Maciej Bartos *216719*

Kamil Celejewski *216733*

Rok akademicki 2017/18

Poniedziałek, 10.10

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 4 - całkowanie numeryczne

Cel zadania:

Celem zadania czwartego było stworzenie programu implementującego dwie metody całkowania numerycznego: złożoną kwadraturę Newtona-Cotesa opartą na trzech węzłach (wzór Simpsona) oraz przydzielony przez prowadzącego wariant kwadratury Gaussa:

Wariant 1: całkowanie na przedziale [−1,1] z wagą $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (wielomiany Czebyszewa) całek postaci:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)$$

Opis rozwiązania:

Całkowanie numeryczne sprowadza się do numerycznego wyznaczenia wartości całki $I = \int_a^b f(x)dx$. W metodzie Newtona Cotesa funkcja f (x) jest przybliżana wielomianami interpolacyjnymi Lagrange'a $P(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)$, gdzie $L_i(x) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$.

Jeżeli funkcję f(x) przybliżać będziemy wielomianem stopnia drugiego (parabolą) P2(x) przechodzącą przez trzy węzły {x1, x2, x3} to otrzymamy metodę Simpsona. Znając wartości y0 , y1 , y2 w 3 punktach x0 , x1 , x2 gzie x2 – x1 = x1 – x0 =h przybliża się funkcję wielomianem Lagrange'a i, całkując w przedziale [x0 , x2] otrzymuje przybliżoną wartość całki:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Aby wyliczyć całkę z funkcji np: $F(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{1-x^2}}$ na przedziale (-1,1) za pomocą metody Simsona należy odpowiednio podzielić tą funkcje na coraz to mniejsze przedziały i wyliczone wartości całek na tych przedziałach zsumować ze sobą.

Kwadratury Gaussa są to kwadratury oparte na ustalonej liczbie węzłów. Uzyskujemy je dobierając zarówno współczynniki (wagi), jak i węzły kwadratury tak aby wyrażenie $P(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$ jak najlepiej przybliżało całkę $I = \int_a^b f(x)dx$. W przypadku wariantu pierwszego kwadratura z wagą $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nazywana jest kwadraturą Gaussa-Czebyszewa.

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

Gdzie ti to pierwiastki n-tego wielomianu Czebyszewa.

Wyniki

$$F(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Przy dokładności 0.1 na przedziale (-1,1)

Dla Newtona Cotesa: 11.7644

Dla Gaussa-Czebyszewa: 10.9956

$$F(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Przy dokładności 0.1 na przedziale (-1,1)

Dla Newtona Cotesa: 2.57801

Dla Gaussa-Czebyszewa: 2.40407

$$F(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Przy dokładności 0.1 na przedziale (-1,1)

Dla Newtona Cotesa: 2.05725

Dla Gaussa-Czebyszewa: 1.8138

Wnioski

Kwadratura Gaussa-Czebyszewa pozwala wyliczyć całki tylko z funkcji gdzie g(x)=f(x)·w(x) gdzie $\mathrm{w(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}$ natomiast całkowanie za pomocą metody Simpsona pozwala policzyć całkę z dowolnej funkcji g(x). Najdokładniejszymi kwadraturami są kwadratury Gaussa lecz są one trudniejsze w implementacji natomiast kwadratury Newtoona-Cotesa są prostsze w implementacji lecz wyniki nie są tak dokładne jak w przypadku kwadratur Gaussa.