Sformułowanie wariacyjne i postać macierzowa równania

Mamy nastepujace równanie:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

z obustronnymi niezerowymi warunkami Dirichleta:

$$\varphi(0) = 5, \quad \varphi(3) = 4$$

Funkcja φ jest określona na dziedzinie:

$$[0,3] \ni x \to \varphi(x) \in R.$$

Funkcja ρ jest dana jako:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1,2] \\ 0 & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases}$$

Mnożymy obie strony równania przez funkcje testowa:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}v = 4\pi G\rho(x)v$$

Nastepnie całkujemy obie strony:

$$\int_0^3 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}v(x)\,dx = 4\pi G \int_1^2 \rho(x)v(x)\,dx$$

$$\varphi'(x)v(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 \varphi'(x)v'(x)\,dx = 4\pi G \int_1^2 v(x)\,dx$$

Wiemy, że funkcje testowe v zeruja sie na brzegu dziedziny, wiec:

$$-\int_0^3 \varphi'(x)v'(x)\,dx = 4\pi G\int_1^2 v(x)\,dx$$

Bedziemy poszukiwać rozwiazań w formie $\varphi = w + u$, gdzie:

$$u(0) = 5, \quad u(3) = 4$$

$$w(0) = 0, \quad w(3) = 0$$

Przyjmujemy wiec funkcje u:

$$u(x) = 5 - \frac{x}{3}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$B(\varphi, v) = -\int_0^3 \varphi'(x)v'(x)\,dx$$

$$L(v) = 4\pi G\int_1^2 v(x)\,dx$$

Wiemy że całka z sumy funkcji jest równa sumie całek, wiec:

$$B(\varphi, v) = B(w + u, v) = B(w, v) + B(u, v)$$

Otrzymujemy ostatecznie:

$$B(w, v) = L(v) - B(u, v)$$