1. Interpolacja

1.1. Sformułowanie zadania

Mamy dane $n + 1$ punktów x_i , $(i = 0,2, \dots , n)$ (tzw. węzłów interpolacji). W każdym punkcie znamy wartość pewnej funkcji $f(x_i)$. Naszym zadaniem jest obliczenie przybliżonych wartości funkcji $f(x)$ w punktach nie będących węzłami interpolacyjnymi. W praktyce należy zatem wyznaczyć funkcję interpolującą $F(x)$, która przyjmuje w węzłach te same wartości, co dana funkcja $f(x)$.

Dane:

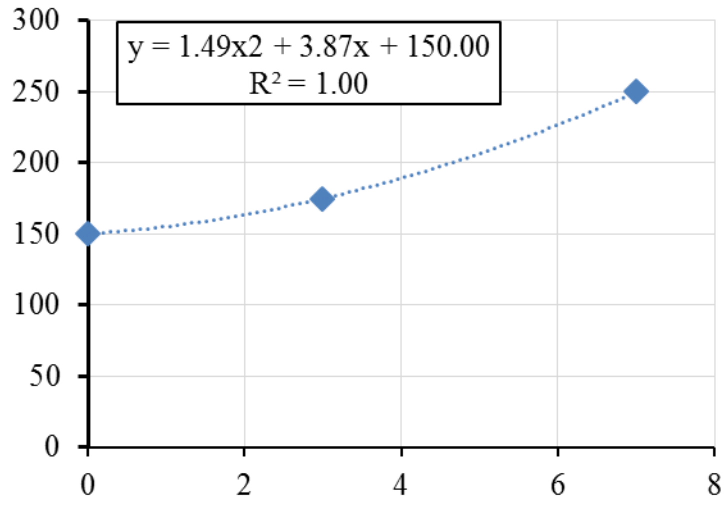
- Węzły interpolacji: $x_0, x_1, \dots , x_n$
- Wartości interpolowanej funkcji w węzłach: $f(x_0), f(x_1), \dots , f(x_n)$

Poszukujemy:

- Funkcji interpolującej $F(x)$, takiej by: $F(x_i) = f(x_i), \forall i \in \langle 0, n\rangle$

Przykład:

x_i	$f(x_i)$
0	150
3	175
7	250



Rys. 1. Interpolacja

1.2. Interpolacja wielomianowa Lagrange'a

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a polega na wyznaczeniu funkcji interpolującej w postaci wielomianu stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w $n + 1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji, tzn.: $L_n(x_i) = f(x_i)$, $\forall i \in \langle 0, n \rangle$, przy założeniu że $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$.

Algorytm poszukiwania wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a:

1) Znajdujemy wielomian, który przyjmuje w pierwszym węźle wartość 1, a w pozostałych węzłach przyjmuje wartość 0. Postępujemy tak dla każdego węzła. Wielomian ten napisany dla węzła o indeksie *i* będzie miał postać :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1}$$

2) Suma znalezionych w pierwszym kroku wielomianów pomnożonych przez odpowiednie wartości funkcji interpolowanej w węzłach da nam wielomian, który w węzłach będzie przyjmował interesujące nas wartości. Zatem wzór na wielomian interpolujący Lagrange'a będzie wyglądał następująco:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{2}$$

Przykład obliczeń:

W tabeli dane są węzły interpolacji oraz wartości funkcji w danych węzłach. Znajdź wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

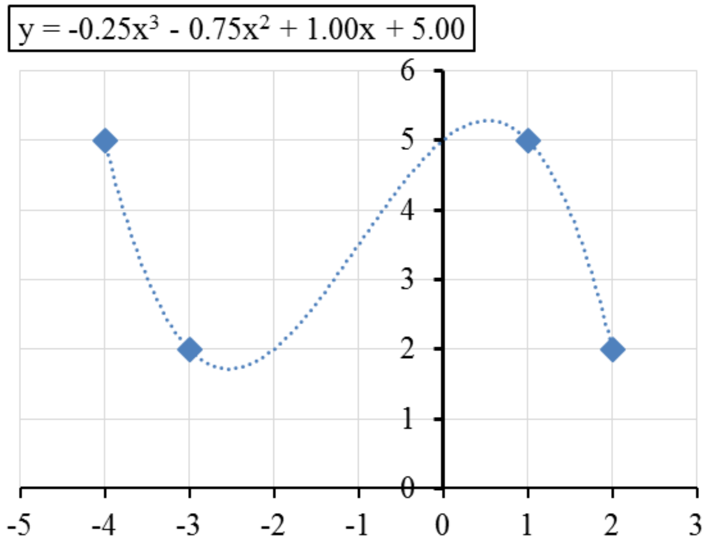
i	0	1	2	3
x_i	-4	-3	1	2
$f(x_i)$	5	2	5	2

Zgodnie ze wzorem:

$$\begin{aligned}
L_3(x) = {} & f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\
& + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f(x_3)\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\
& = 5\frac{(x + 3)(x - 1)(x - 2)}{(-4 + 3)(-4 - 1)(-4 - 2)} + 2\frac{(x + 4)(x - 1)(x - 2)}{(-3 + 4)(-3 - 1)(-3 - 2)} \\
& + 5\frac{(x + 4)(x + 3)(x - 2)}{(1 + 4)(1 + 3)(1 - 2)} + 2\frac{(x + 4)(x + 3)(x - 1)}{(2 + 4)(2 + 3)(2 - 1)} \\
& = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x + 5
\end{aligned}$$

W punkcie $x = -1$ wartość wielomianu interpolacyjnego wynosi:

$$L_3(-1) = -\frac{1}{4}(-1)^3 - \frac{3}{4}(-1)^2 + (-1) + 5 = 3{,}5$$



Rys. 2. Weryfikacja otrzymanej funkcji interpolującej Lagrange'a przy wykorzystaniu programu excel

1.3. Interpolacja wielomianowa Newtona

Zakładamy, że funkcja *f(x)* dana jest za pomocą tablicy wartości: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (węzłów interpolacji) oraz wartości funkcji w tych punktach: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Zakładamy, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zakładamy także, że węzły nie są równoodległe.

Ilorazy różnicowe rzędu zerowego i pierwszego:

$$f[x_0] = f(x_0) \tag{3}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4}$$

Ogólnie:

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{5}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{6}$$

Ilorazy różnicowe rzędu drugiego są równe:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \tag{7}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

...

$$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}$$

Ogólnie iloraz różnicowy rzędu $n-1$ przyjmuje postać:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i} \tag{8}$$

Tablica ilorazów różnicowych jest następująca:

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe					
		Rzędu 0	Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4	Rzędu 5
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0]$					
			$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$	
			$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
x_3	$f(x_3)$	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$	
			$f[x_3, x_4]$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$		
x_4	$f(x_4)$	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5]$			
			$f[x_4, x_5]$				
x_5	$f(x_5)$	$f[x_5]$					

Wielomian interpolacyjny w postaci Newtona ma postać:

$$W_n(x) = b_0 p_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k p_k\,(x) \tag{9}$$

gdzie:

$$p_0 = 1 \tag{10}$$

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})\ dla\ k = 1,2, \dots, n \tag{11}$$

$$b_0 = f(x_0) \tag{12}$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,\, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} \tag{13}$$

gdzie: b_k – ilorazy różnicowe funkcji f (oparte na węzłach $x_0, x_1, \dots, x_k$), które w tabeli ilorazów różnicowych znajdują się na przekątnej.

Przykład obliczeń:

Dane są wartości funkcji: $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, f(4) = 16, f(5) = 25$

Tablica ilorazów różnicowych wygląda następująco:

x_i	Ilorazy różnicowe				
	Rzędu 0	Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4
$x_0 = 1$	$f[x_0] = 1$				
		$f[x_0, x_1] = \frac{4-1}{2-1} = 3$			
$x_1 = 2$	$f[x_1] = 4$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{5-3}{3-1} = 1$		
		$f[x_1, x_2] = \frac{9-4}{3-2} = 5$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1-1}{4-1} = 0$	
$x_2 = 3$	$f[x_2] = 9$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{7-5}{4-2} = 1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0$
		$f[x_2, x_3] = \frac{16-9}{4-3} = 7$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{1-1}{5-2} = 0$	
$x_3 = 4$	$f[x_3] = 16$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{9-7}{5-3} = 1$		
		$f[x_3, x_4] = \frac{25-16}{5-4} = 9$			
$x_4 = 5$	$f[x_4] = 25$				

Wielomian interpolacyjny dla przykładu powyżej ma postać:

$$W_n(x) = 1 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2) + 0(x-1)(x-2)(x-3) + 0(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Wartości tego wielomianu w węzłach:

$W_n(1) = 1$

$W_n(2) = 1 + 3(2-1) = 4$

$W_n(3) = 1 + 3(3-1) + 1(3-1)(3-2) = 1 + 6 + 2 = 9$

$W_n(4) = 1 + 3(4-1) + 1(4-1)(4-2) = 1 + 9 + 6 = 16$

$W_n(5) = 1 + 3(5-1) + 1(5-1)(5-2) = 1 + 12 + 12 = 25$

Wartość tego wielomianu w punkcie $x = 2{,}5$:

$W_n(2{,}5) = 1 + 3(2{,}5-1) + 1(2{,}5-1)(2{,}5-2) = 1 + 4{,}5 + 0{,}75 = 6{,}25$

Zad 1. Napisz program, który będzie obliczał wartość wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a i Newtona w dowolnym punkcie. Wymagania:

a) Węzły interpolacji i wartości funkcji w węzłach oraz liczba węzłów są zmiennymi pobieranymi z pliku tekstowego.
b) Punkt, w którym obliczamy wartość wielomianu jest parametrem podawanym z klawiatury przez użytkownika.
c) W wyniku działania program wypisuje:
   - Liczbę węzłów
   - Węzły interpolacji
   - Wartości funkcji w węzłach
   - Punkt, w którym liczymy wartość
   - Wartość wielomianu Lagrange'a w danym punkcie
   - Wartość wielomianu Newtona w danym punkcie
   - Współczynniki wielomianu Newtona (b_k)

Na UPEL należy przesłać skompresowany katalog opracowanego programu oraz sprawozdanie z wynikami obliczeń z programu (w formie zrzutów ekranu) dla przykładów przedstawionych w niniejszej instrukcji (13 pkt).

Zad 2. Oblicz wartość $\sqrt[3]{50}$ za pomocą wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a dla funkcji $y = \sqrt[3]{x}$ i węzłów interpolacji $x_0 = 27,\ x_1 = 64,\ x_2 = 125,\ x_3 = 216$. W sprawozdaniu krótko opisz procedurę obliczania szukanej wartości (2 pkt).

Zad 3. Przeprowadź interpolację funkcji $y = \frac{1}{1+x^4}$ na przedziale [-10, 10] dla równoodległych węzłów interpolacji. Zadaj kolejno 6, 11 i 21 węzłów interpolacji. Na podstawie uzyskanych funkcji interpolujących wyznacz wartość funkcji dla 21 węzłów dla wszystkich trzech wariantów.

Czy ze wzrostem liczby węzłów interpolowanej funkcji dokładność interpolacji rośnie? Do sprawozdania dołącz wyniki obliczeń – wykresy znalezionych wielomianów na zadanym przedziale i wnioski płynące w tych obliczeń (5 pkt).