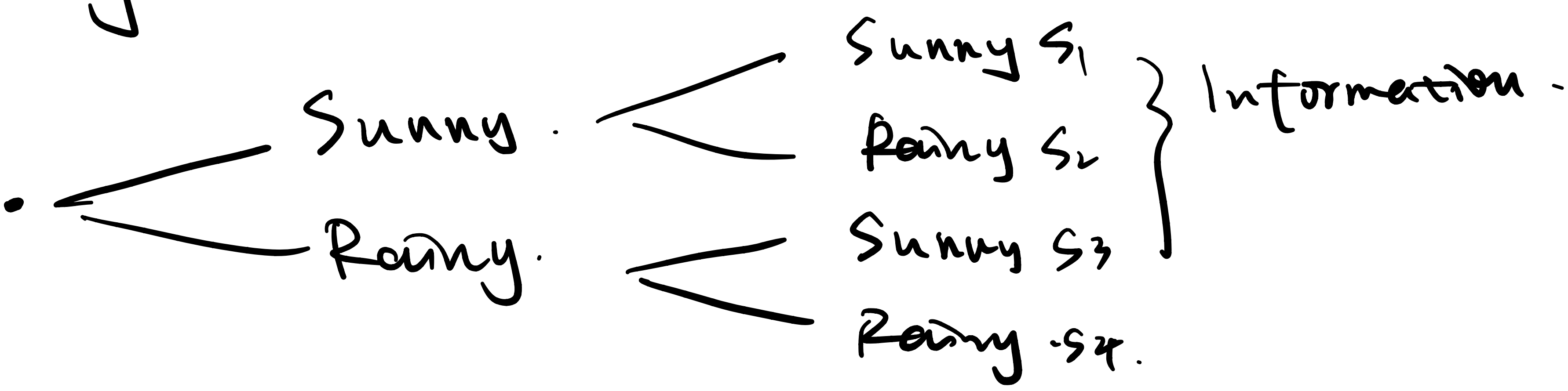
Chapter 16.

$$p=\sum_{s=1}^{S}\psi_s x_s = e^{-r}\sum_{s=1}^{S} e^{r}\psi_s x_s = e^{-r}\sum_{s=1}^{S} \xi_s x_s = e^{-r}E^{Q}[\tilde{x}].$$

风险中性.市场定价：找出风险中性概率 Q.

单期 ⇒ 拓展到多期.

Today　　Tommorrow　　Today after_tommorrow.



event: $e_1=\{s_1, s_2\}$.　$e_2=\{s_3, s_4\}$.

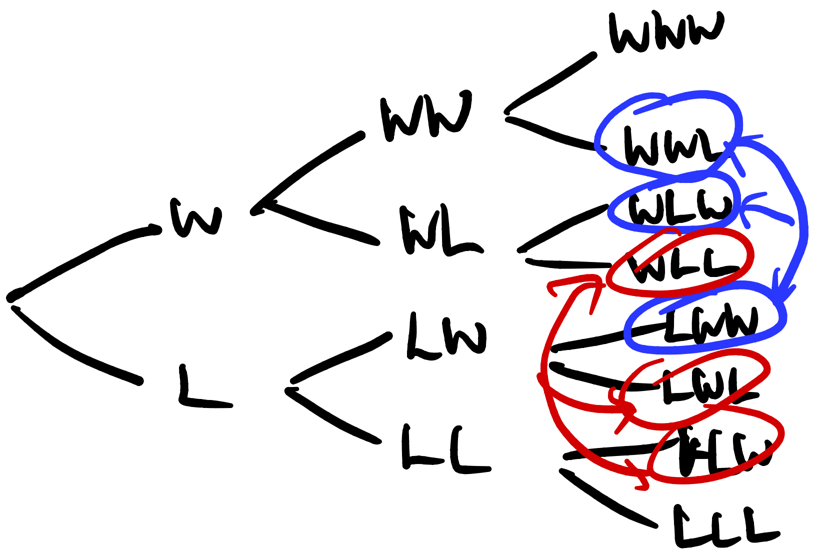
$e_1\cap e_2=\phi$.　$e_1\cup e_2=S$.

Dynamic Complete

长存资产: long live asset.

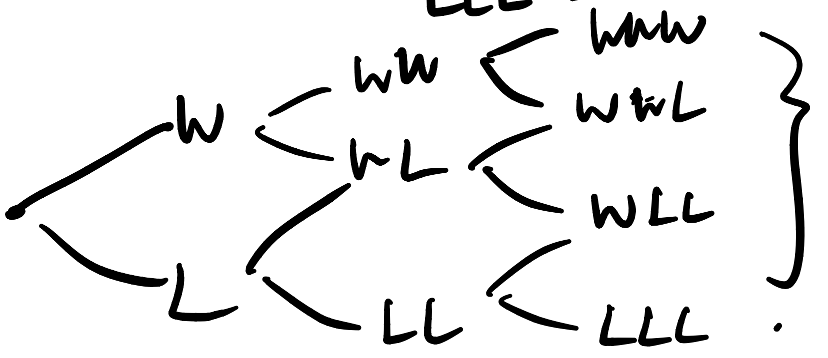
长存资产 ≥ 分叉树的最大分叉. 则市场是完备的.

比如二叉树. 则需要2个长存资产即可.



... 对于打完了3场比赛 有 2^3 种可能.

⇒



Combined binary tree.
合并叉树.

已知赌局 win的 win的 return. 每个 w, L 的概率. 求期望.

重期望定理

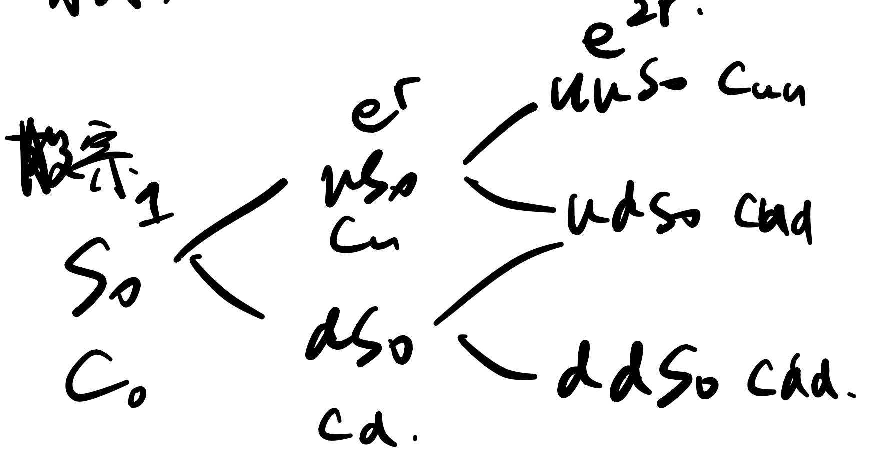
与期望时信息集需要更新: $E_t[\tilde{x}] = E[\tilde{x} | F_t]$.

$E_t[\tilde{x}] = E_t[E_{t+1}[\tilde{x}]]$.

0.648 = 说白了就是逆向倒推.

就是二项式展开... 没啥特殊的.

e^r: 无风险资产.



u: 涨. d: 跌.

衍生品: 只取决于当前股票价格.

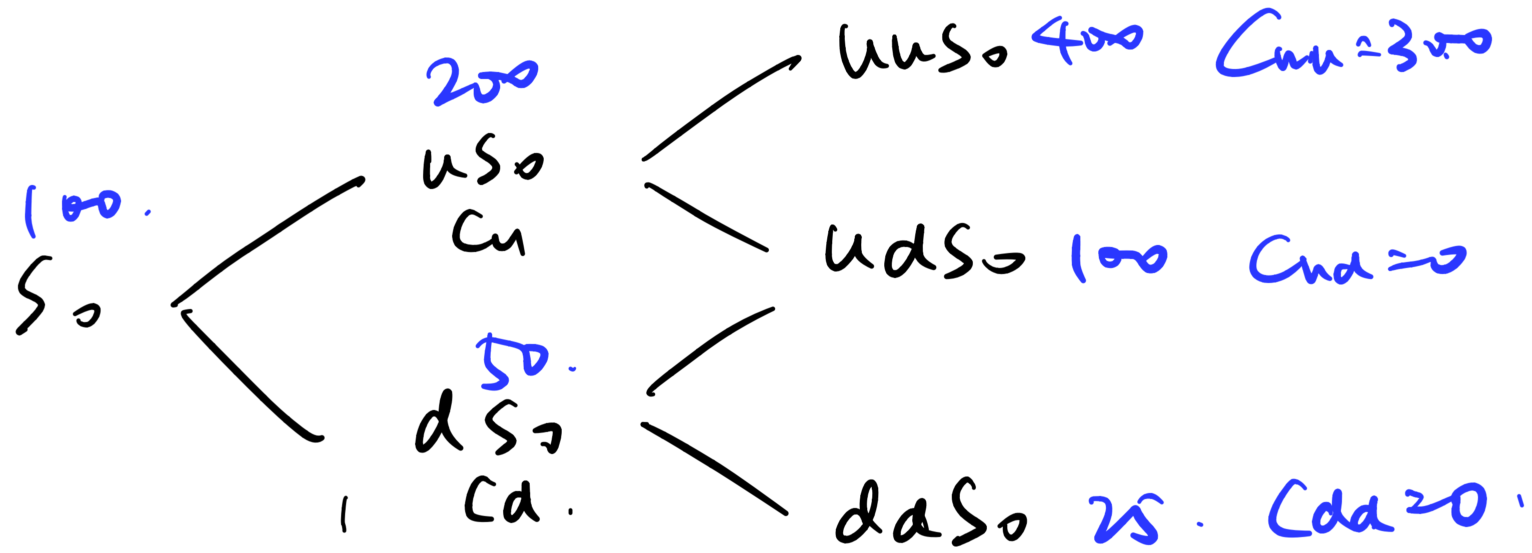
(欧. 美) ⇒ 可以.

但回望期权是路径依赖的. 不能用合并二叉树.

$u=2$. $d=0.5$. Call: 欧式买入. $K=100$. $e^r=1.25$.

$S_0=100$.

$\max(S-K, 0)$



$100 = \frac{1}{1.25}[q \cdot 200 + (1-q) \cdot 50]$. (q为风险中性概率).

$125 = 150q + 50$. $q = 0.5$.

算期望: $C_u = \frac{1}{1.25}[300 \times 0.5 + 0 \times 0.5] = 120$.

$C_d = 0$.

$\therefore C_0 = \frac{1}{1.25}[0.5\times C_u + 0.5\times C_d] = 48$.

48是期权的零时刻价格. (Two period).

One Period: $C_0' = \frac{1}{1.25}\cdot[100\times0.5 + 0\times0.5] = 40$.

到期时间晚. 时间越长是越贵. 因为相当于是保险.

Deflated Asset Price. 贴现资产价格.

$\hat{S}_t = e^{-rt} S_t$. 为t时刻的股价.

$E_u[\hat{S}_2] = q\hat{S}_{uu} + (1-q)\hat{S}_{ud}$.

$= q e^{-2r} uuS_0 + (1-q) e^{-2r} udS_0$

$= e^{-r}\cdot e^{-r}[q uuS_0 + (1-q) udS_0]$.

$= e^{-r}\cdot uS_0$. 风险中性.

$E_1[\hat{S}_2] = \hat{S}_1 \Longrightarrow$ Martingale 鞅.

$E_0[\hat{S}_1] = \hat{S}_0$. 对未来的随机过程取期望则是现在的state.

Risk Neutral Prob. Equivalent Martingale Measure. EMM.

Martingale Approach

二叉树的现实运用. 股指期货. 上证50ETF.

行权价2.8的买入期权:

7天回购利率. 246日交易日滚动平均

二叉树现实运用：

$q=\frac{e^{r}-d}{u-d}$. r 可以被观测. u和d确定：

模型股价波动率和真实世界相等.

找个和所选时间长度无关的波动率定义.

假选一个时长 Δt.

$\sigma = \frac{std\,dev}{\sqrt{\Delta t}}$　　$d=\frac{1}{u}=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 用这俩公式来标定.

$e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 是 black schole 公式得到的.

计算：

$\sigma=0.4$ (算出来)

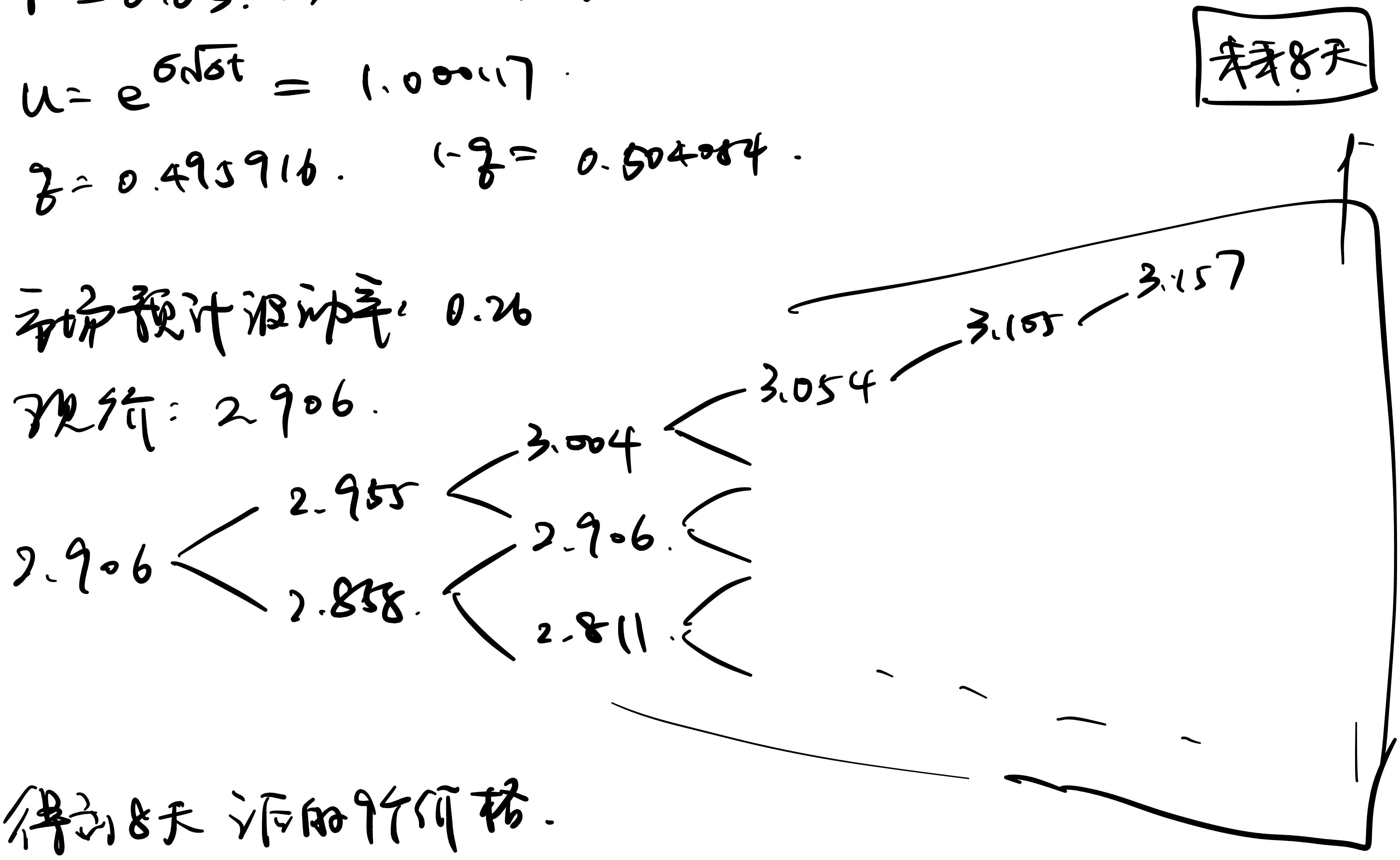
$r=0.03.$ ⇒ 1天: $r\Delta t=0.00012$.

$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=1.00117$.

$q=0.495916$.　$1-q=0.504084$.

市场预计波动率: 0.26

现价: 2.906.



得到8天后的9个价格.

然后进行倒推

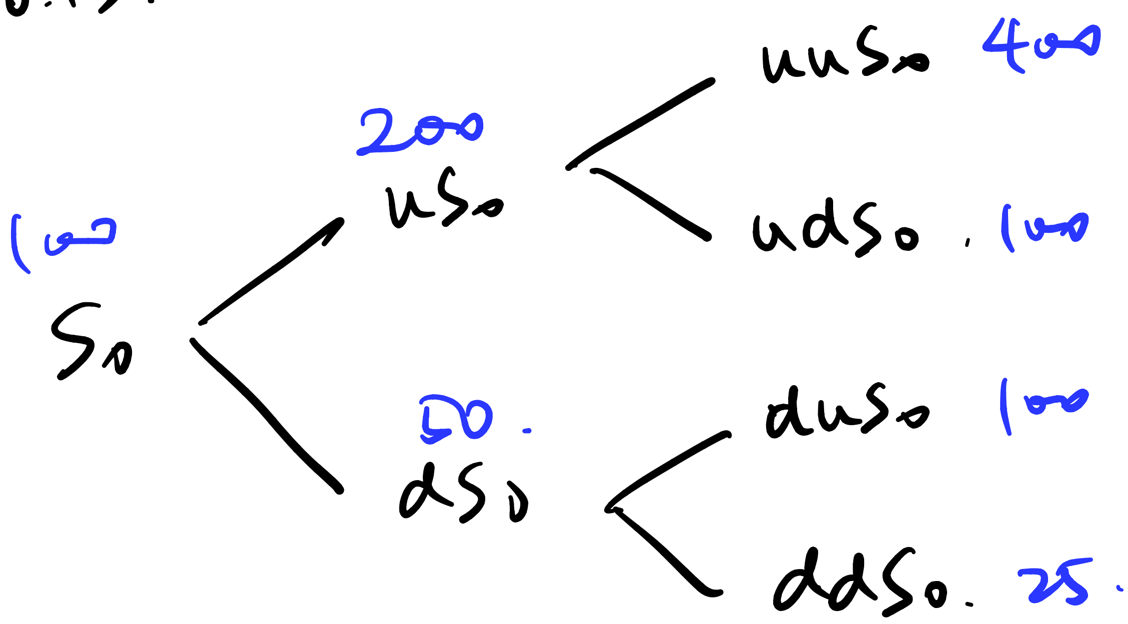
得到价格.

所以隐含波动率非常重要.

Homework 16.

$\max\{S_2 - \min\{S_0, S_1, S_2\}, 0\}$.

16.1).



uuS_0: $\max\{400 - \min\{100, 200, 400\}, 0\} = 300$.

udS_0: $\max\{100 - \min\{100, 200, 100\}, 0\} = 0$.

duS_0: $\max\{100 - \min\{100, 50, 100\}, 0\} = 50$.

ddS_0: $\max\{25 - \min\{100, 50, 25\}, 0\} = 0$.

$\because e^r = 1.25$. 解q:

$$100 = \frac{1}{1.25} \cdot [200 \times q + (1-q) \times 50]. \Rightarrow 125 = 50 + 150q.$$

$$q = 75/150 = 0.5.$$

$\therefore$ 有: $\frac{1}{1.25} \times (0.5 \times 300 + 0) = \frac{4}{5} \times 150 = 120$.

$$\frac{1}{1.25} \times (50 \times 0.5 + 0) = \frac{4}{5} \times 25 = 20.$$

最后 $= \frac{1}{1.25} \times (0.5 \times 120 + 0.5 \times 20) = 48$.

16.2). Python 代码: