

Programowanie Funkcyjne

lato 2013/2014

Jakub Kozik

Informatyka Analityczna
tcs@jagiellonian

Punkty

- zadania programistyczne submitowane przez Satori (zadania różnie punktowane, w sumie 80 punktów)
- aby uzyskać pozytywną ocenę należy zaliczyć wszystkie zadania oznaczone jako obowiązkowe
- egzamin (20 punktów)
- aby uzyskać pozytywną ocenę należy z egzaminu uzyskać przynajmniej 10 punktów

Ostateczna ocena

0-50	ndst
50-60	dst
60-70	+dst
70-80	db
80-90	+db
90-100	++db

Program Wykładu

Część 1: Lambda rachunek i podstawy SML

- podstawowe konstrukcje SML'a i ich odpowiedniki w lambda rachunku
- strategie ewaluacji termów/programów
- system typów (Hindley-Milner)
- podstawowe techniki programowania funkcyjnego

Część 2: Funkcyjne struktury danych

- ocena wydajności programów funkcyjnych
- amortyzowana analiza persystentnych struktur danych
- eliminacja amortyzacji
- implementacje z uleniwaniem/wymuszaniem obliczeń

Część 3: Haskell

- leniwa ewaluacja
- monady
- ...

Paweł Urzyczyn, Rachunek Lambda, skrypt dostępny na stronie autora

Robert Harper, Programming in Standard ML, Working Draft dostępny na stronie autora

Chris Okasaki, Purely Functional Data Structures, Cambridge University Press 1999 (wczesna wersja książki (rozprawa doktorska) dostępna na stronie autora)

Simon L. Peyton Jones, The Implementation of Functional Programming Languages, Prentice Hall 1987 (książka w wersji elektronicznej jest udostępniana przez autora)

Bryan O'Sullivan, Don Stewart, John Goerzen, Real World Haskell, O'Reilly Media, 2008 (książka w wersji elektronicznej jest udostępniana przez autorów)

Składnia

- zmienne są termami (przeliczalny zbiór zmiennych Var)
- jeśli T jest termem a x jest zmienną to $\lambda x. T$ jest termem (abstrakcja)
- jeśli T oraz S są termami to $(T \cdot S)$ jest termem (aplikacja)

Konwencje

- pomijanie \cdot przy aplikacji $(T \cdot S) \equiv (TS)$
- pomijanie nawiasów – domyślne nawiasowanie do lewej
 $RST \equiv ((RS)T)$
- grupowanie abstrahowanych zmiennych $\lambda xy. T \equiv \lambda x. (\lambda y. T)$

β redukcja

$$(\lambda x. T)S \rightarrow_{\beta} T[x \leftarrow S]$$

(pod warunkiem że żadne wolne wystąpienie zmiennej w S nie zostaje związane w $T[x \leftarrow S]$)

α równoważność

Termy, które różnią się tylko nazwami zmiennych związanych, są równoważne i można je sobą zastępować.

$$(\lambda s z. s(s(z)))(\lambda s z. s(s(z)))$$

Obliczenia w lambda rachunku

Postać normalna

Term jest w *postaci (beta) normalnej* jeśli nie zawiera β -redex'u.

program	\leftrightarrow	term
ewaluacja programu	\leftrightarrow	wykonywanie β redukcji
wynik obliczenia	\leftrightarrow	term w postaci normalnej

Theorem (Church-Rosser)

Jeśli $P \beta\leftarrow M \twoheadrightarrow_{\beta} Q$ to istnieje M' taki że $P \twoheadrightarrow_{\beta} M' \beta\leftarrow Q$.

Wniosek

Każdy term ma co najwyżej jedną postać normalną.

Wzbogacamy λ rachunek o:

- 1 wyrażenia let i letrec
- 2 pattern-matching lambda abstractions
- 3 operator []
- 4 wyrażenia case
- 5 stałe: małe liczby, znaki, funkcje na małych liczbach itp.

let

Składnia (bez pattern-matchingu)

let $v = B$ **in** E

let

$w = A$

$v = B$

in E

$=$

let $w = A$ **in**

(let $v = B$ **in** E **)**

Tłumaczenie

(let $v = B$ **in** E **)** $\equiv ((\lambda v. E) B)$

Składnia (bez pattern-matchingu)

letrec

a = A

b = B

...

n = N

in E

Tłumaczenie (dla jednej zmiennej)

$$(\text{letrec } v = B \text{ in } E) \equiv (\text{let } v = Y (\lambda v. B) \text{ in } E)$$

(Y jest kombinatorem punktu stałego)

letrec f = \n. IF (n=1) THEN 1 ELSE (n * (f (n-1))) in f 4

$$F = \lambda f n. \text{if}(n = 1) \text{then } 1 \text{ else } (n * f(n - 1))$$

$$(Y F) 4 \rightarrow F (Y F) 4$$

$$= (\lambda f n. \text{if}(n = 1) \text{then } 1 \text{ else } (n * f(n - 1))) (Y F) 4$$

$$\rightarrow \text{if}(4 = 1) \text{then } 1 \text{ else } (4 * ((Y F)(4 - 1)))$$

$$\rightarrow 4 * ((Y F)(4 - 1)) \rightarrow 4 * (F(Y F)(4 - 1))$$

$$\rightarrow 4 * (\text{if}(4 - 1 = 1) \text{then } 1 \text{ else } ((4 - 1) * ((Y F)(4 - 1 - 1))))$$

$$\rightarrow 4 * (\text{if}(3 = 1) \text{then } 1 \text{ else } (3 * ((Y F)(3 - 1))))$$

$$\rightarrow 4 * (3 * ((Y F)(3 - 1))) \rightarrow 4 * (3 * (F(Y F)(3 - 1)))$$

$$\rightarrow 4 * (3 * (2 * (F(Y F)(2 - 1)))) \rightarrow 4 * (3 * (2 * 1))$$

$$\rightarrow 4 * (3 * 2) \rightarrow 4 * 6 \rightarrow 24$$

Tłumaczenie

$$(\text{let } v = B \text{ in } E) \equiv ((\lambda v. E)B)$$

- ❶ polimorfizm - system typowania inaczej traktuje konstrukcje `let` i `λ` abstrakcje
- ❷ wydajność - specyficzna aplikacja $(\lambda v. E)$ jest aplikowana tylko do konkretnego argumentu B
- ❸ `letrec` generuje Y
 - ❶ można wydajniej obliczać bezpośrednio na termach z `letrec`
 - ❷ termy z Y nie mogą być ewaluowane gorliwie

Wzbogacamy λ rachunek o:

- 1 wyrażenia `let` i `letrec`
- 2 pattern-matching lambda abstractions
- 3 operator `[]`
- 4 wyrażenia `case`

Wzbogacamy λ rachunek o:

- 1 wyrażenia `let` i `letrec`
- 2 pattern-matching lambda abstractions
- 3 operator `[]`
- 4 wyrażenia `case`

Wzbogacamy λ rachunek o:

- 1 wyrażenia `let` i `letrec`
- 2 pattern-matching lambda abstractions
- 3 operator `[]`
- 4 wyrażenia `case`

Wzbogacamy λ rachunek o:

- 1 wyrażenia `let` i `letrec`
- 2 pattern-matching lambda abstractions
- 3 operator `[]`
- 4 wyrażenia `case`

Structured Types (algebraic types)

Typy wyliczeniowe

```
datatype color = RED | GREEN | BLUE  
datatype bool = TRUE | FALSE
```

Tuples/Typy produktowe

```
datatype pair 'a 'b = PAIR 'a * 'b  
datatype triple 'a 'b 'c = TRIPLE 'a * 'b * 'c
```

Union types

```
datatype shape = CIRCLE color * int  
              | RECTANGLE color * int * int  
datatype intList = INIL | ICONS int * intList  
datatype list 'a = NIL | CONS 'a * ('a list)
```

Pattern matching - przykłady

Overlapping patterns & Constant patterns

```
factorial 0 = 1  
factorial n = n * factorial (n-1)
```

Nested patterns

```
getEven [] = []  
getEven [x] = []  
getEven (x:(y:ys)) = y: (getEven ys)
```

Multiple arguments

```
xor FALSE y = y  
xor TRUE FALSE = TRUE  
xor TRUE TRUE = FALSE
```

Pattern matching - przykłady

Non-exhaustive sets of equations

```
head (x:xs) = x
```

Conditional equations

```
fibb n = 1,  n<2  
fibb n = fibb (n-1) + (fibb (n-2))
```

Repeated variables (?)

```
noDups [] = []  
noDups [x] = [x]  
noDups (x:x:xs) = noDups (x:xs)  
noDups (x:y:ys) = x: (noDups (y:ys))
```

Definicja

Wzorzec (*Pattern*)

- 1 *zmienna jest wzorcem*
- 2 *stała jest wzorcem (*int*, *char*, *bool* itp.)*
- 3 *jeśli c jest konstruktorem arności r , oraz p_1, \dots, p_r są wzorcami, to wzorcem jest*

$$(c \ p_1 \ \dots \ p_r)$$

Dodatkowo wszystkie nazwy zmiennych we wzorcu muszą być różne.

Wzorce postaci $(c \ p_1 \ \dots \ p_r)$ nazywamy *sum construction patterns* jeśli c jest konstruktorem dla typu będącego sumą (*union types*).

Wzorce postaci $(c \ p_1 \ \dots \ p_r)$ nazywamy *product construction patterns* jeśli c jest konstruktorem dla typu produktowego (*product types*).

Rozszerzenie składni - term:

- 1 wzorzec (!)
- 2 aplikacja ($T_1 \cdot T_2$)
- 3 abstrakcja ($\lambda p.T$) (gdzie p jest wzorcem a T jest termem)
- 4 ...
- 5 let, letrec ...

Przykład

$$\text{fst } (x,y) = x \quad \rightarrow \quad \text{fst} = \lambda(PAIR\ x\ y).x$$

Pattern matching w rozszerzonym lambda rachunku

Problem

```
null NIL = true  
null (CONS x xs) = false
```

Rozszerzenie składni - term:

- 1 wzorzec (!) (w tym stała FAIL)
- 2 aplikacja ($T_1 \cdot T_2$)
- 3 abstrakcja ($\lambda p. T$) (gdzie p jest wzorcem a T jest termem)
- 4 operator binarny $[]$ (będziemy zapisywać infiksowo)
- 5 let, letrec ...

operator $[]$

$$\begin{aligned} a[]b &= a && \text{jeśli } a \neq \text{FAIL} \text{ oraz } a \neq \perp \\ \text{FAIL}[]b &= b \\ \perp[]b &= \perp \end{aligned}$$

Pattern matching w rozszerzonym lambda rachunku

Przykład

```

null NIL = true
null (CONS x xs) = false

```

$$\lambda v. (((\lambda NIL.true)v) \parallel ((\lambda (CONS\ x\ xs).false)v))$$

Przykład

```
reflect (LEAF n) = LEAF n
reflect (BRANCH t1 t2) = BRANCH (reflect t2) (reflect t1)
```

$$\begin{array}{l} \text{letrec} \\ \text{reflect} = \lambda t. (\\ \quad [] \quad ((\lambda (BRANCH \ t1 \ t2). BRANCH \ (\text{reflect} \ t2)(\text{reflect} \ t1))t) \\ \quad [] \quad \text{ERROR}) \\ \text{in } E \end{array}$$

Pattern matching - wiele argumentów

$$\begin{aligned} &f\ p_1 \dots p_m = E \\ &\quad \lambda v_1 \dots \lambda v_n. ((\lambda p_1 \dots \lambda p_m. E) v_1 \dots v_m \ []\ ERROR) \end{aligned}$$

Dodatkowa reguła dla FAIL

$$(FAIL\ A) \rightarrow FAIL$$

Przykład

```
xor False y = y
xor True False = True
xor True True = False
```

$$\begin{aligned} xor = \quad &\lambda x. \lambda y. (\\ &\quad [] \quad ((\lambda TRUE. \lambda FALSE. TRUE) \times y) \\ &\quad [] \quad ((\lambda TRUE. \lambda TRUE. FALSE) \times y) \\ &\quad [] \quad ERROR) \end{aligned}$$

Pattern matching - guards

Przykład

```
foo (x:xs) = x, x<0
```

```
foo (x:[]) = x
```

```
foo (x:xs) = foo xs
```

```
foo =      λv.(((λ(CONS x xs).IF (x < 0) THEN x ELSE FAIL) v)
           []((λ(CONS x NIL).x) v)
           []((λ(CONS x xs).foo xs) v)
           []ERROR)
```

Przykład - guard TRUE

```
fac n = 1,  n=0
```

```
fac n = n * (factorial (n-1))
```

```
fac =      λv.((λn.(IF (n = 0) THEN 1 ELSE (n * (fac(n - 1))))) v
              []ERROR)
```

Powtórzone zmienne

```
nasty x x True = 1
```

```
nasty x y z    = 2
```

```
nasty' x y True = 1, x=y
```

```
nasty' x y z    = 2
```

$$(nasty \perp 3 \text{ False}) \neq (nasty' \perp 3 \text{ False})$$

```
multi p q q p = 1
```

```
multi p q r s = 2
```

$$multi \perp 1 2 3 = ?$$

Dopasowania typów algebraicznych

$$\begin{array}{ll} (\lambda(s \ p_1 \dots p_r).E) (s \ a_1 \dots a_r) \rightarrow & (\lambda p_1 \dots p_r.E) \ a_1 \dots a_r \\ (\lambda(s \ p_1 \dots p_r).E) (s' \ a_1 \dots a_r) \rightarrow & \text{FAIL} \\ \text{Eval}[[(\lambda(s \ p_1 \dots p_r).E)]] \perp = & \perp \end{array}$$

(Leniwe) Dopasowywanie typów produktowych

Przykład

`zeroAny` `x` `= 0`

`zeroList` `[]` `= 0`

`zeroPair` `(x,y)` `= 0`

zeroAny $\perp = 0$

zeroList $\perp = \perp$

zeroPair $\perp = ?$

Destruktory par

`addPair` `(x,y)` `= x+y`

addPair $= \lambda p.((\text{SEL-PAIR-1 } p) + (\text{SEL-PAIR-2 } p))$

Destruktory par

`addPair` $(x,y) = x+y$

$addPair = \lambda p. ((SEL-PAIR-1\ p) + (SEL-PAIR-2\ p))$

Ogólnie

$(\lambda(t\ p_1 \dots p_r).E)\ a \rightarrow (\lambda p_1 \dots p_r.E)\ (SEL-t-1\ a) \dots (SEL-t-r\ a)$

Case expressions

Wzbogacamy λ rachunek o:

- 1 wyrażenia `let` i `letrec`
- 2 pattern-matching lambda abstractions
- 3 operator `[]`
- 4 wyrażenia `case`

Case expressions

case v of

$c_1 \ v_{1,1} \dots v_{1,r_1} \quad \Rightarrow E_1$

\dots

$c_n \ v_{n,1} \dots v_{n,r_n} \quad \Rightarrow E_n$

reflect = $\lambda t.$ case t of

LEAF $n \quad \Rightarrow$ *LEAF* n

BRANCH $t_1 \ t_2 \quad \Rightarrow$ *BRANCH* (*reflect* t_1) (*reflect* t_2)

$(\lambda(c_1 \ v_{1,1} \dots v_{1,r_1}).E_1)v$

$\square \dots$

$\square(\lambda(c_n \ v_{n,1} \dots v_{n,r_n}).E_n)v$

Powrót do zwykłego λ rachunku

...

Twierdzenie Churcha-Rossera

Twierdzenie (Church-Rosser)

Jeśli $P \beta\leftarrow M \twoheadrightarrow_\beta Q$ to istnieje M' taki że $P \twoheadrightarrow_\beta M' \beta\leftarrow Q$.

Wniosek

Każdy λ -term ma co najwyżej jedną postać normalną.

Twierdzenie Churcha-Rossera

Twierdzenie (Church-Rosser)

Jeśli $P \beta\leftarrow M \twoheadrightarrow_\beta Q$ to istnieje M' taki że $P \twoheadrightarrow_\beta M' \beta\leftarrow Q$.

Wniosek

Każdy λ -term ma co najwyżej jedną postać normalną.

Słaba własność Churcha-Rossera (WCR)

Relacja \rightarrow ma *słabą własność Churcha-Rossera* jeśli $b \leftarrow a \rightarrow c$ implikuje istnienie d takiego że $b \twoheadrightarrow d \leftarrow c$.

$$\text{WCR} \not\Rightarrow \text{CR}$$

Własność silnej normalizacji (SN)

Relacja \rightarrow ma *własność silnej normalizacji* jeśli nie istnieją nieskończone ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takie że $a_n \rightarrow a_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Lemat Newmanna

$$\text{WCR} + \text{SN} \Rightarrow \text{CR}$$

Słaba własność Churcha-Rossera (WCR)

Relacja \rightarrow ma *słabą własność Churcha-Rossera* jeśli $b \leftarrow a \rightarrow c$ implikuje istnienie d takiego że $b \twoheadrightarrow d \leftarrow c$.

$$\text{WCR} \not\Rightarrow \text{CR}$$

Własność silnej normalizacji (SN)

Relacja \rightarrow ma *własność silnej normalizacji* jeśli nie istnieją nieskończone ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takie że $a_n \rightarrow a_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Lemat Newmanna

$$\text{WCR} + \text{SN} \Rightarrow \text{CR}$$

Słaba własność Churcha-Rossera (WCR)

Relacja \rightarrow ma *słabą własność Churcha-Rossera* jeśli $b \leftarrow a \rightarrow c$ implikuje istnienie d takiego że $b \twoheadrightarrow d \leftarrow c$.

$$\text{WCR} \not\Rightarrow \text{CR}$$

Własność silnej normalizacji (SN)

Relacja \rightarrow ma *własność silnej normalizacji* jeśli nie istnieją nieskończone ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takie że $a_n \rightarrow a_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Lemat Newmanna

$$\text{WCR} + \text{SN} \Rightarrow \text{CR}$$

Słaba własność Churcha-Rossera (WCR)

Relacja \rightarrow ma *słabą własność Churcha-Rossera* jeśli $b \leftarrow a \rightarrow c$ implikuje istnienie d takiego że $b \twoheadrightarrow d \leftarrow c$.

$$\text{WCR} \not\Rightarrow \text{CR}$$

Własność silnej normalizacji (SN)

Relacja \rightarrow ma *własność silnej normalizacji* jeśli nie istnieją nieskończone ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takie że $a_n \rightarrow a_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Lemat Newmanna

$$\text{WCR} + \text{SN} \Rightarrow \text{CR}$$

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^* = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$,
- ❸ $(MN)^* = M^*N^*$, gdy MN nie jest redexem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ *gdy x jest zmienną,*
- ❷ *jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,*
- ❸ *jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:*
 - ❶ *$MN \xrightarrow{1} M'N'$,*
 - ❷ *oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.*

Definicja (•)

- ❶ $x^* = x$ *gdy x jest zmienną,*
- ❷ $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$,
- ❸ $(MN)^* = M^*N^*$, *gdy MN nie jest redexsem,*
- ❹ $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$.

Definicja (1)

- 1 $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- 2 jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- 3 jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - 1 $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - 2 oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- 1 $x^* = x$ gdy x jest zmienną,
- 2 $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$,
- 3 $(MN)^* = M^*N^*$, gdy MN nie jest redeksem,
- 4 $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^* = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$,
- ❸ $(MN)^* = M^*N^*$, gdy MN nie jest redexsem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^* = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$,
- ❸ $(MN)^* = M^*N^*$, gdy MN nie jest redexem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^* = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$,
- ❸ $(MN)^* = M^*N^*$, gdy MN nie jest redeksem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^\bullet = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^\bullet = \lambda x.M^\bullet$,
- ❸ $(MN)^\bullet = M^\bullet N^\bullet$, gdy MN nie jest redexem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^\bullet = M^\bullet[x := N^\bullet]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^\bullet = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^\bullet = \lambda x.M^\bullet$,
- ❸ $(MN)^\bullet = M^\bullet N^\bullet$, gdy MN nie jest redexem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^\bullet = M^\bullet[x := N^\bullet]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^\bullet = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^\bullet = \lambda x.M^\bullet$,
- ❸ $(MN)^\bullet = M^\bullet N^\bullet$, gdy MN nie jest redexem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^\bullet = M^\bullet[x := N^\bullet]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^\bullet = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^\bullet = \lambda x.M^\bullet$,
- ❸ $(MN)^\bullet = M^\bullet N^\bullet$, gdy MN nie jest redeksem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^\bullet = M^\bullet[x := N^\bullet]$.

Definicja (1)

- ❶ $x \xrightarrow{1} x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$,
- ❸ jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to:
 - ❶ $MN \xrightarrow{1} M'N'$,
 - ❷ oraz $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Definicja (•)

- ❶ $x^\bullet = x$ gdy x jest zmienną,
- ❷ $(\lambda x.M)^\bullet = \lambda x.M^\bullet$,
- ❸ $(MN)^\bullet = M^\bullet N^\bullet$, gdy MN nie jest redeksem,
- ❹ $((\lambda x.M)N)^\bullet = M^\bullet[x := N^\bullet]$.

Lemat

- 1 Dla dowolnego M mamy $M \xrightarrow{1} M$ oraz $M \xrightarrow{1} M^\bullet$.
- 2 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.
- 3 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ to $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$.

Wnioski

- Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu.
- Relacja \rightarrow_β ma własność C-R.

Lemat

- 1 Dla dowolnego M mamy $M \xrightarrow{1} M$ oraz $M \xrightarrow{1} M^\bullet$.
- 2 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.
- 3 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ to $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$.

Wnioski

- Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu.
- Relacja \rightarrow_β ma własność C-R.

Lemat

- 1 Dla dowolnego M mamy $M \xrightarrow{1} M$ oraz $M \xrightarrow{1} M^\bullet$.
- 2 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.
- 3 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ to $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$.

Wnioski

- Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu.
- Relacja \rightarrow_β ma własność C-R.

Lemat

- 1 Dla dowolnego M mamy $M \xrightarrow{1} M$ oraz $M \xrightarrow{1} M^\bullet$.
- 2 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.
- 3 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ to $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$.

Wnioski

- Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu.
- Relacja \rightarrow_β ma własność C-R.

Lemat

- 1 Dla dowolnego M mamy $M \xrightarrow{1} M$ oraz $M \xrightarrow{1} M^\bullet$.
- 2 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.
- 3 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ to $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$.

Wnioski

- 1 Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu.
- 2 Relacja \rightarrow_β ma własność C-R.

Lemat

- 1 Dla dowolnego M mamy $M \xrightarrow{1} M$ oraz $M \xrightarrow{1} M^\bullet$.
- 2 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.
- 3 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ to $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$.

Wnioski

- 1 Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu.
- 2 Relacja \rightarrow_β ma własność C-R.

Lemat

- 1 Dla dowolnego M mamy $M \xrightarrow{1} M$ oraz $M \xrightarrow{1} M^\bullet$.
- 2 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ oraz $N \xrightarrow{1} N'$ to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.
- 3 Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ to $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$.

Wnioski

- 1 Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu.
- 2 Relacja \rightarrow_β ma własność C-R.

Strategie redukcji termów

Eager evaluation - najpierw argumenty

```
red((\x.A) B) = let
  B' = red B
in red( A [x:=B'] )
```

Eager

$$\begin{aligned} & (\lambda xy.x)(\lambda v.v)((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz))) && \equiv KI(Yf) \\ \rightarrow_{\beta} & (\lambda xy.x)(\lambda v.v)(f((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz)))) && \equiv KI(f(Yf)) \\ \rightarrow_{\beta} & (\lambda xy.x)(\lambda v.v)(f(f((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz)))))) && \equiv KI(f(f(Yf))) \\ \rightarrow_{\beta} & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\lambda xy.x)(\lambda v.v)((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz))) && \equiv KI(Yf) \\ \rightarrow_{\beta} & (\lambda y.\lambda v.v)((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz))) && \equiv .. \\ \rightarrow_{\beta} & \lambda v.v && \equiv I \end{aligned}$$

Strategie redukcji termów

Normal order reduction

Definicja

Ciąg redukcji:

$$M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$$

nazywamy standardowym jeśli w kroku $M_i \rightarrow M_{i+1}$ redukujemy redeks zaczynający się nie dalej od początku termu niż redeks redukowany w kroku $M_{i+1} \rightarrow M_{i+2}$.

Twierdzenie

Jeśli $M \twoheadrightarrow_{\beta} N$ to istnieje standardowa redukcja z M do N .

Strategie redukcji termów

Normal order reduction - leftmost outermost

normal order

$\text{red}((\lambda x.A)B) = \text{red}(A[x:=B])$

eager

$\text{red}((\lambda x.A) B) = \text{let}$
 $B' = \text{red } B$
in $\text{red}(A[x:=B'])$

$$\begin{array}{lll} & \frac{(\lambda xy.x)(\lambda v.v)((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz)))}{\rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda v.v)((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz)))} & \equiv KI(Yf) \\ & \rightarrow_{\beta} \frac{(\lambda y.\lambda v.v)((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz)))}{\lambda v.v} & \equiv .. \\ & & \equiv I \end{array}$$

Strategie redukcji termów

Normal order reduction - leftmost outermost

Definicja (Czołowa postać normalna)

Każdy term ma jedną z poniższych postaci:

- 1 $\lambda \vec{x}. x \vec{R}$
- 2 $\lambda \vec{x}. (\lambda y. \underline{P}) Q \vec{R}$.

Termy postaci (1) są w czołowej postaci normalnej (head normal form).
Dla termów postaci (2), podkreślony redeks nazywamy redeksem czołowym.

Redukcję redeksu czołowego nazywamy *redukcją czołową* i oznaczamy

$$M \xrightarrow{h} N.$$

Pozostałe redukcje nazywamy wewnętrznymi i oznaczamy

$$M \xrightarrow{i} N.$$

Strategie redukcji termów

Normal order reduction - leftmost outermost

Leftmost outermost

$$\begin{aligned} \underline{4}(\lambda x. SKKx) &\equiv (\lambda sz. s(s(s(s(z)))))(\lambda x. SKKx) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z)))) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. x)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z)))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z))) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. x)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z)) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. x)((\lambda x. SKKx)(z)) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. SKKx)(z) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. x)(z) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. z \end{aligned}$$

Strategie redukcji termów

Lazy evaluation

Lazy

$$\begin{aligned} \underline{4}(\lambda x.SKKx) &\equiv (\lambda sz.s(s(s(s(z)))))(\lambda x.SKKx) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(r1(r1(r1(z))))) && \text{where } r1 = (\lambda x.SKKx) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(r1(r1(r1(z))))) && \text{where } r1 = \lambda x.x \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(r1(r1(z)))) && \text{where } r1 = \lambda x.x \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(r1(z))) && \text{where } r1 = \lambda x.x \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(z)) && \text{where } r1 = \lambda x.x \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.z) \end{aligned}$$