

# **Dlaczego AMA musiała upaść:**

## **Analiza strukturalnych wad frameworku**

Maciej Buczak

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego

Warszawa, Polska

e-mail: [maciej\\_buczak@sggw.edu.pl](mailto:maciej_buczak@sggw.edu.pl)

 <https://orcid.org/0009-0000-7771-5707>

**Wersja: listopad 2025**

---

### **STRESZCZENIE**

Z dniem 1 stycznia 2025 r., po dwudziestu latach funkcjonowania, Metoda Zaawansowanego Pomiaru (AMA) dla ryzyka operacyjnego została wycofana. Głównym powodem była „utrata zaufania” do metody, wynikająca z dużej niestabilności wyników i znaczących różnic w kapitałach raportowanych przez banki o podobnym profilu ryzyka. Niniejsza praca wykazuje, że przyczyny niepowodzenia AMA tkwiły nie w implementacjach bankowych, ale w samej konstrukcji frameworku. Analiza mechaniki aktuarialnej (złożenie rozkładów częstości i dotkliwości) w połączeniu z wymogami stosowania rozkładów ciężko-ogonowych prowadziły do trzech nieuniknionych efektów:

- (1) Na dalekich kwantylach agregat rocznych strat jest zdominowany przez pojedynczą ekstremalną stratę (dominacja  $>85\%$ , a często dużo powyżej  $90\%$  dla typowych parametrów rozkładów).
- (2) Strata ta zajmuje na rozkładzie pojedynczych strat kwantyl znacznie wyższy (0.9999, 0.99999 i więcej) niż wymagany przez regulatora kwantyl agregatu (0.999) - czyli poza możliwościami współczesnych metod modelowania.
- (3) Wartość tej ekstremalnej straty może zależeć, w sposób nonsensowny, od liczby drobnych zdarzeń operacyjnych - więcej małych strat generuje wyższy poziom kwantyli dotkliwości straty, co jest sprzeczne z logiką biznesową.

Te własności, których istnienie - dla szerokiego zakresu rozkładów i parametrów - potwierdzono symulacyjnie w ramach niniejszego opracowania, są wbudowane w strukturę frameworku. Wynikają z nadmiernej złożoności konstrukcji, połączonej z nieadekwatną definicją kluczowych pojęć (rzadkość, sytuacja nieoczekiwana, interpretacja kwantyla 99.9%). Wnioski mają znaczenie uniwersalne: stanowią ostrzeżenie przed analogicznymi błędami w projektowaniu przyszłych standardów regulacyjnych dla innych typów ryzyka: nadłożoność oraz błędne definicje modelowanych problemów prowadzą do systemowego niepowodzenia.

**Słowa kluczowe:** ryzyko operacyjne, Metoda Zaawansowanego Pomiaru AMA, wymogi kapitałowe, rozkłady gruboogonowe, straty nieoczekiwane, częstość strat, dotkliwość strat, Basel II.

**JEL Classification:** G21, G28, C15, C52

## NOTA METODOLOGICZNA

Niniejsza praca przyjmuje następującą metodologię badawczą:

### KROK 1: WYPROWADZENIE WŁASNOŚCI

Na podstawie predefiniowanych założeń frameworku AMA (mechanika aktuarialna, wymogi co do rozkładów, poziom kwantyla 99.9%) wyprowadzone są trzy własności strukturalne, które powinny wystąpić przy określonych warunkach parametrycznych.

### KROK 2: WERYFIKACJA SYMULACYJNA

Każda z wyprowadzonych własności jest zweryfikowana empirycznie metodą Monte Carlo (100,000 iteracji dla każdego scenariusza), poprzez testowanie systematyczne różnych kombinacji rozkładów i parametrów:

- Rozkłady: Weibull, lognormal (w wersjach lekko- i ciężko-ogonowych), a także rozkłady porównawcze (Exponential i Normal)
- Parametry: szeroki zakres wartości parametrów kształtu
- Średnie częstotliwości na poziomie:  $m \in \{1, 10, 100, 1000\}$

### UZASADNIENIE PODEJŚCIA

Celowo nie zostały wykorzystane dane z rzeczywistych implementacji AMA w bankach. Celem pracy jest wykazanie, że zidentyfikowane własności wynikają z samej konstrukcji frameworku i muszą wystąpić u każdego podmiotu stosującego się do wymogów regulacyjnych, niezależnie od szczegółów implementacji.

Innymi słowy: to nie jest analiza tego "co się stało w praktyce", ale wykazanie tego "co MUSIAŁO się stać" przy danych założeniach strukturalnych.

### REZULTAT

Jeśli własności zachodzą dla wszystkich testowanych kombinacji parametrów (w granicach wymogów regulacyjnych), można wnioskować o ich uniwersalnym charakterze - są to efekty wbudowane w sam framework, nie wynik konkretnych wyborów implementacyjnych.

### OGRANICZENIE ZAKRESU BADAŃ

Przedstawione w niniejszym opracowaniu własności to jedynie wycinek szerokiego spektrum problemów modelarskich, z którymi musiały zmierzyć się podmioty sektora bankowego, te które zdecydowały się na wdrożenie metody. Ze względu na potrzebę zwięzłości wypowiedzi, w niniejszym dokumencie ograniczono się jedynie do wysokopoziomowych obserwacji. Poza zakresem publikacji pozostawiono więc obszerny katalog problematycznych kwestii związanych z takimi obszarami jak: dostępność danych do modelowania, integracja baz danych (four data elements), homogeniczność segmentów modelowych, podział modelu na ciało i ogon, problemy estymacyjne (w szczególności w odniesieniu do rozkładów w ogonie) i wiele innych.

## WSTĘP

1 stycznia 2025 r. zgodnie z nową architekturą bezpieczeństwa dla sektora finansowego (przepisy CRR III opublikowane w dn. 31.05.2024 r.) z przestrzeni dopuszczalnych metod wycofana została Metoda Zaawansowanego Pomiaru AMA dla ryzyka operacyjnego. Formuła ta, wdrożona przepisami Basel II (2004) funkcjonowała na rynku przez ostatnie 20 lat. Poddawana była wielokrotnie krytyce, zarówno przez regulatorów, którzy monitorowali jej kolejne wdrożenia i obserwowali skutki jej funkcjonowania, jak i przez sektor bankowy, który z tą metodą zmagał się od strony produkcyjnej. Szerszy kontekst odnoszący się do decyzji o wycofaniu formuły, a także moją, sformułowaną na poziomie ogólnym, ocenę formuły i skuteczności jej funkcjonowania zawarłem w osobnym opracowaniu [Buczak 2024].

W niniejszym artykule przyjrzę się bliżej wybranym elementom formuły Metody Zaawansowanego Pomiaru. Celem będzie wskazanie tych części frameworku, które mogły zdecydować o percepcyjnej przez regulatora nieskuteczności metody i decyzji o ostatecznym wycofaniu metody. Nie będę też zbyt koncentrował się na kwestiach powszechnie w środowisku znanych. Po pierwsze, były one już wielokrotnie podnoszone w sektorze. Po drugie, co uważam za ważniejsze, nie koniecznie to właśnie te szeroko skomentowane kwestie decydowały o losie metody.

## ROZDZIAŁ 1: WPROWADZENIE - RYZYKO OPERACYJNE, REGULATOR, FRAMEWORK

### 1.1 NADZORCZA KONCEPCJA RYZYKA OPERACYJNEGO I FRAMEWORK AMA

Dodanie w ramach pakietu Basel II ryzyka operacyjnego do portfela ryzyk wymagających zabezpieczenia, było skutkiem kilku spektakularnych wydarzeń w sektorze bankowym, których przyczyn dopatrywano się w zdarzeniach o charakterze operacyjnym [Buczak 2024]. Niektóre ze zdarzeń operacyjnych prowadziły nawet do upadków dużych banków. Wydarzenia o tej skali pokazały europejskim nadzorcom istotność zjawiska i potencjalnie groźne wolumeny strat operacyjnych. Ryzyko operacyjne, które od momentu jego ujęcia w Basel II stało się częścią triady ryzyk podlegającej zabezpieczeniu (ryzyko kredytowe, ryzyko rynkowe, ryzyko operacyjne) wymagało, na poziomie regulacyjnym, opracowania adekwatnych metod do kalkulacji zabezpieczeń kapitałowych. Regulator przedstawił trzy dopuszczalne metody wyznaczania tych kapitałów. Dwie z nich (BIA, TSA) to metody nie-statystyczne, oparte o proste kalkulacje arytmetyczne na zmiennych biznesowych. Nie opisywały one zatem realnego profilu ryzyka banku. Trzecią metodą była Metoda Zaawansowanego Pomiaru (Advanced Measurement Approach - AMA), która miała być oparta o wewnętrzne modele banku. Formuła ta miała dawać nadzieję na adekwatne przybliżenie poziomu ryzyka operacyjnego.

Metoda zaawansowanego pomiaru od momentu jej wprowadzenia była przedmiotem wielu eksperckich dyskusji i krytyk. Regulator stworzył dość skomplikowany framework, który miał stanowić fundament do budowy modeli ryzyka operacyjnego. Oprócz szeregu wskazówek i rekomendowanych praktyk pakiet zawierał również istotne warunki brzegowe, w jakich ewentualne konstrukcje modelarskie miały się zmieścić. Jednocześnie jednak pozostawiono duży zakres wolności metodologicznej podmiotom, próbującym się zmierzyć z tym podejściem. Framework był zatem hybrydą nieprzekraczalnych zasad oraz dużej wolności metodologicznej w ramach tych zasad.

W przestrzeni modelowania<sup>1</sup> (przestrzeni budowy modelu zaawansowanego pomiaru AMA) regulator sprecyzował takie oto kluczowe warunki brzegowe<sup>2</sup>:

- wykorzystanie tzw. four data elements (dane wewnętrzne, dane zewnętrzne, dane scenariuszowe, dane o czynnikach otoczenia biznesowego oraz czynnikach kontroli wewnętrznej),
- wymogi dotyczące danych,
- granularność modelowania,
- wymóg osobnego modelowania zjawiska częstości strat oraz dotkliwości strat

---

<sup>1</sup> Sformułowano również cały szereg zasad odnośnie przestrzeni procesowej.

<sup>2</sup> Więcej na ten temat w [Buczak 2024].

- koncepcja złożenia rozkładów częstości i dotkliwości w celu uzyskania rozkładu zagregowanego strat operacyjnych,
- odpowiednie założenia co do rozkładów teoretycznych,
- reguły dotyczące modelowania zależności pomiędzy poszczególnymi segmentami modelowymi,
- poziom poszukiwanego kwantyla (99.9%) będącego poziomem zabezpieczenia banku na ryzyko operacyjne (wymóg kapitałowy).

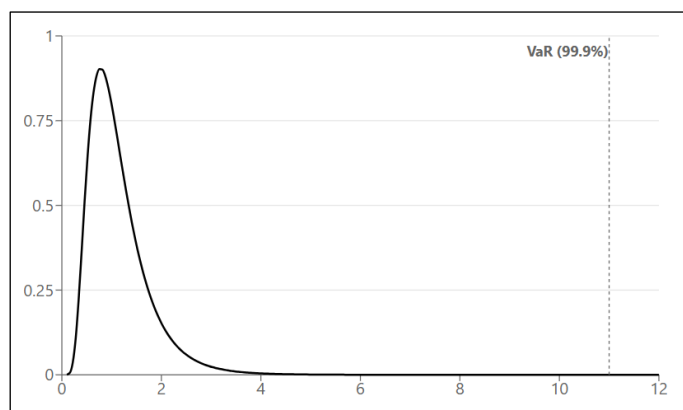
Wskazano również cały szereg oczekiwań, co do praktyk stosowanych w procesach estymacyjnych, weryfikacyjnych i innych technicznych aspektów procesu modelowania.

W oparciu o zestaw skonstruowanych do w/w obszarów reguł podmioty sektora bankowego podejmowały próby budowy dość złożonej konstrukcji modelarskiej, której ambicją miało być odzwierciedlenie realnego profilu ryzyka. W niniejszym artykule przyjrzyć się pewnym elementom takiej hipotetycznej konstrukcji. Skoncentruję się na wyłapaniu środków ciężkości tak złożonego modelu, a następnie będę podążał w kierunku identyfikacji parametrów, które o kształcie i wynikach takich środków ciężkości mogły decydować. Być może niektóre obserwacje okażą się nieoczywiste – tym lepiej. Poszukiwanie właśnie takich, z pozoru bez znaczenia, a w rzeczywistości mających decydujący wpływ, parametrów, jest dla mnie najbardziej inspirującym kierunkiem poszukiwań.

## 1.2 WYSOKOPOZIOMOWY OPIS FRAMEWORKU AMA

Fundamentalnym elementem zdefiniowanej w Basel II Metody Zaawansowanego Pomiaru AMA, elementem konstrukcji, do którego powinny zbiegać wszystkie możliwe podejścia<sup>3</sup>, był rozkład zagregowanych strat operacyjnych. Był to centralny obiekt koncepcji, rozkład ten opisywał wielkość rocznej straty i przypisane jej prawdopodobieństwa. Wymóg kapitałowy, który następnie był przekształcany na RWA dla ryzyka operacyjnego, był wyznaczany poprzez odczyt kwantyla 99.9% z tego rozkładu.

*Rys. 1 Rozkład zagregowanych strat ryzyka operacyjnego i kwantyl 99.9% (wymóg kapitałowy)*



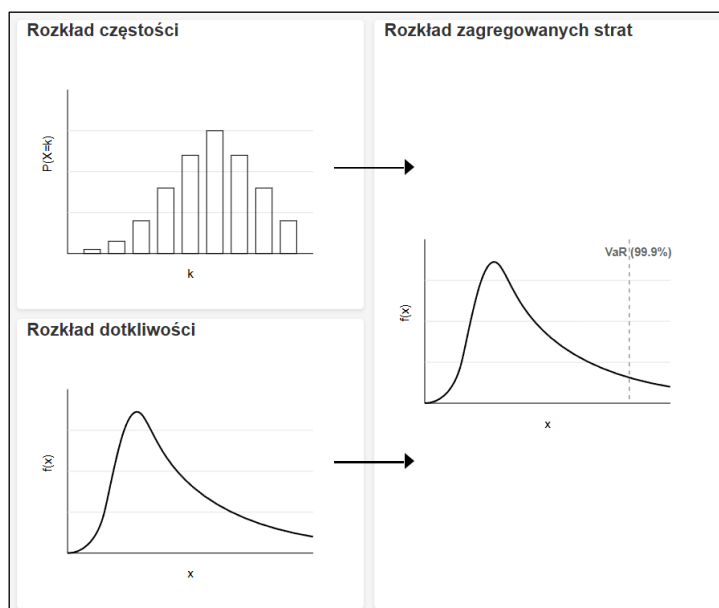
*Źródło: opracowanie własne*

Zasadniczą część procesu modelowania we frameworku AMA dotyczyła natomiast sposobu, w jaki należy ten zagregowany rozkład skonstruować. W tej części regulator wyznaczył pewne wytyczne. Przede wszystkim wskazano, zapożyczone z sektora ubezpieczeń, podejście aktuarialne, jako podstawę do wyprowadzenia rozkładu zagregowanego. Implikowało to podział na dwa zjawiska podlegające modelowaniu: częstość zdarzeń operacyjnych, dotkliwość zdarzeń operacyjnych. Złożenie tych zjawisk (metodami analitycznymi, bądź też symulacyjnymi) formowało postać rozkładu zagregowanych strat. Zatem ostateczny wynik modelu (wymóg kapitałowy) zależał od: (a) wartości zwracanych przez rozkład

<sup>3</sup> Niezależnie od różnic w podejściach reprezentowanych przez różne podmioty podejmujące próbę budowy modelu AMA.

częstości, (b) wartości zwracanych przez rozkład dotkliwości, (c) od sposobu ich złożenia oraz (d) od prawidłowego odczytu kwantyla z rozkładu zagregowanych strat.

Rys. 2 Mechanika składania rozkładu zagregowanych strat



Źródło: opracowanie własne

W pierwszej części artykułu przyjrę się mechanice, która stoi za konstrukcją rozkładu zagregowanych strat, w szczególności będę próbował wychwycić decydujące elementy tej mechaniki, które są odpowiedzialne za wartość dalekiego kwantyla (99.9%).

## ROZDZIAŁ 2: OPIS KLUCZOWYCH I PROBLEMATYCZNYCH ELEMENTÓW FRAMEWORKU AMA

### 2.1 STRUKTURALNE ZAŁOŻENIA FRAMEWORKU AMA

#### 2.1.1 PRZED CZYM SIĘ ZABEZPIECZAMY?

Paragraf 667 regulacji Basel II mówi: "Biorąc pod uwagę ciągłą ewolucję podejść analitycznych do ryzyka operacyjnego, Komitet nie określa konkretnego podejścia ani założeń dotyczących rozkładów używanych do generowania miary ryzyka operacyjnego na potrzeby kapitału regulacyjnego. Jednakże bank musi być w stanie wykazać, że jego podejście uwzględnia potencjalnie poważne zdarzenia 'ogonowe'. Niezależnie od zastosowanego podejścia, bank musi wykazać, że jego miara ryzyka operacyjnego spełnia standard wiarygodności porównywalny do metody wewnętrznych ratingów dla ryzyka kredytowego (tj. porównywalny z jednorocznym okresem utrzymywania i przedziałem ufności na poziomie 99,9 percentyla)."<sup>4</sup>

Powyższy przepis odnosi się do trzech ważnych aspektów, które należy rozpatrzyć na początku, zanim zostaną sformułowane, dalsze, bardziej szczegółowe założenia dotyczące modelu ryzyka operacyjnego. Pierwszym z nich jest problem zdefiniowania czym w zasadzie jest sytuacja nieoczekiwana, przed którą instytucja finansowa powinna się zabezpieczyć. Drugi dotyczy poziomu

<sup>4</sup> "Given the continuing evolution of analytical approaches for operational risk, the Committee is not specifying the approach or distributional assumptions used to generate the operational risk measure for regulatory capital purposes. However, a bank must be able to demonstrate that its approach captures potentially severe 'tail' loss events. Whatever approach is used, a bank must demonstrate that its operational risk measure meets a soundness standard comparable to that of the internal ratings-based approach for credit risk (i.e. comparable to a one year holding period and a 99.9th percentile confidence interval).".

zabezpieczenia sformułowanego w sensie statystycznym. Trzecia kwestia związana jest z definicją „rzadkości”. Tą trzecią kwestią zajmę się najpierw.

### 2.1.2 CZYM JEST RZADKOŚĆ?

Regulacja Basel II miała wspomóc bezpieczeństwo sektora finansowego. Koncepcja RWA i kapitałów zabezpieczających była wycelowana w sytuacje nieoczekiwane i zapewnienie przetrwania instytucjom finansowym w takich rzadkich okolicznościach.

Rzadkich, czyli jakich? Regulator koncepcję rzadkości sformułował na osi czasu. Oznacza to, że chcemy się ochronić przed sytuacją występującą nie częściej niż raz na jakiś czas. To istotne założenie, które ma swoje konsekwencje. Można w sposób odmienny opisać zjawisko, w zależności od osi, na jakiej zdecydujemy się je umieścić. Ma to szczególne znaczenie w odniesieniu do innych obserwacji (tych typowych, a więc nierzadkich), które zdecydujemy się tej samej osi umieścić. Będą one stanowić punkt odniesienia (czasami mający decydujące znaczenie, co postaram się wykazać później) dla obserwacji rzadkiej. Inne obserwacje nierzadkie (typowe, przeciętne) będą umieszczone na osi czasu (tu obserwacjami nierzadkimi będą lata, gdzie poziom zjawiska jest typowy, oczekiwany), a inne na osi wartości (tu obserwacjami nierzadkimi są wartości na poziomie przeciętnym, typowym). Możemy np. mieć do dyspozycji takie zbiory obserwacji: 10 lat o wartościach typowych lub 300 wartości o wartościach typowych. To zasadnicza różnica w sposobie spojrzenia na modelowane zjawisko. To rozróżnienie wpływa na postrzeganie czym jest obserwacja rzadka (skrajna), od czego zależy taka jej interpretacja i jak rozumieć prawdopodobieństwa jej przypisane.

### 2.1.3 PROBLEM Z KWANTYLEM 99.9%

Poziom odczytu kwantyla (99.9%) zaproponowany przez nadzorcę, spójny z poziomami określonymi dla ryzyka kredytowego oraz rynkowego, budził od początku wiele kontrowersji. Ogniskowały się one wokół percepcji nadmiernego konserwatyzmu. Wskazywano skutki przyjęcia tak wysokiego poziomu: duże problemy z wiarygodnością wyniku na tak dalekim kwantylu, a także bardzo wysokie poziomy kapitałów korespondujące z poziomem 99.9%. Nadzorca nie wsłuchał się w ten głos. Poziom został utrzymany.

Za takim postrzeganiem w/w kwantyla jako nadmiernie konserwatywnego, stoi pewna zakorzeniona intuicja związana z jego interpretacją. Intuicja ta wskazuje na zintegrowanie pojęcia kwantyla rozkładu z horyzontem czasu jaki jest domniemany w modelowaniu badanego zjawiska. W naszym przypadku horyzont został wskazany explicite jako roczny. Oznaczało to, że model zaawansowanego pomiaru AMA miał mieć zdolność do wyznaczania wartości oczekiwanej, którą była roczna wartość strat operacyjnych (czyli suma wszystkich rocznych strat), jak również do wyznaczenia poziomu strat nieoczekiwanych (99.9%) rozumianych również jako suma rocznych strat. W odniesieniu do poziomów nieoczekiwanych można powiedzieć, że wyznaczenie zabezpieczeń kapitałowych (wymogu kapitałowego) na poziomie odczytu kwantyla 99.9% rozkładu zagregowanych strat miało uchronić bank przed łączną kwotą rocznych strat, jaka zrealizuje się w tym wyjątkowo niepomyślnym roku. Integracja pojęcia poziomu kwantyla z horyzontem badania jest całkowicie zasadna. Takie rozumowanie prowadzi jednak do powszechnie przyjmowanego rozumowania dotyczącego interpretacji kwantyla 99.9%, jako poziomu rocznych strat występujących z prawdopodobieństwem 1 raz na 1000 lat. Rozumowanie to jest również wspierane przez nadzorcę: "Tylko w ograniczonych przypadkach, na przykład, gdy największy punkt danych jest wykazany jako większy lub równy zdarzeniu występującemu rzadziej niż raz na 1000 lat, użycie krzywych empirycznych do oszacowania ogona może być zaakceptowane w modelach SBA."<sup>5</sup>

Takie podejście ma swoje konsekwencje metodologiczne. Nie jest to jednak w moim przekonaniu podejście poprawne.

---

<sup>5</sup> "Just in limited cases, for example when the biggest data point is demonstrated to be larger or equal in amount to the event that occurs less than once in 1000 years, the use of empirical curves to estimate the tail may be accepted in SBA models."

## 1 raz na 1000 lat

Przyjęcie tak powszechnie stosowanej interpretacji kwantyla 99.9% prowadzi do rozumowania, skutkiem którego całkiem zasadna wydaje się opinia o nadmiernym konserwatyzmie kwantyla. Jak bowiem można oczekiwać, żeby zabezpieczyć się przed zjawiskiem, które występuje z częstotliwością raz na 1000 lat? Jakże zastosować podejście, żeby chociaż spróbować przybliżyć się do hipotetycznej sytuacji o takiej częstotliwości i wyznaczyć dla niej spodziewany wolumen straty. Wydaje się, że takie, wspierane przez regulatora podejście, od początku podważa sensowność i racjonalność podejmowanego wysiłku modelarskiego. Może zatem od początku nastawienie sektora było takie, jakie zazwyczaj się przyjmuje, gdy ma się do wykonania nieracjonalne przedsięwzięcie? A przecież to po prostu nie jest poprawna i upoważniona interpretacja kwantyla 99.9%.

Rzeczywiście nie sposób wyobrazić sobie sytuacji, która ma wystąpić za 1000 lat (a także jej finansowych konsekwencji, zresztą być może w tym czasie nikt nie będzie posługiwał się pojęciami finansowymi). Tak samo trudno byłoby przewidzieć hipotetycznemu modelarzowi w roku 1000 n.e. krach na giełdzie w roku 2000. To są odległości czasowe, które przekreślają jakąkolwiek możliwość ujęcia zdarzeń umieszczonych w tych odległościach na jednej osi. Z całą pewnością nie możemy mówić o zgodności przyczyn tych oddalonych od siebie wydarzeń, nie należą one do homogenicznej klasy, nie mają wspólnych własności iid (independent and identically distributed). Interpretacja ta nie wynika również ze sposobu w jaki powstaje rozkład zagregowany (złożenie rozkładów częstości i dotkliwości), z którego odczytywany jest kwantyl (99.9%). Nie jest to więc trafna interpretacja.

## 1 raz na 1000 możliwych scenariuszy

Opierając się na prawach statystyki, jedyne co możemy powiedzieć o odczycie kwantyla 99.9% z rozkładu zagregowanych rocznych strat, to to że raz na 1000 takich odczytów z rozkładu może wystąpić wartość, taka, która stoi przy kwantylu 99.9%. Należy zauważyć, że odległości czasowe (np. 1 raz na 1000 lat) nie są w żaden sposób wpisane w konstrukcję rozkładu zagregowanych strat. Rozkład ten powstaje przez złożenie różnych możliwości wystąpień rocznej liczby strat i odpowiadającym temu różnych możliwości kwot strat dla tych liczebności. Rozkład zagregowanych strat reprezentuje zatem raczej potencjał możliwości dla rocznych zagregowanych strat, to znaczy jaka jest skala (dyspersja) możliwych wystąpień agregatów rocznych strat. Wydaje się zatem, że najbardziej adekwatną interpretacją kwantyla 99.9% będzie taka, która mówi, że wartość stojąca przy tym kwantylu to wartość przedostatniego, z 1000, najgorszego możliwego scenariusza. Dzisiejszego scenariusza, takiego, który miałby szansę się zrealizować w ciągu najbliższego roku.

Aby uwidocznić różnice w interpretacji i ich skutki posłużę przykładem, w którym do tego samego pytania przykładane są różne odpowiedzi wynikające z różnego rozumienia kwantyla.

### PRZYKŁAD

*Czy jest możliwe, że Polska będzie potentatem na rynku produkcji samochodów?*

- A. *Odpowiedź na poziomie kwantyla 99.9% rozumianego jako 1 raz na 1000 lat: **to jest możliwe** (w tak długim czasie możliwe jest całkowite przetasowanie struktury sił ekonomicznych na świecie)*
- B. *Odpowiedź na poziomie kwantyla 99.9% rozumianego jako 1 raz na 1000 scenariuszy: **to nie jest możliwe** (jest oczywiste, że nawet przy najbardziej korzystnych okolicznościach nie jest możliwe w ciągu roku zdominowanie światowego rynku samochodów)*

## Potencjalne zawężenia interpretacji

Należy jednak uważać również na przeciwną interpretację, zbytnio redukującą przestrzeń możliwości. Mam tu na myśli sytuację, w której symulujemy wewnątrz dostępnych informacji (np. bootstrapping na bazie danych wewnętrznych) i na tej podstawie ustanawiamy przestrzeń możliwych scenariuszy. To zbytnie ograniczenie. Trzeba zatem odpowiednio zasilić przestrzeń naszej wiedzy

(reprezentowanej przez dane wewnętrzne) o takie scenariusze, które tu i teraz mogą wystąpić, chociaż w naszych dotychczasowych doświadczeniach ich nie zaobserwowaliśmy.

### **Poprawna interpretacja kwantyla a pojęcie rzadkości**

Przedstawione tu rozumowanie dotyczące poprawnej interpretacji kwantyla 99.9% jako jeden na tysiąc realnych rocznych scenariuszy (tu i teraz, czyli w ciągu najbliższego roku) doprecyzowuje pojęcie rzadkości jakie będzie wynikać z takiego rozumowania. Rzadkość powinna w takim przypadku być interpretowana jako wyjątkowy, pod względem wartości strat operacyjnych, rok. Ten nietypowy rok jest umieszczony jednak na osi razem z innymi okresami rocznymi, które mogłyby się wydarzyć dzisiaj, a nie na linearnej, historycznej osi czasu. Jest to więc rzadkość rozumiana jako wyjątkowość jakiegoś scenariusza wydarzeń względem całego spektrum innych scenariuszy, gdzie wskazany explicite okres roczny stanowi jedynie formułę agregującą dla zjawiska ryzyka operacyjnego – jest to agregat wszystkich strat w scenariuszu, a więc strat, które mogą wystąpić w ciągu roku.

#### **2.1.4 PROBLEM ZE ZDEFINIOWANIEM SYTUACJI NIEOCZEKIWANEJ**

Przytoczony wcześniej paragraf 667 regulacji Basel II nie dostarcza żadnej odpowiedzi, w jaki sposób wygenerować koncepcję sytuacji nieoczekiwanej na potrzeby jej pomiaru. Wiadomo jedynie, że sytuacja ta powinna obejmować potencjalnie dotkliwe zdarzenia „ogonowe”. Miara ryzyka powinna też spełniać standard wiarygodności porównywalny do tego jaki zdefiniowano w metodzie IRB dla ryzyka kredytowego (kwantyl 99.9%). To niedodefiniowanie frameworku AMA pozwala na znaczącą dyspersję w pojmowaniu tego, czym jest sytuacja nieoczekiwana.

Nawiązując do metody wskazanej przez nadzorcę jako punkt odniesienia, formuła IRB ma pewien predefiniowany kształt sytuacji nieoczekiwanej. Zgodnie z frameworkiem IRB sytuacja nieoczekiwana to pogorszenie jakości wszystkich ekspozycji (mierzonej przez probability of default) w portfelu banku. A zatem każda ekspozycja w sytuacji nieoczekiwanej będzie opisana wyższym wskaźnikiem PD, niż w sytuacji oczekiwanej<sup>6</sup>. Ekspozycje różnią się między sobą jedynie siłą przesunięcia poziomu PD, która w głównej mierze zależy od klasy ryzyka w jakiej ekspozycja znajduje się obecnie, a więc w sytuacji oczekiwanej. Dodatkowo w metodzie tej predefiniowano rozkład zmiennej PD, po którym w/w przesunięcia się odbywają, jako rozkład normalny.

W metodzie AMA predefiniowano jedynie konstrukcję aktuarialną, która wymagała osobnego i niezależnego modelowania zjawisk: częstości zdarzeń operacyjnych oraz dotkliwości pojedynczej straty. Pozostałe założenia bank stosujący metodę AMA powinien natomiast sformułować samodzielnie, w ramach budowy modelu ryzyka operacyjnego. To znaczące utrudnienie.

Poza opisem właściwości procesów generujących poszczególne składowe zjawiska ryzyka operacyjnego (wybór rozkładów częstości i dotkliwości) kluczową, niezbędną do intelektualnego przetworzenia kwestią, jest określenie rodzaju koncepcji sytuacji nieoczekiwanej:

- a. sytuacji, w której o zagrożeniu i jego skali decyduje pojedyncze wysokie zdarzenie,
- b. sytuacji, w której o zagrożeniu i jego skali decyduje masa/wolumen zdarzeń, bez dominującego zdarzenia ekstremalnego.

Jest to kluczowa refleksja nad naturą zagrożenia, przed którym chcemy się zabezpieczyć. Rozstrzygnięcie tego dylematu wymaga głębokiej znajomości mechanizmów generowania ryzyka operacyjnego w banku, łącznie ze znajomością ich własności w sytuacjach nietypowych (co rzadko jest tożsame z sytuacją oczekiwaną). Taka pogłębiona analiza jest niezbędna dla poprawnego sformułowania modelowanego zjawiska.

Framework bazylejski nie odnosi się jednak do tej kwestii. Osadzenie metody na fundamencie aktuarialnym, z osobnym modelowaniem zjawisk (częstość, dotkliwość) oraz koncepcja składania tych zjawisk miało w swoim zamierzeniu usunąć ten dylemat z drogi. Wzajemna gra zjawisk częstości i dotkliwości miała na poziomie każdej stosującej metodę instytucji rozstrzygnąć ostateczny kształt tej skrajnej, niebezpiecznej sytuacji. Rozkład zagregowanych strat powstały w wyniku złożenia tych dwu w/w zjawisk miał mieć zaszyty jej kształt w swojej definicji, a ta natomiast miała właśnie wynikać z relacji siły tych dwu składowych.

---

<sup>6</sup> Roczne, oczekiwane poziomy PD służą do wyznaczania poziomu rezerw (ECL), a więc poziomu strat oczekiwanych.



Jak widać zagrożenie, jakie miało nas dotknąć na dalekim kwantylu, nie było określone. Liczono natomiast, że znajomość niezależnych sił ryzyka operacyjnego przełoży się na poprawne ukształtowanie sytuacji nieoczekiwanej na kwantylu 99.9% rozkładu zagregowanego. Wyniki takiego rozumowania przedstawię w dalszej części tego artykułu.

Zwrócę uwagę na fakt, że już tu, na poziomie podstawowych założeń, pojawia się wysoki potencjał rozejścia się koncepcji pomiędzy podmiotami rynku. Te hipotetycznie różne definicje sytuacji nieoczekiwanej z całą pewnością mogły skutkować znaczącymi różnicami w poziomach kapitałów zabezpieczających, co było jednym z kluczowych powodów wycofania metody AMA w CRR III.

## 2.2 ELEMENTY FRAMEWORKU AMA I ICH SPECYFIKA

### 2.2.1 GENEROWANIE SYTUACJI NIEOCZEKIWANEJ W FORMULE AMA POPRZEC ZŁOŻENIE DWÓCH ZJAWISK

Jak napisano wcześniej w formule AMA sytuacja nieoczekiwana miała zostać wytworzona poprzez złożenie dwóch zjawisk: częstości strat operacyjnych i dotkliwości pojedynczej straty. Te dwa niezależne procesy miały utworzyć rozkład-agregat, który miał stanowić o profilu ryzyka operacyjnego w banku.

Rozkład zagregowanych strat to w intencji regulatora rozkład agregatu rocznego<sup>7</sup> sumy strat operacyjnych. Rozkład ten reprezentuje zatem przestrzeń możliwych wystąpień łącznych zsumowanych strat: od takich scenariuszy, gdzie ta suma rocznych strat jest niska, do tych, gdzie jest ekstremalnie wysoka. Formuła AMA, zapożyczając metodykę aktuariálną z sektora ubezpieczeniowego, wskazuje na konieczność umiejscowienia w tym rozkładzie wynikowym dwóch zjawisk: zjawiska liczby strat (częstość) i zjawiska wolumenu pojedynczej straty (oczywiście pod warunkiem jej wystąpienia, o czym decyduje pierwsze zjawisko: częstość). Sposób złożenia, tych dwóch, osobno modelowanych zjawisk, w rozkład zagregowany jest dowolny. Można posłużyć się metodami analitycznymi (np. Transformata Fouriera), jak i metodami symulacyjnymi, z dominującą pod względem częstości stosowaną symulacją Monte Carlo. Najważniejszą właściwością tego procesu, na której podkreśleniu mi w tym miejscu zależy, jest taka, że obydwa niezależne procesy mają wpływ na końcowy kształt rozkładu zagregowanego, a więc także na wartość kwantyla 99.9% (poziom sytuacji nieoczekiwanej), do którego wyznaczenia zmierza metoda AMA. Jednocześnie wpływ tych dwóch zjawisk na rozkład wynikowy zależy przede wszystkim od charakterystyk tych zjawisk, z całym spektrum możliwości: od dominującego wpływu częstości, aż do dominującego wpływu dotkliwości, przy czym natura zjawiska ryzyka operacyjnego przechyla te proporcje wyraźnie w jedną stronę.

Rozważę najpierw dwie skrajne możliwości. Rzeczywisty rozkład sił (w realnych modelach tego typu) będzie można wtedy umiejscowić, gdzieś na osi pomiędzy tymi skrajnościami.

#### Dominacja zjawiska częstości

Dominacja zjawiska częstości wystąpi przy takich charakterystykach zjawisk:

- (a) Obserwujemy dużą dyspersję możliwych wystąpień liczebności zdarzeń operacyjnych, a więc na dalekich kwantylach rozkładu częstości mogą wystąpić duże wartości,
- (b) Dotkliwości pojedynczych strat są niskie, nie obserwujemy strat wysokich i ekstremalnych (parametry dyspersji rozkładów dotkliwości przyjmują niskie wartości<sup>8</sup>).

Taki układ cech spowoduje zdominowanie rozkładu zagregowanych strat przez zjawisko częstości. To masa (liczba) zdarzeń będzie decydować o zmiennej zagregowanej (suma rocznych strat). Ostatecznie więc wartość dalekiego kwantyla też będzie podlegać tej dominacji. To istotna obserwacja. Przy takim układzie charakterystyk, nieoczekiwana sytuacja reprezentowana przez kwantyl 99.9% może być sumą ogromnej liczby zdarzeń o niewielkich wartościach strat. Warto się nad tym zastanowić. Czy taka

<sup>7</sup> Okres roku wynika z przyjętego horyzontu rocznego analiz.

<sup>8</sup> Jest to sformułowanie symboliczne, może się okazać, że parametr decydujący o dyspersji rozkładu powoduje „rozszerzanie się” rozkładu wraz z jego malejącą wartością np. parametr kształtu  $k$  w rozkładzie Weibulla. A więc to od typu rozkładu zależy, czy rosnąca, czy malejąca wartość parametru (tego, który o dyspersji decyduje) będzie powodować zwiększanie się „szerokości” rozkładu.

sytuacja jest realna? Jakie mogą być procesy, które mogą stać za takim scenariuszem tego krytycznego roku?

### **Dominacja zjawiska dotkliwości**

Agregat rocznych strat zostanie zdominowany przez zjawisko dotkliwości w sytuacji odwrotnej:

- (a) Obserwujemy małe liczby rocznych strat oraz małą dyspersję rozkładu częstości,
- (b) W przestrzeni dotkliwości mamy do czynienia z rozkładami grubo-ogonowymi (nie istnieje skończona wariancja takiego rozkładu), mogą więc wystąpić ekstremalnie wysokie straty.

Przy takim układzie cech, daleki kwantyl rozkładu zagregowanego z całą pewnością będzie zdominowany przez pojedynczą stratę, o wartości ekstremalnej<sup>9</sup>. W tym scenariuszu krytycznego roku nie ma znaczenia, ile strat w takim roku się zmaterializowało. Znaczenie ma ta jedna, ekstremalna strata. Nawet, gdy na poziomie kwantyla 99.9% agregat składa się z kilku, kilkudziesięciu lub nawet kilkuset strat, to ich liczba i ich wartości nie mają znaczenia dla wartości tego agregatu. Pojedyncza strata stanowi zapewne ogromną (zmierzającą do 100%) przestrzeń tego złożenia.

Ten scenariusz, dominacja agregatu przez dotkliwość pojedynczej straty, to druga skrajność na wcześniej narysowanej osi potencjalnych modeli sytuacji nieoczekiwanej. W realnym stosowaniu koncepcji AMA należało oczekiwać rozwiązań pośrednich, a więc bardziej zrównoważonej gry sił zjawisk częstości i dotkliwości. W przypadku istnienia w/w dominacji przez jedno zjawisko cały problem modelowania redukuje się bowiem właśnie do tego dominującego zjawiska. Wtedy stosowanie wyrafinowanych technik składania rozkładów staje się zupełnie zbędne, a cały złożony framework staje się niepotrzebnym obciążeniem koncepcyjnym. Jak w rzeczywistości mogła wyglądać ta zbalansowana gra, i gdzie na osi rozwiązań znajdowały się prawdopodobnie rozwiązania modelarskie, postaram się wykazać w dalszej części artykułu.

#### **2.2.2 ZJAWISKA MODELOWANE ORAZ ZMIENNE MODELOWE**

Wynikiem modelu, a więc końcowym produktem modelu ryzyka operacyjnego, zgodnego z frameworkiem AMA, jest kwantyl 99.9% odczytywany z rozkładu strat zagregowanych. Kwantyl ten oznacza poziom (wartość) rocznych strat, którego nie chcemy przekroczyć. Jeżeli rozkład zagregowanych strat jest złożeniem (analitycznym lub symulacyjnym) dwóch rozkładów: częstości i dotkliwości, dla spójności rozumowania należy doprecyzować, jak należy interpretować te zjawiska składowe.

Zjawisko częstości opisane jest jako rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia w ciągu roku konkretnej liczby zdarzeń operacyjnych. Natomiast zjawisko dotkliwości to rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia konkretnej wartości pojedynczej straty operacyjnej. Jeśli zatem dystrybuantę rozkładu strat zagregowanych, powstałego ze złożenia dwóch niezależnych zjawisk, można opisać w następujący sposób:

$$P(X_{AGR} \leq x_{AGR}) = F_{X_{AGR}}(x_{AGR}),$$

gdzie:  $X_{AGR}$  - zmienna oznaczająca agregat rocznych strat.

Dystrybuantę rozkładu liczby strat w roku opiszemy wtedy jako:

$$P(M \leq m) = F_M(m),$$

Dystrybuantę rozkładu pojedynczej straty opiszemy natomiast jako:

$$P(X \leq x) = F_X(x),$$

gdzie:

$M$  - zmienna oznaczająca liczbę strat w okresie (np. w roku)

---

<sup>9</sup> W przeciwieństwie do innych kwantyli np. na poziomie mediany, gdzie rozkład wartości pomiędzy obserwacjami w agregacie może być różny np. taki, w którym wszystkie straty mają podobny wkład w budowę agregatu na takim kwantylu (np. na poziomie mediany).

$X$  - zmienna oznaczająca wartość pojedynczej straty

A zatem rozkład strat zagregowanych to rozkład zmiennej  $X_{AGR}$ , gdzie pojedyncze wystąpienie zmiennej  $x_{AGRi}$  to suma wartości strat w losowym roku  $\sum_i^m x_i$ . Straty  $x_i$  to wartości wylosowane z rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ , o których liczbie w pojedynczej iteracji decyduje  $m$ , a więc wartość wylosowana z rozkładu częstości  $F_M$ .

Wskazać należy w tym miejscu na konieczność wyraźnego rozróżnienia pomiędzy rozkładami: rozkładem zagregowanych strat i rozkładem pojedynczej straty<sup>10</sup>. Ma to szczególne znaczenie dla czytelności prezentacji dalszego rozumowania, mając na uwadze, wynikające z cech generycznych metody AMA, przenikanie się znaczeń i interpretacji.

### 2.2.3 PREDEFINIOWANE ZAŁOŻENIA: ZJAWISKO CZĘSTOŚCI

Zjawisko częstości opisane funkcją:  $P(M \leq m) = F_M(m)$ , nie stanowiło, przez ostatnie dwie dekady modelowania zjawiska ryzyka operacyjnego, dużego wyzwania metodycznego. Regulator wskazał rekomendowane rozkłady prawdopodobieństwa (Poisson, binomial, negative binomial), które ten proces dobrze opisywały. Mimo pewnych różnic pomiędzy nimi, dotyczącymi w głównej mierze dyspersji zjawiska, na jakie te rozkłady pozwalały, wybór jakiegokolwiek z nich, nie wpływał istotnie na wynik modelu. Zjawisko częstości, jak wykaże później będzie miało istotny i dość nieoczywisty wpływ na kształt sytuacji nieoczekiwanej. Jednakże, co również wykaże, dotyczy to zmian w częstości na poziomie co najmniej rzędu wielkości. Wybór rozkładu nie decydował o takiej skali zmian w częstościach. Warto w tym miejscu dodać, że w praktycznym stosowaniu zdecydowanie najczęściej wybierano opis zjawiska za pomocą rozkładu Poissona (dyspersja widoczna na dalekich kwantylach rozkładu przedstawiona jest w tabeli 1).

Ze względu na relatywną łatwość modelowania zjawiska częstości we frameworku AMA zagadnieniu temu nie poświęcę więcej miejsca w tym artykule.

Tab. 1 Dalekie kwantyle rozkładu Poissona

CZĘSTOŚĆ	Poisson			
lambda	1	10	100	1000
90%	2	14	113	1041
99%	4	18	124	1074
99.9%	5	21	132	1099

Źródło: opracowanie własne

### 2.2.4 PREDEFINIOWANE ZAŁOŻENIA: ZJAWISKO DOTKLIWOŚCI

Regulator, jako część frameworku AMA, określił dość ściśle wytyczne co do sposobu opisu zjawiska dotkliwości pojedynczej straty ( $P(X \leq x) = F_X(x)$ ). Owe wymagania będą miały zasadnicze znaczenie dla zaprezentowanych w dalszej części artykułu efektów, które będzie można zauważyć na ostatecznym agregacie modelowym, a więc rozkładzie zagregowanych strat  $X_{AGR}$ .

W pierwszej kolejności regulator wykluczył możliwość stosowania rozkładów empirycznych w opisie zmiennej pojedynczej straty (zmienna  $X$ ): „...w szczególności, gdy dane mają średnie/ciężkie ogony (czyli są bardzo rozproszone w ogonie), stosowanie krzywych empirycznych do oszacowania obszaru ogona jest niedopuszczalną praktyką ze względu na niemożność ekstrapolacji informacji poza ostatni obserwowalny punkt danych.”<sup>11</sup> [BIS, BCBS 2011]

Następnie wskazał na obserwację: "Dane dotyczące ryzyka operacyjnego z perspektywy dotkliwości wyraźnie pokazują dodatnią skośność i średnio-ciężkie ogony rozkładu (leptokurtozę). W

<sup>10</sup> Zjawisko częstości nie powinno w tym kontekście dostarczać trudności interpretacyjnych.

<sup>11</sup> „...in particular, when the data are medium/heavy tailed (therefore very dispersed in the tail), the use of empirical curves to estimate the tail region is an unacceptable practice due to the inability to extrapolate information beyond the last observable data point.”.

ujęciu statystycznym może to oznaczać, że nie wszystkie momenty statystyczne rozkładu dotkliwości istnieją; w wielu przypadkach drugi moment (tj. odchylenie standardowe) i wyższe momenty, choć zawsze możliwe do obliczenia empirycznie, są często ogromne ze względu na znaczące rozproszenie danych.<sup>12</sup> oraz zasugerował "Bank powinien zwrócić szczególną uwagę na dodatnią skośność, a przede wszystkim leptokurtozę danych przy wyborze rozkładu dotkliwości."<sup>13</sup>, po czym ostatecznie skonstatował "W takich przypadkach zdecydowanie zaleca się stosowanie tak zwanych rozkładów sub-exponential. Rozkłady sub-exponential, które czasami mają większą liczbę parametrów niż krzywe o lekkich ogonach, mogą lepiej reprezentować kształt danych w ogonie (a także ich skośność w części głównej) poprzez umożliwienie oszacowania parametrów, które nie zależą od momentów statystycznych wyższego rzędu."<sup>14</sup> [BIS, BCBS 2011]

Te dość mocno sugestywne spostrzeżenia przekierowały uwagę podmiotów stosujących metodę AMA na przestrzeń rozkładów określonych tu jako sub-exponential. Te właśnie rozkłady zdominowały przestrzeń możliwych rozwiązań stosowanych przez podmioty sektora bankowego w modelowaniu zmiennej pojedynczej straty  $X$ .

Nie istnieje jedna, ścisła definicja rozkładów typu sub-exponential. Regulator w dokumencie [BIS, BCBS 2011] definiuje je jako te, których ogony opadają w tempie wolniejszym niż w rozkładzie wykładniczym (exponential distribution). Można jednak spotkać się z taką interpretacją tej klasy rozkładów, gdzie mowa jest o tempie opadania takim jak w rozkładzie wykładniczym lub szybszym. W przestrzeni modelowania ryzyka operacyjnego częściej (jeśli nie zawsze), co zrozumiale, posługiwano się wykładnią nadzorczą. Ja także w dalszej części tego opracowania do tej definicji będę się stosował. W szczególności, również dlatego, że regulator wylistował rozkłady, które w jego przekonaniu naturę zjawiska ryzyka operacyjnego (w aspekcie dotkliwości) najlepiej opisują. A zatem na liście tej znalazły się rozkłady: lognormal, lognormal-gamma, log-gamma, Generalised Pareto, Burr oraz Weibull (ale tylko dla parametru kształtu  $k < 1$ ).

Dla czystości przekazu warto zaznaczyć, że w żaden sposób nieskomentowana i niezniuansowana obecność na tej liście rozkładu Generalised Pareto (GPD) budzi pewien opór, w kontekście rzetelności kategoryzacji. Rozkład ten może bowiem stanowić specyficzny przypadek każdego z powyższych rozkładów, gdybyśmy zdecydowali się na modelowanie rozdzielonych zjawisk: ciała i ogona. W takim podejściu przy zastosowaniu metody Peaks Over Threshold (POT)<sup>15,16</sup> i odpowiedniej konstrukcji zmiennej w ogonie  $X - u$ , gdzie  $u$  stanowi próg odcięcia (próg między ciałem a ogonem) rozkład GPD będzie rozkładem granicznym dla takiej zmiennej warunkowej  $P(X - u) \leq y | X > u$ . A zatem rozkład GPD nie stanowi podklasy dla klasy rozkładów sub-exponential, lecz stanowi rodzaj przybliżenia części skrajnej dowolnego rozkładu (np. lognormal, gamma itd.), gdzie poszczególne rodziny podstawowych rozkładów teoretycznych znajdują swoje podklasy w granicznym rozkładzie GPD (rozkład ten posiada podtypy: Weibull, Gumbel, Frechet), do których zbiegają ogony podstawowych rozkładów. Kwestia podziału modelowanego zagadnienia na podczęści: ciało, ogon nie będzie poddawana analizie w niniejszym artykule. Jest to osobna, dość złożona przestrzeń koncepcyjna, której ujęcie w prowadzonym przeze mnie rozumowaniu nie wpłynęłoby na ostatecznie skonstruowane tu wnioski. Aspekt ten pozostawiam zatem poza zakresem artykułu.

---

<sup>12</sup> "The operational risk data from a severity perspective clearly illustrate positive skewness and medium-heavy tailedness (leptokurtosis). In statistical terms, this may mean that not all the statistical moments of the severity distribution exist; in many cases the 2nd moment (ie the standard deviation) and higher moments, although always empirically calculable, are often enormous due to the relevant dispersion of the data."

<sup>13</sup> "A bank should pay particular attention to the positive skewness and, above all, leptokurtosis of the data when selecting a severity distribution."

<sup>14</sup> "In such cases the use of so-called sub-exponential distributions is highly recommended. Subexponential distributions, which sometimes have a higher number of parameters than light tailed curves, can better represent the shape of the data in the tail (other than their skewness in the body) by allowing estimates of parameters that do not depend on the higher order statistical moments."

<sup>15</sup> To jest II Teoria Wartości Ekstremalnych (Pickands-Balkema-De Haan).

<sup>16</sup> W tym miejscu należy zaznaczyć, że w Teorii Wartości Ekstremalnych istnieje też drugie (a w zasadzie pierwsze, w kolejności powstania) podejście (I teoria EVT – Fisher-Tippett-Gnedenko), które oparte o metodę Block Maxima definiuje rozkład graniczny jako Generalised Extreme Value Distribution (GEV).

## 2.3 WŁASNOŚCI STATYSTYCZNE ROZKŁADÓW TEORETYCZNYCH PREDEFINIOWANYCH W METODZIE AMA

Przyjrę się teraz zasugerowanej przez nadzorcę rodzinie rozkładów sub-exponential. Moim celem jest wychwycenie, potrzebnych dla dalszego prowadzenia myśli, cech tych rozkładów. Dla wychwycenia efektów, na którym mi w tym artykule zależy, wystarczy ograniczenie się do dwóch rozkładów z w/w listy: rozkład lognormal oraz rozkład Weibull. Ich cechy przeanalizuję, a następnie te właśnie rozkłady zastosuję w całosciowej formule AMA. Często również w toku rozumowania będę je przeciwstawiał rozkładom: uniform, exponential, normal, co będzie miało na celu wykazanie ich unikalnych cech na tle rozkładów, które do rodziny sub-exponential w przyjętej tu definicji się nie zaliczają, ale mogą stanowić dla nich odpowiedni punkt odniesienia.

### 2.3.1 ROZKŁADY SUB-EXPONENTIAL I ICH WŁASNOŚCI

Jako reprezentanci, rekomendowanej do opisu zjawiska pojedynczej straty  $X$ , rodziny rozkładów sub-exponential zostały przeze mnie wybrane rozkłady: lognormal, Weibull. Poniżej prezentuję postaci funkcji, które będą w dalszej części wykorzystywane, dla wybranych rozkładów.

#### 1. lognormal

Funkcja dystrybuanty:

$$F_X(x) = \Phi \frac{(\ln(x) - \mu)}{\sigma}$$

Funkcja kwantylowa:

$$Q(p) = e^{(\mu + \sigma \Phi^{-1}(p))}$$

gdzie:

$\Phi$  – dystrybuenta standardowego rozkładu normalnego  $N(0,1)$

$\mu$  – wartość średnia zmiennej  $\ln(x)$

$\sigma$  – wartość odchylenia standardowego zmiennej  $\ln(x)$

$p$  – poziom poszukiwanego kwantyla

#### 2. Weibull

Funkcja dystrybuanty:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$$

Funkcja kwantylowa:

$$Q(p) = \lambda(-\ln(1-p))^{\frac{1}{k}}$$

gdzie:

$\lambda$  – parametr skali

$k$  – parametr kształtu

$p$  – poziom poszukiwanego kwantyla

**Rozkłady porównawcze**, służące tu jako punkt odniesienia dla rozkładów sub-exponential to:

### 3. uniform

Funkcja dystrybuanty:

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ dla } a \leq x \leq b$$

gdzie:

$a$  – wartość minimalna

$b$  – wartość maksymalna

### 4. exponential

Funkcja dystrybuanty:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Funkcja kwantylowa:

$$Q(p) = \frac{-\ln(1-p)}{\lambda}$$

gdzie:

$\lambda$  – parametr intensywności

$p$  – poziom poszukiwanego kwantyla

### 5. normal, w swojej standardowej postaci N(0,1)

gdzie:

$\mu$  – wartość średnia zmiennej  $x$

$\sigma$  – wartość odchylenia standardowego zmiennej  $x$

$p$  – poziom poszukiwanego kwantyla

Oczywiście wyszczególnienie postaci i parametryzacji w/w rozkładów może wydawać się zbędne. Są to rozkłady powszechne znane i stosowane. Mnie zależy jednak na wychwyceniu pewnych, potrzebnych dalej, elementów już na tym etapie. Po pierwsze wszystkich wyżej wymienionych rozkładów będę używał w ich postaci kanonicznej, co redukuje postaci tych rozkładów. A więc:

1. Dla lognormal, parametr średniej dla zmiennej  $\ln(x)$ , a więc parametr  $\mu$  ustawiony jest na wartości 0.
2. Dla Weibull, parametr skali  $\lambda$  ustawiony jest na wartości 1
3. Dla uniform, parametry  $a$  i  $b$  ustawione są w najczęściej spotykanej postaci, a więc odpowiednio 0,1
4. Dla exponential, parametr intensywności  $\lambda$  ustawiony jest na wartości 1
5. Dla normal, parametr średniej dla zmiennej  $x$ , a więc parametr  $\mu$  ustawiony jest na wartości 0.

Sprowadzenie rozkładów do postaci kanonicznej służy dwóm celom. Po pierwsze sprowadzam w ten sposób wartości zwracane przez w/w rozkłady do tej samej przestrzeni zmienności, tej samej skali, co pozwala skupić się jedynie na kluczowych, z punktu widzenia omawianego tematu, cechach rozkładów: ich dyspersji i ich kształtu. Zabieg ten jednocześnie nie redukuje przestrzeni możliwych kształtów rozkładów. Należy się również spodziewać, że zdecydowaną większość realnych zbiorów danych dotyczących ryzyka operacyjnego, da się po odpowiednich przekształceniach sprowadzić do skal wartości reprezentowanych przez postacie kanoniczne rozkładów.

Po drugie chciałbym w tym miejscu zwrócić uwagę na pewne właściwości poszczególnych rozkładów, które właśnie w formie kanonicznej najlepiej jest zaprezentować.

### 2.3.2 WŁASNOŚCI ROZKŁADU WEIBULLA

Mając na uwadze wcześniejsze doprowadzenie rozkładu do postaci kanonicznej jedynym parametrem, który o kształcie tego rozkładu oraz o jego dyspersji będzie decydował jest parametr kształtu  $k$ . A zatem:

- dla  $k=1$  rozkład Weibulla jest tożsamy z rozkładem exponential,
- dla  $k<1$  funkcja gęstości maleje monotonicznie, a proces opadania ogona jest wolniejszy niż w przypadku rozkładu exponential. Przy takich wartościach parametru  $k$ , rozkład Weibulla będziemy zaliczać do rodziny rozkładów sub-exponential zgodnie ze stosowaną tu definicją nadzorczą,
- dla  $k>1$  funkcja gęstości posiada maximum, a proces opadania ogona jest szybszy niż w przypadku rozkładu exponential. Dla  $k>1$  występują dwie charakterystyczne postacie tego rozkładu: dla  $k=2$  rozkład Weibulla staje się rozkładem Rayleigha, dla  $k$  równego w przybliżeniu 3.4 rozkład Weibulla przybliża rozkład normalny. Przy wszystkich wartościach parametru  $k>1$ , rozkładu Weibulla nie będziemy zaliczać do rodziny rozkładów sub-exponential.

### 2.3.3 WŁASNOŚCI ROZKŁADU LOGNORMAL

W kontekście cech rozkładu lognormal decydujących o zaklasyfikowaniu go do rodziny rozkładów sub-exponential warto zauważyć, że:

- rozkład lognormal (tu w postaci kanonicznej) dla każdej wartości parametru odchylenia standardowego „ostatecznie” (na dalekich kwantylach) będzie miał ogon grubszy, niż rozkład wykładniczy,
- jednak w „racjonalnej przestrzeni obserwacji”<sup>17,18</sup> można zauważyć, że w zależności od wartości parametru  $\sigma$  rozkład lognormal może przyjmować ogon cieńszy od rozkładu exponential lub grubszy, granica ta nie jest jednak ostra, można jedynie posługiwać się przybliżeniem.

I tak:

- dla wartości parametru  $\sigma$  mniejszych od wartości mniej więcej oscylujących w przedziale (0.5-0.7) rozkład lognormal przyjmuje w „racjonalnej przestrzeni obserwacji” ogon cieńszy niż rozkład exponential,
- natomiast dla wartości parametru  $\sigma$  większych od wartości mniej więcej oscylujących w przedziale (0.5-0.7) rozkład lognormal przyjmuje w „racjonalnej przestrzeni obserwacji” ogon grubszy niż rozkład exponential.

### Specyficzne własności rozkładu lognormal

W przypadku rozkładu lognormalnego kluczowe dla dalszego prowadzonego tu rozumowania jest przypomnienie specyficznej, relacji zależności w jakiej w stosunku do rozkładu normalnego, ten rozkład się znajduje. A więc, jeśli zmienna  $X$  może być opisana za pomocą rozkładu lognormal (co jest zjawiskiem częstym w modelowaniu dotkliwości ryzyka operacyjnego) to zmienna  $\ln(X)$  jest opisywana przez rozkład normalny. Ta właściwość istotnie redukuje (w porównaniu z innymi rozkładami) stopień skomplikowania procesów estymacyjnych. Ostatecznie o kształcie rozkładu lognormal decydują dwa parametry: średnia i odchylenie standardowe, których wyznaczenie, po sprowadzeniu zmiennej  $X$  do postaci  $\ln(X)$  jest bardzo proste<sup>19</sup>. Mając natomiast na uwadze, przyjętą wcześniej redukcję do postaci kanonicznej, widzimy, że kształt rozkładu lognormal zależy jedynie od wartości odchylenia standardowego zmiennej  $\ln(X)$ . To istotne uproszczenie.

Ta właściwość rozkładu lognormal prowadzi jeszcze do jednej osobliwości. Proces logarytmowania wartości  $X$  prowadzi do asymetrycznego zniekształcania relacji pomiędzy wartościami

<sup>17</sup> W przedstawianych tu analizach najdalszym obserwowanym kwantylem był 0.999999, co wydaje się już odległością trudną do wyobrażenia. Przyjąłem zatem za „racjonalną przestrzeń obserwacji” [0, Q99.99999%).

<sup>18</sup> Zatem dla niektórych wartości parametru odchylenia standardowego, mniejszych od wartości 0.5-0.7, rozkład lognormalny „wykaże” swój grubszy ogon od exponential dopiero na kwantylach dużo wyższych niż 0.999999, a więc bardzo daleko z prawej strony. Wcześniej natomiast będzie zachowywał się jak rozkład cienko-ogonowy, co będzie widać przy analizie wartości na kwantylach rzędu np. 0.9999.

<sup>19</sup> Proste kalkule: średniej i odchylenia standardowego na zmiennej  $\ln(X)$ .

zmiennej  $X$ . Odległości po prawej stronie rozkładu zmniejszają się dużo szybciej, niż odległości po jego lewej stronie w wyniku takiego działania. A więc asymetryczne przeciążenie prawej strony rozkładu zmiennej  $X$  zostaje zredukowane, tak że rozkład zmiennej  $\ln(X)$  w wyniku tego procesu jest rozkładem symetrycznym. Widać to, gdy porówna się stosunki wartości kwantylowych, przed i po logarytmowaniu zmiennej: na kwantylach po prawej stronie np. Q90/Q50 w porównaniu do takich samych stosunków po lewej stronie np. Q10/Q50. Ten proces „normalizowania” kształtu prawostronnie asymetrycznej zmiennej  $X$ , jest oczywisty i zamierzony. Istotny jest tu jednak fakt, że estymacja parametrów rozkładu lognormal odbywa się już po przeprowadzeniu tego normalizującego procesu (a więc na zmiennej  $\ln(X)$ ). Pamiętając, że jedynym parametrem, który ma wpływ na kształt oraz co w kontekście ryzyka operacyjnego najistotniejsze – na dyspersję rozkładu, jest parametr odchylenia standardowego trzeba tu zauważyć, że:

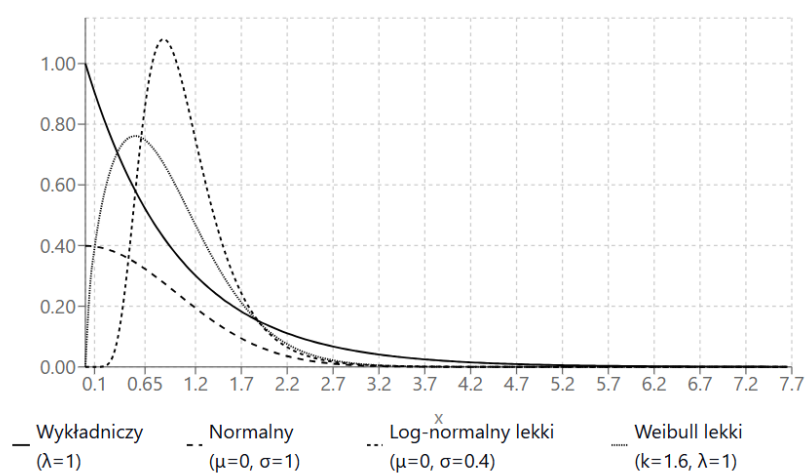
- parametr ten wyznaczany jest symetrycznie jako odchylenia każdej pojedynczej obserwacji od średniej, po prawej i po lewej stronie średniej, a waga każdej obserwacji jest jednakowa,
- kluczowe odchylenia od średniej, a więc występujące daleko po prawej stronie rozkładu ekstremalne wartości strat, zostają znormalizowane w taki sposób, że ich dalekie, dążące do nieskończoności, odchylenie jest zredukowane do poziomu podobnego do tych jakie posiadają inne wartości zbioru zmiennej  $X$ , które są wartościami typowymi,
- w procesie wyznaczania parametru odchylenia standardowego zmiennej  $\ln(X)$ , a więc po sprowadzeniu ekstremalnych wartości do poziomów typowych, te wartości tracą całkowicie swoją moc wpływania na wielkość dyspersji. Są one teraz jedną z wielu wartości, które na te dyspersje mają wpływ (jednakowe wagi obserwacji). Ich efekt ginie w masie innych obserwacji (dla kontrastu: gdyby nie przeprowadzić procesu logarytmowania, te ekstremalne wartości miałyby olbrzymi wpływ na wartość parametru odchylenia standardowego),
- odległości tych dalekich prawych obserwacji są właściwie sprowadzone do poziomów odchylen z lewej strony od średniej. A więc po zlogarytmowaniu odległość na osi zmiennej  $X$  pomiędzy obserwacją ekstremalną np. 100 000, a średnią np. 1 000 na osi  $\ln(X)$  wynosi:  $11.5 - 6.9 = 4.6$  i jest równy odległości po lewej stronie: 10 vs. średnia 1000:  $2.3 - 6.9 = 4.6$ ,
- ze względu na kształt funkcji logarytmicznej może się okazać, że występujące po lewej stronie mikrowartości np. 0.01, 0.001 lub 0.0001 zdecydują w głównej mierze o wartości odchylenia standardowego ze względu na ich dalece ujemne wartości po zlogarytmowaniu, odpowiednio -4.6, -6.9, -9.2. Może się tak stać w wyniku wbudowanej własności o równym traktowaniu odchyleń z lewej i prawej strony oraz wcześniejszym zrównaniu prawych istotnych odchyleń ekstremalnych do poziomów „normalnych” jakie przyjmują na osi  $\ln(X)$ . Warto w tym miejscu dodać, że występowanie takich mikrowartości jest całkiem prawdopodobne, mając na uwadze stosowanie różnych technik skalowania danych w celu dostosowania zbioru danych do potrzeb modelarskich.

#### 2.3.4 ZACHOWANIE ROZKŁADÓW SUB-EXPONENTIAL W OGONACH

Kolejne wykresy pokazują ogony dla rozkładów: lognormal i Weibull wraz z rozkładami odniesienia: exponential, normal. Na pierwszych dwóch wykresach (pierwszy wykres na skali liniowej osi y, drugi na skali logarytmicznej) widzimy rozkłady lognormal i Weibull w wersjach „lekkich”. Na kolejnych dwóch wykresach te same rozkłady przedstawione są w wersjach „ciężkich”.

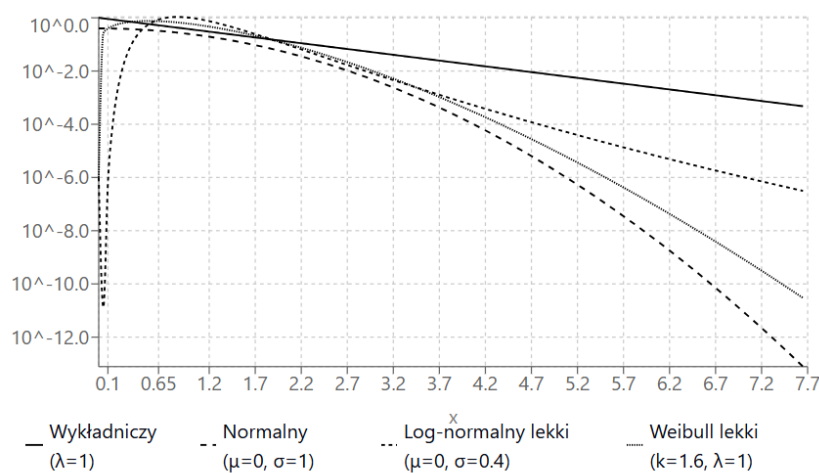


Rys. 3 Rozkłady lekko-ogonowe Weibull i lognormal na skali normalnej oraz rozkłady porównawcze



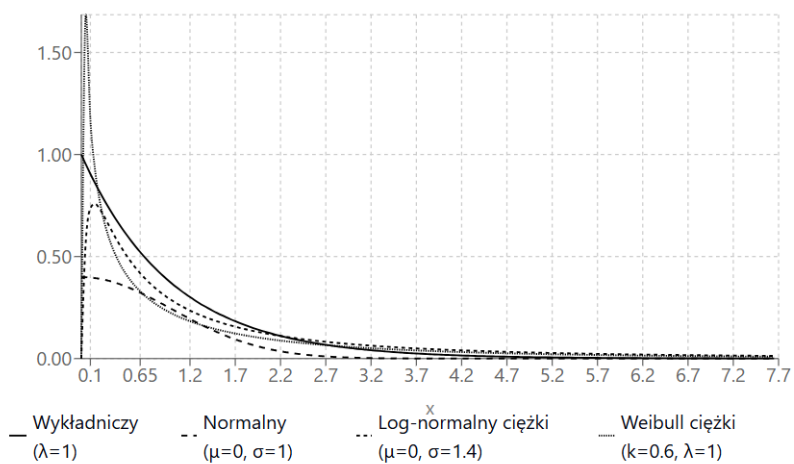
Źródło: opracowanie własne

Rys. 4 Rozkłady lekko-ogonowe Weibull i lognormal na skali logarytmicznej oraz rozkłady porównawcze



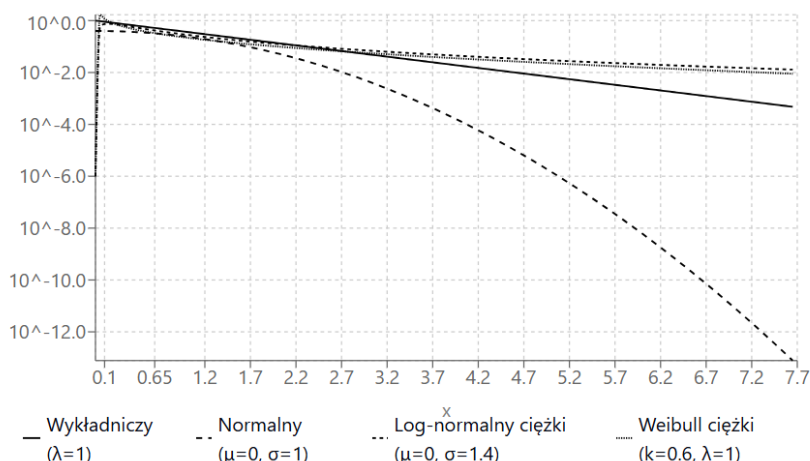
Źródło: opracowanie własne

Rys. 5 Rozkłady ciężko-ogonowe Weibull i lognormal na skali normalnej oraz rozkłady porównawcze



Źródło: opracowanie własne

Rys. 6 Rozkłady ciężko-ogonowe Weibull i lognormal na skali logarytmicznej oraz rozkłady porównawcze



Źródło: opracowanie własne

Przedstawione tu grafiki pozwalają upewnić się co do trafności wcześniej założonych podziałów na rozkłady grubo-ogonowe (tu nazywane sub-exponential) oraz cienko-ogonowe. Dodatkowo widzimy, że w przypadku dwóch interesujących nas w tej analizie rozkładów (lognormal, Weibull) własności ich ogona, a tym samym ich zaklasyfikowanie, mogą zmieniać się w zależności od parametrów. Rozkład Weibulla dla  $k < 1$  będzie klasyfikowany do rozkładów grubo-ogonowych (dla  $k > 1$ , przeciwnie), natomiast rozkład lognormal będzie grubo-ogonowy dla parametru  $\sigma$  większego mniej więcej od wartości (0.5, 0.7). Rozkłady exponential i normal służą na tych wykresach, jak wcześniej założyłem, jedynie celom porównawczym (w szczególności rozkład exponential, który explicite jest punktem odniesienia dla definicji rozkładów sub-exponential).

Porównam teraz kwantyle w/w rozkładów dla różnych poziomów ich parametrów. To ćwiczenie ma na celu przygotowanie odpowiedniego obrazu tych rozkładów dla wyprowadzenia późniejszych wniosków.

W załączniku 1 prezentuję kwantyle dla rozkładów sub-exponential oraz rozkładów porównawczych w następującym układzie:

- wartości w kwantylach 0.5, 0.75, oraz kwantylach reprezentujących ogon rozkładu: 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, 0.999999<sup>20</sup>,

- wzajemne relacje poszczególnych kwantyli:

- relacja dalekich kwantyli do mediany:  $Q(p \rightarrow 1)/Q(0.5)$ , to porównanie potrzebne jest dla identyfikacji relacji pojedynczej wartości ekstremalnej rozkładu do wartości średniej (tu reprezentowanej przez medianę), będzie to przydatne przy analizie agregatu  $x_{AGR}$  na kwantylu 99.9% rozkładu zagregowanych strat  $X_{AGR}$ ,

- odległości kwantylowe (Quantile Spacing) dalekich kwantyli: np.  $Q(0.999) - Q(0.99)$ , ta relacja pokazuje bezwzględny wzrost wartości zmiennej  $x$  wraz ze wzrostem rzędu kwantyla,

- wzajemna relacja dalekich kwantyli: np.  $Q(0.999)/Q(0.99)$ , ta relacja wskazuje na postępowanie wartości  $x$  wraz z wzrostem rzędu kwantyla, będzie to również przydatne przy analizie agregatu  $x_{AGR}$ ,

- relacja dalekich kwantyli do kwantyla 0.9 będącego pierwszym (najmniej skrajnym) reprezentantem ogona:  $Q(p \rightarrow 1)/Q(0.9)$ , stanowiąca alternatywne spojrzenie dla wzajemnych relacji dalekich kwantyli.

Opis zachowań rozkładów na poziomie dalekich kwantyli rozpocznę od rozkładu porównawczego: exponential. Przypomnę, że analizujemy postać kanoniczną tego rozkładu ( $\lambda=1$ ), a

<sup>20</sup> Wyjaśniam jednocześnie, że rozumiejąc argument, że prezentacja rozkładu na poziomach kwantyli 0.9999, 0.99999 i dalej wydaje się być oderwana od rzeczywistości i do niczego nie przydatna, ich prezentacja jest jednak niezbędna dla pełnego przedstawienia dalszych wyników analiz. Dalszy przebieg prowadzonego w tym artykule rozumowania uzasadni prezentację wyników dla tak dalekich kwantyli.

więc przy braku innych parametrów w tym rozkładzie jest to jedyna postać poddana analizie. Widzimy, że przy medianie na poziomie 0.69, wartości zmiennej  $x$  dla kolejnych rzędów kwantyli, począwszy od 0.9, a na 0.999999 skończywszy wynoszą odpowiednio: 2.30, 4.60, 6.90, 9.21, 11.5, 13.81, a więc jest to przemieszczenie się wartości od 2.30 na kwantylu 0.9 do 13.81 na 0.999999. Odległości kwantylowe (Quantile Spacing) pomiędzy kolejnymi kwantylami od  $Q(0.99)-Q(0.9)$  do  $Q(0.999999)-Q(0.999999)$  są stałe co jest cechą rozkładu exponential i wynoszą 2.30, a relacje względne (Quantile Ratios) tych samych kwantyli wynoszą odpowiednio: 2.00, 1.50, 1.33, 1.25, 1.20, a więc jest to przedział  $(2.00 \rightarrow 1.20)$ . Warto zapamiętać cechy tego ogona, stanowiąc on będzie potem stały punkt odniesienia.

W przypadku rozkładu normalnego warto zauważyć, że przy niezmiennionej wartości  $\mu=0$  (postać kanoniczna) wraz ze wzrostem parametru  $\sigma$  następuje, co oczywiste, wzrost dyspersji rozkładu. Posługując się informacjami przedstawionymi w tabeli w załączniku 1, zauważymy wzrost odległości pomiędzy wartością zmiennej  $x$  na kwantylu 0.9, a wartością  $x$  na kwantylu 0.5 wraz ze wzrostem  $\sigma$ . Jednocześnie jednak wzrost  $\sigma$  nie zmienia właściwości ogona. Dla każdego poziomu ogona relacje kwantyli są niezmiennie i wynoszą odpowiednio od  $Q(0.99)/Q(0.9)$  do  $Q(0.999999)/Q(0.999999)$ : 1.82, 1.33, 1.20, 1.15, 1.11, przedział  $(1.82 \rightarrow 1.11)$ . Widać zatem, że kształt tego ogona jest zbliżony do kształtu ogona rozkładu wykładniczego.

Rozkład Weibulla w postaci kanonicznej ( $\lambda=1$ ) i w wersji lekko-ogonowej ( $k>1$ ) ma następujące cechy:

- relacje kwantyli dla  $k=1.1$  (wersja najbardziej zbliżona do rozkładu exponential) wynoszą, od  $Q(0.99)/Q(0.9)$  do  $Q(0.999999)/Q(0.999999)$ : 1.88, 1.45, 1.30, 1.22, 1.18, a więc w przedziale  $(1.88 \rightarrow 1.18)$
- dla  $k=2$  mamy: 1.41, 1.22, 1.15, 1.12, 1.10, a więc  $(1.41 \rightarrow 1.10)$
- dla  $k=5$  mamy: 1.15, 1.08, 1.06, 1.05, 1.04, a więc  $(1.15 \rightarrow 1.04)$

Obserwujemy zatem coraz cieńszy ogon wraz ze zwiększaniem wartości parametru  $k$ .

Rozkład lognormal w postaci kanonicznej ( $\mu=0$ ) i w wersji lekko-ogonowej, a więc  $\sigma$  mniejsze od wartości (0.5,0.7) ma następujące cechy:

- relacje kwantyli dla  $\sigma=0.4$  (wersja najbardziej zbliżona do rozkładu exponential) wynoszą, od  $Q(0.99)/Q(0.9)$  do  $Q(0.999999)/Q(0.999999)$ : 1.52, 1.36, 1.29, 1.24, 1.22, a więc w przedziale  $(1.52 \rightarrow 1.22)$
- dla  $\sigma=0.1$  mamy: 1.11, 1.08, 1.06, 1.06, 1.05, a więc  $(1.11 \rightarrow 1.05)$

Obserwujemy zatem coraz cieńszy ogon wraz ze zmniejszaniem wartości parametru  $\sigma$ .

Rozkład Weibulla w postaci kanonicznej ( $\lambda=1$ ) i w wersji ciężko-ogonowej ( $k<1$ ) ma następujące cechy:

- relacje kwantyli dla  $k=0.9$  (wersja najbardziej zbliżona do rozkładu exponential) wynoszą, od  $Q(0.99)/Q(0.9)$  do  $Q(0.999999)/Q(0.999999)$ : 2.16, 1.57, 1.38, 1.28, 1.22, a więc w przedziale  $(2.16 \rightarrow 1.22)$
- dla  $k=0.6$  mamy: 3.17, 1.97, 1.62, 1.45, 1.36, a więc  $(3.17 \rightarrow 1.36)$
- dla  $k=0.3$  mamy: 10.08, 3.86, 2.61, 2.10, 1.84, a więc  $(10.08 \rightarrow 1.84)$
- dla  $k=0.2$  mamy: 32.00, 7.59, 4.21, 3.05, 2.49, a więc  $(32.00 \rightarrow 2.49)$
- dla  $k=0.1$  mamy: 1024, 57, 17, 9.31, 6.19, a więc  $(1024 \rightarrow 6.19)$

Obserwujemy zatem bardzo szybkie pogrubienie ogona wraz ze zmniejszaniem wartości parametru  $k$ . Na wartościach bezwzględnych obserwujemy, że przy medianie na poziomie 0.66 dla rozkładu Weibulla przy  $k=0.9$  i medianie równej 0.02 przy  $k=0.1$ :

- wartości kwantyla 0.999 zmieniają się od 8.56 dla  $k=0.9$ , przez 15 728 dla  $k=0.2$ , do poziomu 247 382 762 dla  $k=0.1$
- wartości kwantyla 0.9999 zmieniają się od 11.78 dla  $k=0.9$ , przez 66 279 dla  $k=0.2$ , do poziomu 4 392 955 462 dla  $k=0.1$ .

Rozkład lognormal w postaci kanonicznej ( $\mu=0$ ) i w wersji ciężko-ogonowej, a więc  $\sigma$  większe od wartości (0.5,0.7) ma następujące cechy:

- relacje kwantyli dla  $\sigma=0.7$  (wersja najbardziej zbliżona do rozkładu exponential) wynoszą, od  $Q(0.99)/Q(0.9)$  do  $Q(0.999999)/Q(0.99999)$ : 2.08, 1.71, 1.55, 1.47, 1.41, a więc (2.08→1.41)
  - dla  $\sigma=1.4$  mamy: 4.32, 2.91, 2.41, 2.15, 1.98, a więc (4.32→1.98)
  - dla  $\sigma=2.0$  mamy: 8.08, 4.61, 3.52, 2.98, 2.66, a więc (8.08→2.66)
  - dla  $\sigma=3.0$  mamy: 22.97, 9.89, 6.60, 5.14, 4.33, a więc (22.97→4.33)
  - dla  $\sigma=4.0$  mamy: 65.31, 21.23, 12.37, 8.88, 7.06, a więc (65.31→7.06)
  - dla  $\sigma=5.0$  mamy: 185.67, 45.58, 23.19, 15.32, 11.50, a więc (185.67→11.50)
- Tu podobnie jak w przypadku ciężko-ogonowego rozkładu Weibulla obserwujemy szybki proces pogrubiania ogona rozkładu przy zmieniającym się poziomie parametru (w przypadku lognormal wraz ze wzrostem parametru  $\sigma$ ). Na wartościach bezwzględnych obserwujemy, że przy niezmiennej, dla wszystkich poziomów parametru  $\sigma$ , medianie rozkładu lognormal wynoszącej 1:
- wartości kwantyla 0.999 zmieniają się od 8.69 dla  $\sigma=0.7$ , przez 75 dla  $\sigma=1.4$ , 483 dla  $\sigma=2.0$ , 10 622 dla  $\sigma=3.0$ , do poziomu 5 132 798 dla  $\sigma=5.0$
  - wartości kwantyla 0.9999 zmieniają się od 13.50 dla  $\sigma=0.7$ , przez 182 dla  $\sigma=1.4$ , 1 699 dla  $\sigma=2.0$ , 70 056 dla  $\sigma=3.0$ , do poziomu 119 053 369 dla  $\sigma=5.0$ .

## ROZDZIAŁ 3: NIEOCZYWISTE EFEKTY KONCEPCYJNE WYRASTAJĄCE Z PREDEFINIOWANYCH ZAŁOŻEŃ FRAMEWORKU AMA

Poprzednie rozdziały miały na celu wprowadzenie czytelnika do koncepcji nadzorczej Metody Zaawansowanego Pomiaru AMA, a także wyprowadzenie podstawowych założeń, niezbędnych dla dalszego prowadzenia rozumowania, a także wyszczególnieniu specyficznych cech konstrukcji, w tym cech wykorzystywanych dalej rozkładów prawdopodobieństwa, które pozwolą na bardziej swobodne poruszanie się w tej dość abstrakcyjnej przestrzeni.

Niniejszy rozdział ma stanowić istotę prowadzonego tu wywodu. Chcę tu wskazać na pewne, zupełnie nieoczywiste efekty, które formuła AMA ze swej natury produkowała. W moim przekonaniu te właśnie efekty mogły zdecydować o ostatecznym wycofaniu metody, o którym zdecydowały przepisy CRR III (2024).

### 3.1 WŁASNOŚĆ (1): DOMINACJA POJEDYNCZEJ WARTOŚCI STRATY NA POZIOMIE WYSOKICH KWANTYLI ROZKŁADU ZAGREGOWANYCH STRAT

#### 3.1.1 SPECYFIKACJA WŁASNOŚCI

Jak wcześniej stwierdziłem opis sytuacji nieoczekiwanej, będącej głównym przedmiotem zainteresowania frameworku AMA, nie został zdefiniowany przez regulatora. Jednocześnie jednak poprzez narzucenie mechaniki opisu zjawiska ryzyka operacyjnego, poprzez złożenie dwóch zjawisk: częstość, dotkliwość, przeniesiono odpowiedzialność za wykreowanie kształtu takiej nieoczekiwanej sytuacji, na mechanizm integrujący te dwa zjawiska, a więc rozkład zagregowanych strat. Kształt rozkładu, a więc również struktura sytuacji skrajnej miał wynikać z rozkładów pojedynczych zjawisk i sposobu ich złożenia. Od tego zależeć miało ostatecznie jakie siły zdominują poziom kwantyla 99.9, a więc, które zjawisko (częstość, czy dotkliwość) zdominuje ogon rozkładu zagregowanych strat i będzie w ostateczności decydować o wyniku modelu.

Rozkład strat zagregowanych to rozkład zmiennej  $X_{AGR}$ . Pojedyncze wystąpienie zmiennej  $x_{AGR_i}$  to suma wartości strat w losowym roku  $\sum_i^m x_i$ . Straty  $x_i$  to wartości wylosowane z rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ , o których liczbie decyduje  $m$ , a więc wylosowana z rozkładu częstości  $F_M$  w tej pojedynczej iteracji liczba strat. Jeżeli przyjmiemy, zgodnie z oczekiwaniem frameworku AMA, że rozkład pojedynczej straty operacyjnej jest rozkładem grubo-ogonowym to przy stałej wartości dla liczebności strat (wartość  $m$  z rozkładu częstości  $F_M$ ), możemy się spodziewać wystąpienia następującej własności:

$$\text{Dla } F_X \in HT \text{ oraz } m = \text{const}, \\ \text{jeśli } \theta(F_X) \rightarrow \infty \text{ oraz } \lim_{p \rightarrow 1^-} Q_{X_{AGR}}(p) = 1, \text{ to } \lim_{p \rightarrow 1^-} \sum_i^m x_i = x_{EXTR} \quad (1)$$

gdzie:

$F_X$  – rozkład dla zjawiska dotkliwości, a więc rozkład pojedynczej straty

$HT$  – klasa rozkładów ciężko-ogonowych (heavy-tailed)

$m$  – liczba strat pochodząca z rozkładu częstości  $F_M$

$\theta$  – abstrakcyjna miara grubości ogona

$\theta(F_X)$  – grubość ogona rozkładu  $F_X$

$Q_{X_{AGR}}(p)$  – rząd kwantyla zmiennej  $X_{AGR}$

$\sum_i^m x_i$  – suma wartości strat w ciągu roku, agregat strat  $x_{AGR_i}$  na rozkładzie  $X_{AGR}$

$x_{EXTR}$  – wartość pojedynczej, ekstremalnej straty pochodzącej z rozkładu  $F_X$

A zatem im dalej przesuwamy się ku dalekim kwantylom rozkładu zagregowanych strat, tym bardziej możemy się spodziewać, że w takim dalekim kwantylu, agregat strat zdominowany jest przez pojedynczą, ekstremalną stratę operacyjną.

Przeanalizujmy te relacje. Wiadomo, że rozkład zagregowanych strat  $X_{AGR}$  składa się z pojedynczych wystąpień agregatów  $x_{AGR_i}$ . Każdy z takich agregatów składa się z liczebności  $m$  strat pochodzących z rozkładu  $F_M$ . Jak wykazałem powyżej rozkład częstości nie generuje dużych dyspersji, możemy więc bez zniekształcenia rozumowania przyjąć wartość  $m$  jako stałą dla kolejnych wystąpień  $x_{AGR_i}$ , co oznacza, że każdy agregat  $x_{AGR_i}$  składa się z takiej samej liczby  $m$  strat. Wartość tych strat (każdej pojedynczej straty) jest natomiast wylosowana z rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ . Powstałe w ten sposób agregaty  $x_{AGR_i}$  są teraz ułożone w kolejności od najmniejszego, do największego (po wartości agregatu, a więc po wartości sumy tworzących ten pojedynczy agregat strat) tworząc w ten sposób rozkład  $X_{AGR}$ .

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy rozkład pojedynczej straty jest lekko-ogonowy<sup>21</sup>. Wtedy w pojedynczym agregacie  $x_{AGR_i}$  wartości pojedynczych strat nie różnią się między sobą w sposób znaczny (odległości pomiędzy kwantylami w takim lekko-ogonowym rozkładzie są małe). Jeśli zaś chodzi o zróżnicowanie pomiędzy kolejnymi posortowanymi agregatami  $x_{AGR_i}$  to, mając na uwadze wcześniej przyjęte założenie o stałej wartości częstości  $m$ , można się spodziewać, że różnić się one będą między sobą, przesuwając się w prawą stronę rozkładu  $X_{AGR}$ , jedynie składem, w taki sposób, że dalsze (na prawo) agregaty  $x_{AGR_i}$  będą składać się z obserwacji (pochodzących z rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ ) znajdujących się średnio na dalszych kwantylach rozkładu  $F_X$ . A więc na dalekich kwantylach rozkładu  $X_{AGR}$  agregat  $x_{AGR_i}$  będzie prawdopodobnie składał się ze strat, które zajmują średnio wyższy kwantyl rozkładu  $F_X$ , niż straty, które są składową agregatu  $x_{AGR_i}$  znajdującego się wcześniej. Bliskie odległości kwantyli na zmiennej lekko-ogonowej  $F_X$  uniemożliwiają dominację takiego agregatu przez pojedynczą stratę. W takim scenariuszu widzimy zatem, że dużo zależy od częstości. W takim znaczeniu, że wciąż podtrzymując stałość  $m$  w ramach analizy (w jej środku, a więc w trakcie składania rozkładu zagregowanych strat), częstość może mieć wpływ na jej wyniki, jeśli będziemy zmieniać samo  $m$ , co oznaczałoby, że zmienia się wartość oczekiwana liczby zdarzeń, jakby zewnętrznie w stosunku do tej analizy. W zależności od tego na jakim poziomie ustawimy parametr  $m$  to przy niezmienniejącej się strukturze wewnątrz kolejnych agregatów  $x_{AGR_i}$  (struktura wewnątrz agregatu nie powinna zależeć od zmian wielkości  $m$ , jedynym skutkiem przy wzrastającym  $m$  będzie zmniejszanie się udziału pojedynczej straty w agregacie) wraz ze zwiększającą się częstością  $m$  wzrastać będzie wartość każdego agregatu (większa będzie wartość sumy pojedynczych zdarzeń, których będzie w agregacie więcej), a więc wartość kolejnych kwantyli rozkładu  $X_{AGR}$ , w tym decydującego o wyniku modelu kwantyla 0.999. A zatem zwiększające się  $m$  w zjawisku częstości powodować będzie coraz większą dominację sytuacji nieoczekiwanej przez zjawisko częstości.

<sup>21</sup> Jest to przypadek nie spełniający podstawowego założenia (o gruboogonowości rozkładu pojedynczej straty) własności (1). Ten przypadek jest tu wyprowadzony dla pokazania sytuacji przeciwnej (w stosunku do tej, o której mowa we własności (1)), a także na potrzeby prezentacji mechaniki, w oparciu o którą ta własność się objawia.

Rozważmy teraz przypadek właściwy<sup>22</sup>. Niech tym razem rozkład pojedynczej straty będzie rozkładem grubo-ogonowym. W takim przypadku dalekie kwantyle rozkładu  $F_X$  zmierzają do nieskończoności. Wtedy struktura agregatu  $x_{AGR_i}$  tworzącego zmienną  $X_{AGR}$  zależy od miejsca jakie zajmuje ten agregat na zmiennej  $X_{AGR}$ . Dla agregatów  $X_{AGR}$  umiejscowionych w tzw. „ciele” rozkładu zagregowanego<sup>23</sup>, które można w przybliżeniu określić jako obszar pomiędzy kwantylami  $(0, 0.9)$ <sup>24</sup> można spodziewać się struktury podobnej jak opisana powyżej (gdy opisywałem zastosowanie rozkładu lekko-ogonowego). Nie wystąpią w tych agregatach pojedyncze straty, które mogłyby zdominować agregat, a więc można się tu spodziewać mniej więcej zrównoważonego poziomu wartości pojedynczych strat tworzących strukturę agregatów. Jako, że w rozważanym tu przypadku ekstremalne pojedyncze straty powinny wystąpić (mamy wszak do czynienia z rozkładami grubo-ogonowymi) należy się spodziewać, że trafią one właśnie do agregatów znajdujących się w ogonie rozkładu  $X_{AGR}$ . Prześledźmy tę mechanikę. Założmy najpierw, że częstość  $m=1$ <sup>25</sup>. W takim przypadku proces składania rozkładów częstości i dotkliwości zostanie zredukowany do losowania wartości z rozkładu dotkliwości, a więc rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ . Wiadomo zatem, że w posortowanym szeregu agregatów  $x_{AGR_i}$  (które tym razem składają się tylko z jednej wartości z rozkładu  $F_X$ ) ekstremalne wartości pochodzące z rozkładu  $F_X$  znajdą się na dalekich kwantylach rozkładu zagregowanych strat  $X_{AGR}$ . Rozważmy teraz przypadek dla  $m=10$ . Na początek warto sobie przypomnieć, że wartości ekstremalne z rozkładu  $F_X$  na poziomie kwantyli 0.99, 0.999, 0.9999 tego właśnie rozkładu  $F_X$ <sup>26</sup> stanowią wielokrotność wartości oczekiwanej (często kilkadziesiąt, kilkaset, a nawet kilka tysięcy razy). Nawet przedstawione w tabeli w załączniku 1 relacje pomiędzy wysokimi kwantylami jak  $Q(0.999)/Q(0.9)$  mają rząd kilkudziesięciu, czy kilkuset. Oznacza to, że w agregatach zmiennej  $X_{AGR}$ , w których znajdują się ekstremalne wartości z rozkładu  $F_X$ , te skrajne, wysokowartościowe wartości będą wielokrotnie wyższe od pozostałych obserwacji wchodzących w skład takiego agregatu (w tym przypadku przy  $m=10$ , pozostałych 9 obserwacji)<sup>27</sup>. Ilość takich zdominowanych agregatów w zmiennej  $X_{AGR}$  zależy od dwóch założeń: stopnia grubo-ogonowości rozkładu  $F_X$ , a także poziomu częstości  $m$ . A zatem im bardziej rozkład zmiennej  $F_X$  jest grubo-ogonowy, a więc coraz niższe kwantyle rozkładu  $F_X$  mają bardzo dużą, wielokrotną przewagę nad pozostałymi wartościami rozkładu  $F_X$  oraz im niższe jest  $m$ , tym wcześniej (na niższych kwantylach rozkładu zmiennej  $X_{AGR}$ ) zaczyna się dominacja agregatu  $x_{AGR_i}$  przez pojedynczą ekstremalną stratę z rozkładu  $F_X$ . Trzeba tu zwrócić uwagę na rolę jaką pełni tu wartość  $m$ . Przy niezmiennym się rozkładzie  $F_X$  (taki sam stopień gruboogonowości) wzrastająca wartość częstości  $m$  powoduje zwiększającą się liczbę strat tworzących agregat  $x_{AGR_i}$ . Zatem suma wszystkich typowych strat (np. na poziomie wartości oczekiwanej rozkładu  $F_X$ ) staje się coraz większa, co utrudnia dominację agregatu przez pojedynczą ekstremalną stratę z rozkładu  $F_X$ . Wzrastający poziom  $m$  przesuwa zatem w prawo moment, od którego rozkład  $X_{AGR}$  zostaje zdominowany przez pojedynczą ekstremalną stratę z rozkładu  $F_X$ . Częstość  $m$  może więc „potencjalnie” pełnić rolę poduszki zabezpieczającej agregat  $x_{AGR_i}$  przed zdominowaniem przez pojedynczą stratę, co, gdy wystąpi, redukuje całe zagadnienie do rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ <sup>28</sup>.

### 3.1.2 EMIPRYCZNE OBSERWACJE DOMINACJI WARTOŚCI POJEDYNCZEJ STRATY NA DALEKICH KWANTYLACH ROZKŁADU ZAGREGOWANYCH STRAT

W celu wykazania występowania efektu dominacji pojedynczej straty w agregacie  $x_{AGR_i}$  na dalekim kwantylu zmiennej  $X_{AGR}$  autor niniejszej publikacji przeprowadził stosowne obliczenia.

<sup>22</sup> Taki, o którym własność (1) mówi.

<sup>23</sup> Używam tu pojęcia „ciała” dla rozkładu zagregowanych strat. Zwracam uwagę, że najczęściej używa się tego sformułowania dla określenia ciała rozkładu pojedynczej straty. Użycie pojęcia „ciała” dla rozkładu zagregowanych strat pełni tu tylko rolę techniczną, pozwala na bardziej zrozumiały opis.

<sup>24</sup> Zaproponowany tu obszar jest umowny. W praktyce na różnych poziomach można zdefiniować próg odcięcia pomiędzy ciałem i ogonem. Często wyznacza się ten próg w miejscu, gdzie kształt danych zaczyna wyraźnie się zmieniać. Od tego momentu no rozkładzie mówimy o ogonie strat.

<sup>25</sup> Wciąż utrzymujemy założenie o stałości częstości, a więc nie ma rozkładu wokół wartości  $m$ .

<sup>26</sup> Wyraźnie podkreślam, że chodzi o kwantyle rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ . To rozróżnienie jest ważne, chodzi o wyraźne odróżnienie od rozkładu zmiennej  $X_{AGR}$  i kwantyli na tym rozkładzie.

<sup>27</sup> Dla uproszczenia pomijam możliwość znalezienia się dwóch ekstremalnych wartości w jednym agregacie. Takie prawdopodobieństwo jest na tyle ograniczone (co pokażą późniejsze przykłady), że takie pominięcie można zastosować.

<sup>28</sup> Taka redukcja może potencjalnie wystąpić przynajmniej w ogonie rozkładu  $X_{AGR}$ .

Zastosowano się do wskazanej przez regulatora mechaniki aktuarialnej i dokonano symulacyjnego (metoda Monte Carlo) złożenia zjawisk częstości i dotkliwości, aby na końcu uzyskać rozkład zagregowanych strat  $X_{AGR}$ .

### Założenia eksperymentu

Złożenia rozkładów do rozkładu zagregowanych strat  $X_{AGR}$  dokonano przy następujących założeniach:

- eksperyment przeprowadzono na kanonicznych postaciach rozkładów,
- zjawisko częstości nie posiada dyspersji, a zatem w kolejnych iteracjach zakładano stałą wartość częstości  $m^{29}$ ,
- zjawisko dotkliwości opisywane jest przez rozkład teoretyczny, a zatem wartość pojedynczej straty pochodzi z rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ , takiego jaki został wybrany dla danego wariantu obliczeń.

Przeprowadzając symulację, w trakcie której tworzony był rozkład zagregowanych strat  $X_{AGR}$ , składający się z kolejno tworzonych (w kolejnych iteracjach symulacji) agregatów  $x_{AGR_i}$ , każdorazowo (dla każdego wariantu obliczeń) odkładano agregat  $x_{AGR_{0.999}}$ , będący de facto poszukiwanym wynikiem modelu. Przez odkładanie rozumie się tu przechowanie jego wszystkich cech:

- wartość agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ , a zatem suma wszystkich pojedynczych wartości pochodzących ze zmiennej  $F_X$ , które go tworzą,
- wartość częstości  $m$ , dla agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ , która jak założyliśmy wcześniej będzie stała dla wszystkich agregatów  $x_{AGR_i}$  tworzących rozkład zagregowanych strat w danym wariancie obliczeń,
- wartości wszystkich  $m$  strat wchodzących w skład agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ , a pochodzących z rozkładu  $F_X$ ,
- wartości kwantyli odczytanych na rozkładzie pojedynczej straty  $F_X$  dla wszystkich  $m$  strat wchodzących w skład agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ , a pochodzących z rozkładu  $F_X$ ,
- udział procentowy każdej z  $m$  strat wchodzących w skład agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ , a pochodzących z rozkładu  $F_X$ , w całkowitej wartości agregatu.

Dla utrzymania długości prowadzonego wywodu pod kontrolą, zrezygnowano ze szczegółowej analizy innych agregatów  $x_{AGR_i}$ , znajdujących się np. poniżej lub powyżej<sup>30</sup> badanego agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ . Pamiętajmy, że ich ewentualne zbadanie mogłoby posłużyć jedynie celom porównawczym, nie mają one bowiem żadnego wpływu na wynik modelu, zgodnie z założeniami frameworku AMA, który tu poddawany jest analizie.

Na potrzeby wyznaczenia liczby powtórzeń symulacji (a więc poziomu precyzji obliczeniowej) oraz interpretacji tej liczby w kontekście poszukiwanego kwantyla posłużono się następującym rozumowaniem. Przy założonym we frameworku AMA poziomie poszukiwanego kwantyla rozkładu zagregowanych strat  $X_{AGR}$ : 0.999, wygodną do interpretacji liczbą powtórzeń symulacji byłoby 1000. Wtedy, w procesie symulacyjnym generowalibyśmy 1000 razy agregat  $x_{AGR_i}$ , a następnie po ułożeniu tych agregatów w kolejności rosnącej ich wartości, otrzymalibyśmy rozkład  $X_{AGR}$ . Na przedostatniej, 999 pozycji tego rozkładu, przy tej liczbie 1000 powtórzeń symulacji, znalazłby się poszukiwany przez nas agregat  $x_{AGR_{0.999}}$ . Gdyby, natomiast, ustawić liczbę powtórzeń symulacji na 100 000, oznaczać to będzie, że będziemy posiadać 100 oszacowań każdego kwantyla (przy granularności 0.001<sup>31</sup>). Posiadamy zatem również 100 oszacowań kwantyla 0.999 (de facto posiadamy 100 agregatów  $x_{AGR_{0.999}}$ ). Korzystając z tego rozumowania, liczbę powtórzeń symulacji przyjęto właśnie na poziomie 100 000. Wszystkie wyznaczane wartości dla analizowanego agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ , o których napisałem powyżej (t.j. wartość agregatu, wartość największej straty w agregacie, kwantyl największej straty w agregacie odczytywany na rozkładzie  $F_X$ ), i które przedstawiłem w tabelach są wyznaczane jako mediana wyliczona z tych 100 oszacowań agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ . Wyjątek stanowią obliczenia

<sup>29</sup> Podtrzymane jest wcześniejsze założenie o stałości częstości  $m$ , w ramach pojedynczego wariantu obliczeń.

<sup>30</sup> Na kwantylach niższych lub wyższych rozkładu  $X_{AGR}$ .

<sup>31</sup> Co oznacza, że podzieliśmy rozkład zagregowany na 1000 kwantyli i dla każdego mamy 100 oszacowań.

przeprowadzone dla wariantu, gdzie częstość  $m = 1000$ , gdzie ze względu na czas przetwarzania, zredukowano liczbę oszacowań agregatu  $x_{AGR_{0,999}}$  do 10 (co jest równoznaczne z liczbą powtórzeń symulacji 10 000).

## Warianty eksperymentu

Eksperyment przeprowadzono w następujących wariantach:

- dla zjawiska częstości wybrano warianty, gdzie  $m$  zmienia się o rząd wielkości:  $m = 1$ ,  $m = 10$ ,  $m = 100$ ,  $m = 1000$ . Ograniczono się do zakresu wartości  $m$ , realnej z punktu widzenia możliwości sektora bankowego, mając na uwadze: (a) krótką historię zbiorów danych, (b) trudności z pozyskaniem danych o ryzyku operacyjnym, (c) oczekiwaną przez regulatora granulację modelu na segmenty, która w znaczący sposób redukuje liczebność zbiorów danych do modelowania.
- dla zjawiska dotkliwości wybrano warianty przeliczeń:
  - dla rozkładów odniesienia: uniform ( $a=0$ ,  $b=1$ ), exponential ( $\lambda=1$ ), normal ( $\mu=0$ , różne wartości  $\sigma$ ),
  - dla rozkładów Weibull, lognormal w wersjach lekko-ogonowych tych rozkładów: Weibull ( $\lambda=1$ ,  $k>1$ ), lognormal ( $\mu=0$ ,  $\sigma < (0.5, 0.7)$ ),
  - dla rozkładów Weibull, lognormal w wersjach ciężko-ogonowych tych rozkładów: Weibull ( $\lambda=1$ ,  $k<1$ ), lognormal ( $\mu=0$ ,  $\sigma > (0.5, 0.7)$ ).

Celem eksperymentu była obserwacja efektu dominacji agregatu  $x_{AGR_{0,999}}$  przez pojedynczą stratę z rozkładu  $F_X$ , w zależności od wyboru wariantu dla częstości i wariantu dla dotkliwości. Eksperyment miał zatem przetestować zaprezentowaną wcześniej własność (1).

## Wyniki eksperymentu

Wyniki eksperymenty zamieszczono w załączniku 2.

## Wnioski z eksperymentu

Analizę wyników rozpocznę od rozkładów odniesienia. Rozważmy najpierw przypadek, gdy za rozkład pojedynczej straty  $F_X$  przyjęto rozkład uniform. Rozkład ten cechuje się, w porównaniu do wszystkich pozostałych badanych rozkładów, najmniejszymi odległościami pomiędzy kwantylami, a zatem najlżejszym ogonem. Poza przypadkiem, gdzie  $m = 1$ , który to przypadek umieszczono tu jedynie dla celów porównawczych, gdyż de facto sprowadza on całe zagadnienie do rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ , w pozostałych przypadkach widać, że maksymalna strata w agregacie  $x_{AGR_{0,999}}$ , dla różnych poziomów częstości  $m$ : 10, 100, 1000, nie jest w stanie zdominować wartości całego agregatu. Przy małej liczbie strat składającej się na agregat ( $m = 10$ ) stanowi ona zaledwie 12.88% całej wartości agregatu. Przy rosnących  $m = 100$ ,  $m = 1000$ , jej udział, co zrozumiałe, maleje i wynosi odpowiednio: 1.70%, 0.19%. Jest to oczywiście wynik bliskości wartości na dalekich kwantylach zmiennej  $F_X$ , w stosunku do wartości na kwantylach średnich (np. mediana). Wartości z dalekich kwantyli są zaledwie niewiele większe niż wartości średnie. Nie mają zatem mocy zdominowania całego agregatu.

Podobną strukturę agregatu  $x_{AGR_{0,999}}$  obserwujemy dla przypadku, gdy za rozkład  $F_X$  przyjęto rozkład exponential. Tu również dla kolejnych, rosnących  $m$ , wartość największej straty nie dominuje nad agregatem. Dla kolejnych  $m$ : 10, 100, 1000, udział największej straty wynosi odpowiednio: 27.46%, 4.90%, 0.70%.

Ciekawych obserwacji dostarcza nam analiza wariantu, gdzie  $F_X$ : normal. Przede wszystkim zauważamy, że niezależnie od dyspersji rozkładu, wyrażanej poprzez różne wartości parametru  $\sigma$ , wartość pojedynczej straty stanowi taki sam udział w agregacie. Takie zachowanie agregatu wynika oczywiście z własności rozkładu normalnego, który niezależnie od zmieniających się poziomów odchyleń, zachowuje takie same relacje pomiędzy kwantylami. Jeśli chodzi o aspekt dominacji to obserwujemy efekty takie, jakie są spodziewane, gdy za rozkład  $F_X$  przyjęty zostaje rozkład lekko-



ogonowy. Nie obserwujemy dominacji przez pojedynczą stratę agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ . Dla kolejnych  $m$ : 10, 100, 1000, udział największej straty wynosi odpowiednio: 25.46%, 9.54%, 3.49%. Są to wyniki dość zbliżone do tych, jakie zaobserwowaliśmy dla rozkładu exponential.

Przyjrzyjmy się teraz lekko-ogonowym wariantom rozkładów Weibull i lognormal w roli rozkładu  $F_X$ . Jak wykazano wcześniej rozkład Weibull dla wartości parametru  $k > 1$ , a także rozkład lognormal dla wartości parametru  $\sigma$  mniejszych od (0.5, 0.7), przyjmują kształt ogona lżejszy, niż rozkład exponential, przy czym kierunek zmian kształtu jest taki, że: dla Weibull – przy rosnącym  $k$ , a dla lognormal – przy malejących  $\sigma$ ; ogon jest coraz lżejszy.

Dla obydwu rozkładów, w ich wersjach lekko-ogonowych, nie występuje zjawisko dominacji pojedynczej straty w agregacji. Dla Weibull dla  $m = 10$ , w zależności od wartości parametru  $k$  mamy wartości udziału pojedynczej, maksymalnej straty w przedziale (22.07% dla  $k=1.2$ , 12.14% dla  $k=5$ ). Dla  $m = 100$  mamy przedział (3.95%  $\rightarrow$  1.44%), a dla  $m = 1000$ : (0.50%  $\rightarrow$  0.16%). Natomiast dla rozkładu lognormal lekko-ogonowego mamy:  $m = 10$ : (13.44% dla  $\sigma=0.2$ , 28.96% dla  $\sigma=0.6$ ),  $m = 100$ : (1.62%  $\rightarrow$  4.24%),  $m = 1000$ : (0.18%  $\rightarrow$  0.66%). Obserwujemy zatem dla obydwu rozkładów jeszcze mniejszą siłę działania pojedynczej, maksymalnej straty z rozkładu  $F_X$ , niż w przypadku rozkładu exponential, czy normal, czego należało oczekiwać.

We wszystkich w/w przypadkach, rozkład  $F_X$  nie dominuje rozkładu zagregowanych strat  $X_{AGR}$ . O wartości agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$ , a więc o wartości kwantyla 0.999 rozkładu zagregowanych strat decyduje masa/wolumen niewielkich strat. Jest to zatem przypadek, gdy sytuacja nieoczekiwana, generowana przez rozkład  $X_{AGR}$  (jako, że we frameworku AMA nie predefiniowano struktury sytuacji nieoczekiwanej, to właśnie rozkład złożony miał tę sytuację nieoczekiwaną zbudować) jest zdominowana przez zjawisko częstości. Oznacza to, że w krytycznym momencie, decydującym o losach instytucji finansowej, spodziewamy się wielu małych strat, których ilość stanowić będzie o tym skrajnym niebezpieczeństwie. Czy taki kształt sytuacji nieoczekiwanej w ryzyku operacyjnym w sektorze bankowym jest możliwy? To osobne zagadnienie, które też warto rozważyć.

Przeanalizuję teraz przypadki najważniejsze z punktu widzenia prowadzonego tu rozumowania. Jak wcześniej napisano, to właśnie rozkłady ciężko-ogonowe były silnie rekomendowane przez regulatora do stosowania we frameworku AMA, jako rozkłady zmiennej wartości pojedynczej straty  $F_X$ . A więc to efekty, które te właśnie rozkłady generują, mogły być przyczyną wysokiej labilności wyników zwracanych przez modele AMA, wykorzystywane przez podmioty sektora bankowego. Być może właśnie te efekty doprowadziły ostatecznie do wycofania metody w CRR III (2024).

Przeanalizujemy zapisaną wcześniej własność:

$$\text{Dla } F_X \in HT \text{ oraz } m = \text{const}, \\ \text{jeśli } \theta(F_X) \rightarrow \infty \text{ oraz } \lim_{p \rightarrow 1^-} Q_{X_{AGR}}(p) = 1, \text{ to } \lim_{p \rightarrow 1^-} \sum_i^m x_i = x_{EXTR} \quad (1)$$

Zacznijmy od rozkładu Weibulla. Przyjmuje on kształt ciężko-ogonowy dla wartości parametru  $k < 1$ , przy czym im mniejsze  $k$ , tym ogon staje się coraz cięższy. Analizując wyniki eksperymentu widzimy, że przy stałym, w danym wariancie, poziomie częstości (np.  $m = 10$ ), wraz ze zwiększającym się stopniem grubości ogona (przesuwając się od  $k=0.8$ , do  $k=0.1$ ), dla dalekiego kwantyla (tu 0.999) wartość agregatu ( $x_{AGR_i} = \sum_i^m x_i$ ) coraz bardziej zbliża się do wartości pojedynczej, ekstremalnej straty  $x_{EXTR}$ , pochodzącej z rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ . A zatem pojedyncza, ekstremalna strata dominuje cały agregat  $x_{AGR_i}$  (w tym przypadku badany agregat  $x_{AGR_{0.999}}$ ). Dla rozkładu Weibulla widzimy, że dla  $m = 10$  udział pojedynczej, maksymalnej straty rośnie wraz z malejącą wartością  $k$  i tak: dla  $k=0.8$  mamy 37.63% udziału straty  $x_{EXTR}$  w agregacji  $x_{AGR_{0.999}}$ , dla  $k=0.4$  mamy 87.99%, dla  $k=0.2$  99.71%, a dla  $k=0.1$  99.999%. Dla  $m = 100$  przy malejących  $k$  mamy: 6.66% dla  $k=0.8$ , aż do 99.96% dla  $k=0.1$ , a dla  $m = 1000$ , mamy (1.16%  $\rightarrow$  99.71%) wysycenia agregatu pojedynczą stratą, w zależności od wartości  $k$ .

Przeanalizuję teraz wyniki eksperymentu dla rozkładu  $F_X$ : lognormal w wariancie ciężko-ogonowym ( $\sigma > (0.5, 0.7)$ ), gdzie ogon staje się cięższy wraz ze wzrostem  $\sigma$ . I w tym przypadku w/w własność jest potwierdzona. Wraz ze wzrastającym stopniem grubości ogona, wysycenie agregatu pojedynczą stratą rośnie. I tak, dla  $m = 10$ , dla  $\sigma=0.8$  udział straty maksymalnej wynosi 44.98%, dla

$\sigma=2$ , 97.38%, a dla  $\sigma=5$ , 99.99%. Dla  $m = 100$  mamy (7.82%→99.97%), a dla  $m = 1000$ : (1.45%→99.92%).

Należy zauważyć, że w przypadku obydwu rozkładów występuje opisany wcześniej efekt bufora ochronnego, którego funkcję pełni częstość  $m$ . Wraz z rosnącą (w kolejnych wariantach obliczeń) wartością  $m$ , przy niezmiennych pozostałych założeniach, udział  $x_{EXTR}$  w całkowitej wartości agregatu  $x_{AGR_{0.999}}$  zmniejsza się. Jest to zachowanie agregatu oczekiwane, mając na uwadze rosnącą liczbę zdarzeń, którą potrzeba zdominować. Należy jednak zauważyć, że przy wartościach  $m$ , które zastosowano w eksperymencie, a które są bliskie co do rzędów wielkości realnie stosowanym w modelach AMA poziomom częstości<sup>32</sup>, przy pewnych stopniach gruboogonowości rozkładów, bufor ten nie jest wystarczający, żeby uchronić agregat przed zdominowaniem przez pojedynczą stratę. Oznacza to, że w realnym stosowaniu frameworku, przy: (a) narzuconej przez regulatora mechanice składania rozkładów, (b) wymogach gruboogonowości rozkładów  $F_X$ , (c) obiektywnie ograniczonych liczebnościach zbiorów danych; mogliśmy mieć stosunkowo często do czynienia z występowaniem sformułowanej wcześniej własności o dominacji dalekiego kwantyla  $X_{AGR}$  przez pojedynczą stratę z rozkładu  $F_X$ . To w rzeczywistości oznacza dominację, na poziomie dalekich kwantyli, rozkładu  $X_{AGR}$  przez rozkład  $F_X$ . To bardzo ważna konstatacja, mająca swoje konsekwencje.

### 3.2 WŁASNOŚĆ (2): RELACJA RZĘDÓW DALEKICH KWANTYLI POMIĘDZY ROZKŁADEM ZAGREGOWANYCH STRAT A ROZKŁADEM POJEDYNCZEJ STRATY

#### 3.2.1 SPECYFIKACJA WŁASNOŚCI

Predefiniowane we frameworku założenia oraz wynikające z nich mechaniki prowadzą do jeszcze jednego efektu, który opiszę w tym rozdziale.

Jeżeli zastosujemy rozkłady gruboogonowe do opisu rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ , to przy jednoczesnym działaniu własności dotyczącej dominacji agregatu przez pojedynczą stratę (własność (1)), możemy spodziewać się wystąpienia kolejnej własności:

$$\text{Dla } F_X \in HT \text{ oraz } \theta(F_X) \rightarrow \infty \\ \text{jeśli, } \frac{x_{EXTR}}{x_{AGR_{q \rightarrow 0^+}}} \rightarrow 1 \text{ oraz } m \rightarrow \infty, \text{ to } \lim_{q \rightarrow 0^+} Q_{X_{AGR}}(q) \approx Q_X\left(\frac{q}{m}\right) \quad (2)$$

gdzie:

$q$  – oznacza poziom kwantyla rozumiany jako  $1 - p$ , a zatem kwantyl  $Q(p)$  na poziomie 0.999  $Q(p)$ , będzie tu wyrażony jako poziom  $Q(q)$ : 0.001

$q \rightarrow 0^+$  - oznacza zmierzanie do coraz dalszych, prawych kwantyli rozkładu

$\frac{x_{EXTR}}{x_{AGR_{q \rightarrow 0^+}}} \rightarrow 1$  – oznacza coraz większą dominację agregatu  $x_{AGR_i}$  na dalekim kwantylu przez wartość

pojedynczej straty  $x_{EXTR}$  pochodzącej z rozkładu  $F_X$  (własność (1))

$Q_{X_{AGR}}(q)$  – kwantyl rzędu  $q$  rozkładu zmiennej  $X_{AGR}$

$Q_X(q)$  – kwantyl rzędu  $q$  rozkładu zmiennej pojedynczej straty  $F_X$ , w niniejszej własności rząd ten jest wyrażony jako  $\frac{q}{m}$ .

A zatem, przy założeniu: (a) gruboogonowości rozkładu pojedynczej straty oraz (b) dominacji przez  $x_{EXTR}$  agregatu  $x_{AGR_i}$  znajdującego się na dalekim kwantylu zmiennej  $X_{AGR}$ ; dla wartości częstości  $m$  zmierzającej do nieskończoności, możemy spodziewać się, że daleki agregat  $x_{AGR_i}$  na rozkładzie  $X_{AGR}$ , na poziomie  $q$  (np. agregat na poziomie  $x_{AGR_{0.999}}$ ) będzie zdominowany przez stratę  $x_{EXTR}$ , taką, która na rozkładzie  $F_X$  będzie umiejscowiona na poziomie kwantyla rzędu  $\frac{q}{m}$ . A zatem dla:

-  $m = 1$ , o wartości agregatu na poziomie kwantyla 0.999 ( $q = 0.001$ ) na rozkładzie  $X_{AGR}$ , będzie decydować dominująca ten agregat wartość  $x_{EXTR}$ , którą odczytamy na rozkładzie  $F_X$  z kwantyla tego samego poziomu 0.999 ( $q = 0.001$ ),

<sup>32</sup> Mając na uwadze ograniczenia liczebności zbiorów danych i wymaganą przez regulatora segmentację.

- $m = 10$ , natomiast o wartości agregatu na poziomie kwantyla 0.999 ( $q = 0.001$ ) na rozkładzie  $X_{AGR}$ , będzie decydować wartość  $x_{EXTR}$ , którą odczytamy na rozkładzie  $F_X$  z kwantyla na poziomie 0.9999 ( $q = 0.0001$ ), a więc znajdującego się o rząd wielkości dalej, niż kwantyl rozkładu  $X_{AGR}$ ,
- $m = 100$ , wartość  $x_{EXTR}$  będzie odczytana z kwantyla 0.99999 ( $q = 0.00001$ ) na rozkładzie  $F_X$ , a więc o dwa rzędy wielkości dalej,
- $m = 1000$ , wartość  $x_{EXTR}$  znajdzie się na kwantylu 0.999999 ( $q = 0.000001$ ) na rozkładzie  $F_X$ , a więc o trzy rzędy wielkości dalej.

Tab. 2 Zmienność wartości kwantyla zmiennej  $F_X$

Liczebność (n) zbioru danych	Częstość roczna (m)	Kwantyl zmiennej $X_{AGR}$ (wynik modelu)	Kwantyl (na rozkładzie zmiennej $X$ ) pojedynczej straty, która dominuje agregat na rozkładzie zmiennej $X_{AGR}$
1000	1	99.9%	99.9%
	10	99.9%	99.99%
	100	99.9%	99.999%
	1000	99.9%	99.9999%
10000	1	99.9%	99.9%
	10	99.9%	99.99%
	100	99.9%	99.999%
	1000	99.9%	99.9999%
100	1	99.9%	99.99%
	10	99.9%	99.999%
	100	99.9%	99.9999%

Źródło: opracowanie własne

Można tę właściwość wyjaśnić w następujący sposób (patrz załącznik 3). Na początek rozważmy najprostszy przypadek, gdzie  $m = 1$  i najbardziej intuicyjną liczbę powtórzeń symulacji: 1000. Wtedy na pozycji poszukiwanego przez nas kwantyla 0.999 rozkładu  $X_{AGR}$  będzie znajdować się agregat  $x_{AGR_{0.999}}$  znajdujący się dokładnie na pozycji 999 posortowanego rosnąco szeregu. Dla  $m = 1$  każdy z 1000 agregatów składa się tylko z 1 wartości z rozkładu  $F_X$ , a zatem zmienna  $X_{AGR}$  będzie uszeregowana dokładnie tak samo jak zmienna  $F_X$ . Na pozycji kwantyla 0.999 zmiennej  $X_{AGR}$  znajdzie się więc wartość z rozkładu  $F_X$  znajdująca się też na kwantylu 0.999.

Gdy przeanalizujemy natomiast przypadek, gdzie  $m = 10$ , to przy zachowaniu wciąż tej samej, intuicyjnej i mocno upraszczającej analizę, liczby symulacji na poziomie 1000, zauważymy w pierwszej kolejności, że łącznie wylosowano z rozkładu  $F_X$  10 000 wartości ( $m = 10 * \text{iter} = 1000$ ). Zatrzymajmy się przy tym na chwilę. 10 000 losowań z rozkładu  $F_X$  oznacza głębszą penetrację rozkładu zmiennej pojedynczej straty, niż w przypadku 1000 losowań. Ostatnia, najbardziej skrajna wartość wylosowana z  $F_X$  będą znajdować się w przybliżeniu na pozycji 0.9999. Dalej, wiemy też, że konstrukcja rozkładu zagregowanych strat spowoduje pogrupowanie tych 10 000 obserwacji z rozkładu  $F_X$  w agregaty po 10 (gdyż  $m = 10$ )<sup>33</sup>. Jeżeli dodatkowo przyjmiemy założenie, że: (1) wartość straty  $x_{EXTR}$  zdominuje agregat  $x_{AGR_{0.999}}$ , a także (2) wynikający z (1) brak możliwości wystąpienia więcej niż jednej ekstremalnych wartości w agregacie, to oznaczać to będzie, że naszych tysiąc utworzonych w procesie symulacji agregatów, po ich posortowaniu, ułoży się w taki sposób, że ostatnie pozycje zajmą agregaty, które zostaną zdominowane przez pojedyncze, najdalsze straty ze wszystkich wylosowanych 10 000 strat. A zatem na ostatniej pozycji (nr 1000) rozkładu  $X_{AGR}$  znajdzie się agregat zdominowany przez ostatnią wylosowaną wartość  $x_{EXTR}$  (jakaś wartość na pozycji  $> 0.9999$  na rozkładzie  $F_X$ ), a na pozycji poszukiwanego przez nas kwantyla (pozycja nr 999, kwantyl 0.999) znajdzie się agregat zdominowany przez wartość  $x_{EXTR}$ , która na rozkładzie  $F_X$  zajmuje pozycję 0.9999. Warto zaznaczyć, że ewentualne zwiększenie liczby iteracji symulacji nie ma żadnego wpływu na ten układ kwantyli. Jak pokazałem wcześniej, zwiększanie liczby symulacji prowadzić będzie jedynie do większej precyzji każdego z kwantyli, a więc do zmniejszania odchyłeń wartości na pozycjach tych kwantyli, ale nie przesunąć wartości na tych kwantylach.

<sup>33</sup> Należy tu przypomnieć, że wartość  $m$  została ustawiona na sztywno, co służyć ma jasności przekazu. W rzeczywistości  $m$  jest zmienne. Nie wpływa to jednak na wnioskowanie tu wyprowadzane, co można wykazać (dyspersja jest mała).

Idąc dalej, widzimy, że dla  $m = 100$  mamy możliwość 100 000 razy losować z rozkładu  $F_X$ , a zatem mamy dalsze pogłębienie penetracji rozkładu  $F_X$ . Ostatnie, najbardziej skrajne wylosowane wartości będą zajmować więc kwantyle zbliżone do 0.99999 na rozkładzie  $F_X$ . Przy pogrupowaniu tych 100 000 wartości w agregaty, tym razem po 100 ( $m = 100$ ), przy wciąż dużej przewadze straty  $x_{EXTR}$  nad pozostałymi stratami w agregacie (jej dominacją nad nimi), a więc wykluczeniu tym samym możliwości pojawienia się więcej niż jednej straty ekstremalnej w agregacie, agregaty znów ułożą się w taki sposób, że te ostatnie będą zdominowane przez  $x_{EXTR}$ , znajdujące się właśnie na poziomie 0.99999 na rozkładzie  $F_X$ . Dla  $m = 1000$  obserwujemy dalsze przesuwania się kwantyla straty  $x_{EXTR}$ , dominującej agregat  $x_{AGR_{0.999}}$ . Tym razem  $x_{EXTR}$  zajmuje na rozkładzie  $F_X$  pozycję 0.999999.

### 3.2.2 EMPIRYCZNE OBSERWACJE RELACJI RZĘDÓW DALEKICH KWANTYLI POMIĘDZY ROZKŁADAMI

Opisaną relację kwantyli pomiędzy rozkładami  $X_{AGR}$  i  $F_X$  możemy prześledzić posługując się zaprezentowanym już wcześniej eksperymentem obliczeniowym (załącznik 2). Tym razem w centrum uwagi znajdzie obserwacja poziomu kwantyla na rozkładzie  $F_X$  dla wartości  $x_{EXTR}$ , która dominuje agregat znajdujący się na poziomie kwantyla 0.999 rozkładu  $X_{AGR}$  (a więc agregat  $x_{AGR_{0.999}}$ ). Eksperyment przeprowadzony został tylko dla rozkładów ciężko-ogonowych, gdyż tylko tego typu rozkładów dotyczy testowana tu własność (2).

Dla rozkładu Weibull w wersji ciężko-ogonowej widzimy po pierwsze, co oczywiste, że dla  $m = 1$ , wartość kwantyla  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  wynosi 0.999. Agregat składa się z jednej wartości, więc nie jest to obserwacja zaskakująca. Dla  $m = 10$  natomiast obserwujemy, że już od stopnia grubości ogona określanego przez parametr  $k$ :  $k \leq 0.4$ , rząd kwantyla dla  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  jest, niezależnie od poziomu  $k$ , a więc zarówno dla  $k=0.4$ ,  $k=0.2$ , jak i  $k=0.1$ , bliski poziomowi opisanemu w sformułowanej wcześniej własności  $\frac{q}{m}$ , a więc poziomowi 0.9999. Dokładnie, dla w/w poziomów  $k$  wynosi on od 0.99983 do 0.99985. Dla  $m = 100$  poziom ten, zgodnie z oczekiwaniem sformułowanym we własności (2), przesuwa się o kolejny rząd wielkości i wynosi dla tych samych  $k$  od 0.99996 do 0.99998. Natomiast dla  $m = 1000$  przesuwa się on do poziomu 0.999998. Tym razem jednak tylko dla  $k=0.2$  i  $k=0.1$ . Dla  $k=0.4$  (rozkład o nie tak grubym ogonie) prawdopodobnie  $x_{EXTR}$  nie miało już takiej mocy dominowania nad pozostałymi 999 obserwacjami w agregacie, co zmienia zasady formułowania agregatu i redukuje siłę wyprowadzonej przeze mnie własności ( $x_{EXTR}$  dla  $k=0.4$  wciąż ma kwantyl wyższy na rozkładzie  $F_X$ : 0.999977, niż kwantyl agregatu: 0.999, ale oddalamy się od spełnienia własności  $\frac{q}{m}$ , czyli własności (2)).

Na rozkładzie lognormal w wersji ciężko-ogonowej widać taki sam efekt. Dla  $m = 10$  i wartości  $\sigma \geq 1.4$  kwantyl  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  wynosi: 0.99984-0.99985, dla  $m = 100$  mamy: 0.99997-0.99998, a dla  $m=1000$ : 0.9999981-0.9999988.

Wyniki eksperymentu, przy wykorzystaniu rozkładów ciężko-ogonowych jako rozkładów  $F_X$  potwierdzają rzeczywiste występowanie sformułowanej wyżej własności (2).

### 3.2.3 ŁĄCZNE WYSTĘPOWANIE WŁASNOŚCI (1) I (2) NA ROZKŁADZIE ZAGREGOWANYCH STRAT I ZDOMINOWANIE ROZKŁADU ZAGREGOWANYCH STRAT PRZEZ ROZKŁAD POJEDYNCZEJ STRATY

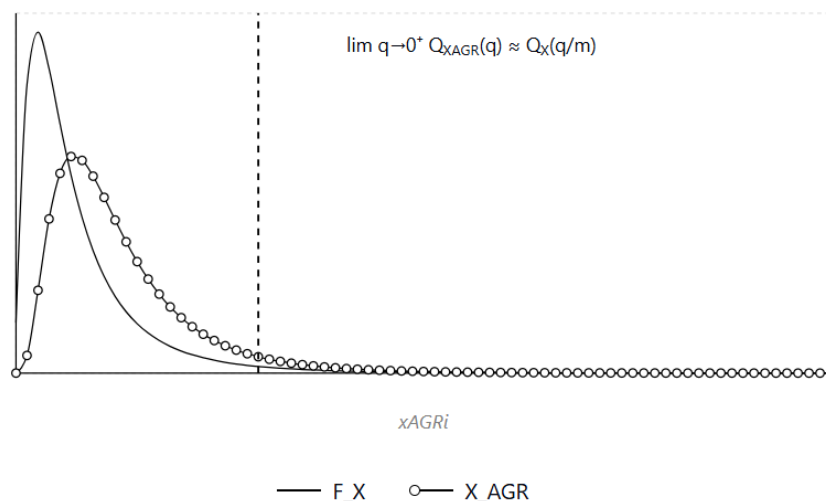
Jak wykazałem w toku powyższego rozumowania, przy: (a) wymaganej przez regulatora mechanice tworzenia rozkładu zagregowanych strat, (b) przy zastosowaniu, również wymaganych, rozkładów ciężko-ogonowych do opisu pojedynczej straty oraz (c) dla poziomów  $m$ , które były realne do zastosowania, mając na uwadze ograniczony czas gromadzenia danych i wymaganą przez regulatora segmentację<sup>34</sup>, możemy spodziewać się jednoczesnego występowania dwóch sformułowanych powyżej efektów:

<sup>34</sup> Można założyć, że rzędy wielkości dla  $m$  pomiędzy 10 a 1 000 to realne możliwości praktycznego modelowania dla pojedynczego segmentu z jakimi musiały się zmierzyć podmioty sektora bankowego. Liczebności rzędu  $m=10\ 000$  na poziomie pojedynczego segmentu modelu raczej należały do rzadkości.

- dominacji agregatu na poziomie 0.999 rozkładu  $X_{AGR}$  przez pojedynczą stratę  $x_{EXTR}$  rozkładu  $F_X$  (własność (1)),
- występowania na poziomie kwantyla 0.999 rozkładu  $X_{AGR}$ , kwantyla dominującej straty  $x_{EXTR}$  odczytywanego z rozkładu  $F_X$ , na poziomie zdecydowanie wyższym niż poziom (0.999), na którym agregat posiadający tę dominującą stratę się znajduje na rozkładzie  $X_{AGR}$  (własność (2)).

To łącznie prowadzi do następującej konstatacji. Na poziomie ogona, a w zasadzie wystarczy ograniczyć się do dalekich kwantyli, bo tylko ten zakres był istotny z punktu widzenia frameworku AMA<sup>35</sup>; w wielu przypadkach praktycznego modelowania ryzyka operacyjnego podejmowanego przez podmioty rynku, można domniemać występowanie sytuacji zdominowania rozkładu zagregowanych strat przez rozkład pojedynczej straty. Dodatkowo rozkład dominujący  $F_X$  nie pokrywa rozkładu zdominowanego  $X_{AGR}$  za pomocą prostej relacji kwantylowej:  $Q_X(q) \rightarrow Q_{X_{AGR}}(q)$ , tylko jest on przesunięty względem rozkładu  $X_{AGR}$ , w relacji:  $Q_X\left(\frac{q}{m}\right) \rightarrow Q_{X_{AGR}}(q)$ , co oznacza, że kwantyl  $q$  rozkładu  $X_{AGR}$  jest opisywany przez kwantyl wyższego rzędu  $\left(\frac{q}{m}\right)$  rozkładu  $F_X$ . Sytuację taką przedstawia poniższy wykres. Widać na nim, że od pewnego poziomu zmiennych (powyżej pewnych kwantyli) rozkłady zmiennych  $X_{AGR}$  i  $F_X$  mają wspólny przebieg, z tą różnicą, że na każdym z nich odczytamy w wybranym punkcie inny poziom kwantyla, a wzajemna relacja tych kwantyli będzie zbiegać do tej wskazanej we własności (2).

Rys. 7 Dominacja zmiennej  $X_{AGR}$  przez zmienną  $F_X$



Źródło: opracowanie własne

Powyższy wniosek przesuwając ciężar frameworku AMA na poprawność zamodelowania rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ . Wniosek ten z pozoru nie wydaje się rewolucyjny. Zarówno w sektorze bankowym, jak i w kręgach nadzorczych, proporcje wysiłków i zaangażowania były wyraźnie przeważone w kierunku modelowania rozkładu dotkliwości strat. Ja jednak chciałbym zwrócić uwagę na inne, być może, niedostrzeżone konsekwencje zjednoczenia pojęciowego: modelowania rozkładu  $X_{AGR}$  z rozkładem  $F_X$ .

### 3.3 WŁASNOŚĆ (3): RELACJA POMIĘDZY LICZEBNOŚCIĄ STRAT A POZIOMEM DOTKLIWOŚCI POJEDYNCZEJ STRATY

#### 3.3.1 SPECYFIKACJA WŁASNOŚCI

Współistnienie wyżej wymienionych efektów, którego skutkiem jest zdominowanie rozkładu  $X_{AGR}$ , w jego ogonie, przez rozkład  $F_X$ , prowadzi do jeszcze jednej ciekawej własności, którą w sposób pośredni można było już odczytać z własności (2). Zapisze ją w następujący sposób:

<sup>35</sup> Chodzi przecież o zabezpieczenie się przed sytuacjami skrajnymi.

$$\begin{aligned} & \text{Dla } F_X \in HT, \text{ gdzie } \theta(F_X) \rightarrow \infty, \frac{x_{EXTR}}{x_{AGR_{q \rightarrow 0^+}}} \rightarrow 1 \text{ oraz } \lim_{q \rightarrow 0^+} Q_{X_{AGR}}(q) \approx Q_X\left(\frac{q}{m}\right) \\ & \text{jeśli } m \rightarrow \infty, \text{ to } \lim_{q \rightarrow 0^+} Q_X\left(\frac{q}{m}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Co oznacza, że przy założeniu prawdziwości wcześniej sformułowanych własności, przy warunkach, które zostały dla nich określone; wraz ze wzrostem liczebności strat operacyjnych, rośnie poziom dotkliwości pojedynczej ekstremalnej straty, która zdecyduje o wyniku modelu. Inaczej mówiąc: im więcej strat, najczęściej o małych wartościach, zaobserwujemy, tym bardziej dotkliwej (znajdującej się na dalszym kwantylu) pojedynczej straty możemy się spodziewać w momencie kryzysu, czyli w sytuacji nieoczekiwanej. Powołując się na przykłady przedstawione w rozdziale poprzednim możemy sformułować taką regułę: gdy w naszej instytucji występuje średnio 1 strata na rok, to poziom tej decydującej, ekstremalnej wynosi 0.999 na rozkładzie  $F_X$ , gdy obserwujemy 10 strat rocznie (zazwyczaj o małych wartościach co wynika z natury zbiorów danych o ryzyku operacyjnym) to skrajna strata będzie znajdować się na kwantylu 0.9999 rozkładu  $F_X$ , w przypadku liczby strat 100, będzie to kwantyl 0.99999, a przy 1000 strat rocznie, kwantyl 0.999999.

Zweryfikujmy występowanie przedstawionej tu własności na przykładach empirycznych, na bazie zaprezentowanego już wcześniej eksperymentu. Dla ciężko-ogonowych wersji rozkładów Weibulla i lognormal występujących w roli rozkładu  $F_X$ , wyniki eksperymentu potwierdzają występowanie własności. Rosnąca częstość  $m$  przesuwą poziom dotkliwości pojedynczej, ekstremalnej straty (odczytywany na rozkładzie  $F_X$ ), tej, która dominuje nad agregatem  $x_{AGR_{0.999}}$  (tym, który decyduje o wyniku modelu). Obserwujemy mniej więcej relację: wzrost o rząd wielkości  $m$ , przesuwą kwantyl również o rząd wielkości. W przypadku innych rozkładów, nie spełniających podstawowego założenia własności (jest ona prawdziwa dla rozkładów ciężko-ogonowych), efekt opisany we własności nie występuje.

Przeanalizujmy co sformułowana powyżej własność oznacza w praktyce biznesowej. Po pierwsze należy podkreślić, że występowanie tego efektu nie jest zamierzone. Nie został on predefiniowany jako pewna rzeczywista obserwacja natury zjawiska, jakim jest ryzyko operacyjne. Przeciwnie, jest to efekt przypadkowy, który powstaje jedynie w wyniku założeń narzuconych frameworkiem nadzorczym i gry sił częstości i dotkliwości, która pod wpływem tych założeń do takich efektów zmierza. Ostatecznie zatem tak zbudowana mechanika modelu każe nam myśleć, że istnieje w przybliżeniu funkcjonalna relacja pomiędzy liczbą np. pomyłek kasowych w banku, a rzędem kwoty straty wynikającej ze zdarzenia ekstremalnego typu zamach hakerów na konta banku. O ile liczba małych zdarzeń może być w pewnym stopniu skorelowana z liczbą zdarzeń „dużych”<sup>36</sup>, o tyle zależność wartości (a więc kwoty na jaką np. oszustwo wewnętrzne czy zewnętrzne się zrealizuje) takiego ekstremalnego zdarzenia od liczby zdarzeń o niewielkiej skali – chodzi więc o zależność wartości straty od liczby strat! - jest w oczywisty sposób nonsensowna. Ciekawe, czy banki, których dotknęły na początku tego wieku te spektakularne, pojedyncze straty, które w niektórych przypadkach doprowadziły do ich upadku, wyróżniały się w sektorze ogromną liczbą małych strat?

### 3.3.2 MECHANIZMY AMORTYZACYJNE DLA EFEKTU PRZESUWANIA SIĘ KWANTYLI ORAZ WYNIKAJĄCEJ Z TEGO ZALEŻNOŚCI STOPNIA KWANTYLA OD LICZEBNOŚCI STRAT

Należy uczciwie zauważyć, że mechanika frameworku AMA ma wbudowane, jak przypuszczam w sposób niezamierzony, pewne mechanizmy amortyzacyjne, dla wcześniej zaobserwowanych efektów. Sposób ich działania i ich siłę przeanalizuję w tej części artykułu.

Zauważmy, że zwiększanie wartości częstości  $m$  będzie powodować redukcję efektu dominacji przez pojedynczą stratę  $x_{EXTR}$  agregatu na dalekim kwantylu rozkładu  $X_{AGR}$ . A więc, przy zwiększającym się  $m$ , pojedyncza, nawet bardzo wysoka strata, będzie miała coraz większe problemy ze zdominowaniem swoją wartością rosnącej liczby pozostałych strat. To z kolei, co od strony intuicji

<sup>36</sup> Jest to intuicja oparta na domniemanej zasadzie proporcjonalności: więcej strat o niskiej wartości to proporcjonalnie więcej strat ekstremalnych. Jest to jednak tylko intuicja. Trudno byłoby przeprowadzić dowód takiej relacji.

nie jest pewne, może spowodować taką zmianę struktury agregatów znajdujących się w ogonie rozkładu  $X_{AGR}$ , że ostatecznie zostaną one ułożone w takiej kolejności, że w ogonie mogą znaleźć się agregaty, które wcale nie zawierają dalekich wartości pochodzących z rozkładu  $F_X$  (nie ma więc warunków dla wystąpienia własności (1)<sup>37</sup>), co w efekcie mogłoby osłabić lub całkowicie „wyłączyć” działanie własności (2)<sup>38</sup>. To ostatecznie osłabiłoby lub wyeliminowałoby własność (3)<sup>39</sup>.

Zweryfikujmy powyższe hipotezy empirycznie, korzystając ze wprowadzonego wcześniej eksperymentu.

Po pierwsze, dla wszystkich przeanalizowanych, występujących w roli rozkładu  $F_X$ , rozkładów teoretycznych, niezależnie od ich wersji: lekko-ogonowych lub ciężko-ogonowych, zwiększanie częstości powoduje zmniejszanie udziału straty  $x_{EXTR}$  w agregacie  $x_{AGR_{0,999}}$ , co jest obserwacją niebudzącą wątpliwości. Ze względu jednak na różnice w rozkładach i w ich parametrach, należy zauważyć różnicę w sile działania mechanizmu amortyzacyjnego. Dla rozkładów lekko-ogonowych, wraz ze zwiększaniem częstości dość szybko następuje redukcja udziału  $x_{EXTR}$  w agregacie  $x_{AGR_{0,999}}$ . Przy zwiększającej się liczbie strat w agregacie, pojedyncza strata odczytana z tego lekko-ogonowego rozkładu dysponuje zbyt niską mocą dominacji nad sumą pozostałych strat. Wartość zmiennej  $X$  na dalekich kwantylach takiego rozkładu nie jest wystraszająco daleko od wartości tej zmiennej w kwantylach środkowych. Dla rozkładów ciężko-ogonowych natomiast, ze względu na ekstremalnie wysokie wartości kwantyli wysokich, w relacji do kwantyli położonych względnie na środku rozkładu (a więc tam, gdzie położone są w większości pozostałe straty w agregacie), pomimo zwiększającego się poziomu częstości  $m$ , moc straty  $x_{EXTR}$  w agregacie  $x_{AGR_{0,999}}$  jest wystarczająco duża, żeby utrzymać jej pozycję dominującą, pomimo przytłaczającej większości pozostałych strat w agregacie. Dla rozkładów ciężko-ogonowych  $m = 1000$  wciąż ma za małą moc, żeby osłabić dominację pojedynczej straty.

Odnosnie hipotezy dotyczącej potencjalnego efektu amortyzacyjnego dla własności (2) i (3) zauważmy, że zwiększająca się częstość, dla wszystkich badanych rozkładów ciężko-ogonowych, konsekwentnie powoduje zwiększanie stopnia kwantyla największej straty w agregacie, pochodzącej z rozkładu  $F_X$ . Zwiększanie poziomu  $m$  o rząd wielkości (np. z 10 do 100) powoduje przesunięcie kwantyla ekstremalnej straty z rozkładu  $F_X$  również o rząd wielkości (w przybliżeniu), co przy rozkładach ciężko-ogonowych oznacza bardzo duży wzrost wartości straty, dużo większy niż zwiększająca się w wyniku zwiększenia poziomu  $m$  suma pozostałych strat w agregacie. Zatem zmniejszający się, wraz ze wzrostem  $m$  udział straty  $x_{EXTR}$  w agregacie  $x_{AGR_{0,999}}$  nie powoduje fundamentalnych zmian w strukturze agregatów znajdujących się na dalekich kwantylach rozkładu  $X_{AGR}$ . Oznacza to, że ten potencjalny mechanizm amortyzujący, niezależnie od rozkładu (oczywiście dla rozkładów ciężko-ogonowych) i wartości jego parametrów nie działa, a zatem w mocy pozostaje własność (2). A jeśli tak, trzeba się też zgodzić z utrzymaniem w mocy własności (3).

Istnieje jeszcze inny efekt buforowy, który z perspektywy prowadzonego tu rozumowania nie jest widoczny. Pomimo, że dotyczy częstości, może on zostać odczytany dopiero podczas analizy struktury zmiennej dotkliwości pojedynczej straty  $F_X$ , a w szczególności w jej formie empirycznej  $F_{X\_EMP}$ . Efekt ten chciałbym szerzej omówić w osobnym artykule, w którym podejmę tematykę budowy rozkładu empirycznego dotkliwości oraz rozkładu teoretycznego tej zmiennej. Tu jedynie zaznaczę istnienie tego efektu i umieszczę go na odpowiednim miejscu w przestrzeni pojęć, którymi się tu posługuję.

Chcąc wprowadzić to nowe pojęcie, powinienem na początku wyraźnie zaznaczyć, że w dotychczasowym rozumowaniu częstość  $m$  rozumiana była tutaj, jak oddzielna (od zjawiska dotkliwości  $F_X$ ) siła, która współtworzy rozkład zagregowanych strat. W szczególności chcę dodać, że nie była ona dotychczas rozumiana jako liczebność rozkładu empirycznego dotkliwości strat  $F_{X\_EMP}$ , którą w oczywisty sposób, też można jako częstość interpretować. W realnym stosowaniu frameworku AMA te dwa rozumienia częstości są, lub przynajmniej powinny być, ściśle ze sobą powiązane. Fakt ich ścisłej relacji powoduje potencjalne wzajemne współistnienie efektów:

(a) efektu przesuwania się stopnia kwantyla na rozkładzie  $F_X$  wraz ze zwiększającym się poziomem  $m$  (własność (2)),

<sup>37</sup> Własność o dominacji rozkładu zagregowanego przez pojedynczą stratę.

<sup>38</sup> Własność o relacjach kwantyli.

<sup>39</sup> Własność o zależności wartości pojedynczej ekstremalnej straty od liczebności zdarzeń operacyjnych.

(b) efektu zwiększania liczebności zbioru danych do rozkładu empirycznego  $F_{X\_EMP}$  wraz ze wzrastającym poziomem  $m$ , co jest naturalną konsekwencją przy poprawnie zbudowanym rozumowaniu w ramach metody AMA. A więc, liczba strat  $m$  w osobno modelowanym zjawisku częstości powinna wynikać z liczby strat, które umieszczamy w zbiorze danych do modelowania zmiennej dotkliwości  $F_X$ . Tym samym, zwiększanie  $m$  powinno wynikać z faktu posiadania większej liczby zdarzeń na rozkładzie dotkliwości  $F_X$ <sup>40</sup>.

W wyniku współlistnienia w/w efektów można oczekiwać, że przy jednoczesnym ruchu w kierunku zwiększania stopnia kwantyla straty  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$ , przy zwiększającym się poziomie osobnego zjawiska częstości (własność 2), jednocześnie straty znajdujące się w ogonie rozkładu  $F_{X\_EMP}$  (w tym zdarzenia ekstremalne) będą przesuwane się w kierunku coraz dalszych prawych kwantyli, ze względu na dochodzenie do rozkładu empirycznego  $F_{X\_EMP}$  kolejnych zdarzeń wraz ze wzrastającym poziomem zjawiska częstości (zwiększające się  $m$ ). To z kolei powinno spowodować, że pomimo przesuwania się kwantyla straty  $x_{EXTR}$  dla zwiększających się poziomów  $m$ , co wynikać ma z własności (2), wartość agregatu  $x_{AGR_{0,999}}$  zdominowanego przez  $x_{EXTR}$  w przybliżeniu pozostanie bez zmian. Stanie się tak dlatego, że na pozycjach tych dalszych kwantyli będą te same straty, które przesunęły się tam po dodaniu zdarzeń wynikających z przyrostu  $m$  ( $\Delta m$ ) do ciała rozkładu  $F_{X\_EMP}$ <sup>41</sup>. Ostatecznie zatem współlistnienie tych efektów ma potencjalnie moc wzajemnie się redukującą. Znowu jest to potencjał głównie teoretyczny, co będę starał się wykazać w osobnym opracowaniu.

### 3.4 PODSUMOWANIE DOTYCHCZASOWYCH OBSERWACJI

Jak dotychczas wykazano, przy kształcie frameworku AMA i zdefiniowanych tam założeniach, w szczególności dotyczących grubo-ogonowości rozkładów  $F_X$ , dominacja dalekiego kwantyla rozkładu zagregowanych strat przez pojedynczą ekstremalną stratę z rozkładu  $F_X$ , prowadzi do zdominowania rozkładu  $X_{AGR}$  w jego ogonie przez rozkład  $F_X$ . Dodatkowo rozkład dominujący  $F_X$ , jest przesunięty względem rozkładu zdominowanego  $X_{AGR}$  w sensie relacji kwantyli tych rozkładów, w taki sposób, że na dowolnym dalekim poziomie kwantyla  $q$  rozkład  $X_{AGR}$ , poziom kwantyla rozkładu  $F_X$  jest dalszy i zależy od wartości częstości  $m$  w relacji  $\frac{q}{m}$ . Z tego ostatniego wynika ponadto, że o poziomie wartości straty ekstremalnej, tej która znajduje się na krytycznym poziomie rozkładu  $X_{AGR}$ , a więc tej, która potencjalnie w realiach biznesowych miałaby rozstrzygnąć losy banku decyduje liczba pojedynczych zdarzeń operacyjnych, najczęściej nieistotnych, o niskich kwotach. Ich zaobserwowana liczba bowiem zadecyduje o średnim poziomie częstości  $m$ <sup>42</sup>, a więc średniej liczbie rocznych strat, a ta jak wykazano, będzie wpływać na przesuwanie się stopnia dalekiego kwantyla rozkładu  $F_X$ , rozkładu, z którego pochodzić będzie strata decydująca o agregacie na poziomie kwantyla 0.999 rozkładu  $X_{AGR}$ . Ostatecznie zatem przy wysokich poziomach częstości  $m$  kwantyle strat odczytywane z rozkładu pojedynczej straty mogą sięgać poziomów 0.9999, 0.99999 i wyższych, co przy zastosowaniu rozkładów grubo-ogonowych oznacza odczyty wartości strat - decydujących o wyniku modelu AMA - na poziomach ogromnych, całkowicie oderwanych od rzeczywistości. Jest to wynik działania własności (1), (2), (3), które w niniejszym artykule zostały wyprowadzone. Ich pojawienie się we frameworku AMA nie było jednak zamierzone. Są one wynikiem wzajemnej gry definicji i reguł, które zostały predefiniowane, i które do występowania tych własności musiały ostatecznie doprowadzić. Należy też tu dodać, że

<sup>40</sup> W praktyce uzyskanie tej zbieżności tych dwóch wartości na różnych rozkładach napotyka na pewne istotne przeszkody, co będę starał się wykazać w osobnej publikacji.

<sup>41</sup> Jeśli np. mamy  $m = 10$  i stratę ekstremalną na pozycji 9 (kwantyl 0.9) to w wyniku zwiększenia częstości do poziomu  $m = 100$ , przy założeniu, że te dodatkowe 90 zdarzeń jest niższych od tej straty ekstremalnej, jej obecna pozycja będzie 0.99. Działanie własności (2) przesunie co prawda poziom kwantyla z 0.9 do 0.99, lecz na tym kwantylu będzie znajdować się ta sama wartość. Efekt amortyzacji w takim przypadku zadziała. Gdyby jednak te dodatkowe 90 zdarzeń rozłożyło się proporcjonalnie (a tego w zasadzie należałoby oczekiwać): 80 poniżej wartości ekstremalnej (kwantyl 0.9) i 10 powyżej to wartość ekstremalna utrzyma pozycję kwantylową 0.9. Działanie własności (2) przesunie wtedy kwantyl do poziomu 0.99 i efekt amortyzacji nie zadziała.

<sup>42</sup> Gdyby przywołać pełną formułę AMA,  $m$  oznaczałoby w najbardziej popularnych zastosowaniach parametr  $\lambda$  w rozkładzie Poissona, a więc wartość oczekiwaną tego rozkładu, rozumianą jako wartość oczekiwaną liczby strat (a więc  $\lambda = m$ ) w okresie określonym poprzez horyzont analizy, który dla frameworku AMA został określony na rok. Co jest istotne, to właśnie wartość oczekiwana rozkładu częstości ( $\lambda = m$ ), a nie dalekie kwantyle tego rozkładu liczby strat, ma znaczenie dla efektu przesuwania się kwantyli. To wartość oczekiwana rozkładu częstości ma siłę i potencjał penetracyjny w odniesieniu do rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ , a więc może przeszkadzać ten rozkład na dalekich kwantylach (0.9999, 0.99999 i wyższych).



potencjalne efekty amortyzacyjne, dla rozkładów grubo-ogonowych nie mają wystarczającej mocy. Nie są więc w stanie zredukować działania własności sformułowanych w tym artykule<sup>43</sup>.

Przenosząc opisane w tym artykule mechanizmy na przestrzeń praktycznych rozwiązań konstatuje, że przy wyartykułowanych wymogach nadzorczych co do potrzeby stosowania rozkładów sub-exponential (w definicji stosowanej przez regulatora) do opisu zjawiska pojedynczej straty  $F_X$ , biorąc pod uwagę rozważane w niniejszym opracowaniu rozkłady tego typu, możemy sformułować następujące, praktyczne obserwacje:

- przy zastosowaniu rozkładu Weibulla w wersji ciężko-ogonowej, sformułowane w niniejszym artykule własności zajądą przy następujących układach parametrów:

- przy poziomie zjawiska częstości  $m = 10$ ; dla parametru kształtu rozkładu Weibulla  $k \leq 0.4$ , poziom dominacji  $x_{EXTR}$  agregatu  $x_{AGR_{0,999}}$  wynosi wtedy co najmniej 87.99%, a poziom kwantyla  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  wynosi co najmniej 0.9998,

- przy poziomie zjawiska częstości  $m = 100$ ; dla  $k \leq 0.2$ , poziom dominacji  $x_{EXTR}$  wynosi co najmniej 95.79%, a poziom kwantyla  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  wynosi co najmniej 0.99998,

- przy poziomie zjawiska częstości  $m = 1000$ ; dla  $k \leq 0.2$ , poziom dominacji  $x_{EXTR}$  wynosi co najmniej 79.21%, a poziom kwantyla  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  wynosi co najmniej 0.999998,

- przy zastosowaniu rozkładu lognormal w wersji ciężko-ogonowej, sformułowane w niniejszym artykule własności zajądą przy następujących układach parametrów:

- przy poziomie zjawiska częstości  $m = 10$ ; dla parametru dyspersji rozkładu lognormal  $\sigma \geq 1.4$ , poziom dominacji  $x_{EXTR}$  agregatu  $x_{AGR_{0,999}}$  wynosi wtedy co najmniej 88.08%, a poziom kwantyla  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  wynosi co najmniej 0.9998,

- przy poziomie zjawiska częstości  $m = 100$ ; dla  $\sigma \geq 2$ , poziom dominacji  $x_{EXTR}$  agregatu  $x_{AGR_{0,999}}$  wynosi wtedy co najmniej 86.96%, a poziom kwantyla  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  wynosi co najmniej 0.99998,

- przy poziomie zjawiska częstości  $m = 1000$ ; dla  $\sigma \geq 3$ , poziom dominacji  $x_{EXTR}$  agregatu  $x_{AGR_{0,999}}$  wynosi wtedy co najmniej 95.61%, a poziom kwantyla  $x_{EXTR}$  na rozkładzie  $F_X$  wynosi co najmniej 0.999998.

Zatem, przeprowadzony w ramach prac nad niniejszym artykułem eksperyment wykazuje konkretne przypadki zbiegania rozwiązania modelarskiego AMA ku abstrakcyjnym i oderwanym od logiki biznesowej wartościom kapitałów, przez taki model wyznaczanych. Oczywiście, podane tu granice poziomów parametrów, powyżej lub poniżej których zajądą w/w własności, są jedynie umowne. Po pierwsze jest kwestią dyskusyjną za jaki poziom należy uznać ten, który świadczy o dominacji pojedynczej straty w agregacie. Po drugie, w procesie symulacyjnym przeprowadzonym w ramach zaprezentowanego tu eksperymentu, ze względu na naturalne ograniczenia przestrzeni rozpatrywanych przypadków, nie zostały przeliczone niektóre, potencjalnie ważne odnotowania warianty. Przeliczenie bardziej granularne prawdopodobnie przesunęłoby nieco zaproponowane tu wartości graniczne parametrów. Na przykład dla rozkładu lognormal dla  $m = 100$  bardziej precyzyjna granica znajduje się pewnie gdzieś pomiędzy wartościami parametru  $\sigma$  (1.4, 2.0), natomiast dla  $m = 1000$  należy się spodziewać, że ten graniczny poziom parametru znajduje się gdzieś w przedziale (2.0, 3.0).

### 3.5 REALNE PYTANIA, JAKIE FRAMEWORK POSTAWIŁ PRZED PODMIOTAMI RYZNKU

Wszystkie w/w efekty (własności) zostały wyprowadzone w toku prezentowanego tu rozumowania. Jak przypuszczam, nie były efektami oczekiwanymi przez nadzorcę w momencie formułowania przepisów dla frameworku AMA. Nic nie wskazuje na intencjonalne takie ukształtowanie zespołu mechanizmów i wymagań, które miałyby do takich efektów zbiegać. Jednocześnie, w

---

<sup>43</sup> Mechanizm amortyzujący występujący na styku zjawiska częstości i zmiennej  $F_{X\_EMP}$ , o którym wstępnie tu wspominałem, a którym zamierzam zająć się w osobnym opracowaniu, na potrzeby tego podsumowania pozostawiam nierozstrzygnięty.

praktycznym stosowaniu formuły AMA w/w efekty musiały jednak towarzyszyć wszystkim tym, którzy z budową modelu ryzyka operacyjnego, zadaniem niezwykle wymagającym, postanowili się zmierzyć. Z całą pewnością formuła uwikłana w takie osobliwości musiała sprawiać duże problemy jednostkom modelarskim, prowokując zespoły analityczne w podmiotach, które metodę AMA wdrożyły, do rozwiązywania, często niemożliwych do rozwiązania konfliktów metodologicznych, a także do rozstrzygania kwestii, które nie sposób było rozstrzygnąć. Jakże to kwestie? Na przykład te wymienione poniżej:

- (a) Czy naprawdę należy wyznaczać wartość kapitałów zabezpieczających na poziomie kwantyli 0.9999, 0.99999 i wyższych, w przypadkach gdy pojęcie zagregowanych strat, przynajmniej na poziomie ogona, jest równoznaczne z pojęciem pojedynczej straty?
- (b) Jak zintegrować pojęciowo te pojawiające się w praktyce modelarskiej skrajne kwantyle (punkt (a)) z wymogiem wartości kapitału zabezpieczającego na poziomie kwantyla 0.999 (wymóg frameworku AMA)?
- (c) Jak odnieść takie wyłaniające się w ramach metody AMA skrajne kwantyle (punkt (a)) do wymogu kwantyla 0.999 (odczytywanego na lekko-ogonowym rozkładzie normalnym), o którym mowa w formule IRB dla ryzyka kredytowego, a która to metoda powinna stanowić naturalny benchmark dla metody AMA?
- (d) Jak rozumieć pojęcie rzadkości w kontekście takich skrajnych kwantyli? Jak zintegrować scenariusze (metoda scenariuszowa SBA) z takimi kwantylami?
- (e) Jak podjąć się modelowania na poziomie takich kwantyli? Czy istnieją metody naukowe, które dają jakkolwiek nadzieje na modelowanie takich poziomów skrajności? Jakimi danymi zasilić takie modele?
- (f) Czy dotkliwość kwantyla naprawdę zależy od liczebności małych strat. Czy bank powinien głównie skoncentrować się na ograniczaniu tych strat (ich liczby), żeby obniżyć ryzyko ekstremalnych strat? To nonsens!

Problemy tu wymienione mamy już jednak za sobą. Metody już nie ma, a zespoły modelarskie przeniosły ciężar swoich zainteresowań na inne obszary ryzyka. Nie będę zatem, przynajmniej na obszarze tego artykułu poddawał analizie całego spektrum praktycznych wyzwań, jakie formuła AMA, z wbudowanymi w nią efektami, stawiała przed podmiotami rynku. Kilku kwestiom poświęcę jednak chwilę, po to by zestawić je z predefiniowanymi założeniami i intencjami jakie stały za regulacyjną postacią frameworku AMA. Głównie po to, żeby zobaczyć, czy już na poziomie zaproponowanej konstrukcji, na samym jej początku (w roku 2004) nie ma zarysowanych wewnętrznych sprzeczności lub niespójności, które ostatecznie doprowadziły do utraty zaufania do metody, a następnie do jej wycofania w roku 2024.

## **ROZDZIAŁ 4: REINTERPRETACJA BAZOWYCH ZAŁOŻEŃ FRAMEWORKU AMA W KONTEKŚCIE ZAOBSERWOWANYCH EFEKTÓW**

Wrócę w tym miejscu do początku artykułu, gdzie odniosłem się do zdefiniowanych bazowych założeń frameworku AMA. Chodzi mi tu o pojęcie rzadkości, definicję poziomu kwantyla 99.9%, a także definicję sytuacji nieoczekiwanej. Zacznę od definicji sytuacji nieoczekiwanej. Zinterpretuję ją na nowo w świetle zaobserwowanych tu efektów. Następnie postąpię tak to samo w odniesieniu do pozostałych pojęć. Celem będzie tu skonfrontowanie intencji nadzorczych opisanych w regulacji założycielskiej dla metody AMA, z efektami, które ta metoda generowała i ocena zbieżności ogólnokoncepcyjnej pomiędzy tymi dwiema rzeczywistościami.

### **4.1 JAK RZECZYWIŚCIE WYGLĄDAŁA SYTUACJA NIEOCZEKIWANA WYGENEROWANA PRZEZ MECHANIKĘ METODY**

Jak wcześniej napisałem, metoda AMA w przeciwieństwie np. do metod dla ryzyka kredytowego (IRB), nie została wyposażona w predefiniowaną sytuację nieoczekiwaną. Nie zdefiniowano, jak wygląda zagrożenie w tej skrajnej i rzadkiej sytuacji. Sytuacja o tej skali skrajności miała się sama uformować we wzajemnej grze sił częstości i dotkliwości, które to wspólnie miały

ukształtować rozkład zagregowanych strat. Bardzo możliwa i w praktyce prawdopodobnie dość często spotykana sytuacja zdominowania rozkładu  $X_{AGR}$  przez rozkład  $F_X$ , rozstrzyga dylemat co do kształtu sytuacji nieoczekiwanej na korzyść takiej struktury, w której to pojedyncza ekstremalna strata decyduje o zagrożeniu, przed którym próbujemy się ochronić. Nie jest to prawdopodobnie konstatacja niezgodna z intuicją, wszak takie właśnie, pojedyncze straty spowodowały upadki banków i zdecydowały o włączeniu ryzyka operacyjnego do grona ryzyk objętych koniecznością zabezpieczenia w formule RWA. Zwracam jednak uwagę na fakt, że struktura taka wykreowała się dopiero pod wpływem gry w/w sił i przy przyjęciu pewnych założeń. Ukształtowanie zatem takiej sytuacji, prawdopodobnie pożądanej przez regulatora, było zależne od złożonego i dość często mozolnego procesu modelarskiego, który z racji na swoją złożoność i wynikającej z niej podatności na nieprawidłowości procesu, nie zawsze musiał zakończyć się taką właśnie oczekiwaną strukturą<sup>44</sup>. Dodatkowo, jeśli słusznie zakładam, że taki właśnie kształt sytuacji nieoczekiwanej był właśnie pożądany, to należy poddać pod wątpliwość całą ideę, złożonego, obfitującego w metodologiczne pułapki, zaproponowanego przez regulatora frameworku. O ileż łatwiej byłoby zbudować koncepcję modelu, reprezentującego taki właśnie kształt sytuacji skrajnej, zbudowaną na pojedynczym rozkładzie – rozkładzie dotkliwości pojedynczej straty<sup>45</sup>...

W kontekście kształtu sytuacji nieoczekiwanej należy wspomnieć jeszcze o zidentyfikowanym tu efekcie zależności tej pojedynczej ekstremalnej wartości formującej sytuację nieoczekiwaną od liczby zdarzeń operacyjnych (własność (3)). To uzupełnia widok tego, jak ostatecznie, ta wynikająca ze strukturalnych sił modelu, sytuacja nieoczekiwana wyglądała. Poziom ekstremalnej straty, decydującej o wyniku modelu AMA, w takim modelu miał duże szanse być zależne wprost od liczby pojedynczych, nieistotnych zdarzeń<sup>46</sup>. Naprawdę trudno uzasadnić sensowność takiej zależności. Obserwuję tu zatem, wbudowaną we framework, nieznamioną potwierdzenia w rzeczywistości zasadę, która prawdopodobnie w sposób niezamierzony (nie znajduję w regulacjach wzmianki o takiej intencji co do oczekiwanych relacji pomiędzy zmiennymi) decydowała o wynikach modeli AMA w sektorze bankowym.

## 4.2 PONOWNE SPOJRZENIE NA ZAŁOŻENIE O DALEKIM KWANTYLU (0.999)

Odniosę się teraz do kwestii kwantyla 0.999. W rozdziale temu poświęconym poruszyłem kwestię niejasności interpretacyjnej tego kwantyla i funkcjonującej w przestrzeni publicznej (tu rozumianej jako otoczenie środowiskowe dotknięte mocą regulacji formułowanych przez BCBS), w moim przekonaniu błędnej, jego interpretacji. Odnosiłem się również do formułowanych głośno w sektorze uwag dotyczących stopnia konserwatyzmu tego kwantyla. Powszechnie uważano bowiem, że jest to kwantyl zbyt daleki i oszacowania na tym poziomie będą obarczone bardzo wysokim stopniem niepewności. Co zatem należy powiedzieć na temat oszacowań na poziomie 0.9999 lub 0.99999 i dalej, a przecież, jak wykazałem powyżej, to takie kwantyle rozkładu  $F_X$  determinują kwantyl 0.999 rozkładu  $X_{AGR}$ , a więc wynik modelu AMA? W tym miejscu przytoczę słowa Paula Embrechtsa: „W latach 90-tych, wraz z udoskonaleniem metod EVT, ukształtował się w sektorze finansowym pogląd u uwolnieniu nowych możliwości w odniesieniu do modelowania dalekich kwantyli. Prawda jest taka, że jeżeli poszukujemy wartości na kwantylu 0.999 jak w przypadku ryzyka operacyjnego<sup>47</sup> to metody, które posiadamy na dziś, zdają się nam mówić: jeśli posiadamy adekwatne do zjawiska dane, o adekwatnych do modelowanego kwantyla liczebnościach i odpowiednio wysokiej ich jakości, to możemy podjąć próbę zamodelowania takiej skrajnej wartości, ale to jest granica naszych możliwości na dziś!”<sup>48,49</sup>. A dalej profesor uzupełnia swoją wypowiedź o wskazanie niepewności oszacowań (bardzo dużej) nawet

<sup>44</sup> Złożoność modeli jest osobnym problemem, któremu autor zamierza poświęcić osobne opracowania. Ta, często nieuzasadniona nadłożoność prowadzi do trudnych do opanowania efektów, zarówno w przestrzeni obliczeń arytmetycznych i składania obliczeń w jedną całość, jak i (co ważniejsze) w przestrzeni składania stochastyk, niepewności, które często są nietrywialne i powodują błędy obliczeniowe, których skala wymyka się możliwościom ich oszacowania. Na koniec to właśnie nadłożoność modeli może być główną przyczyną niezgodności wyników modelu z logiką biznesową, a więc oderwania się modelu od intuicji (od rzeczywistości jaką ma opisywać). Wydaje się, że konstrukcja AMA jest sztandarowym egzemplarzem nadłożoności modelu i praktycznych problemów z tym związanych.

<sup>45</sup> Single Loss Distribution.

<sup>46</sup> Występujących średnio w ciągu roku.

<sup>47</sup> Paul Embrechts w tej wypowiedzi odniósł się dosłownie do kwantyla 0.999 i do ryzyka operacyjnego.

<sup>48</sup> Paul Embrechts mówiąc o granicach nauki w kontekście modelowania dalekich kwantyli odnosił się do metod: Teoria Wartości Ekstremalnych I i II (EVT I, EVT II). Owe metody odważyły się chyba najdalej spenetrować kwantyle rozkładów.

<sup>49</sup> [www.youtube.com/watch?v=liOSx5oXo&t=3800s](https://www.youtube.com/watch?v=liOSx5oXo&t=3800s), tytuł: „Extreme Value Theory (QRM Chapter 5)”

na kwantylu 0.999. A zatem druga sformułowana przeze mnie w tym artykule własność przenosi całe zagadnienie do przestrzeni, która pozostaje poza możliwościami dzisiejszego świata nauki. Do obszaru „ponadskrajności”<sup>50</sup> w zasadzie nie zdefiniowanej w dzisiejszej przestrzeni możliwych do wykorzystania metod naukowych. Czy regulator był świadomy, że ustanawiając swój framework i towarzyszące mu wymagania umiejscawia potencjalne modele AMA w przestrzeni niemożliwej do zamodelowania?

#### 4.3 ZUPEŁNIE NIEOCZEKIWANY TRANSFER POJĘCIA RZADKOŚCI

Ostatnia poruszana tu kwestia to pojęcie rzadkości. Jak napisałem wcześniej regulator umiejscowił pojęcie rzadkości na osi czasu (1 raz na 1000 lat), co dla osiągnięcia lepszej zgodności modelu z rzeczywistością (którą model powinien opisywać), należało przeformułować do postaci 1 raz na 1000 rocznych scenariuszy, możliwych do wystąpienia w dniu dzisiejszym<sup>51</sup>. Dominacja rozkładu  $X_{AGR}$  przez rozkład  $F_X$  zmienia tę predefiniowaną koncepcję rzadkości na koncepcję zgoła inną. O ile technicznie wciąż odczyt kwantyla 0.999 z rozkładu  $X_{AGR}$  oznaczać będzie taką wartość, która może wydarzyć się z prawdopodobieństwem mierzonym na skali: 1 raz na 1000 scenariuszy<sup>52</sup>, gdzie pojedynczy scenariusz to agregat strat, które mogły wydarzyć się w ciągu roku, to w rzeczywistości przy zdominowaniu agregatów w ogonie rozkładu  $X_{AGR}$  przez pojedynczą stratę z rozkładu  $F_X$  (własność (1)), pojęcie rzadkości należy przetransferować na oś rozkładu  $F_X$ . To właśnie rzadkość straty  $x_{EXTR}$ , a więc pozycja kwantylowa, jaką ta strata zajmuje na rozkładzie  $F_X$  będzie miała decydujące znaczenie dla ostatecznego wyniku modelu odczytywanego na rozkładzie  $X_{AGR}$ . To bardzo ważny wniosek, mając na uwadze w szczególności fakt, że transferując zagadnienie na oś rozkładu  $F_X$  i pamiętając o własności (2)<sup>53</sup>, musimy poddać głębokiej refleksji nie tylko kwestię, czym w zasadzie jest rzadkość odczytywana na tej właśnie osi, ale również zmierzyć się pojęciem rzadkości o skali 0.9999, 0.99999 i więcej.

Zmiermy się najpierw z przetransferowanym na przestrzeń  $F_X$  pojęciem rzadkości. Jak rozumieć rzadkość straty ekstremalnej  $x_{EXTR}$  umiejscowionej na osi zmiennej  $F_X$ ? Jest ona rzadka, w kontekście pozostałych elementów, współtworzących rozkład  $F_X$ <sup>54</sup>. A zatem, czy umiejscowienie takiej straty skrajnej  $x_{EXTR}$ , której ekstremalność określamy ze względu na jej wartość<sup>55</sup>, na pozycji nr 9, przedostatniej pozycji w posortowanym szeregu (w przypadku, gdy zbiór danych liczy 10 obserwacji) oznacza, że jest ona rzadka? A co w przypadku, gdy znajdzie się ona (przy utrzymaniu jej niezamienialnej wartości) tym razem w szeregu liczącym 10 000 obserwacji i będzie na pozycji przedostatniej (9 999)? Czy wtedy wydaje się bardziej rzadka? Widzimy zatem, że postrzeganie tej samej straty, o niezmiennionej wartości, w kontekście rzadkości, nie zależy od niej samej, a od tego, gdzie się ona znajduje w szeregu, razem z innymi stratami. To z kolei w ogóle nie zależy od niej, tylko zależy od liczby strat umiejscowionych przed nią na osi zmiennej  $F_X$ . To bardzo ważny wniosek. Rzuca on bowiem zupełnie nowe światło na znaczenie tych „zwyczajnych” strat w ciele rozkładu  $F_X$ , których istotności regularnie nie doceniano, ze względu na ich niskie wartości, a które to, przez swoją masę, liczebność (a nie ich wartości) mogły ostatecznie decydować o kształcie rozkładu pojedynczej straty  $F_X$  i miejscu jakie w tym rozkładzie zajmowały straty ekstremalne. Nie jest wykluczone, że odpowiednie ruchy na wielkości zjawiska częstości ( $m$ ) mogły mieć większe znaczenie dla poziomu sprawozdawanego przez podmioty rynku wyniku modelu AMA, niż gromadzone, z takim wysiłkiem i zaangażowaniem procesowym, informacje o zdarzeniach ekstremalnych. Bo te właśnie liczebności  $m$  mogły decydować o umiejscowieniu na pozycjach kwantylowych strat ekstremalnych, co mogło mieć znaczenie decydujące. Raportowanie większej liczby zdarzeń (np. poprzez niskie progi rejestracji) powoduje wypełnienie rozkładu stratami i przesuwanie tych skrajnych co do wartości strat, o które w całym procesie gromadzenia strat chodziło, na pozycję tak dalekich kwantyli, że ostatecznie można było odebrać im siłę wpływu na wynik modelowania. Z drugiej strony, gdy próg rejestracji strat był wysoki,

<sup>50</sup> Pojęcie sformułowane przez autora niniejszego artykułu.

<sup>51</sup> Taką interpretację zaproponowałem na początku artykułu, jako tę, która jest zgodna z konstrukcją frameworku AMA i poprawnie osadzona w kontekście biznesowym.

<sup>52</sup> Już zgodnie z zaproponowaną przeze mnie interpretacją.

<sup>53</sup> Własność o relacji kwantyli pomiędzy rozkładami.

<sup>54</sup> Natomiast tam, gdzie pojęcie rzadkości zostało formalnie umiejscowione, czyli na rozkładzie zagregowanym strat  $X_{AGR}$ , ta rzadkość odczytywana jest w kontekście innych wartości na tamtym rozkładzie, a więc w kontekście innych scenariuszy. Ta rzadkość oznacza wtedy 1 (przedostatni) najbardziej skrajny scenariusz z 1000 innych scenariuszy rocznych wydarzeń.

<sup>55</sup> Chodzi tu o to, że określamy w tym przykładzie fakt skrajności przez wartość tej straty, np. uważamy, że 100 mln to wartość skrajna.

liczba strat na rozkładzie  $F_X$  była na tyle niska, że te skrajne straty mogły zajmować zbyt bliskie pozycje kwantylowe, co kończyło się absurdalnie wysokimi wynikami modelu. Podobny problem dotyczył kwestii zasilania rozkładu stratami zewnętrznymi. Mogło się okazać, że to nie kwestie wartości tych zewnętrznych obserwacji decydowały o wyniku, lecz ich ilość, która w sposób nienaturalny zmieniała położenia strat na kwantylach.

Drugą kwestią, którą w tym wątku należy poruszyć jest poziom kwantyla, z którym po przetransferowaniu pojęcia rzadkości na rozkład pojedynczej straty należało się zmierzyć. Własności (2) i (3), ich łączne działanie, prowadzą do odczytów strat na kwantylach ponadskrajnych (0.9999, 0.99999 i wyższych), jako tych, które (ze względu na działanie własności (1), a więc zjednanie pojęciowe rozkładów  $X_{AGR}$  i  $F_X$ ) będą decydować o ostatecznym wyniku modelu AMA. Wyłaniające się w toku prowadzonego tu rozumowania pojęcie rzadkości, umiejscowione na osi rozkładu pojedynczej straty  $F_X$ , każe nam myśleć, że zdarzenia rzadkie (te przed którymi chcemy się zabezpieczyć), te pojedyncze straty znajdujące się na pozycji kwantyla np. 0.99999 rozkładu  $F_X$ , samookreślają swoją rzadkość w odniesieniu do liczebności innych strat na wspólnym rozkładzie  $F_X$ . Rzadkość tak rozumiana oznacza, że chodzi nam o straty skrajne, takie które przy zastosowaniu kwantyla 0.99999 występują z częstotliwością 1 raz na 100 000 strat. Ich rzadkość jest więc odnoszona do liczebności innych strat we wspólnym zbiorze danych. Jako, że w praktyce modelowania ryzyka operacyjnego, w zasadzie trudną do osiągnięcia liczebnością strat była liczba 1000 (na modelowany segment), a pewnie średnio było to kilkaset lub nawet zaledwie kilkadziesiąt obserwacji, ostatnim kwantylem, który można było ewentualnie empirycznie zobaczyć był kwantyl 0.999 (lub 0.99). To oznaczało, że kwantyle rzędu 0.9999, 0.99999 i wyższe, mając na uwadze dzisiejsze zdolności nauki w tej dziedzinie, mogły być wyliczone jedynie w sposób „magiczny”. Praktycznym odpowiednikiem takiej „magii” są procesy szacowania odległych ogonów za pomocą rozkładów teoretycznych. Te wysofistykowane metody miały oczywiście zdolność określania takich niedorzecznych pozycji kwantylowych, z takim jednak zastrzeżeniem, że niewielkie zmiany w danych, w tej części danych którą bank gromadził (a więc dojścia nowych obserwacji „zwykłych”) miały siłę takich szarpnięć ogonami rozkładów, które prowadziły do wrażliwości odczytów na kwantylach 0.9999, 0.99999: od wartości kilkuset tysięcy (w dowolnej walucie) do kilkudziesięciu miliardów<sup>56</sup>. Ostatecznie zatem własności, które wyprowadzam w tym artykule, dokonując transferu pojęcia rzadkości na oś rozkładu pojedynczej straty i przesuwając to pojęcie do ponadskrajnych kwantyli, przesunęły cały ciężar procesu modelowego na obszar niemożliwych do estymacji kwantyli, co kończyło się wrażliwościami wyników, o których napisałem powyżej.

Widzimy zatem, jak poważne konsekwencje metodologiczne wiązały się z transmisją pojęcia rzadkości z osi zmiennej  $X_{AGR}$  na oś  $F_X$ . Podobnie, jak w sformułowanych wcześniej wnioskach, i w tym przypadku nie spodziewam się, że omawiany tu transfer pojęcia rzadkości był zaprojektowany przez regulatora w koncepcji jaką zaproponował. Znowu niestety, przyjmuję niezbyt ryzykowne założenie, że efekt ten wyrósł niejako przypadkowo, bez ukierunkowanej woli nadzorczej. Jest on po prostu, podobnie jak wszystkie wcześniej wymienione efekty, wynikiem zastosowanych predefinicji oraz złożoności koncepcji frameworku AMA, która w swoim wadliwym DNA takie osobliwości generowała niejako „przy okazji”.

## ROZDZIAŁ 5: WNIOSKI KOŃCOWE

W niniejszym opracowaniu starałem się przedstawić potencjalne przyczyny, które mogły stać za utratą zaufania do Metody Zaawansowanego Pomiaru AMA i będącym tego wynikiem unicestwieniem formuły, w ramach opublikowanych 31 maja 2024 r. przepisów CRR III (wycofanie metody nastąpiło 1 stycznia 2025).

Jak raportował regulator europejski, rynek, eksperci, regulatorzy utracili zaufanie do metody, zwracając przede wszystkim uwagę na dużą niestabilność wyników zwracanych przez metodę oraz trudną do opanowania rozpiętość koncepcyjną generowaną przez podmioty stosujące metodę, która

---

<sup>56</sup> Zaproponowany w niniejszej publikacji eksperyment można by przedłużyć w taki sposób, żeby wykazać wrażliwość wartości na dalekich kwantylach rozkładów od nieznaczących zmian na poziomie wyestymowanych parametrów rozkładów teoretycznych, a te zmieniałyby się na skutek niewielkich zmian w bazach danych.

prowadziła ostatecznie do sytuacji, w której możliwe było, że podmioty o podobnym profilu ryzyka operacyjnego, raportowały wyraźnie różne poziomy kapitałów zabezpieczających.

Prowadząc swoje rozumowanie, starłem się pokazać, że zarzuty, które zostały sformułowane w kierunku sektora bankowego, być może miały nieprawidłowo ustawiony wektor. Być może źródeł tych, budzących niezadowolenie regulatora praktyk rynkowych, należy poszukiwać w pierwszym elemencie tego łańcucha wydarzeń, a więc w sformułowanej w 2004 roku regulacji Basel II, gdzie framework AMA został ustrukturyzowany. Przeprowadzając czytelnika przez całość rozumowania chciałem zaprezentować te elementy (wybrane, najważniejsze) formuły nadzorczej, które doprowadziły do, jak rozumiem, nieakceptowalnych postaci modeli i wyników przez nie zwracanych. Przenoszę zatem ciężar odpowiedzialności na konstrukt zaproponowany przez europejskiego nadzorcę w 2004 roku. Konstrukt niedostatecznie przemyślany i z całą pewnością zbyt złożony, mający ambicję stanowić coś w rodzaju super-koncepcji obejmującej wszelkie aspekty problematyki związanej z ryzykiem operacyjnym. Ostatecznie zatem, jak to często bywa w przypadku takich zbyt złożonych struktur, konstrukcja wymknęła się spod kontroli i zaczęła generować liczne, trudne do opanowania efekty. Przede wszystkim jednak, koncepcja zdominowana przez takie niezaplanowane osobliwości<sup>57</sup>, oderwała się od rzeczywistości, a więc od zjawiska, które miała modelować (ryzyka operacyjnego), od jego realnego kształtu i jego cech. Ostatecznie można było obserwować samoistne tworzenie się w konstrukcjach modelowych efektów, które nijak nie przystawały do prawdziwego kształtu zjawiska, lub w najlepszym wypadku wytłumaczenie ich wymagało karkołomnych interpretacji. Efekty takie starałem się pokazać w niniejszym opracowaniu. Trzymając się zasad określonych w nadzorczym frameworku, prowadziłem czytelnika przez mechanizmy powstawania tych efektów, aż do wykazania skutków, w różnych, wartych rozważenia przestrzeniach: (a) przestrzeni reguł i pojęć nadzorczych, (b) przestrzeni logik i zasad statystyczno-matematycznych i pojęć tam stosowanych, (c) a także w przestrzeni najważniejszej, odnoszącej konstrukt AMA do rzeczywistości, a konkretnie do realnego zjawiska ryzyka operacyjnego.

Cel jaki mi przyświecał, podejmując próbę zmierzenia się z tym wymagającym zagadnieniem, jest ściśle związany z moim ogólnie formułowanym poglądem, odnoszącym się do racjonalności wytwarzania złożonych budowli modelarskich, w szczególności takich, które wydają się wykraczać swoją strukturalną złożonością poza rzędy złożoności rzeczywistości, którą mają opisać. W szczególności, ambitne próby budowy konstruktów mających cechy super-koncepcji, o której już wyżej wspomniałem, napotykają na mój silny opór. Zaznaczając gwoździ wyjaśnienia, że chodzi mi o tego typu konstrukcje w przestrzeni metod stochastycznych<sup>58</sup>, obserwuję, raczej na poziomie pewnej intuicji<sup>59</sup>, że wraz ze zwiększaniem się stopnia złożoności modelu<sup>60</sup>, rośnie w tempie dużo wyższym liczba niezrozumiałych i trudnych do zarządzania mechanik. Te złożoności prowadzą następnie do olbrzymich i szybko rosnących przedziałów niepewności zwracanych wyników, niemal na każdym etapie procesu modelarskiego, osiągając swoje rekordowe rozmiary w tej części konstrukcji, gdzie zwracany jest jej ostateczny wynik. O ile jeszcze przy modelowaniu wartości oczekiwanych zjawisk, tego typu konstrukcje, przytłoczone siłą uśredniającą często stosowanych w takim przypadku metod portfelowych, bywa, że dają dobre praktyczne rezultaty, to w sytuacji, gdy podejmujemy próbę takiej budowli do opisu zjawisk rzadkich (jakkolwiek definiowanych) taki eksperyment nie daje dużej nadziei na powodzenie. Wystarczającą trudnością, wykraczającą często poza możliwości dzisiejszej nauki, jest zamodelowanie takiego zjawiska poprzez pojedynczy rozkład obserwacji skrajnych. Dołożenie do tego generycznych trudności, które wytwarza, sama w sobie, idea super-koncepcji, na pewno jest pomysłem nietrafionym. Niestety, w przypadku frameworku AMA z takim właśnie pomysłem mieliśmy do czynienia.

Ostatecznie zatem, przewodnią ambicją kierującą mnie do napisania tego tekstu, była chęć zabrania głosu, gdzieś w przestrzeni pomiędzy światem nauki, a światem praktycznych zastosowań modeli, który mógłby być moim skromnym wkładem, w podlegającym ciągłym negocjacom (pomiędzy środowiskami: regulacyjnym, naukowym i biznesowym), proces parametryzacji kształtu i stopnia złożoności rozwiązań, przyjętych do praktycznego stosowania. Mój głos, w przestrzeni takiej

<sup>57</sup> Np. własności, o których mowa w tym artykule.

<sup>58</sup> W przeciwieństwie do złożonych budowli deterministycznych, które z racji na dużo większą prostotę pojęciową i dużo większą łatwość weryfikacji poprawności konstrukcji mają znacznie większą szansę na poprawne działanie.

<sup>59</sup> Z racji trudności sformułowania adekwatnej miary dla opisu tej obserwacji.

<sup>60</sup> W najlepszym przypadku (najmniej złożonym) dodawanie zmiennych, w przypadku średniego stopnia złożoności: składanie rozkładów, a przy najbardziej ambitnych próbach: składanie całych koncepcji.

parametryzacji umiejscawiam bliżej tego końca przestrzeni, który oznacza prostotę i zbieżność z rzeczywistością. Wnioski, które opisałem w niniejszym opracowaniu, a które odnoszą się do dwóch dekad stosowania metody AMA w sektorze bankowym, pozwoliły mi tylko na mocniejsze osadzenie się, na wcześniej zajmowanej już w tym miejscu pozycji.

Metoda AMA została wycofana. To zrozumiałe. Krytycznie jednak oceniam krok wstecz jaki zrobiliśmy w dziedzinie modelowania rzeczywistości. Ta nieudana, zbyt złożona próba przeprowadzona na sektorze bankowym w ostatnich 20 latach, ma taki skutek, że pozostawiliśmy te przestrzeń zarządzania ryzykiem bez żadnych rozwiązań modelarskich<sup>61</sup>. Jak rozumiem, taki jest koszt, jaki należało ponieść po tym dającym rozczarowujące efekty eksperymencie. Uważam jednak, że dzisiejszy świat nauki nie jest bez szans, w próbie zmierzenia się z modelowaniem tej kapryśnej odmiany ryzyka. Może zatem to całkowite wycofanie się to nazbyt głęboka defensywa ...?

## BIBLIOGRAFIA

- Buczak M (2024) Bieg wsteczny w rozwoju koncepcji modelowania wartości nieoczekiwanej w sektorze finansowym na przykładzie decyzji o wycofaniu frameworku AMA w ryzyku operacyjnym. *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych*, 25(4), 179-193.
- Bank for International Settlements, Basel Committee on Banking Supervision (1988). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. (Basel I)*
- Bank for International Settlements, Basel Committee on Banking Supervision (2004). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework. (Basel II)*
- Bank for International Settlements, Basel Committee on Banking Supervision (2010). *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems.*
- Bank for International Settlements, Basel Committee on Banking Supervision. (2011). *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems - revised version.*
- Bank for International Settlements, Basel Committee on Banking Supervision (2017) *Basel III: Finalising post-crisis reforms.*
- Bank for International Settlements, Basel Committee on Banking Supervision (2011) *Operational Risk - Supervisory Guidelines for the Advanced Measurement Approaches.*
- International Accounting Standards Board (2014). *International Financial Reporting Standard 9: Financial Instruments. (IFRS 9)*
- Regulation (EU) No 575/2013 of the European Parliament and of the Council of 26 June 2013 on prudential requirements for credit institutions and investment firms and amending Regulation (EU) No 648/2012. *Official Journal of the European Union*, L 176/1. (CRR)
- Regulation (EU) 2024/1623 of the European Parliament and of the Council of 31 May 2024 amending Regulation (EU) No 575/2013 as regards requirements for credit risk, credit valuation adjustment risk, operational risk, market risk and the output floor. (CRR III)
- [https://github.com/qrmtutorial/qrm/blob/master/slides/qrm\\_05.pdf](https://github.com/qrmtutorial/qrm/blob/master/slides/qrm_05.pdf) [dostęp: 23.12.2024].
- <https://www.youtube.com/watch?v=IiOSxaF5oxo&t=3800s>, tytuł: „Extreme Value Theory (QRM Chapter 5)” [dostęp: 23.12.2024]

---

<sup>61</sup> Nowo zaproponowana metoda (obowiązująca od 1 stycznia 2025), co zrozumiałe, nie jest przeze mnie zaliczana do modeli statystycznych.

## Załącznik 1

### Rozkłady teoretyczne i ich własności

	exponential	Weibull			Weibull				
	neutral	light-tailed ( $k > 1$ )			heavy-tailed ( $k < 1$ )				
parameter	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$
parameter		$k = 1.1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 0.9$	$k = 0.6$	$k = 0.3$	$k = 0.2$	$k = 0.1$
<b>Quantiles</b>									
0.5	0.69	0.71	0.83	0.92	0.66	0.54	0.29	0.16	0.02
0.75	1.38	1.34	1.17	1.06	1.43	1.72	2.97	5.12	26.21
0.9	2.30	2.13	1.51	1.18	2.52	4.01	16.12	64	4 189
0.99	4.60	4.00	2.14	1.35	5.45	12.74	162	2 071	4 289 995
0.999	6.90	5.79	2.62	1.47	8.56	25.05	627	15 728	247 382 762
0.9999	9.21	7.52	3.03	1.55	11.78	40.46	1 637	66 279	4 392 955 462
0.99999	11.51	9.21	3.39	1.63	15.10	58.70	3 445	202 268	40 912 585 918
0.999999	13.81	10.88	3.71	1.69	18.49	79.54	6 327	503 308	253 319 948 359
<b>Quantile Ratio, denominator Q(0.5)</b>									
0.9/0.5	3.32	2.97	1.82	1.27	3.79	7.39	54	404	163 644
0.99/0.5	6.64	5.59	2.57	1.46	8.19	23.48	551	12 944	167 572 301
0.999/0.5	9.96	8.08	3.15	1.58	12.86	46.15	2 129	98 300	9 663 063 283
0.9999/0.5	13.28	10.50	3.64	1.67	17.71	74.54	5 556	414 239	1.71E+11
0.99999/0.5	16.60	12.86	4.07	1.75	22.69	108.12	11 691	1 264	1.59E+12
0.999999/0.5	19.93	15.18	4.46	1.81	27.79	146.52	21 468	3 145	9.89E+12
<b>Quantile spacing</b>									
0.99-0.9	2.30	1.87	0.63	0.18	2.93	8.73	146	2 006	4 285 806
0.999-0.99	2.30	1.79	0.48	0.11	3.11	12.31	465	13 657	243 092 766
0.9999-0.999	2.30	1.73	0.41	0.09	3.22	15.41	1 010	50 550	4 145 572 700
0.99999-0.9999	2.30	1.69	0.36	0.07	3.32	18.23	1 808	135 989	36 519 630 455
0.999999-0.99999	2.30	1.66	0.32	0.06	3.39	20.84	2 881	301 040	212 407 362 440
<b>Quantile Ratio</b>									
0.99/0.9	2.00	1.88	1.41	1.15	2.16	3.17	10.08	32.00	1 024
0.999/0.99	1.50	1.45	1.22	1.08	1.57	1.97	3.86	7.59	57
0.9999/0.999	1.33	1.30	1.15	1.06	1.38	1.62	2.61	4.21	17
0.99999/0.9999	1.25	1.22	1.12	1.05	1.28	1.45	2.10	3.05	9.31
0.999999/0.99999	1.20	1.18	1.10	1.04	1.22	1.36	1.84	2.49	6.19
<b>Quantile Ratio, denominator Q(0.9)</b>									
0.99/0.9	2.00	1.88	1.41	1.15	2.16	3.17	10.08	32.00	1 024
0.999/0.9	3.00	2.71	1.73	1.25	3.39	6.24	38	243	59 049
0.9999/0.9	4.00	3.53	2.00	1.32	4.67	10.08	101	1 024	1 048 576
0.99999/0.9	5.00	4.32	2.24	1.38	5.98	14.62	213	3 125	9 765 625
0.999999/0.9	6.00	5.10	2.45	1.43	7.32	19.81	392	7 776	60 466 176



	normal	lognormal	normal	lognormal	normal	lognormal	normal	lognormal	normal	lognormal	normal	lognormal	normal	lognormal	normal	lognormal
Parameter		light-tailed		light-tailed		neutral		heavy-tailed		heavy-tailed		heavy-tailed		heavy-tailed		heavy-tailed
$\mu$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma$	0.1	0.1	0.4	0.4	0.7	0.7	1.4	1.4	2	2	3	3	4	4	5	5
Quantiles																
0.5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0.75	0.06	1.06	0.26	1.30	0.47	1.60	0.94	2.57	1.34	3.85	2.02	7.56	2.69	14.84	3.37	29.14
0.9	0.12	1.13	0.51	1.66	0.89	2.45	1.79	6.01	2.56	12.97	3.84	46.74	5.12	168.37	6.40	606
0.99	0.23	1.26	0.93	2.53	1.62	5.09	3.25	25.96	4.65	105	6.98	1 074	9.31	10 997	11.63	112 616
0.999	0.30	1.36	1.23	3.44	2.16	8.69	4.32	75.66	6.18	483	9.27	10 622	12.36	233 498	15.45	5 132 798
0.9999	0.37	1.45	1.48	4.42	2.60	13.50	5.20	182.47	7.43	1 699	11.16	70 056	14.88	2 887 974	18.60	119 053 369
0.99999	0.42	1.5	1.70	5.50	2.98	19.79	5.97	391.83	8.52	5 063	12.79	360 293	17.06	25 637 410	21.32	1 824 285 006
0.999999	0.47	1.60	1.90	6.69	3.32	27.86	6.65	776.49	9.50	13 452	14.26	1 560 119	19.01	180 943 835	23.77	20 986 003 324
Quantile Ratio, denominator Q(0.5)																
0.9/0.5		1.13		1.67		2.45		6.01		13		47		168		607
0.99/0.5		1.26		2.54		5.10		25.97		105		1 074		10 997		112 616
0.999/0.5		1.36		3.44		8.70		75.67		483		10 622		233 498		5 132 798
0.9999/0.5		1.45		4.43		13.51		182.48		1 699		70 056		2 887 974		119 053 369
0.99999/0.5		1.53		5.51		19.79		391.84		5 063		360 293		25 637 410		1 824 285 006
0.999999/0.5		1.60		6.70		27.87		776.50		13 452		1 560 119		180 943 835		20 986 003 324
Quantile spacing																
0.99-0.9	0.10	0.13	0.42	0.87	0.73	2.64	1.46	20	2.09	92	3.13	1 027	4.18	10 829	5.22	112 010
0.999-0.99	0.08	0.10	0.31	0.91	0.53	3.60	1.07	50	1.53	378	2.29	9 548	3.06	222 501	3.82	5 020 182
0.9999-0.999	0.06	0.09	0.25	0.98	0.44	4.81	0.88	107	1.26	1 216	1.89	59 434	2.52	2 654 476	3.14	113 920 571
0.99999-0.9999	0.05	0.08	0.22	1.08	0.38	6.29	0.76	209	1.09	3 364	1.64	290 237	2.18	22 749 436	2.73	1 705 231 637
0.999999-0.99999	0.05	0.08	0.20	1.19	0.34	8.07	0.68	385	0.98	8 388	1.47	1 199 827	1.95	155 306 425	2.44	19 161 718 318
Quantile Ratio																
0.99/0.9	1.82	1.11	1.82	1.52	1.82	2.08	1.82	4.32	1.82	8.08	1.82	22.97	1.82	65.31	1.82	185.67
0.999/0.99	1.33	1.08	1.33	1.36	1.33	1.71	1.33	2.91	1.33	4.61	1.33	9.89	1.33	21.23	1.33	45.58
0.9999/0.999	1.20	1.06	1.20	1.29	1.20	1.55	1.20	2.41	1.20	3.52	1.20	6.60	1.20	12.37	1.20	23.19
0.99999/0.9999	1.15	1.06	1.15	1.24	1.15	1.47	1.15	2.15	1.15	2.98	1.15	5.14	1.15	8.88	1.15	15.32
0.999999/0.99999	1.11	1.05	1.11	1.22	1.11	1.41	1.11	1.98	1.11	2.66	1.11	4.33	1.11	7.06	1.11	11.50
Quantile Ratio, denominator Q(0.9)																
0.99/0.9	1.82	1.11	1.82	1.52	1.82	2.08	1.82	4	1.82	8	1.82	23	1.82	65	1.82	186
0.999/0.9	2.41	1.20	2.41	2.06	2.41	3.55	2.41	12	2.41	37	2.41	227	2.41	1 387	2.41	8 463
0.9999/0.9	2.90	1.28	2.90	2.65	2.90	5.51	2.90	30	2.90	131	2.90	1 499	2.90	17 152	2.90	196 285
0.99999/0.9	3.33	1.35	3.33	3.30	3.33	8.07	3.33	65	3.33	390	3.33	7 708	3.33	152 262	3.33	3 007 730
0.999999/0.9	3.71	1.42	3.71	4.01	3.71	11.36	3.71	129	3.71	1 037	3.71	33 377	3.71	1 074 634	3.71	34 599 982

## Załącznik 2

### Wyniki eksperymentu

Częstość (m)	Rozkład F_x		Rozkład X_AGR						
	uniform		Agregat x_AGR_0.999						
	Parametry		Kwantyl agregatu na X_AGR	Wartość agregatu	Skład agregatu x_AGR_0.999				
					x_max			Pozostałe straty w agregacie	
	a	b			Wart. x_max	Q(x_max) na F_x	Udział x_max %	Wart. pozost x	Udział pozost x
1	0	1	0.999	0.999	0.999	0.999	100%	nd	nd
10	0	1	0.999	7.61	0.981	0.981	12.88%	6.63	87.12%
100	0	1	0.999	58.58	0.996	0.996	1.70%	57.58	98.30%
1000	0	1	0.999	527.07	0.9994	0.9994	0.19%	526.07	99.81%

Częstość (m)	Rozkład F_x	Rozkład X_AGR						
	exponential	Agregat x_AGR, 0.999						
	Parametry	Kwantyl agregatu na X_AGR	Wartość agregatu	Skład agregatu x_AGR, 0.999				
				x_max			Pozostałe straty w agregacie	
	λ			Wart. x_max	Q(x_max) na F_x	Udział x_max %	Wart. pozost x	Udział pozost x
1	1	0.999	6.91	6.91	0.999	100%	nd	nd
10	1	0.999	21.71	5.96	0.9974	27.46%	15.75	72.54%
100	1	0.999	133.22	6.53	0.9985	4.90%	126.69	95.10%
1000	1	0.999	1 095.12	7.64	0.9995	0.70%	1 087.48	99.30%

Częstość (m)	Rozkład F_x		Rozkład X_AGR						
	normal		Agregat x_AGR_0.999						
	Parametry		Kwantyl agregatu na X_AGR	Wartość agregatu	Skład agregatu x_AGR_0.999				
	μ	σ			x_max			Pozostałe straty w agregacie	
					Wart. x_max	Q(x_max) na F_x	Udział x_max %	Wart. pozost x	Udział pozost x
1	0	0.2	0.999	0.62	0.62	0.999	100%	nd	nd
	0	1	0.999	3.09	3.09	0.999	100%	nd	nd
	0	2	0.999	6.18	6.18	0.999	100%	nd	nd
	0	3	0.999	9.27	9.27	0.999	100%	nd	nd
	0	5	0.999	15.45	15.45	0.999	100%	nd	nd
10	0	0.2	0.999	1.86	0.47	0.9911	25.46%	1.39	74.53%
	0	1	0.999	9.31	2.37	0.9911	25.46%	6.94	74.53%
	0	2	0.999	18.63	4.74	0.9911	25.46%	13.88	74.53%
	0	3	0.999	27.94	7.12	0.9911	25.46%	20.82	74.53%
	0	5	0.999	46.56	11.86	0.9911	25.46%	34.70	74.53%
100	0	0.2	0.999	5.92	0.56	0.9976	9.54%	5.36	90.46%
	0	1	0.999	29.60	2.82	0.9976	9.54%	26.78	90.46%
	0	2	0.999	59.20	5.65	0.9976	9.54%	53.55	90.46%
	0	3	0.999	88.80	8.47	0.9976	9.54%	80.33	90.46%
	0	5	0.999	148.01	14.12	0.9976	9.54%	133.89	90.46%
1000	0	0.2	0.999	18.82	0.66	0.9994	3.49%	18.16	96.51%
	0	1	0.999	94.09	3.29	0.9994	3.49%	90.81	96.51%
	0	2	0.999	188.19	6.57	0.9994	3.49%	181.61	96.51%
	0	3	0.999	282.28	9.86	0.9994	3.49%	272.42	96.51%
	0	5	0.999	470.47	16.44	0.9994	3.49%	454.03	96.51%

Częstość (m)	Rozkład F <sub>x</sub>		Rozkład X <sub>AGR</sub>						
	Weibull		Agregat X <sub>AGR_0.999</sub>						
	Parametry		Kwantyl agregatu na X <sub>AGR</sub>	Wartość agregatu	Skład agregatu X <sub>AGR_0.999</sub>				
	λ	k			x <sub>max</sub>			Pozostałe straty w agregacie	
					Wart. x <sub>max</sub>	Q(x <sub>max</sub> ) na F <sub>x</sub>	Udział x <sub>max</sub> %	Wart. pozost x	Udział pozost x
1	1	1.2	0.999	5.01	5.01	0.999	100%	nd	nd
	1	1.6	0.999	3.35	3.35	0.999	100%	nd	nd
	1	2	0.999	2.63	2.63	0.999	100%	nd	nd
	1	5	0.999	1.47	1.47	0.999	100%	nd	nd
10	1	1.2	0.999	18.61	4.11	0.9957	22.07%	14.50	77.93%
	1	1.6	0.999	14.92	2.71	0.9927	18.14%	12.21	81.86%
	1	2	0.999	13.55	2.18	0.9913	16.08%	11.37	83.92%
	1	5	0.999	11.03	1.34	0.9864	12.14%	9.69	87.86%
100	1	1.2	0.999	119.80	4.74	0.9984	3.95%	115.06	96.04%
	1	1.6	0.999	107.65	3.19	0.9983	2.96%	104.46	97.04%
	1	2	0.999	102.17	2.41	0.9970	2.36%	99.76	97.64%
	1	5	0.999	98.08	1.42	0.9969	1.44%	96.66	98.55%
1000	1	1.2	0.999	1 017.05	5.12	0.9992	0.50%	1 011.93	99.50%
	1	1.6	0.999	952.12	3.60	0.9995	0.37%	948.52	99.62%
	1	2	0.999	929.92	2.80	0.9996	0.30%	927.13	99.70%
	1	5	0.999	937.62	1.50	0.9994	0.16%	936.12	99.84%

Częstość (m)	Rozkład F <sub>x</sub>		Rozkład X <sub>AGR</sub>						
	Weibull		Agregat X <sub>AGR_0.999</sub>						
	Parametry		Kwantyl agregatu na X <sub>AGR</sub>	Wartość agregatu	Skład agregatu X <sub>AGR_0.999</sub>				
	λ	k			x <sub>max</sub>			Pozostałe straty w agregacie	
					Wart. x <sub>max</sub>	Q(x <sub>max</sub> ) na F <sub>x</sub>	Udział x <sub>max</sub> %	Wart. pozost x	Udział pozost x
1	1	0.1	0.999	247 382 762	247382762	0.999	100%	nd	nd
	1	0.2	0.999	15 728	15 728	0.999	100%	nd	nd
	1	0.4	0.999	125	125	0.999	100%	nd	nd
	1	0.8	0.999	11	11	0.999	100%	nd	nd
10	1	0.1	0.999	2 780 841 893	2780821145	0.99985	99.999%	20 747	0.001%
	1	0.2	0.999	52 886	52 733	0.99985	99.71%	153	0.29%
	1	0.4	0.999	252	222	0.99983	87.99%	30	12.01%
	1	0.8	0.999	30	11	0.99911	37.63%	19	62.36%
100	1	0.1	0.999	26752173089	26741029878	0.99998	99.96%	11143211	0.04%
	1	0.2	0.999	168 254	161 179	0.99998	95.79%	7 075	4.21%
	1	0.4	0.999	822	320	0.99996	38.94%	502	61.06%
	1	0.8	0.999	160	10	0.99874	6.66%	150	93.33%
1000	1	0.1	0.999	221560614638	220933645656	0.9999988	99.71%	626968982	0.28%
	1	0.2	0.999	558 058	442 090	0.9999986	79.21%	115 967	20.78%
	1	0.4	0.999	4 509	382	0.9999773	8.48%	4 127	91.52%
	1	0.8	0.999	1 260	14	0.9998099	1.16%	1 246	98.83%

Częstość (m)	Rozkład F <sub>x</sub>		Rozkład X <sub>AGR</sub>						
	lognormal		Agregat x <sub>AGR,0.999</sub>						
	Parametry		Kwantyl agregatu na X <sub>AGR</sub>	Wartość agregatu	Skład agregatu x <sub>AGR,0.999</sub>				
					x <sub>max</sub>			Pozostałe straty w agregacie	
	μ	σ			Wart. x <sub>max</sub>	Q(x <sub>max</sub> ) na F <sub>x</sub>	Udział x <sub>max</sub> %	Wart. pozost x	Udział pozost x
1	0	0.2	0.999	1.86	1.86	0.999	100%	nd	nd
	0	0.4	0.999	3.44	3.44	0.999	100%	nd	nd
	0	0.6	0.999	6.39	6.39	0.999	100%	nd	nd
10	0	0.2	0.999	12.27	1.65	0.9938	13.44%	10.62	86.56%
	0	0.4	0.999	16.01	2.93	0.9964	18.30%	13.08	81.70%
	0	0.6	0.999	21.66	6.27	0.9988	28.96%	15.38	71.04%
100	0	0.2	0.999	108.41	1.76	0.9977	1.62%	106.65	98.37%
	0	0.4	0.999	122.40	3.27	0.9984	2.66%	119.13	97.33%
	0	0.6	0.999	145.52	6.18	0.9987	4.24%	139.35	95.76%
1000	0	0.2	0.999	1 039.96	1.95	0.9995	0.18%	1 038.02	99.81%
	0	0.4	0.999	1 127.91	3.70	0.9994	0.32%	1 124.21	99.67%
	0	0.6	0.999	1 266.26	8.36	0.9997	0.66%	1 257.90	99.34%

Częstość (m)	Rozkład F <sub>x</sub>		Rozkład X <sub>AGR</sub>						
	lognormal		Agregat x <sub>AGR,0.999</sub>						
	Parametry		Kwantyl agregatu na X <sub>AGR</sub>	Wartość agregatu	Skład agregatu x <sub>AGR,0.999</sub>				
					x <sub>max</sub>			Pozostałe straty w agregacie	
	μ	σ			Wart. x <sub>max</sub>	Q(x <sub>max</sub> ) na F <sub>x</sub>	Udział x <sub>max</sub> %	Wart. pozost x	Udział pozost x
1	0	0.8	0.999	11	11	0.999	100%	nd	nd
	0	1.4	0.999	75	75	0.999	100%	nd	nd
	0	2	0.999	483	483	0.999	100%	nd	nd
	0	3	0.999	10 622	10 622	0.999	100%	nd	nd
	0	5	0.999	5 132 798	5132798	0.999	100%	nd	nd
10	0	0.8	0.999	33	14	0.99963	44.98%	18	55.02%
	0	1.4	0.999	174	153	0.99984	88.08%	21	11.92%
	0	2	0.999	1 386	1 349	0.99984	97.38%	37	2.61%
	0	3	0.999	51 204	51 076	0.99985	99.75%	128	0.25%
	0	5	0.999	70 315 111	70313098	0.99985	99.99%	2 012	0.01%
100	0	0.8	0.999	183	14	0.99956	7.82%	168	92.18%
	0	1.4	0.999	604	299	0.99997	49.57%	304	50.43%
	0	2	0.999	4 688	4 077	0.99998	86.96%	611	13.03%
	0	3	0.999	264 077	260 369	0.99998	98.59%	3 708	1.40%
	0	5	0.999	1 061 944	1061656852	0.99998	99.97%	287 383	0.03%
1000	0	0.8	0.999	1 503	22	0.9999407	1.45%	1 482	98.55%
	0	1.4	0.999	3 443	662	0.9999981	19.25%	2 780	80.75%
	0	2	0.999	18 857	11 652	0.9999985	61.78%	7 205	38.21%
	0	3	0.999	1 373 722	1 313 432	0.9999986	95.61%	60 290	4.39%
	0	5	0.999	17399207152	17386283551	0.9999988	99.92%	12923600	0.08 %

### Załącznik 3

#### Mechanika przesuwania się kwantyla

			Kwantyle rozkładu zagregowanych strat X_AGR										
			...	0.989	0.99	0.991	0.992	...	0.996	0.997	0.998	0.999	1
CZĘSTOŚĆ													
m=1	Agregat x_AGR_999	Pozostate straty w	...	nd	nd	nd	nd	...	nd	nd	nd	nd	nd
		kwantyl x_extr na	...	0.989	0.99	0.991	0.992	...	0.996	0.997	0.998	0.999	...
m=10	Agregat x_AGR_999	Pozostate straty (m=9)	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		kwantyl x_extr na	...	0.9989	0.999	0.9991	0.9992	...	0.9996	0.9997	0.9998	0.9999	...
m=100	Agregat x_AGR_999	Pozostate straty	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		kwantyl x_extr na	...	0.99989	0.9999	0.99991	0.99992	...	0.99996	0.99997	0.99998	0.99999	...
m=1000	Agregat x_AGR_999	Pozostate straty	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		kwantyl x_extr na	...	0.999989	0.99999	0.999991	0.999992	...	0.999996	0.999997	0.999998	0.999999	...