

Zadania domowe. Zestaw 1.3

Maciej Poleski

18 marca 2013

1

Maksymalne skojarzenie jest nie większe niż pokrycie wierzchołkowe. Każda krawędź skojarzenia ma jakiś koniec należący do pokrycia wierzchołkowego oraz nie istnieje wierzchołek należący do dwóch krawędzi skojarzenia. Można patrzeć na to intuicyjnie jak na przypisanie każdej krawędzi jakiegoś dedykowanego wierzchołka z pokrycia wierzchołkowego, który nie jest przypisany żadnej innej krawędzi (należy do danej krawędzi) (iniekcja). Jest tak z definicji pokrycia wierzchołkowego (mapowanie) oraz skojarzenia (krawędzie parami rozłączne wierzchołkowo). Dlatego jest równe. Zasadniczo dlatego że to wystarcza. Istnieje takie pokrycie wierzchołkowe że dla każdej krawędzi skojarzonej istnieje dokładnie jeden wierzchołek należący do pokrycia wierzchołkowego. Wybieramy z grafu po kolei krawędzie skojarzone. Są trzy możliwości.

1. Ta krawędź nie ma wspólnego wierzchołka z inną krawędzią (oczywiście nieskojarzoną - skojarzone nie mogą być sąsiadami) - wybieramy dowolny.
2. Krawędź ma jeden wierzchołek wspólny z innymi krawędziami (oczywiście nieskojarzonymi) - ten wierzchołek idzie do pokrycia. O tej krawędzi zapominamy (właściwie bardziej poprawnie byłoby: usuwamy ją).
3. Krawędź ma oba wierzchołki wspólne z innymi krawędziami (oczywiście nieskojarzonymi) - taka sytuacja nie ma miejsca. Gdyby miała, to natychmiast mamy ścieżkę powiększającą maksymalne skojarzenie - sprzeczność.

Te trzy możliwości odpowiadają tak naprawdę jednej sytuacji: nie ma ścieżki powiększającej. Gdy tak jest to wszystkie ścieżki naprzemienne mają parzystą długość, a to pozwala nam bez trudu dobrać wierzchołki do pokrycia.

2 C

Duplikujemy wierzchołki grafu tak jak w zadaniu C. Łączymy je tak jak w zadaniu C. Czyli jeżeli w grafie istnieje krawędź (x, y) . To u nas są wierzchołki x, x', y, y' oraz krawędź (x, y') . Robimy skojarzenie. (H-C). Lewa strona to strona wychodząca wierzchołków. Prawa strona to strona wchodząca wierzchołków. W takim razie krawędzie skojarzenia odpowiadają krawędzią grafu. Zmaksymalizowano ilość krawędzi czyli zminimalizowano ilość nie wybranych wierzchołków. Każdy nie wybrany wierzchołek x (z lewej strony) symbolizuje wierzchołek na którym kończy się pewna ścieżka (lub każdy x' (z prawej)

rozpoczyna ścieżkę). Każda ścieżka ma początek (oraz koniec). Odpowiedzią jest ilość wierzchołków nieskojarzonych czyli liczba wierzchołków minus maksymalne skojarzenie.

3