THEORETICAL COMPUTER SCIENCE
Jagiellonian University

Zestaw 2

Zadania niezrobione z zestawu 1: 4, 6, 7

Zadanie 1. Omów techniczną realizację heurezy zwanej *Fast Savings Method*, w szczególności przedstaw zastosowane struktury danych oraz omów uzyskaną złożoność algorytmu.

Zadanie 2. Dany jest nieskierowany graf $G = (V, E)$ z krawędziami o kosztach nieujemnych oraz dwa podzbiory rozłączne V: S i R. Elementy S nazywamy *nadawcami*, a elementy R *odbiorcami*. Celem jest znalezienie najtańszego podgrafu grafu G, w którym każdy z odbiorców jest połączony ścieżką z pewnym nadawcą (dowolnym).

a Niech $S \cup R = V$. Wykaż, że wówczas istnieje wielomianowy algorytm rozwiązujący postawiony problem.
b Niech $S \cup R \neq V$. Wykaż, że wówczas problem jest NP-trudny oraz wskaż dla niego algorytm 2-aproksymacyjny.

Zadanie 3. Rozważamy problem minimalnego pokrycia cyklowego: Dany jest ważony graf $G = (V, E)$. Wyznacz zbiór cykli rozłącznych wierzchołkowo pokrywających wszystkie wierzchołki o minimalnej sumie wag krawędzi. Uzasadnij, że problem ten w grafie skierowanym można rozwiązać w czasie wielomianowym.

Podpowiedź: Wykorzystaj fakt, że najtańsze ważone skojarzenie doskonałe w grafach dwudzielnych można znaleźć w czasie wielomianowym.

Zadanie 4. Dany jest ważony nieskierowany graf $G = (V, E)$ niespełniający własności trójkąta. Pokaż, w jaki sposób w czasie wielomianowym przekształcić graf G w graf G', spełniający nierówność trójkąta taki, że zbiór optymalnych tras dla problemu komiwojażera w grafie G jest równy zbiorowi optymalnych tras dla problemu komiwojażera w grafie G'.
Wyjaśnij dlaczego takie wielomianowe przekształcenie nie przeczy twierdzeniu mówiącemu, że nie istnieje wielomianowy algorytm α-aproksymacyjny (dla wielomianowo obliczalnej funkcji α) dla ogólnego problemu komiwojażera.

Zadanie 5. Rozważmy następujący algorytm dla problemu komiwojażera, zwany *Cycle merging heuristic*. Niech $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Początkowo definiujemy n cykli o długości 1: $C_i = \{v_i\}$. Dopóki istnieje więcej niż jeden cykl:

* Wybierz dwa cykle, takie, że ich odległość od siebie jest minimalna (przez odległość między dwoma cyklami A, B rozumiemy $\min \{w(v, w) : v \in A, w \in B\}$.
* Połącz wybrane cykle w jeden cykl (tak aby waga nowego cyklu była jak najmniejsza).

Uzasadnij, że powyższy algorytm ma stałą aproksymacji równą co najwyżej 2.

Zadanie 6. Definiujemy *ograniczony problem TSP* w następujący sposób: Dany jest pełny graf nieskierowany G, w którym wszystkie krawędzie mają koszt 1 lub 2. Celem jest znalezienie cyklu Hamiltona o najmniejszej wadze. Wskaż algorytm $\frac{4}{3}$-aproksymacyjny dla ograniczonego TSP.
Odpowiednikiem *ograniczonego problem TSP* dla grafów skierowanych jest *ograniczony problem ATSP*. Wskaż dla niego algorytm $\frac{3}{2}$-aproksymacyjny.

Zadanie 7. Rozważamy problem ścieżek krawędziowo rozłącznych: Dany jest graf G, liczba k oraz zbiór par wierzchołków grafu $T = \{(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)\}$. Pytamy czy istnieje k par ze zbioru T, dla których istnieje k krawędziowo rozłącznych ścieżek, łączących ich końce. Udowodnij, że jest to problemem NP-zupełnym.
Podpowiedź: Wykorzystaj 3-SAT.

Zadanie 8. Dany jest nieskierowany graf $G = (V, E)$ oraz liczba k. Rozważamy 3 problemy:

* *Spójny zbiór dominujący*: Pytamy, czy istnieje zbiór $U \subseteq V$ rozmiaru co najwyżej k taki, że indukowany przez niego graf jest spójny oraz dla każdego $v \in V \setminus U$ istnieje $u \in U$ takie, że $(u, v) \in E$.
* *Drzewo rozpinające o maksymalnej liczbie liści*: Pytamy, czy istnieje drzewo rozpinające grafu G, posiadające co najmniej k liści.
* *Drzewo rozpinające o maksymalnej liczbie liści:* Pytamy, czy istnieje drzewo rozpinające grafu G, posiadające co najwyżej k liści.

Udowodnij, że powyższe problemy są NP-zupełne.