

Laboratorium 1

Arytmetyka komputerowa

Maciej Grzybacz

05.03.2024

1 Treść zadań

1. Znaleźć maszynowe epsilon, czyli najmniejszą liczbę a , taką że $a + 1 > 1$.
2. Rozważamy problem ewaluacji funkcji $\sin x$, m.in. propagację błędów danych wejściowych, tj. błąd wartości funkcji ze względu na zakłócenie h w argumentzie x :
 - (a) Ocenic błąd bezwzględny przy ewaluacji $\sin x$
 - (b) Ocenic błąd względny przy ewaluacji $\sin x$
 - (c) Ocenic uwarunkowanie dla tego problemu
 - (d) Dla jakich wartości argumentu x problem jest bardzo czuły?
3. Funkcja sinus zadana jest nieskończonym ciągiem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- (a) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc tylko pierwszy człon rozwinięcia, tj. $\sin x \approx x$, dla $x = 0.1, 0.5$ i 1.0 ?
 - (b) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc pierwsze dwa człony rozwinięcia, tj. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, dla $x = 0.1, 0.5$ i 1.0 ?
4. Zakładamy że mamy znormalizowany system zmiennoprzecinkowy z $\beta = 10, p = 3, L = -98$:
 - (a) Jaka jest wartość poziomu UFL (underflow) dla takiego systemu?
 - (b) Jeśli $x = 6.87 \times 10^{-97}$ i $y = 6.81 \times 10^{-97}$, jaki jest wynik operacji $x - y$?

2 Rozwiązania

1. Maszynowe epsilon jest równe:

$$\epsilon = B^{1-p}$$

gdzie p oznacza precyzję, zaś B podstawę systemu liczbowego.

2.

- a) Błąd bezwzględny

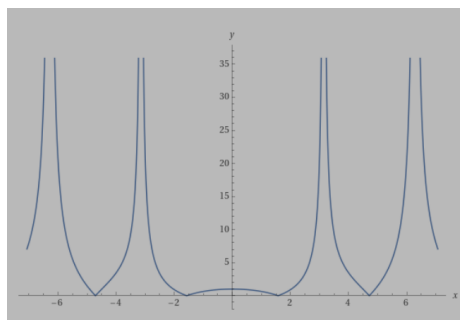
$$\Delta \sin x = |\sin x(1 + \epsilon) - \sin x|$$

- b) Błąd względny

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{\Delta \sin x}{\sin x} = \frac{|\sin x(1 + \epsilon) - \sin x|}{\sin x}$$

- c) Uwarunkowanie

$$\text{cond}(f(x)) = \text{cond}(\sin x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x \cos x}{\sin x} \right| = |x \cot x|$$



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = |x \cot(x)|$

- d) Problem jest czuły w miejscach, gdzie funkcja $\cot x$ zmierza do nieskończoności. Najlepiej uwarunkowany natomiast będzie w miejscach, gdzie funkcja $\cot x$ osiąga swoje minima.

Wniosek: Funkcja sinus jest najgorzej uwarunkowana w swoich miejscach zerowych i najlepiej w miejscach, gdzie przyjmuje wartość równą 1.

3. Błąd progresywny to wartość bezwzględna z różnicy wartości rzeczywistej i przybliżonej. Błąd wsteczny to wartość bezwzględna z różnicy argumentu wstawionego do funkcji i argumentu, dla którego przybliżona wartość funkcji jest wartością rzeczywistą.

Rozpatrujemy funkcję w postaci:

$$y = \sin x$$

a) $\hat{y} = x, \hat{x} = \arcsin \hat{y}$

Błąd progresywny: $|y - \hat{y}| = |\sin x - x|$

Błąd wsteczny: $|\hat{x} - x| = |\arcsin \hat{y} - x| = |\arcsin x - x|$

b) $\hat{y} = x - \frac{x^3}{6}, \hat{x} = \arcsin \left(x - \frac{x^3}{6} \right)$

Błąd progresywny: $|y - \hat{y}| = \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| = \left| \sin x + \frac{x^3}{6} - x \right|$

Błąd wsteczny: $|\hat{x} - x| = |\arcsin \hat{y} - x| = \left| \arcsin \left(x - \frac{x^3}{6} \right) - x \right|$

Obliczenia do podpunktu a):

- $x = 0.1$:

$$\hat{y} = x = 0.1$$

$$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 0.100167421$$

$$\text{Błąd progresywny: } |\sin 0.1 - 0.1| \approx 0.000166583$$

$$\text{Błąd wsteczny: } |\hat{x} - 0.1| \approx 0.000167421$$

- $x = 0.5$:

$$\hat{y} = x = 0.5$$

$$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 0.523598776$$

$$\text{Błąd progresywny: } |\sin 0.5 - 0.5| \approx 0.020574461$$

$$\text{Błąd wsteczny: } |\hat{x} - 0.5| \approx 0.023598776$$

- $x = 1.0$:

$$\hat{y} = x = 1.0$$

$$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 1.570796327$$

$$\text{Błąd progresywny: } |\sin 1.0 - 1.0| \approx 0,158529015$$

$$\text{Błąd wsteczny: } |\hat{x} - 1.0| \approx 0.570796327$$

Obliczenia do podpunktu b):

- $x = 0.1$:

$$\hat{y} = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6} \approx 0.099833333$$

$$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 0.099999916$$

$$\text{Błąd progresywny: } \left| \sin 0.1 + \frac{(0.1)^3}{6} - 0.1 \right| \approx 0.000000083$$

$$\text{Błąd wsteczny: } |\hat{x} - 0.1| \approx 0.000000084$$

- $x = 0.5$:

$$\hat{y} = 0.5 - \frac{(0.5)^3}{6} \approx 0.479166666$$

$$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 0.499705041$$

$$\text{Błąd progresywny: } \left| \sin 0.5 + \frac{(0.5)^3}{6} - 0.5 \right| \approx 0.000258872$$

$$\text{Błąd wsteczny: } |\hat{x} - 0.5| \approx 0.000294959$$

- $x = 1.0$:

$$\hat{y} = 1.0 - \frac{(1.0)^3}{6} \approx 0.833333333$$

$$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 0.985110783$$

$$\text{Błąd progresywny: } \left| \sin 1 + \frac{(1.0)^3}{6} - 1 \right| \approx 0.008137652$$

$$\text{Błąd wsteczny: } |\hat{x} - 1.0| \approx 0.014889216$$

Wniosek: Zwiększenie liczby wyrazów szeregu użytych do obliczeń skutkuje zwiększeniem ich dokładności.

4.

a) Poziom UFL to najmniejsza liczba dodatnia, którą możemy zapisać w danym systemie. Jest ona dana wzorem:

$$UFL = \beta^L = 10^{-98}$$

b) $x - y = 0.06 \times 10^{-97} = 6 \times 10^{-99} < UFL$, stąd $x - y = 0$ w zadanym systemie.

Wniosek: Jeśli zamierzamy używać systemu do obliczania wartości operacji na bardzo małych liczbach to powinniśmy możliwie zminimalizować wartość L .