

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 2 – metoda eliminacji Gaussa

Opis rozwiązania

Metoda eliminacji Gaussa składa się z dwóch części. Pierwsza z nich polega na sprowadzeniu układu do macierzy trójkątnej górnej, a druga na rozwiązaniu stworzonej macierzy trójkątnej.

1).Sprowadzanie do macierzy trójkątnej:

Polega na eliminacji, redukcji do zera elementów znajdujących się pod główną przekątną.

Wzór k-tej eliminacji:

$$a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$$

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - \frac{a_{k,j}^{(k-1)} a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{b_k^{(k-1)} a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$j = k, k+1, \dots, n;$$

a_{ij} – macierz współczynników

b_i – macierz wyrazów wolnych

n – liczba wierszy, kolumn macierzy wyznaczników

2).Rozwiązanie stworzonej macierzy trójkątnej przy pomocy algorytmu podstawiania w tył:

Po zredukowaniu macierzy do postaci trójkątnej należy wyliczyć kolejne niewiadome korzystając z algorytmu podstawiania w tył.

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}^{(i-1)} x_j}{a_{i,i}^{(i-1)}}$$

$$i = n-1, n-2, \dots, 1;$$

Wyniki

Program sprawdza macierz pod względem występowanie w niej miejsc zerowych, jeśli w którymś rzędzie macierzy współczynników występują same miejsca zerowe, a w odpowiadającym wierszu macierzy wyrazów wolnych występuje liczba różna od zera program wypisuje komunikat o sprzeczności liczonego układu.

Np. dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ -4 & -10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Program wpisze ,że jest układ jest spreczny

W przypadku, gdy nie jest wyzerowany cały wiersz macierzy współczynników i na odpowiadającym wierszu macierzy wyrazów wolnych występuje zero program wypisze komunikat o nieoznaczoności układu.

Np. dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ -4 & -10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ -40 \end{bmatrix}$$

Program wypisze ,że jest układ jest nieoznaczony

Gdy żaden wiersz macierzy współczynników nie będzie wyzerowany program wypisze wyliczone niewiadome np.:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 33 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Program wypisze że:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Wnioski

Sam algorytm metody eliminacji Gaussa nie pozwala na rozwiązanie dowolnego układu równań. Trzeba uwzględnić możliwość wystąpienia układów sprzecznych i nieoznaczonych oraz możliwość zamiany miejscami wierszy macierzy.

W programie została dodana funkcja, która sprawdza czy wyliczone wartości w macierzach są w przybliżeniu równe zero. Jeśli tak, wartość zostaje zamieniona na zero. Kolejna funkcja służy do rozróżnienia układów sprzecznych i nieoznaczonych przez sprawdzenie ilości zer w danym wierszu oraz porównanie wyniku z odpowiadającym wierszem macierzy wyrazów wolnych.