Zestaw 1

Zadanie 1. Triangulacja Delanay'a
Dany jest zbiór punktów płaszczyzny V reprezentujący pełny graf G z wagami wyznaczonymi przez metrykę euklidesową oraz wyznaczona dla niego triangulacja Delanay'a DG. Niech $N_k(a)$ oznacza zbiór k najbliższych punktów dla punktu a. Uzasadnij, że

a. Krawędzie minimalnego drzewa rozpinającego grafu G należą do DG.
b. Aby wyznaczyć $N_k(a)$ wystarczy wykonać algorytm BFS startujący z punktu a i przeglądający graf DG do k poziomu.

Zadanie 2. Ograniczenia dolne
Niech $OPT(G)$ - oznacza długość optymalnej trasy komiwojażera w grafie G, MST - minimalne drzewo rozpinające grafu G, $d(a, b)$ - waga krawędzi (a, b), $d(MST)$ - suma wag krawędzi drzewa MST oraz niech $n_i(v)$ oznacza i-ty najbliższy sąsiad v w grafie G Uzasadnij, że poniższe nierówności są prawdziwe dla każdego grafu G:

a. $d(MST) + max_{v-\text{liść w MST}} d(v, n_2(v)) \leqslant OPT(G)$
b. $\sum_{v \in G} d(v, n_1(v) + \sum_{v \in G} d(v, n_2(v)) \leqslant OPT(G)$

Które z ograniczeń dolnych jest lepsze? Udowodnij zależność albo wskaż przykład grafu, dla którego ograniczenie a jest lepsze od ograniczenia b oraz grafu, dla którego lepsze jest ograniczenie b.

Zadanie 3. Ograniczenie dolne 2 - *Ostatnia krawedź*
Rozważmy następujący algorytm obliczania pewnej wartości L dla nieskierowanego pełnego grafu $G = (V, E)$ z funkcją wagową $w : E- > Z^+$ spełniającą warunek trójkąta:

* Niech $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ będzie ciągiem krawędzi grafu G posortowanym według wag.
* Wykonujemy algorytm Kruskala znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego T.
* Niech krawędź e_i będzie ostatnią krawędzią dodaną do drzewa T zbudowanego przez algorytm Kruskala.
* Zwróć wartość $L = w(T) + w(e_{i+1})$.

Czy wartość L jest ograniczeniem dolnym najkrótszej trasy komiwojażera w grafie G? Jeśli tak, udowodnij tę własność, jeśli nie, wskaż odpowiedni przykład.

Zadanie 4. Nearest neighbor heuristic
Rozważamy następujący zachłanny algorytm dla metrycznego problemu komiwojażera, zwany *Nearest neighbor heuristic*

```
Rozpocznij od dowolnego wierzchołka s i nazwij go v_1
for i=2 to n
   Wybierz nieodwiedzony wierzchołek, najbliższy wierzchołkowi v_{i-1}
   Odwiedź go i nazwij v_i
```

Uzasadnij, że powyższy algorytmy ma współczynnik aproksymacji co najwyżej $O(logn)$.

Zadanie 5. Nearest addition/insertion heuristic
1. Rozważamy następujący algorytm dla metrycznego problemu komiwojażera, zwany *Nearest addition heuristic*

* Definiujemy początkowy cykl C składający się z dowolnie wybranego punktu zadanego grafu.
* W każdym kroku, wybieramy wierzchołek $v \notin C$, taki, że jego odległość od cyklu (tzn. od najbliższego mu wierzchołka cyklu) jest minimalna. Niech $w \in C$ jest wierzchołkiem najbliższym v. Rozszerzamy cykl C przez dodanie do niego v zaraz po w.

2. Rozważamy algorytm dla problemu komiwojażera, zwany *Nearest insertion heuristic*. Różni się on od *Nearest addition heuristic* sposobem dodania v do dotychczasowego cyklu C. Mianowicie, wstawiamy v w takie miejsce cyklu, aby długość cyklu zwiększyła się minimalnie.

Uzasadnij, że powyższe dwa algorytmy mają stałą aproksymacji równą co najwyżej 2.

Zadanie 6. Cheapest insertion heuristic
Rozważamy następujący algorytm dla metrycznego problemu komiwojażera, zwany *Cheapest insertion heuristic*. Uzasadnij, że ma on stałą aproksymacji równą co najwyżej 2.

* Definiujemy początkowy cykl C składający się z dowolnie wybranego punktu zadanego grafu.
* W każdym kroku, wybieramy taki wierzchołek $v \notin C$, że jego dodanie do cyklu minimalnie zwiększy długość cyklu (tzn. długość cyklu po dodaniu v będzie minimalna).
* Wstawiamy v w takie miejsce cyklu, aby długość cyklu zwiększyła się minimalnie.

Zadanie 7. Warianty TSP
Poniżej znajdują się różne warianty problemu TSP:

* TSP-R - Dany jest nieskierowany graf ważony (niekonieczne pełny). Wskaż cykl (niekoniecznie prosty) o minimalnej łącznej wadze przechodzący przez każdy wierzchołek grafu co najmniej raz.
* metric-TSP - Dany jest nieskierowany ważony graf pełny, którego wagi spełniają warunek trójkąta. Wskaż cykl prosty o minimalnej łącznej wadze przechodzącą przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz.
* metric-TSP-R - Dany jest nieskierowany ważony graf pełny, którego wagi spełniają warunek trójkąta. Wskaż cykl (niekoniecznie prosty) o minimalnej łącznej wadze przechodzący przez każdy wierzchołek grafu co najmniej raz

Uzasadnij, że powyższe warianty TSP są tak samo trudne dla aproksymacji. tzn. istnieją między nimi redukcje wielomianowe zachowujące wpółczynnik aproksymacji.

Zadanie 8. Wypukła otoczka
Dany jest zbiór n punktów na płaszczyźnie reprezentujący graf pełny G dla euklidesowego problemu komiwojażera, trasa T będąca optymalną trasą komiwojażera dla tego grafu oraz ciąg $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ będący wypukłą otoczką dla punktów zbioru P.
Udowodnij, że punkty $s_1, \ldots, s_n$ występują w cyklu T w takiej samej kolejności jak w otoczce S.