Chapter 15. 无套利理论基础.

本质上就是解释

描述资产：
$$
\begin{array}{c}
\text{资产J} \\
X = \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^J \\ \vdots & & \vdots \\ x_S^1 & & x_S^J \end{bmatrix}
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}}\right\} \text{状态S}.
$$

$\mathbb{P} = [p_1, \cdots, p_J]$. 这是价格. 对每个状态的支付.

$\theta = [\theta_1, \cdots, \theta_J]^T$ θ_i 真实是数量. 表示资产 i 的持有数.

$$
X\theta = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{J} x_1^j \theta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{J} x_S^j \theta_j \end{bmatrix}
\qquad
p\theta = \sum_{j=1}^{J} p_j \theta_j \text{ 组合在0时刻价格.}
$$

用无套利思想来给出资产价格.

Def 15.1 套利：同时满足下列三个条件的 θ 叫作套利：

(i) $p\theta \leq 0$ (ii) $X\theta \geq 0$ (iii) 前两个不等式至少有一个是严格不等号.

Type1: $p\theta < 0$. $X\theta = 0$.

消费者在第0期构造组合时成本为负. 但在未来没有任何责任.

Type2: $p\theta = 0$ $X\theta > 0$.

消费者在第0期构造组合时成本为0. 但在未来获得一定为正的回报

Type3: $p\theta < 0$. $X\theta > 0$.

消费者在第0期构造组合时成本为负. 且在未来获得一定为正的回报.

如果 type1-3. 都不满足, 没有套利机会. 那么就是满足吴引的规律.

缺少了各个状态在真实世界发生的概率 $\Rightarrow$ 弱化随便假设.

type1-3 已经穷尽各种套利.

市场均衡 $\Rightarrow$ 没有套利. 无套利 $\overset{\text{不一定}}{\not\Rightarrow}$ 市场均衡

Def 15.2 状态价格向量

$\psi=(\psi_1,\dots,\psi_S)^T$. $\psi_s>0$, $\forall s$.

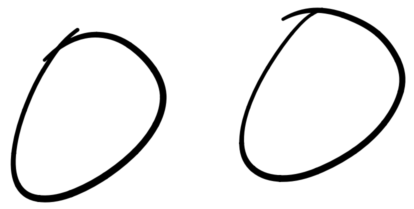
对于任意资产j, 都有 $p_j=\sum_{s=1}^{S}\psi_s x_s^j$ 成立.

Fundamental Theorem of Asset pricing:

如果没有套利机会 (No Arbitrage), 当且仅当:

$\exists\psi$. 给所有资产定价.

HyperSpace Separation Theorem 超平面分离定理.



凸集. 任意两个不相交凸集, 则一定可以用超平面来分离.

$\forall$ Convex set A, B. $A\cap B=\varphi$. $\exists$ linear function $F(\cdot)$.
$F(a)<F(b)$ $\forall a\in A$ $b\in B$.

线性函数 $F(\mu x)=\mu F(x)$. $\forall\mu\in\mathbb{R}$

资产定价基本定理的证明思路:

$\Rightarrow$. $A\triangleq\left\{\left(-\sum_{j=1}^{J}p_j\theta_j, -\sum_{j=1}^{J}x_1^j\theta_j, \dots, \sum_{j=1}^{J}x_S^j\theta_j\right): \theta_j \text{为实数}, j=1,\dots,J\right\}$.

A是一个S+1维向量. x是支付矩阵. p是价格向量.

A_0是在0时刻价格的负数

$A_1\sim A_S$是未来的在状态s的payoff.

A的自由度是 $\theta_1,\dots,\theta_J$. 所以其实A的自由度是J.

A是S+1维空间的子空间.

$B\triangleq\{(b_0,\dots,b_s): b_i\geq 0.\ \forall i=0,1,\dots,S\}$ B是一个锥

也是S+1维.

A是凸集 B也是凸集.

A与B的交集. 交在 $(0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^{S+1}$ 上: 如果无套利.

如果交在非原点: 则意味着: 又在A又在B中.

A中所有元素 $A_0\le 0 \Leftrightarrow p\theta\le 0$. $X\theta\ge 0$. 且有至少一个不等号成立 严格.

所以必须只能在无套利情况下交于原点.

存在超平面: $F(\cdot)$ s.t. $\forall a\in A$. $\forall b\in B-0$

s.t. $F(a)<F(b)$.

$\exists F(x)=\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\dots+\alpha_Sx_S$ s.t. $F(a)<F(b)$. $\forall a\in A$. $b\in B-\{c\}$.

$a\in A$. $\mu a\in A$. $\mu\in\mathbb{R}$.

Claim: $a\in A$. $F(a)=0$.

如果 $a_0\in A$. s.t. $F(a_0)>0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\mu\to+\infty}F(\mu a_0)=\lim\limits_{\mu\to\infty}\mu F(a_0)=+\infty$ 不存在. $F(b)$ 有界.

$\forall b\in\{B\}-0$. $F(b)-F(a)=0$.

$F(a)=0\Rightarrow -\alpha_0\sum_j p_j\theta_j+\alpha_1\sum_j x_1^j\theta_j+\dots+\alpha_S\sum_j x_S^j\theta_j=0$.

$\Rightarrow$ 可以任选一个 Portfolio.

$\Rightarrow p_j=\sum\limits_{s=1}^{S}\frac{\alpha_s}{\alpha_0}x_s^j$. p_j存在. 得证. p_j即为ψ_s. ψ_s存在.

资产定价第二定理: $q_s=\dfrac{\psi_s}{\sum_s\psi_s}=e^r\psi_s$ $\sum q_s=1$.

无风险资产: payoff $=1$.

$\sum\limits_{s=1}^{S}\psi_s\cdot 1$ $p=\sum\limits_{s=1}^{S}\psi_sx_s=e^{-r}\sum\limits_{s=1}^{S}e^r\psi_sx_s=e^{-r}\sum\limits_{s=1}^{S}q_sx_s$ → 期望.

支付矩阵和价格矩阵一样. $=e^{-r}E^Q[\tilde{x}]$.

但各个事件发生概率与真实世界不一样.

$$P = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \delta \frac{u'(c_{1,s})}{u'(c_0)} x_s. \qquad \xi_s = \frac{\pi_s u'(c_{1,s})}{\sum_s \pi_s u'(c_{1,s})}. \quad \text{(C-CAPM)}.$$

⇒ 概率会被扭曲：小的被平滑增加，大的被平滑减少。

$$P = E[\tilde{m}\tilde{x}] = \sum_{s=1}^{S} \pi_s m_s x_s = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s = e^{-r}\sum_{s=1}^{S} \xi_s x_s = e^{-r}\hat{E}(\tilde{x}).$$

$\tilde{m}$ ($m_s = \frac{\varphi_s}{\pi_s}$)：SDF 随机折现因子. state-price density.

状态价格密度 ← state price kernel.

pricing kernel.

φ_s: state price (price of arrow security).

风险中性定价 ⇒ 相对定价并不是绝对定价，所以可以这么干。

Homework:

1.)

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \Big\} S \end{array}$$

无套利：$\exists \varphi$ s.t. $\forall$ 资产 P_j 均有 $P_j = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^j$.

$\therefore P_{A0} = 1. \qquad P_{B0} = b.$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \qquad \begin{matrix} 2\varphi_1 + \varphi_2 = 1 \\ \varphi_1 + 2\varphi_2 = b. \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \frac{2-b}{3} \\ \varphi_2 = \frac{2b-1}{3}. \end{cases}$$

$\varphi_1 > 0, \ \varphi_2 > 0 \Rightarrow b \in (\frac{1}{2}, 2).$

2). $b = \frac{3}{2}\log$:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 2/3 \\ \varphi_2 = 1/6 . \end{cases}$$

$$e^{-r} = \varphi_1 + \varphi_2 = 5/6 .$$

$$\Rightarrow q = e^{r} \varphi = 6/5 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \frac{\varphi_1}{\pi_1} = \frac{1}{2}$$

$$M_2 = \frac{\varphi_2}{\pi_2} = 2/3 \times \frac{2}{3} = 1$$