

# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Maciej Grzybacz

11.05.2024

## Zadania

### Zadanie 1

Dany jest układ równań liniowych  $Ax = b$ .

Macierz  $A$  o wymiarze  $n \times n$  jest określona wzorem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n}{n+1} & 1 \end{bmatrix}$$

Przyjmij wektor  $x$  jako dowolną  $n$ -elementową permutację ze zbioru  $\{-1, 0\}$  i oblicz wektor  $b$  (operując na wartościach wymiernych).

Metoda Jacobiego oraz metoda Czebyszewa rozwiązują układ równań liniowych  $Ax = b$  (przyjmując jako niewiadomą wektor  $x$ ).

W obu przypadkach oszacuj liczbę iteracji przyjmując test stopu:

$$\begin{aligned} \|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| &< \rho \\ \frac{\|Ax^{(i+1)} - b\|}{\|b\|} &< \rho \end{aligned}$$

gdzie  $\rho$  jest zadana tolerancja.

### Zadanie 2

Dowieść, że proces iteracji dla układu równań:

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 &= -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 &= 15 \end{aligned}$$

jest zbieżny. Ile iteracji należy wykonać, aby znaleźć pierwiastki układu z dokładnością do  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ?

## Zadanie 1

Rozważamy macierz trójdagonalną  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n}{n+1} & 1 \end{bmatrix}$$

Niech  $x$  będzie wektorem, którego elementy są dowolną permutacją zbioru  $\{-1, 0\}$ . Wektor  $b$  jest obliczany jako  $b = Ax$ .

### Metoda Jacobiego

Algorytm metody Jacobiego dla układu równań liniowych jest następujący:

1. Inicjalizacja  $x^{(0)}$ , typowo  $x^{(0)} = \mathbf{0}$ .
2. Iteracyjne obliczanie nowych przybliżeń wektora  $x$ :

$$x^{(i+1)} = D^{-1}(b - (L + U)x^{(i)})$$

gdzie:

- $D$  jest macierzą diagonalną macierzy  $A$ ,
  - $L$  i  $U$  to odpowiednio dolna i górna macierz trójkątna macierzy  $A$  bez elementów diagonalnych.
3. Iteracje kontynuujemy do momentu, aż  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$ , gdzie  $\rho$  jest z góry ustaloną tolerancją.

### Metoda Czebyszewa

Metoda Czebyszewa wykorzystuje wielomiany Czebyszewa do przyspieszenia zbieżności iteracji. Proces iteracyjny wygląda następująco:

1. Inicjalizacja dwóch pierwszych przybliżeń  $x^{(0)}$  i  $x^{(1)}$ , gdzie  $x^{(1)} \neq x^{(0)}$ .
2. Iteracyjne obliczanie kolejnych przybliżeń z wykorzystaniem wielomianów Czebyszewa:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k(x^{(k)} - x^{(k-1)}) + \beta_k D^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

3. Parametry  $\alpha_k$  i  $\beta_k$  są wybierane w taki sposób, aby optymalizować zbieżność metody.
4. Iteracje są kontynuowane do osiągnięcia wymaganej dokładności, analogicznie do metody Jacobiego.

## Szacowana liczba iteracji

Analizujemy trójdzieloną macierz  $A$ , aby oszacować promień spektralny  $\lambda$  macierzy iteracji oraz oszacować liczbę iteracji potrzebną do osiągnięcia określonej dokładności w metodach Jacobiego i Czebyszewa.

### Analiza macierzy $A$

Macierz  $A$  jest trójdzieloną macierzą z elementami na diagonalu głównym równymi 1, oraz dodatkowymi elementami nad i pod diagonalą główną malejącymi z każdym krokiem od  $\frac{1}{2}$  do  $\frac{n}{n+1}$ . Ta specyficzna struktura pozwala na oszacowania spektralne, choć macierz nie jest typowo diagonalnie dominująca.

### Szacowanie promienia spektralnego

Wykorzystując metodę Gershgorina do oszacowania dominującej wartości własnej macierzy  $A$ , rozważamy:

$$R_i = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Gdzie wszystkie  $a_{ii} = 1$ , a  $a_{ij}$  są mniejsze niż 1. Wartości  $R_i$  sugerują, że wartości własne są bliskie 1, ale nie przekraczają 2, co sugeruje, że  $\lambda$  oscyluje blisko największej wartości poza diagonalną (blisko 1).

### Oszacowanie liczby iteracji

Liczba iteracji w metodach Jacobiego i Czebyszewa może być oszacowana przy użyciu formuły:

$$k \approx \frac{\log(\rho)}{\log(\lambda)}$$

gdzie  $\rho$  to tolerancja błędu.

## Zadanie 2

Rozważamy układ równań:

$$\begin{aligned}10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 &= -10 \\3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 &= 15\end{aligned}$$

### Sprawdzenie zbieżności metody iteracji

Aby stwierdzić zbieżność metody iteracyjnej takiej jak metoda Jacobiego, musimy sprawdzić czy macierz systemu jest diagonalnie dominująca. Dla każdego wiersza, element diagonalny musi być większy niż suma wartości bezwzględnych pozostałych elementów w danym wierszu.

Macierz współczynników  $A$  układu równań jest następująca:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 10 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 20 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

Sprawdzając warunek dominacji diagonalnej:

- Pierwszy wiersz:  $|10| > |-1| + |2| + |-3|$  czyli  $10 > 6$  - spełnione.
- Drugi wiersz:  $|10| > |1| + |-1| + |2|$  czyli  $10 > 4$  - spełnione.
- Trzeci wiersz:  $|20| > |2| + |3| + |-1|$  czyli  $20 > 6$  - spełnione.
- Czwarty wiersz:  $|20| > |3| + |2| + |1|$  czyli  $20 > 6$  - spełnione.

Ponieważ każdy wiersz spełnia warunek dominacji diagonalnej, metoda Jacobiego jest zbieżna dla tego układu równań.

### Obliczenie współczynnika zbieżności $q$

Wartość współczynnika zbieżności  $q$ , czyli promień spektralny macierzy iteracji  $I - D^{-1}A$ , została obliczona za pomocą skryptu w języku Python z użyciem biblioteki NumPy. Macierz iteracji  $B$  jest definiowana jako:

$$B = I - D^{-1}A$$

gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową, a  $D^{-1}$  jest macierzą odwrotną do macierzy diagonalnej  $D$ , która zawiera diagonalne elementy macierzy  $A$ .

Oto fragment kodu Python, który oblicza wartość  $q$ :

```
import numpy as np
A = np.array([[10, -1, 2, -3],
              [1, 10, -1, 2],
              [2, 3, 20, -1],
              [3, 2, 1, 20]])
D = np.diag(np.diag(A))
D_inv = np.linalg.inv(D)
I = np.eye(4)
B = I - np.dot(D_inv, A)
eigenvalues = np.linalg.eigvals(B)
q = max(abs(eigenvalues))
```

Wartość  $q$  obliczona za pomocą powyższego kodu wynosi  $q \approx 0.953$ .

## Estymacja liczby iteracji

Liczba iteracji potrzebna do osiągnięcia zadanej dokładności zależy od współczynnika zbieżności  $q$ , gdzie  $q$  jest największą wartością własną macierzy iteracji  $I - D^{-1}A$ . Dokładność iteracji można estymować za pomocą:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq q^k \|x^{(0)} - x^*\|$$

gdzie  $x^*$  jest dokładnym rozwiązaniem.

Dla zadanych poziomów dokładności  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$ ,  $\epsilon = 10^{-5}$  liczba iteracji  $k$  może być szacowana jako:

$$k \approx \frac{\log(\epsilon)}{\log(q)}$$

### Wyniki:

- Dla  $\epsilon = 10^{-3}$ :

$$k \approx \frac{\log(10^{-3})}{\log(0.953)} \approx 143$$

- Dla  $\epsilon = 10^{-4}$ :

$$k \approx \frac{\log(10^{-4})}{\log(0.953)} \approx 191$$

- Dla  $\epsilon = 10^{-5}$ :

$$k \approx \frac{\log(10^{-5})}{\log(0.953)} \approx 238$$