

# Programowanie Funkcyjne

lato 2013/2014

Jakub Kozik

Informatyka Analityczna  
tcs@jagiellonian

## Punkty

- zadania programistyczne submitowane przez Satori (zadania różnie punktowane, w sumie 80 punktów)
- aby uzyskać pozytywną ocenę należy zaliczyć wszystkie zadania oznaczone jako obowiązkowe
- egzamin (20 punktów)
- aby uzyskać pozytywną ocenę należy z egzaminu uzyskać przynajmniej 10 punktów

## Ostateczna ocena

0-50	ndst
50-60	dst
60-70	+dst
70-80	db
80-90	+db
90-100	++db

## Część 1: Lambda rachunek i podstawy SML

- podstawowe konstrukcje SML'a i ich odpowiedniki w lambda rachunku
- strategie ewaluacji termów/programów
- system typów (Hindley-Milner)
- podstawowe techniki programowania funkcyjnego

## Część 2: Funkcyjne struktury danych

- ocena wydajności programów funkcyjnych
- amortyzowana analiza persystentnych struktur danych
- eliminacja amortyzacji
- implementacje z uleniwianiem/wymuszaniem obliczeń

## Część 3: Haskell

- leniwa ewaluacja
- monady
- ...

Paweł Urzyczyn, Rachunek Lambda, skrypt dostępny na stronie autora

Robert Harper, Programming in Standard ML, Working Draft dostępny na stronie autora

Chris Okasaki, Purely Functional Data Structures, Cambridge University Press 1999 (wczesna wersja książki (rozprawa doktorska) dostępna na stronie autora)

Simon L. Peyton Jones, The Implementation of Functional Programming Languages, Prentice Hall 1987 (książka w wersji elektronicznej jest udostępniana przez autora)

Bryan O'Sullivan, Don Stewart, John Goerzen, Real World Haskell, O'Reilly Media, 2008 (książka w wersji elektronicznej jest udostępniana przez autorów)

## Składnia

- zmienne są termami (przeliczalny zbiór zmiennych  $Var$ )
- jeśli  $T$  jest termem a  $x$  jest zmienną to  $\lambda x. T$  jest termem (abstrakcja)
- jeśli  $T$  oraz  $S$  są termami to  $(T \cdot S)$  jest termem (aplikacja)

## Konwencje

- pomijanie  $\cdot$  przy aplikacji  $(T \cdot S) \equiv (TS)$
- pomijanie nawiasów – domyślne nawiasowanie do lewej  
 $RST \equiv ((RS)T)$
- grupowanie abstrahowanych zmiennych  $\lambda xy. T \equiv \lambda x. (\lambda y. T)$

## $\beta$ redukcja

$$(\lambda x. T)S \rightarrow_{\beta} T[x \leftarrow S]$$

(pod warunkiem że żadne wolne wystąpienie zmiennej w  $S$  nie zostaje związane w  $T[x \leftarrow S]$ )

## $\alpha$ równoważność

Termy, które różnią się tylko nazwami zmiennych związanych, są równoważne i można je sobą zastępować.

$$(\lambda s \ z. s(s(z)))(\lambda s \ z. s(s(z)))$$

# Obliczenia w lambda rachunku

## Postać normalna

Term jest w *postaci (beta) normalnej* jeśli nie zawiera  $\beta$ -redex'u.

program	$\leftrightarrow$	term
ewaluacja programu	$\leftrightarrow$	wykonywanie $\beta$ redukcji
wynik obliczenia	$\leftrightarrow$	term w postaci normalnej

## Theorem (Church-Rosser)

Jeśli  $P \beta \leftarrow M \twoheadrightarrow_{\beta} Q$  to istnieje  $M'$  taki że  $P \twoheadrightarrow_{\beta} M' \beta \leftarrow Q$ .

## Wniosek

Każdy term ma co najwyżej jedną postać normalną.

Wzbogacamy  $\lambda$  rachunek o:

- 1 wyrażenia let i letrec
- 2 pattern-matching lambda abstractions
- 3 operator []
- 4 wyrażenia case
- 5 stałe: małe liczby, znaki, funkcje na małych liczbach itp.



# let

## Składnia (bez pattern-matchingu)

**let**  $v = B$  **in**  $E$

**let**

$w = A$

$v = B$

**in**  $E$

$=$

**let**  $w = A$  **in**

**(let**  $v = B$  **in**  $E$ )

## Tłumaczenie

**(let**  $v = B$  **in**  $E$ )  $\equiv ((\lambda v. E) B)$

## Składnia (bez pattern-matchingu)

**letrec**

a = A

b = B

...

n = N

**in** E

## Tłumaczenie (dla jednej zmiennej)

$$(\text{letrec } v = B \text{ in } E) \equiv (\text{let } v = Y (\lambda v.B) \text{ in } E)$$

(Y jest kombinatorem punktu stałego)

letrec f = \n. IF (n=1) THEN 1 ELSE (n \* (f (n-1))) in f 4

$$F = \lambda f\ n. \mathbf{if}(n = 1)\mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}(n * f(n - 1))$$

$$(Y\ F)\ 4 \twoheadrightarrow F\ (Y\ F)\ 4$$

$$= (\lambda f\ n. \mathbf{if}(n = 1)\mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}(n * f(n - 1)))\ (Y\ F)\ 4$$

$$\twoheadrightarrow \mathbf{if}(4 = 1)\mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}(4 * ((Y\ F)(4 - 1)))$$

$$\twoheadrightarrow 4 * ((Y\ F)(4 - 1)) \twoheadrightarrow 4 * (F(Y\ F)(4 - 1))$$

$$\twoheadrightarrow 4 * (\mathbf{if}(4 - 1 = 1)\mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}((4 - 1) * ((Y\ F)(4 - 1 - 1))))$$

$$\twoheadrightarrow 4 * (\mathbf{if}(3 = 1)\mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}(3 * ((Y\ F)(3 - 1))))$$

$$\twoheadrightarrow 4 * (3 * ((Y\ F)(3 - 1))) \twoheadrightarrow 4 * (3 * (F(Y\ F)(3 - 1)))$$

$$\twoheadrightarrow 4 * (3 * (2 * (F(Y\ F)(2 - 1)))) \twoheadrightarrow 4 * (3 * (2 * 1))$$

$$\twoheadrightarrow 4 * (3 * 2) \twoheadrightarrow 4 * 6 \twoheadrightarrow 24$$

## Tłumaczenie

$$(\text{let } v = B \text{ in } E) \quad \equiv \quad ((\lambda v. E)B)$$

- ❶ polimorfizm - system typowania inaczej traktuje konstrukcje `let` i `λ` abstrakcje
- ❷ wydajność - specyficzna aplikacja  $(\lambda v. E)$  jest aplikowana tylko do konkretnego argumentu  $B$
- ❸ `letrec` generuje  $Y$ 
  - ❶ można wydajniej obliczać bezpośrednio na termach z `letrec`
  - ❷ termy z  $Y$  nie mogą być ewaluowane gorliwie

Wzbogacamy  $\lambda$  rachunek o:

- 1 wyrażenia `let` i `letrec`
- 2 pattern-matching lambda abstractions
- 3 operator `[]`
- 4 wyrażenia `case`

# Structured Types (algebraic types)

## Typy wyliczeniowe

```
datatype color = RED | GREEN | BLUE  
datatype bool = TRUE | FALSE
```

## Tuples/Typy produktowe

```
datatype pair 'a 'b = PAIR 'a * 'b  
datatype triple 'a 'b 'c = TRIPLE 'a * 'b * 'c
```

## Union types

```
datatype shape = CIRCLE color * int  
              | RECTANGLE color * int * int  
datatype intList = INIL | ICONS int * intList  
datatype list 'a = NIL | CONS 'a * ('a list)
```

# Pattern matching - przykłady

## Overlapping patterns & Constant patterns

```
factorial 0 = 1  
factorial n = n * factorial (n-1)
```

## Nested patterns

```
getEven [] = []  
getEven [x] = []  
getEven (x:(y:ys)) = y: (getEven ys)
```

## Multiple arguments

```
xor FALSE y = y  
xor TRUE FALSE = TRUE  
xor TRUE TRUE = FALSE
```

# Pattern matching - przykłady

## Non-exhaustive sets of equations

```
head (x:xs) = x
```

## Conditional equations

```
fibb n = 1,  n<2  
fibb n = fibb (n-1) + (fibb (n-2))
```

## Repeated variables (?)

```
noDups [] = []  
noDups [x] = [x]  
noDups (x:x:xs) = noDups (x:xs)  
noDups (x:y:ys) = x: (noDups (y:ys))
```



## Definicja

### Wzorzec (*Pattern*)

- 1 *zmienna jest wzorcem*
- 2 *stała jest wzorcem (`int`, `char`, `bool` itp.)*
- 3 *jeśli  $c$  jest konstruktorem arności  $r$ , oraz  $p_1, \dots, p_r$  są wzorcami, to wzorcem jest*

$$(c \ p_1 \ \dots \ p_r)$$

*Dodatkowo wszystkie nazwy zmiennych we wzorcu muszą być różne.*

Wzorce postaci  $(c \ p_1 \ \dots \ p_r)$  nazywamy *sum construction patterns* jeśli  $c$  jest konstruktorem dla typu będącego sumą (*union types*).

Wzorce postaci  $(c \ p_1 \ \dots \ p_r)$  nazywamy *product construction patterns* jeśli  $c$  jest konstruktorem dla typu produktowego (*product types*).

## Rozszerzenie składni - term:

- 1 wzorzec (!)
- 2 aplikacja ( $T_1 \cdot T_2$ )
- 3 abstrakcja ( $\lambda p.T$ ) (gdzie  $p$  jest wzorcem a  $T$  jest termem)
- 4 ...
- 5 let, letrec ...

## Przykład

$$\text{fst } (x,y) = x \quad \rightarrow \quad \text{fst} = \lambda(PAIR\ x\ y).x$$

# Pattern matching w rozszerzonym lambda rachunku

## Problem

```
null NIL = true  
null (CONS x xs) = false
```

## Rozszerzenie składni - term:

- 1 wzorzec (!) (w tym stała FAIL)
- 2 aplikacja ( $T_1 \cdot T_2$ )
- 3 abstrakcja ( $\lambda p. T$ ) (gdzie  $p$  jest wzorcem a  $T$  jest termem)
- 4 operator binarny  $[]$  (będziemy zapisywać infiksowo)
- 5 let, letrec ...

## operator $[]$

$$\begin{aligned} a [] b &= a && \text{jeśli } a \neq \text{FAIL} \text{ oraz } a \neq \perp \\ \text{FAIL} [] b &= b \\ \perp [] b &= \perp \end{aligned}$$

# Pattern matching w rozszerzonym lambda rachunku

## Przykład

```
null NIL = true  
null (CONS x xs) = false
```

$$\lambda v. ( ((\lambda NIL.true)v) \ [] \ ((\lambda (CONS\ x\ xs).false)v) )$$

## Przykład

```
reflect (LEAF n) = LEAF n  
reflect (BRANCH t1 t2) = BRANCH (reflect t2) (reflect t1)
```

```
letrec  
  reflect =  $\lambda t. ($   
     $\ [] \ ((\lambda (BRANCH\ t1\ t2).BRANCH\ (reflect\ t2)(reflect\ t1))t)$   
     $\ [] \ ERROR)$   
  in E
```

## Pattern matching - wiele argumentów

$$\text{f } p_1 \dots p_m = E$$

$$\lambda v_1 \dots \lambda v_n.((\lambda p_1 \dots \lambda p_m.E)v_1 \dots v_m \text{ [] } ERROR)$$

## Dodatkowa reguła dla FAIL

$$(FAIL\ A) \rightarrow FAIL$$

## Przykład

```
xor False y = y
xor True False = True
xor True True = False
```

$$\begin{aligned} \text{xor} = & \lambda x. \lambda y. ( (\lambda \text{FALSE}. \lambda y. y) \times y \\ & \quad [] ((\lambda \text{TRUE}. \lambda \text{FALSE}. \text{TRUE}) \times y) \\ & \quad [] ((\lambda \text{TRUE}. \lambda \text{TRUE}. \text{FALSE}) \times y) \\ & \quad [] \text{ERROR}) \end{aligned}$$

# Pattern matching - guards

## Przykład

```
foo (x:xs) = x, x<0
```

```
foo (x:[]) = x
```

```
foo (x:xs) = foo xs
```

```
foo =      λv.(((λ(CONS x xs).IF (x < 0) THEN x ELSE FAIL) v)
           []((λ(CONS x NIL).x) v)
           []((λ(CONS x xs).foo xs) v)
           []ERROR)
```

## Przykład - guard TRUE

```
fac n = 1,  n=0
```

```
fac n = n * (factorial (n-1))
```

```
fac =      λv.((λn.(IF (n = 0) THEN 1 ELSE (n * (fac(n - 1))))) v
              []ERROR)
```

# Powtórzone zmienne

```
nasty x x True = 1
```

```
nasty x y z    = 2
```

```
nasty' x y True = 1, x=y
```

```
nasty' x y z    = 2
```

$$(nasty \perp 3 \text{ False}) \neq (nasty' \perp 3 \text{ False})$$

```
multi p q q p = 1
```

```
multi p q r s = 2
```

$$multi \perp 1 2 3 = ?$$

# Dopasowania typów algebraicznych

$$\begin{array}{ll} (\lambda(s \ p_1 \dots p_r).E) (s \ a_1 \dots a_r) \rightarrow & (\lambda p_1 \dots p_r.E) \ a_1 \dots a_r \\ (\lambda(s \ p_1 \dots p_r).E) (s' \ a_1 \dots a_r) \rightarrow & \text{FAIL} \\ \text{Eval}[[ (\lambda(s \ p_1 \dots p_r).E) ]] \perp = & \perp \end{array}$$



# (Leniwe) Dopasowywanie typów produktowych

## Przykład

`zeroAny`     `x`     `= 0`

`zeroList`    `[]`    `= 0`

`zeroPair`    `(x,y)` `= 0`

*zeroAny*  $\perp = 0$

*zeroList*  $\perp = \perp$

*zeroPair*  $\perp = ?$

## Destruktory par

`addPair`     `(x,y)` `= x+y`

*addPair*  $= \lambda p.((\text{SEL-PAIR-1 } p) + (\text{SEL-PAIR-2 } p))$

## Destruktory par

`addPair`       $(x,y) = x+y$

$addPair = \lambda p. ((SEL-PAIR-1\ p) + (SEL-PAIR-2\ p))$

## Ogólnie

$(\lambda(t\ p_1 \dots p_r).E)\ a \rightarrow (\lambda p_1 \dots p_r.E)\ (SEL-t-1\ a) \dots (SEL-t-r\ a)$

# Case expressions

Wzbogacamy  $\lambda$  rachunek o:

- ❶ wyrażenia `let` i `letrec`
- ❷ pattern-matching lambda abstractions
- ❸ operator `[]`
- ❹ wyrażenia `case`

# Case expressions

case  $v$  of

$c_1 \ v_{1,1} \dots v_{1,r_1} \quad \Rightarrow E_1$

$\dots$

$c_n \ v_{n,1} \dots v_{n,r_n} \quad \Rightarrow E_n$

*reflect* =  $\lambda t.$ case  $t$  of

*LEAF*  $n \quad \Rightarrow$  *LEAF*  $n$

*BRANCH*  $t_1 \ t_2 \quad \Rightarrow$  *BRANCH* (*reflect*  $t_1$ ) (*reflect*  $t_2$ )

$(\lambda(c_1 \ v_{1,1} \dots v_{1,r_1}).E_1)v$

$\square \dots$

$\square(\lambda(c_n \ v_{n,1} \dots v_{n,r_n}).E_n)v$

# Powrót do zwykłego $\lambda$ rachunku

...

# Twierdzenie Churcha-Rossera

## Twierdzenie (Church-Rosser)

*Jeśli  $P \beta\leftarrow M \twoheadrightarrow_\beta Q$  to istnieje  $M'$  taki że  $P \twoheadrightarrow_\beta M' \beta\leftarrow Q$ .*

## Wniosek

Każdy  $\lambda$ -term ma co najwyżej jedną postać normalną.

## Słaba własność Churcha-Rossera (WCR)

Relacja  $\rightarrow$  ma *słabą własność Churcha-Rossera* jeśli  $b \leftarrow a \rightarrow c$  implikuje istnienie  $d$  takiego że  $b \twoheadrightarrow d \leftarrow c$ .

$$\text{WCR} \not\Rightarrow \text{CR}$$

## Własność silnej normalizacji (SN)

Relacja  $\rightarrow$  ma *własność silnej normalizacji* jeśli nie istnieją nieskończone ciągi  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  takie że  $a_n \rightarrow a_{n+1}$ , dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

## Lemat Newmanna

$$\text{WCR} + \text{SN} \Rightarrow \text{CR}$$

## Definicja (1)

- ❶  $x \xrightarrow{1} x$  gdy  $x$  jest zmienną,
- ❷ jeśli  $M \xrightarrow{1} M'$ , to  $\lambda x.M \xrightarrow{1} \lambda x.M'$ ,
- ❸ jeśli  $M \xrightarrow{1} M'$  oraz  $N \xrightarrow{1} N'$  to:
  - ❶  $MN \xrightarrow{1} M'N'$ ,
  - ❷ oraz  $(\lambda x.M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$ .

## Definicja (•)

- ❶  $x^\bullet = x$  gdy  $x$  jest zmienną,
- ❷  $(\lambda x.M)^\bullet = \lambda x.M^\bullet$ ,
- ❸  $(MN)^\bullet = M^\bullet N^\bullet$ , gdy  $MN$  nie jest redeksem,
- ❹  $((\lambda x.M)N)^\bullet = M^\bullet[x := N^\bullet]$ .



## Lemat

- 1 Dla dowolnego  $M$  mamy  $M \xrightarrow{1} M$  oraz  $M \xrightarrow{1} M^\bullet$ .
- 2 Jeśli  $M \xrightarrow{1} M'$  oraz  $N \xrightarrow{1} N'$  to  $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$ .
- 3 Jeśli  $M \xrightarrow{1} M'$  to  $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$ .

## Wnioski

- 1 Relacja  $\xrightarrow{1}$  ma własność rombu.
- 2 Relacja  $\rightarrow_\beta$  ma własność C-R.

# Strategie redukcji termów

Eager evaluation - najpierw argumenty

```
red((\x.A) B) = let  
    B' = red B  
in red( A [x:=B'] )
```

## Eager

$$\begin{aligned} & (\lambda xy.x)(\lambda v.v)((\lambda z.f(z))(\lambda z.f(z))) && \equiv KI(Yf) \\ \rightarrow_{\beta} & (\lambda xy.x)(\lambda v.v)(f((\lambda z.f(z))(\lambda z.f(z)))) && \equiv KI(f(Yf)) \\ \rightarrow_{\beta} & (\lambda xy.x)(\lambda v.v)(f(f((\lambda z.f(z))(\lambda z.f(z)))))) && \equiv KI(f(f(Yf))) \\ \rightarrow_{\beta} & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\lambda xy.x)(\lambda v.v)((\lambda z.f(z))(\lambda z.f(z))) && \equiv KI(Yf) \\ \rightarrow_{\beta} & (\lambda y.\lambda v.v)((\lambda z.f(z))(\lambda z.f(z))) && \equiv .. \\ \rightarrow_{\beta} & \lambda v.v && \equiv I \end{aligned}$$

# Strategie redukcji termów

## Normal order reduction

### Definicja

*Ciąg redukcji:*

$$M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$$

*nazywamy standardowym jeśli w kroku  $M_i \rightarrow M_{i+1}$  redukujemy redeks zaczynający się nie dalej od początku termu niż redeks redukowany w kroku  $M_{i+1} \rightarrow M_{i+2}$ .*

### Twierdzenie

*Jeśli  $M \twoheadrightarrow_{\beta} N$  to istnieje standardowa redukcja z  $M$  do  $N$ .*

# Strategie redukcji termów

Normal order reduction - leftmost outermost

## normal order

$\text{red}((\lambda x.A)B) = \text{red}(A[x:=B])$

## eager

$\text{red}((\lambda x.A) B) = \text{let}$   
     $B' = \text{red } B$   
in  $\text{red}(A[x:=B'])$

$$\begin{array}{lll} & \frac{(\lambda xy.x)(\lambda v.v)((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz)))}{(\lambda y.\lambda v.v)((\lambda z.f(zz))(\lambda z.f(zz)))} & \equiv KI(Yf) \\ \rightarrow_{\beta} & & \equiv .. \\ \rightarrow_{\beta} & \lambda v.v & \equiv I \end{array}$$

# Strategie redukcji termów

Normal order reduction - leftmost outermost

## Definicja (Czołowa postać normalna)

Każdy term ma jedną z poniższych postaci:

- 1  $\lambda \vec{x}. x \vec{R}$
- 2  $\lambda \vec{x}. (\lambda y. \underline{P}) Q \vec{R}$ .

Termy postaci (1) są w czołowej postaci normalnej (head normal form).  
Dla termów postaci (2), podkreślony redeks nazywamy redeksem czołowym.

Redukcję redeksu czołowego nazywamy *redukcją czołową* i oznaczamy

$$M \xrightarrow{h} N.$$

Pozostałe redukcje nazywamy wewnętrznymi i oznaczamy

$$M \xrightarrow{i} N.$$

# Strategie redukcji termów

Normal order reduction - leftmost outermost

## Leftmost outermost

$$\begin{aligned} \underline{4}(\lambda x. SKKx) &\equiv (\lambda sz. s(s(s(s(z)))))(\lambda x. SKKx) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z)))) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. x)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z)))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z))) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. x)((\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z))) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. SKKx)((\lambda x. SKKx)(z)) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. x)((\lambda x. SKKx)(z)) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. SKKx)(z) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z. (\lambda x. x)(z) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda z. z \end{aligned}$$

# Strategie redukcji termów

## Lazy evaluation

### Lazy

$$\begin{aligned} \underline{4}(\lambda x.SKKx) &\equiv (\lambda sz.s(s(s(s(z)))))(\lambda x.SKKx) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(r1(r1(r1(z))))) && \text{where } r1 = (\lambda x.SKKx) \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(r1(r1(r1(z))))) && \text{where } r1 = \lambda x.x \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(r1(r1(z)))) && \text{where } r1 = \lambda x.x \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(r1(z))) && \text{where } r1 = \lambda x.x \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.r1(z)) && \text{where } r1 = \lambda x.x \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.z) \end{aligned}$$

# Typy proste

## Składnia

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są typami to  $\sigma \rightarrow \tau$  jest typem.

## Reguły wnioskowania

$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \quad [\text{Var}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash e_0 e_1 : \tau'} \quad [\text{App}]$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x . e : \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{Abs}]$$

## Przykład

$SKK : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$

gdzie  $(S = \lambda abc.(ac)(bc), K = \lambda ab.a))$



# Typy proste

## Składnia

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są typami to  $\sigma \rightarrow \tau$  jest typem.

## Reguły wnioskowania

$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \quad [\text{Var}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash e_0 e_1 : \tau'} \quad [\text{App}]$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x . e : \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{Abs}]$$

## Przykład

$SKK : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$

gdzie  $(S = \lambda abc.(ac)(bc), K = \lambda ab.a))$

# Typy proste

## Składnia

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są typami to  $\sigma \rightarrow \tau$  jest typem.

## Reguły wnioskowania

$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \quad [\text{Var}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash e_0 \ e_1 : \tau'} \quad [\text{App}]$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x . e : \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{Abs}]$$

## Przykład

$SKK : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$

gdzie  $(S = \lambda abc.(ac)(bc), K = \lambda ab.a))$

# Typy proste

## Składnia

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są typami to  $\sigma \rightarrow \tau$  jest typem.

## Reguły wnioskowania

$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \quad [\text{Var}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash e_0 e_1 : \tau'} \quad [\text{App}]$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x . e : \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{Abs}]$$

## Przykład

$SKK : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$

gdzie  $(S = \lambda abc.(ac)(bc), K = \lambda ab.a))$

# Typy proste

## Składnia

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są typami to  $\sigma \rightarrow \tau$  jest typem.

## Reguły wnioskowania

$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \quad [\text{Var}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash e_0 e_1 : \tau'} \quad [\text{App}]$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x . e : \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{Abs}]$$

## Przykład

$SKK : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$

gdzie  $(S = \lambda abc.(ac)(bc), K = \lambda ab.a)$

## Wariant Curry'ego

$$\lambda a\ b\ c.(ac)(bc) : (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$$

## Wariant Churcha

$$\lambda a^{p \rightarrow q \rightarrow r} b^{p \rightarrow q} c^p.((ac)^{q \rightarrow r}(bc)^q)^r : (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$$

## Wariant Curry'ego

$$\lambda a\ b\ c.(ac)(bc) : (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$$

## Wariant Churcha

$$\lambda a^{p \rightarrow q \rightarrow r} b^{p \rightarrow q} c^p.((ac)^{q \rightarrow r} (bc)^q)^r : (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$$

## Zgodność z redukcją

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  oraz  $M \rightarrow_{\beta} N$  to  $\Gamma \vdash N : \tau$ .

$$(\lambda id a b.K(id a)(id b))(\lambda x.x)$$

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  ma postać normalną.

Ranga redeksu  $(\lambda x^{\sigma}.P)Q$  to długość  $\sigma$ . Indukcja ze względu na  $(n, m)$  gdzie  $n$  jest maksymalną rangą redeksu w termie, a  $m$  liczbą takich redeksów.

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  jest silnie normalizowalny.

## Zgodność z redukcją

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  oraz  $M \rightarrow_{\beta} N$  to  $\Gamma \vdash N : \tau$ .

$$(\lambda \text{ id } a \text{ b. } K(\text{id } a)(\text{id } b))(\lambda x.x)$$

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  ma postać normalną.

Ranga redeksu  $(\lambda x^{\sigma}.P)Q$  to długość  $\sigma$ . Indukcja ze względu na  $(n, m)$  gdzie  $n$  jest maksymalną rangą redeksu w termie, a  $m$  liczbą takich redeksów.

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  jest silnie normalizowalny.



## Zgodność z redukcją

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  oraz  $M \rightarrow_{\beta} N$  to  $\Gamma \vdash N : \tau$ .

$$(\lambda \text{ id } a \text{ b. } K(\text{id } a)(\text{id } b))(\lambda x.x)$$

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  ma postać normalną.

Ranga redeksu  $(\lambda x^{\sigma}.P)Q$  to długość  $\sigma$ . Indukcja ze względu na  $(n, m)$  gdzie  $n$  jest maksymalną rangą redeksu w termie, a  $m$  liczbą takich redeksów.

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  jest silnie normalizowalny.

## Zgodność z redukcją

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  oraz  $M \rightarrow_{\beta} N$  to  $\Gamma \vdash N : \tau$ .

$$(\lambda id\ a\ b.K(id\ a)(id\ b))(\lambda x.x)$$

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  ma postać normalną.

Ranga redeksu  $(\lambda x^{\sigma}.P)Q$  to długość  $\sigma$ . Indukcja ze względu na  $(n, m)$  gdzie  $n$  jest maksymalną rangą redeksu w termie, a  $m$  liczbą takich redeksów.

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  jest silnie normalizowalny.

## Zgodność z redukcją

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  oraz  $M \rightarrow_{\beta} N$  to  $\Gamma \vdash N : \tau$ .

$$(\lambda \text{ id } a \text{ b. } K(\text{id } a)(\text{id } b))(\lambda x.x)$$

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  ma postać normalną.

Ranga redeksu  $(\lambda x^{\sigma}.P)Q$  to długość  $\sigma$ . Indukcja ze względu na  $(n, m)$  gdzie  $n$  jest maksymalną rangą redeksu w termie, a  $m$  liczbą takich redeksów.

## Normalizacja

Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  to  $M$  jest silnie normalizowalny.

# Izomorfizm Curry-Howard(-de Bruijn-Lambek)

## Reguły wnioskowania dla logiki minimalnej

$$\frac{\tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash \tau} \quad [\text{Ax}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau'} \quad [\text{E} \rightarrow]$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \tau'}{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{I} \rightarrow]$$

## Reguły wnioskowania dla typów prostych

$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \quad [\text{Var}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash e_0 \ e_1 : \tau'} \quad [\text{App}]$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x . e : \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{Abs}]$$

# Izomorfizm Curry-Howard(-de Bruijn-Lambek)

## Reguły wnioskowania dla logiki minimalnej

$$\frac{\tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash \tau} \quad [\text{Ax}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau'} \quad [\text{E} \rightarrow]$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \tau'}{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{I} \rightarrow]$$

## Reguły wnioskowania dla typów prostych

$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \quad [\text{Var}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash e_0 \ e_1 : \tau'} \quad [\text{App}]$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x . e : \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{Abs}]$$

# Type inhabitation

## Problem

Dla danych  $\Gamma, \sigma$  czy istnieje term  $M$  taki że  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .

(algorytm Ben-Yellesa)

## Twierdzenie (Statman)

*'Type inhabitation' jest PSPACE-zupełny.*

# Type inhabitation

## Problem

Dla danych  $\Gamma, \sigma$  czy istnieje term  $M$  taki że  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .

(algorytm Ben-Yellesa)

Twierdzenie (Statman)

*'Type inhabitation' jest PSPACE-zupełny.*

# Type inhabitation

## Problem

Dla danych  $\Gamma, \sigma$  czy istnieje term  $M$  taki że  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .

(algorytm Ben-Yellesa)

## Twierdzenie (Statman)

*'Type inhabitation' jest PSPACE-zupełny.*



## Problem

Dla danych  $\Gamma, M$  czy istnieje typ  $\sigma$  taki że  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .

(unifikacja pierwszego rzędu)

## Twierdzenie

*'Type reconstruction' jest P-zupełny.*

## Problem

Dla danych  $\Gamma, M$  czy istnieje typ  $\sigma$  taki że  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .

(unifikacja pierwszego rzędu)

## Twierdzenie

*'Type reconstruction' jest P-zupełny.*

## Problem

Dla danych  $\Gamma, M$  czy istnieje typ  $\sigma$  taki że  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .

(unifikacja pierwszego rzędu)

## Twierdzenie

*'Type reconstruction' jest P-zupełny.*

## Typy (formuły typów)

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- zmienne typowe  $\alpha, \beta, \dots$  są typami,
- jeśli  $\tau$  i  $\tau'$  są typami to  $\tau \rightarrow \tau'$  jest typem.

## Schematy typów

- formuła typu jest schematem typu,
- jeśli  $\sigma$  jest schematem typu a  $\alpha$  zmienną to  $\forall \alpha. \sigma$  jest schematem typu.

## Typy (formuły typów)

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- zmienne typowe  $\alpha, \beta, \dots$  są typami,
- jeśli  $\tau$  i  $\tau'$  są typami to  $\tau \rightarrow \tau'$  jest typem.

## Schematy typów

- formuła typu jest schematem typu,
- jeśli  $\sigma$  jest schematem typu a  $\alpha$  zmienną to  $\forall \alpha. \sigma$  jest schematem typu.

## Typy (formuły typów)

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- zmienne typowe  $\alpha, \beta, \dots$  są typami,
- jeśli  $\tau$  i  $\tau'$  są typami to  $\tau \rightarrow \tau'$  jest typem.

## Schematy typów

- formuła typu jest schematem typu,
- jeśli  $\sigma$  jest schematem typu a  $\alpha$  zmienną to  $\forall \alpha. \sigma$  jest schematem typu.

## Typy (formuły typów)

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- zmienne typowe  $\alpha, \beta, \dots$  są typami,
- jeśli  $\tau$  i  $\tau'$  są typami to  $\tau \rightarrow \tau'$  jest typem.

## Schematy typów

- formuła typu jest schematem typu,
- jeśli  $\sigma$  jest schematem typu a  $\alpha$  zmienną to  $\forall \alpha. \sigma$  jest schematem typu.

# Hindley-Milner type system

## Typy (formuły typów)

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- zmienne typowe  $\alpha, \beta, \dots$  są typami,
- jeśli  $\tau$  i  $\tau'$  są typami to  $\tau \rightarrow \tau'$  jest typem.

## Schematy typów

- formuła typu jest schematem typu,
- jeśli  $\sigma$  jest schematem typu a  $\alpha$  zmienną to  $\forall \alpha. \sigma$  jest schematem typu.



# Hindley-Milner type system

## Typy (formuły typów)

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- zmienne typowe  $\alpha, \beta, \dots$  są typami,
- jeśli  $\tau$  i  $\tau'$  są typami to  $\tau \rightarrow \tau'$  jest typem.

## Schematy typów

- formuła typu jest schematem typu,
- jeśli  $\sigma$  jest schematem typu a  $\alpha$  zmienną to  $\forall \alpha. \sigma$  jest schematem typu.

# Hindley-Milner type system

## Typy (formuły typów)

- typy atomowe  $p, q, r, \dots$  są typami,
- zmienne typowe  $\alpha, \beta, \dots$  są typami,
- jeśli  $\tau$  i  $\tau'$  są typami to  $\tau \rightarrow \tau'$  jest typem.

## Schematy typów

- formuła typu jest schematem typu,
- jeśli  $\sigma$  jest schematem typu a  $\alpha$  zmienną to  $\forall \alpha. \sigma$  jest schematem typu.

# Hindley-Milner type system

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma} \quad [\text{Var}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash e_0 \ e_1 : \tau'} \quad [\text{App}]$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x . e : \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{Abs}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash \text{let } x = e_0 \text{ in } e_1 : \tau} \quad [\text{Let}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma' \quad \sigma' \sqsubseteq \sigma}{\Gamma \vdash e : \sigma} \quad [\text{Inst}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma \quad \alpha \notin \text{free}(\Gamma)}{\Gamma \vdash e : \forall \alpha . \sigma} \quad [\text{Gen}]$$

(w powyższych regułach  $\tau, \tau'$  muszą być formułami typu,  $\sigma$  może być schematem)

## Przykład

**let**  $id = (\lambda x.x)$  **in**  $(\lambda a\ b.K(id\ a)(id\ b))$

# Hindley-Milner type system

## Dodatkowo:

- Typy dla stałych np.

`PAIR: x->y->Pair x y, fst:Pair x y -> x ,...`

- Rekurencyjne definicje w `let`:

`let`

```
length ls = if (empty l)
  then 0
  else (+ 1 (length (tail ls)))
```

`in ...`

- Pattern matching...

## Dodatkowo:

- Typy dla stałych np.

`PAIR: x→y→Pair x y, fst:Pair x y → x ,...`

- Rekurencyjne definicje w `let`:

```
let
  length ls = if (empty l)
    then 0
    else (+ 1 (length (tail ls)))
in ...
```

- Pattern matching...

## Dodatkowo:

- Typy dla stałych np.

`PAIR: x->y->Pair x y, fst:Pair x y -> x ,...`

- Rekurencyjne definicje w `let`:

`let`

```
length ls = if (empty l)
  then 0
  else (+ 1 (length (tail ls)))
```

`in ...`

- Pattern matching...

## Dodatkowo:

- Typy dla stałych np.

`PAIR: x->y->Pair x y, fst:Pair x y -> x ,...`

- Rekurencyjne definicje w `let`:

`let`

```
length ls = if (empty l)
  then 0
  else (+ 1 (length (tail ls)))
```

`in ...`

- Pattern matching...



## Składnia

- stałe S,K są kombinatorami,
- jeśli  $\alpha$  oraz  $\beta$  są kombinatorami to  $(\alpha \cdot \beta)$  jest kombinatorem

## Reguły

$$K\alpha\beta \Rightarrow \alpha$$

$$S\alpha\beta\gamma \Rightarrow ((\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \gamma))$$

## Własności

- Równoważny ekstensjonalnemu rachunkowi lambda.
- Turing-complete.

## Składnia

- stałe S,K są kombinatorami,
- jeśli  $\alpha$  oraz  $\beta$  są kombinatorami to  $(\alpha \cdot \beta)$  jest kombinatorem

## Reguły

$$K\alpha\beta \Rightarrow \alpha$$

$$S\alpha\beta\gamma \Rightarrow ((\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \gamma))$$

## Własności

- Równoważny ekstensjonalnemu rachunkowi lambda.
- Turing-complete.

# Rachunek kombinatorów S,K

## Składnia

- stałe S,K są kombinatorami,
- jeśli  $\alpha$  oraz  $\beta$  są kombinatorami to  $(\alpha \cdot \beta)$  jest kombinatorem

## Reguły

$$K\alpha\beta \Rightarrow \alpha$$

$$S\alpha\beta\gamma \Rightarrow ((\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \gamma))$$

## Własności

- Równoważny ekstensjonalnemu rachunkowi lambda.
- Turing-complete.

# Rachunek kombinatorów S,K

## Składnia

- stałe S,K są kombinatorami,
- jeśli  $\alpha$  oraz  $\beta$  są kombinatorami to  $(\alpha \cdot \beta)$  jest kombinatorem

## Reguły

$$K\alpha\beta \Rightarrow \alpha$$

$$S\alpha\beta\gamma \Rightarrow ((\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \gamma))$$

## Własności

- Równoważny ekstensjonalnemu rachunkowi lambda.
- Turing-complete.

# Rachunek kombinatorów S,K

## Składnia

- stałe S,K są kombinatorami,
- jeśli  $\alpha$  oraz  $\beta$  są kombinatorami to  $(\alpha \cdot \beta)$  jest kombinatorem

## Reguły

$$K\alpha\beta \Rightarrow \alpha$$

$$S\alpha\beta\gamma \Rightarrow ((\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \gamma))$$

## Własności

- Równoważny ekstensjonalnemu rachunkowi lambda.
- Turing-complete.

# Rachunek kombinatorów S,K

## Składnia

- stałe S,K są kombinatorami,
- jeśli  $\alpha$  oraz  $\beta$  są kombinatorami to  $(\alpha \cdot \beta)$  jest kombinatorem

## Reguły

$$K\alpha\beta \Rightarrow \alpha$$

$$S\alpha\beta\gamma \Rightarrow ((\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \gamma))$$

## Własności

- Równoważny ekstensjonalnemu rachunkowi lambda.
- Turing-complete.

# Rachunek kombinatorów S,K

## Składnia

- stałe S,K są kombinatorami,
- jeśli  $\alpha$  oraz  $\beta$  są kombinatorami to  $(\alpha \cdot \beta)$  jest kombinatorem

## Reguły

$$K\alpha\beta \Rightarrow \alpha$$

$$S\alpha\beta\gamma \Rightarrow ((\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \gamma))$$

## Własności

- Równoważny ekstensjonalnemu rachunkowi lambda.
- Turing-complete.

# Translacja $\lambda$ -termów do rachunku kombinatorów.

$$\begin{cases} Tr[A \cdot B] &= Tr[A] \cdot Tr[B] \\ Tr[\lambda x. A] &= Pr_x[A] \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{cases} Pr_x[A' \cdot B'] &= S(Pr_x[A'])(Pr_x[B']) \\ Pr_x[x] &= I \quad (= SKK) \\ Pr_x[y] &= K \ y \end{cases}$$



# Problem 1.

Niepotrzebne propagacje w poddrzewach, które nie zawierają zmiennej.

## Rozwiązanie 1

Wcześniej zapplikować  $K$ .

## Rozwiązanie 2

Dodać kombinatory:

$$Bfgx \Rightarrow f(gx)$$

$$Cfgx \Rightarrow (fx)g$$

# Problem 1.

Niepotrzebne propagacje w poddrzewach, które nie zawierają zmiennej.

## Rozwiązanie 1

Wcześniej zapplikować K.

## Rozwiązanie 2

Dodać kombinatory:

$$Bfgx \Rightarrow f(gx)$$

$$Cfgx \Rightarrow (fx)g$$

# Problem 1.

Niepotrzebne propagacje w poddrzewach, które nie zawierają zmiennej.

## Rozwiązanie 1

Wcześniej zapplikować K.

## Rozwiązanie 2

Dodać kombinatory:

$$Bfgx \Rightarrow f(gx)$$

$$Cfgx \Rightarrow (fx)g$$

## Problem 2.

$$\begin{aligned} & \lambda x_4 x_3 x_2 x_1. p \ q \\ \rightarrow & \lambda x_4 x_3 x_2. S \ p^{(1)} \ q^{(1)} \\ \rightarrow & \lambda x_4 x_3. S \ (B \ S \ p^{(2)}) \ q^{(2)} \\ \rightarrow & \lambda x_4. S \ (B \ S \ (B \ (B \ S) \ p^{(3)})) \ q^{(3)} \\ \rightarrow & S \ (B \ S \ (B \ (B \ S) \ (B \ (B \ (B \ S)) \ p^{(4)}))) \ q^{(4)} \end{aligned}$$

## Problem 2 - c.d.

### Rozwiązanie

$$S' c f g x \Rightarrow c(fx)(gx)$$

$$\begin{aligned} & \lambda x_4 x_3 x_2 x_1. p \ q \\ \rightarrow & \lambda x_4 x_3 x_2. S \ p^{(1)} \ q^{(1)} \\ \rightarrow & \lambda x_4 x_3. S' \ S \ p^{(2)} \ q^{(2)} \\ \rightarrow & \lambda x_4. S' \ (S' \ S) \ p^{(3)} \ q^{(3)} \\ \rightarrow & S' \ (S' \ (S' \ S)) \ p^{(4)} \ q^{(4)} \end{aligned}$$

Analogicznie definiujemy  $C', B'$ .

## Problem 2 - c.d.

### Rozwiązanie

$$S' c f g x \Rightarrow c(fx)(gx)$$

$$\begin{aligned} & \lambda x_4 x_3 x_2 x_1. p \ q \\ \rightarrow & \lambda x_4 x_3 x_2. S \ p^{(1)} \ q^{(1)} \\ \rightarrow & \lambda x_4 x_3. S' \ S \ p^{(2)} \ q^{(2)} \\ \rightarrow & \lambda x_4. S' \ (S' \ S) \ p^{(3)} \ q^{(3)} \\ \rightarrow & S' \ (S' \ (S' \ S)) \ p^{(4)} \ q^{(4)} \end{aligned}$$

Analogicznie definiujemy  $C', B'$ .

## Problem 2 - c.d.

### Rozwiązanie

$$S' c f g x \Rightarrow c(fx)(gx)$$

$$\begin{aligned} & \lambda x_4 x_3 x_2 x_1. p \ q \\ \rightarrow & \lambda x_4 x_3 x_2. S \ p^{(1)} \ q^{(1)} \\ \rightarrow & \lambda x_4 x_3. S' \ S \ p^{(2)} \ q^{(2)} \\ \rightarrow & \lambda x_4. S' \ (S' \ S) \ p^{(3)} \ q^{(3)} \\ \rightarrow & S' \ (S' \ (S' \ S)) \ p^{(4)} \ q^{(4)} \end{aligned}$$

Analogicznie definiujemy  $C', B'$ .