① 买入 stock: $100 \times 0.8 = 80$ ＞ $80-32=48$(元)
借入: $r_f = 32$ ＞ 等于卖出48元期权

② 看u: 多买入0.2 stock: $200 \times 0.2 = 40$(元) ＞ 总共消耗80元
借入32元 ⇒ 还32元: $32 \times 1.25 = 40$(元)
$B_u = -80$: 借入80. 所以总共是0(元)

③ 看d: 卖出0.8 stock: $0.8 \times 50 = 40$(元) ＞ $40-40=0$(元)
$B_d = 0$ 还 $B_0 = 32$ ⇒ $32 \times 1.25 = 40$(元)

④ 看uu: 期权到期
$B_d = 80$ ⇒ $80 \times 1.25 = 100$(元)
卖股票: $400 \times 1 = 400$ ⇒ $400 - 100 = 300$. 与 C_{uu} 相等

⑤ 看ud: $1 \times 100 = 100$(元)、$100 - 100 = 0$(元)

⑥ 看dd: 没有、都是0

⇒ 这样总体就对冲了风险

故：如果在 $C_0=48$ 时，选卖 $C_0=60$，则稳定赚钱

（低风险的赚钱）凯利公式 低赔+高胜 ⇒ 多投入

Dynamic Hedge. Dynamic Arbitage 期权对冲

如果对组合衍生品 Hedge：

$\Delta_\pi = \sum_{i=1}^{N} w_i \Delta_i$ （w_i 是计价数量）Δ_i 是每个资产的 Δ

对冲：股指期货对冲，组合：要尽量和大盘相像

对个组合 β 越大，则需要的股指期货就多，反之则少

Delta Hedge 特性：追涨杀跌

$$\Pi = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stock}}}{\Delta S} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Option}}}{c} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bond}}}{B_t} \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial S} = \Delta - \frac{\partial c}{\partial S} = 0$$

$\Delta = 0$：组合的资产变化不随标的资产变化而变化

Delta Neutral：

$\frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$，二阶导数：Gamma：$\Gamma$

组合 Δ 对标的资产价格变化敏感性

在现实世界中，调整组合速率有上限的：对投资者能力有要求

对冲误差

$\Delta\uparrow$ 对冲误差 $\uparrow$

∴ Δ 尽可能小，Γ 也尽可能小

这样是最合适的

股票的 Gamma = 0

Option Gamma ≠ 0.

某组合它的 Gamma 是 Γ, w 个 option Γ_A: $\Gamma + w_A\Gamma_A$.

$$\Rightarrow \Gamma_A = -\frac{1}{w_A}\Gamma \Rightarrow w_A = -\frac{\Gamma}{\Gamma_A}.$$

Gamma Neutral.

Greek letters: 组合对各种参数的导数.

Vega:

$$\nu = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}.$$ σ: 资产波动率.

$$\nu = S_0\sqrt{T}\cdot N'(d_1).$$

Vega ↑ 对组合对标的资产的波动率变化敏感.

Vega Neutral.

其他希腊字母:

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$ 对时间

$$\rho = \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$ 对无风险利率

$$\left.\begin{aligned}
\text{Speed} &= \frac{\partial^3 \Pi}{\partial S^3} = \frac{\partial \Gamma}{\partial S}.\\
\text{Charm} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S \partial t} = \frac{\partial \Delta}{\partial t}\\
\text{Colour} &= \frac{\partial^3 \Pi}{\partial S^2 \partial t} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}\\
\text{Vanna} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S \partial \sigma} = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}\\
\text{Volga} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \nu}{\partial \sigma}.
\end{aligned}\right\}$$

监控一些希腊字母的上限来保证组合风险可控.

组合保险．Portfolio Insurance

股票账户：想对冲股票下跌的风险，买期权保护？

⇒ 某种操作来复制期权．

⇒ 变成了策略．来保护．

例子：　① 不希望股票跌到80以下

$e^{rt}=1.25$
$q=0.5$

$$100 \begin{cases} 200 & P_u=0 \\ 50 & P_d=30 \end{cases}$$

$P_0=12$

② 买入一个Put．80的Put．

$\max\{K-S_T,0\} = 0, 30$

把总财富保护的以上．

Delta Hedge：

$\Delta_0 = \frac{0-30}{200-50} = -0.2$　　$100\times0.2=20$元．

⇒① 如果u：stock：$0.8\times200+20\times1.25=185$．

② 如果d：$0.8\times50+20\times1.25=65$．

下跌的最低的钱就被保护了．

但Delta-Hedge的问题在于：追涨杀跌　S↓ Δ↓．越卖越多．

1987年10月19日．黑色星期一：D-Jones 跌 20%．

Trump：如果哪一天，标普500应该被绑在火箭上发射．

事后分析：黑色星期一前，上个星期S跌了很多．120亿美元应该被卖掉．只有40亿美元股指期货没有被卖 ⇒ 卖了之后大家都卖 ⇒ 所以一起杀跌 ⇒ 都追涨杀跌

A股：融资（证券公司借钱炒股）．

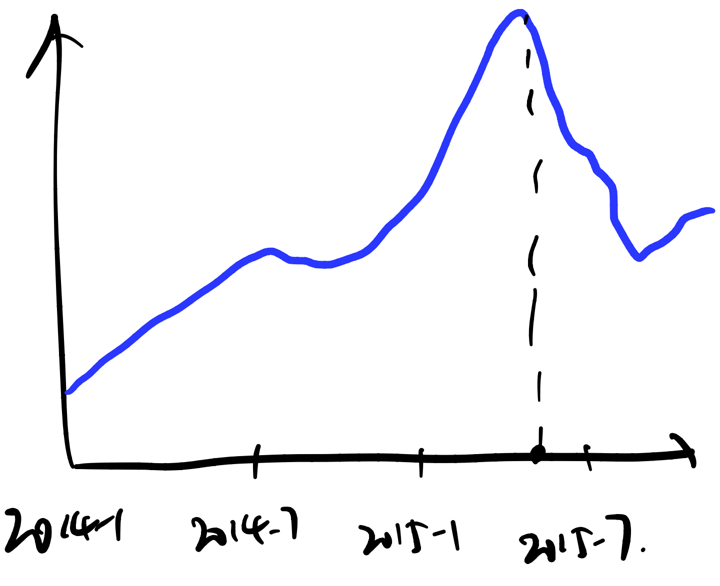
⇒ 强制平仓．

有组合保险的影子．

15年6月．

跌的很惨．

15.10.07.01 四次熔断．



市场：无流动性下跌：

1000多股票停牌 ⇒ 卖不掉股票 ⇒ 无法强制平仓.

⇒ 证券公司亏3000亿左右.

⇒ 公募基金 ⇒ 压力大 ⇒ 无法应付赎回

⇒ 卖债券 ⇒ 债券流动性枯竭.

⇒ 证券公司公募破产

⇒ 大领导在股灾之后, 17年强监管, 科创板
地位都提高.

07年没出事, 11年也没有 ⇒ 15年就因为有交易策略.
有两融 ⇒ 股指下跌很快

⇒ 股票质押 ⇒ 股东抵押股票来贷款

Home Work 19:

19.1)

a). $$\text{Delta} = -1000\times 0.5 + (-500)\times 0.8 + (-2000)\times(-0.4) + (-500)\times 0.7$$

$$= -450.$$

$$\text{Gamma} = -1000\times 2.2 - 500\times 0.6 + -2000\times 1.3 - 500\times 1.8 = -6000$$

$$\text{Vega} = -1000\times 1.8 - 500\times 0.2 - 2000\times 0.7 - 500\times 1.4 = -4000$$

b). 设：x：

Gamma 中性：

$x \times 1.5 + -6000 = 0$

$x = 4000$.

Delta: $4000 \times 0.6 + -450 = 1950$.

英镑空头：1950. (因为 $\frac{\partial C}{\partial C} = 1$. 所以 1950 的英镑空头).

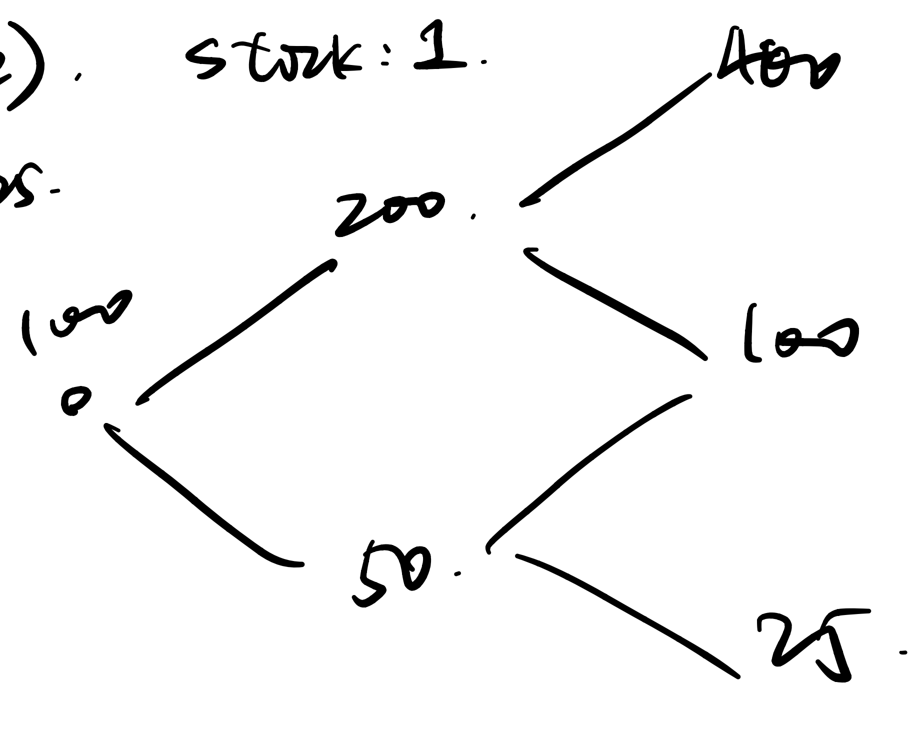
(c). 先 Vega 中性：

$-4000 + 0.6x = 0 \Rightarrow x = 6667$. $\Delta_\pi + -6667 \times 0.6 = -3550$

∴ 英镑空头：3550 的

(9.2). stock: 1.

$e^r = 1.25$.



$P = \max\{K - S_T, 0\}$.

$q = \frac{e^r - d}{u - d} = \frac{1}{2}$.

If $K \in (100, 400)$.

∴ $P_{uu} = 0$

$P_{ud} = K - 100$

$P_{dd} = K - 25$.

∴ $P_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times (0.25 \times (K-25) + 0.5 \times (K-100))$.

行权价: $K = 150 + P \times 1.25^2$.

∴ $K - P \times 1.25^2 = 150$

$\Rightarrow K - \frac{16}{25} \times \left(\frac{3}{4}K - 56.25\right) = 150$

$\Rightarrow K = 375.$

If $K \geq 400$:

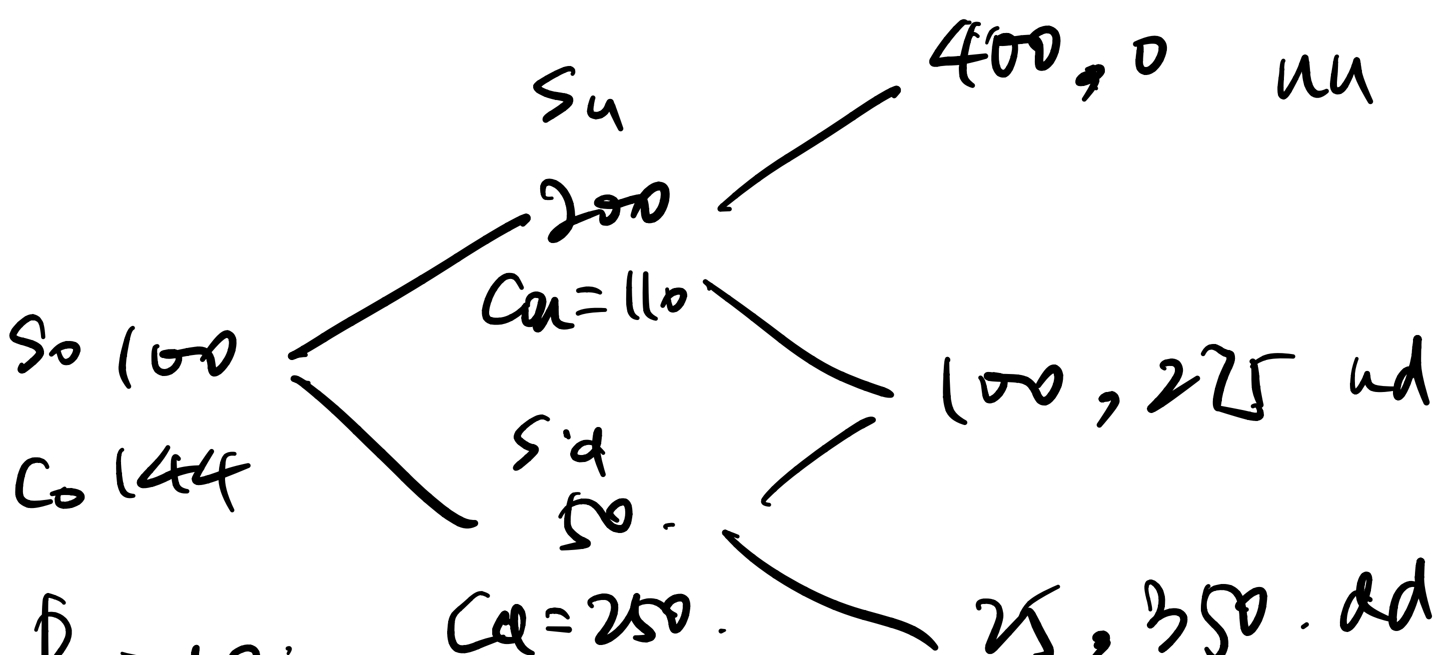
$$P = \frac{1}{1.25^2} \cdot \left[\frac{1}{4}(K-400) + \frac{1}{2}(K-100) + \frac{1}{4}(K-25)\right].$$

$\Rightarrow K - P \times 1.25^2 = 156.25 > 150$ 恒成立.

$\therefore$ 选 $K=375$. 购买一个.

价格为: $144. = P_0$

b). Delta$=0.6$. Gamma$=1.5$ Vega$=0.6$.



Period 0:

$$\Delta_0 = \frac{P_u - P_d}{S(u-d)} = \frac{110-250}{200-50} = -0.93.$$ 持有-0.93股票空头.

$$B_0 = \frac{uP_d - dP_u}{e^r(u-d)} = \frac{4}{5} \times \frac{500-55}{1.5} = \frac{712}{3}.$$ 买入$\frac{712}{3}$债券. ≈ 237.3

Period 1:

$$\Delta_u = \frac{P_{uu} - P_{ud}}{S(u^2 - ud)} = \frac{0-275}{100(4-1)} = -\frac{11}{12} \approx -0.916$$

$$B_u = \frac{uP_{ud} - dP_{uu}}{e^r(u-d)} = \frac{2\times 275 - 0}{1.25 \times (1.5)} = \frac{880}{3} \approx 293.3.$$

$\Rightarrow$ 持有 $-\frac{11}{12}$ stock（买入 0.017 stock）.

持有：注意连续复利：$\left(\frac{880}{3}-\frac{712}{3}\right)\times 1.25 = 3.33$ 债券.

$$\Delta_d = \frac{P_{ud}-P_{dd}}{S(ud-d^2)} = \frac{275-350}{100(1-0.25)} = -1.$$

$$B_d = \frac{uP_{dd}-dP_{ud}}{e^r(u-d)} = \frac{2\times 350-\frac{1}{2}\times 275}{1.25\times 1.5} = 300.$$

$\Rightarrow$ 持有 -1 stock (short 1/15 stock)

持有 300 bonds (long 63.3 bonds).

Period 2:

uu: $-\frac{11}{12}\times 400+\frac{880}{3}\times 1.25 = 0.$

ud: $-\frac{11}{12}\times 100+\frac{880}{3}\times 1.25 = 275$（元）. 就是期权价格.

dd: $-1\times 25+300\times 1.25 = 350$（元）

$\Rightarrow$ 不能买期权 但已经复制了期权.

$\Rightarrow$ 组合保险 来复制.

$\Rightarrow$ 注意债券的量.

Period 3:

$\Delta_0 = \frac{1}{15}$

$B_0 = \frac{280}{3}$

$\Delta_u = \frac{1}{12}$

$B_u = \frac{340}{3}$.

$\Delta_d = 0$

$B_d = 120$.

$400\times\frac{1}{12}+\frac{340}{3}\times 1.25 = 175$

$100\times\frac{1}{12}+\frac{340}{3}\times 1.25 = 150$

$0\times 25+120\times 1.25 = 150$.

Δ_0: short $4/15$ stocks.

手里有多少钱就买多少债券:

$100 \times \frac{4}{15} = \frac{280}{3}$ (比 $\frac{712}{3}$ 的 bonds 少了很多).

刚好少了 $\frac{712}{3} - \frac{280}{3} = 144 = P_0$.

Δ_u: long $\frac{1}{60}$ stocks.

最后达成目的,可以做到最后手上

持有现金均大于 150.