

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: ogólna

Maciej Tarkiewicz

Metody Rungego-Kutty

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dra Grzegorza Jagielli

Wrocław 2019

Spis treści

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Wstęp | 3 |
| 2 | Wprowadzenie | 4 |
| 2.1 | Zagadnienie Cauchy’ego. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania. | 4 |
| 2.2 | Równania różniczkowe wyższych rzędów. | 5 |
| 3 | Metody Rungego-Kutty | 7 |
| 3.1 | Wyprowadzenie wzoru jawnego. | 7 |
| 3.2 | Interpretacja geometryczna dla metody IV rzędu | 10 |
| 3.3 | Sposób rozwiązywania równań wyższych rzędów | 13 |
| 3.4 | Wahadło matematyczne jako przykład rozwiązywania równań wyższego rzędu. | 14 |
| 4 | Szacowanie i ocena błędu dla metody Rungego-Kutty | 16 |
| 4.1 | Błąd lokalny i spójność rozwiązania | 16 |
| 4.2 | Błąd globalny i zbieżność rozwiązania | 19 |
| 5 | Mechanika orbitalna | 21 |
| 5.1 | Niska orbita okołoziemska | 21 |
| 5.2 | Trajektoria wolnego powrotu | 23 |
| 6 | Implementacja | 27 |
| 6.1 | Kod | 27 |
| 6.2 | Analiza obiektowa | 29 |
| 7 | Podsumowanie | 30 |

1 Wstęp

Równania różniczkowe opisują procesy dynamiczne. Są wszechobecne w nauce, inżynierii, biologii czy w biznesie. Matematycy badają naturę tych równań od wielu lat i istnieje wiele sprawdzonych metod rozwiązywania ich. Niektóre problemy opisywane równaniami różniczkowymi są tak złożone, że rozwiązywanie ich metodami analitycznymi jest trudne lub niemożliwe. To właśnie w tych sytuacjach przydatne są metody numeryczne, które pozwalają na uzyskanie przybliżonego rozwiązania równania różniczkowego w sposób numeryczny.

W tej pracy zajmiemy się właśnie jedną z najpopularniejszych metod numerycznych, jaką jest metoda Rungego-Kutty. Została ona opracowana przez niemieckich matematyków Carla Rungego i Martina Kutty około 1900 roku. Jest to jedna z najpopularniejszych technik rozwiązywania problemów przedstawionych równaniami różniczkowymi, gdyż charakteryzuje się nieskomplikowaną implementacją w różnych językach programowania oraz relatywnie niewielkim błędem.

Celem pracy jest zbadanie strony teoretycznej metody Rungego-Kutty oraz przedstawienie implementacji do rozwiązywania pewnych problemów. Nasza implementacja rozwiązuje równania metodą Rungego-Kutty dowolnego rzędu, dla dowolnie wielu zmiennych. W szczególności pozwala rozwiązywać problemy n ciał dla dowolnej przestrzeni.

Na początku w Rozdziale 2 przedstawimy kilka definicji i twierdzeń związanych z równaniami różniczkowymi, następnie w Rozdziale 3 wyprowadzimy wzór jawny metody Rungego-Kutty i zaprezentujemy sposób na rozwiązywanie równań wyższych rzędów.

W Rozdziale 4 pokażemy jak szacowany jest błąd lokalny i globalny wraz z wyprowadzeniem wzoru na oszacowanie błędu lokalnego dla metody dowolnego rzędu. Przedstawimy wykresy ilustrujące jak przedstawia się błąd globalny dla różnych kroków w tej metodzie.

Na końcu w Rozdziale 5 zajmiemy się problemami fizycznymi z mechaniki orbitalnej, natomiast w Rozdziale 6 przedstawimy analizę obiektową implementacji, dzięki której udało się wykonać obliczenia w tej pracy.

2 Wprowadzenie

2.1 Zagadnienie Cauchy'ego. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania.

Definicja 1. [11] Równaniem różniczkowym rzędu n nazywać będziemy równanie postaci:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)). \quad (1)$$

Definicja 2. [11] Zagadnieniem Cauchy'ego (zagadnieniem początkowym) nazywać będziemy równanie różniczkowe z zadany warunkiem początkowym. Dla równania pierwszego rzędu będzie ono wyglądać następująco:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \quad (2)$$

Twierdzenie 3. [11] (Peano) Niech funkcja $f(t, y)$ będzie ciągła na prostokącie

$$R = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2; t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b \right\}.$$

Oznaczamy przez:

$$M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)| \quad \wedge \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Wtedy zagadnienie wyrażone za pomocą (1) ma co najmniej jedno rozwiązanie na odcinku $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Definicja 4. [16] (Warunek Lipschitza) Niech V będzie otwartym podzbiorem $X = \mathbb{R}^k$ oraz $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że odwzorowanie $f(t, x)$:

$$f : I \times V \rightarrow X,$$

spełnia warunek Lipschitza względem x ze stałą $L < \infty$ jeśli dla dowolnych $t \in I$ oraz $x_1, x_2 \in V$ zachodzi:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

Założmy, że funkcja $f(t, y)$ spełnia założenia twierdzenia Peano oraz jest funkcją lipschitzowską. Wówczas zachodzi twierdzenie które definiuje jednoznaczność rozwiązania zagadnienia początkowego:

Twierdzenie 5. [8] (Picarda-Lindelöfa) Jeśli $f(t, y)$ jest funkcją ciągłą na otoczeniu (t_0, y_0) oraz jest funkcją lipschitzowską względem y w pewnej kuli $B((t_0, y_0), \delta)$, tzn. jeśli:

$$\exists L \geq 0 \quad \forall (t, y), (t, x) \in B((t_0, y_0), \delta) \quad \|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L\|y - x\|,$$

to istnieje $c > 0$ i $y \in C^1((t_0 - c, t_0 + c), R^n)$ takie, że y jest jednoznacznym rozwiązaniem zagadnienia (2).

2.2 Równania różniczkowe wyższych rzędów.

Równania wyższego rzędu mogą być badane bezpośrednio lub poprzez równoważne układy równań pierwszego rzędu.

Zajmiemy się drugą możliwością, czyli sprowadzaniem równań różniczkowych liniowych rzędu n do układu n równań rzędu pierwszego.

Analiza częściowo pochodzi z [10], [15], oraz z [9].

Twierdzenie 6. Dowolne równanie liniowe n -tego rzędu da się zapisać jako układ n równań liniowych pierwszego rzędu.

Aby sprowadzić równanie różniczkowe n -tego rzędu zdefiniowane w Definicji 1 do układu n równań rzędu pierwszego, należy wprowadzić nowe zmienne:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= y'(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

i przekształcić do układu n równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= y'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) &= y''(t) = x_3(t), \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= y^{(n-1)}(t) = x_n(t), \\ x_n' &= y^{(n)} = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Przykład 1. Rozpatrzmy równanie różniczkowe rzędu drugiego:

$$y''(t) \cdot \frac{1}{\cot(t)} - y'(t) = 0.$$

Z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} y(0) &= -1, \\ y'(\frac{\pi}{2}) &= 1. \end{cases}$$

Wykonajmy na początku podstawienie, które sprowadzi to równanie do układu równań rzędu pierwszego:

$$y'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) \cdot \frac{1}{\cot(t)} - x_2(t) = 0,$$

gdzie:

$$x_2'(t) = \frac{dx_2}{dt}.$$

Przekształcając:

$$\frac{dx_2}{dt} \cdot \frac{1}{\cot(t)} = x_2(t), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2(t) \cdot \cot(t), \quad \frac{dx_2}{x_2} = \cot(t) \cdot dt.$$

Całkując teraz obustronnie otrzymujemy:

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int \cot(t) dt, \quad \ln |x_2| + C_1 = \ln |\sin(t)| + C_2,$$

$$\ln |x_2| = \ln |\sin(t)| + C_3, \quad \text{gdzie } C_3 = C_2 - C_1.$$

Nakładając funkcję wykładniczą dostajemy rozwiązanie ogólne $x_2(t)$:

$$x_2(t) = C_3 \cdot \sin(t).$$

Uzupełniając o warunek początkowy dostajemy rozwiązanie przypadku szczególnego: $y'(t) = x_2(t) = \sin(t)$.

Wykonując podstawienie i uzupełniając o kolejny warunek początkowy, otrzymujemy rozwiązanie szczególne $y(t)$:

$$y(t) = \int y'(t) dt = \int \sin(t) dt = -\cos(t) + C_4, \quad y(t) = -\cos(t) + 1.$$

3 Metody Rungego-Kutty

Metody Rungego-Kutty są techniką numeryczną stosowaną do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych formy $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ z warunkiem początkowym $f(t_0) = y_0$ gdzie $t > t_0$.

Analiza tej metody pochodzi częściowo z [5], [4] oraz z [3].

3.1 Wyprowadzenie wzoru jawnego.

Ustalmy $y(t)'$ i $f(t, y)$ z warunkiem początkowym jak wyżej oraz zdefiniujmy ciąg arytmetyczny $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o różnicy h taki, że $t_{n+1} = t_n + h$ dla $n \geq 0$. Wtedy:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau = y(t_n) + h \int_0^1 f(t_n + h\tau, y(t_n + h\tau)) d\tau.$$

Całkę zastąpimy sumą skończoną, procedurą zwaną jako kwadratura Gaussa. W szczególności niech ω będzie nieujemną funkcją określoną na przedziale (a, b) , takim, że:

$$0 < \int_a^b \omega(\tau) d\tau < \infty, \quad \left| \int_a^b r^j \omega(\tau) d\tau \right| < \infty, \quad j = 1, 2, \dots$$

Funkcja ω nazywa się funkcją wagową. Otrzymujemy następujące przybliżenie:

$$\int_a^b f(\tau) \omega(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^n b_i f(c_i),$$

gdzie $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ są nazywane wagami a $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \in [a, b]$ węzłami interpolacji.

Założmy, że kwadratura dopasowuje całkę dokładnie wtedy, gdy dla $n \in \mathbb{N}$ te wagi można dobrać tak, aby suma była równa całce dowolnego wielomianu stopnia mniejszego bądź równego n .

Zastąpimy teraz drugą całkę kwadraturą Gaussa w sposób znormalizowany, gdzie b_i to kolejne wagi a $t_n + c_j h$ to węzły interpolacji. Wtedy:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{\nu} b_j f(t_n + c_j h, y(t_n + c_j h)).$$

Wartości $y(t_n + c_j h)$ dla $j = 1, 2, 3, \dots, \nu$, przybliżamy numerycznie przez ξ_j . Metoda Rungego-Kutty polega na wyrażeniu każdego kolejnego ξ_j , $j = 1, 2, 3, \dots, \nu$ przez sumę y_n i liniową kombinację $f(t_n, \xi_1)$, $f(t_n + hc_2, \xi_2)$, ..., $f(t_n + c_{j-1}h, \xi_{j-1})$.

W ten sposób otrzymujemy ostateczny wzór jawny metody rzędu ν :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= y_n, \\ \xi_2 &= y_n + ha_{2,1}f(t_n, \xi_1), \\ \xi_3 &= y_n + ha_{3,1}f(t_n, \xi_1) + ha_{3,2}f(t_n + c_2h, \xi_2), \\ &\vdots \\ \xi_\nu &= y_n + h \sum_{i=1}^{\nu-1} a_{\nu,i} f(t_n + c_i h, \xi_i). \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{j=1}^{\nu} b_j f(t_n + c_j h, \xi_j).\end{aligned}$$

gdzie $a_{\nu,i}$ są współczynnikami interpolacji kwadratury Gaussa.

Definicja 7. [5] Macierz $A = (a_{j,i})_{1 \leq i < j \leq \nu}$ gdzie brakujące współczynników są definiowane jako zera, nazywa się macierzą RK (*Rungego-Kutty*), natomiast:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_\nu \end{bmatrix}$$

są odpowiednio wagami RK i węzłami RK.

Macierz A jak i wagi i węzły RK można również przedstawić w następującej tabeli, zwanej Tabelą Butchera:

Tabela Butchera [3]

| | | | | | |
|----------|----------|----------|---------|-------------|-------|
| c_1 | | | | | |
| c_2 | a_{21} | | | | |
| c_3 | a_{31} | a_{32} | | | |
| \vdots | | | | | |
| c_s | a_{s1} | a_{s2} | \dots | $a_{s,s-1}$ | |
| | b_1 | b_2 | \dots | b_{s-1} | b_s |

Równoważnym sposobem wyrażenia metody Rungego-Kutty jest przedstawienie go za pomocą następującego układu:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, \underbrace{y_n}_{\xi_1}), \\
 k_2 &= f(t_n + c_2 h, \underbrace{y_n + h(a_{21}k_1)}_{\xi_2}), \\
 k_3 &= f(t_n + c_3 h, \underbrace{y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)}_{\xi_3}), \\
 &\vdots \\
 k_s &= f(t_n + c_s h, \underbrace{y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1})}_{\xi_s}).
 \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i.$$

Można zauważyć w jaki sposób rozkładają się interpolacje Kwadratury Gaussa wewnątrz f które wyznaczają poszczególne k_s .

Uwaga. Metody numeryczne Rungego-Kutty możemy przedstawić wzorami jawnymi, jak i niejawnymi (uwikłanymi). Metody jawne i niejawne mają różne zastosowania. Należy zaznaczyć, że w tej pracy będziemy rozważać zastosowanie tej metody danej wzorem jawnym. Aby zobrazować różnice rozważę najprostszą metodę Rungego-Kutty pierwszego rzędu, która jest również nazywana Metodą Eulera. Wzór jawny wygląda następująco:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Teraz przedstawimy wzór tej metody zadany w sposób niejawny (uwikłany):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Różnica wynika z tego, że we wzorze przedstawionym w sposób jawny y_{n+1} zależy od y_n , natomiast we wzorze przedstawionym w sposób niejawny (uwikłany) y_{n+1} zależy od y_n i y_{n+1} .

3.2 Interpretacja geometryczna dla metody IV rzędu

Rozpatrzmy równanie które ma postać:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Tabela Butchera Klasycznej metody Rungego-Kutty IV rzędu (źródło: [4]), która reprezentuje współczynniki w układzie danym za pomocą zmiennych k_i wygląda następująco:

| Rungego-Kutty 4 rzędu | | | | |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

Natomiast układ z tymi współczynnikami prezentuje się w taki sposób:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1h),$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2h),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3h).$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Przykład 2. Weźmy zagadnienie początkowe postaci:

$$\begin{cases} y'(t) = y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

i spróbujmy przybliżyć wartość funkcji $f(1)$ dla kroku $h = 0.5$.

Dla $t_1 = 0.5$

$$k_1 = 1,$$

$$k_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4},$$

$$k_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{16},$$

$$k_4 = 1 + 1 \cdot \frac{21}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{53}{32}.$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{21}{16} + \frac{1}{12} \cdot \frac{53}{32} = \frac{633}{384} \approx 1.6484375.$$

Dla $t_2 = 1$

$$k_1 = 1.6484375,$$

$$k_2 = 1.6484375 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.6484375 = 2.060546875,$$

$$k_3 = 1.6484375 + \frac{1}{2} \cdot 2.06054687 \cdot \frac{1}{2} = 2.1635742175,$$

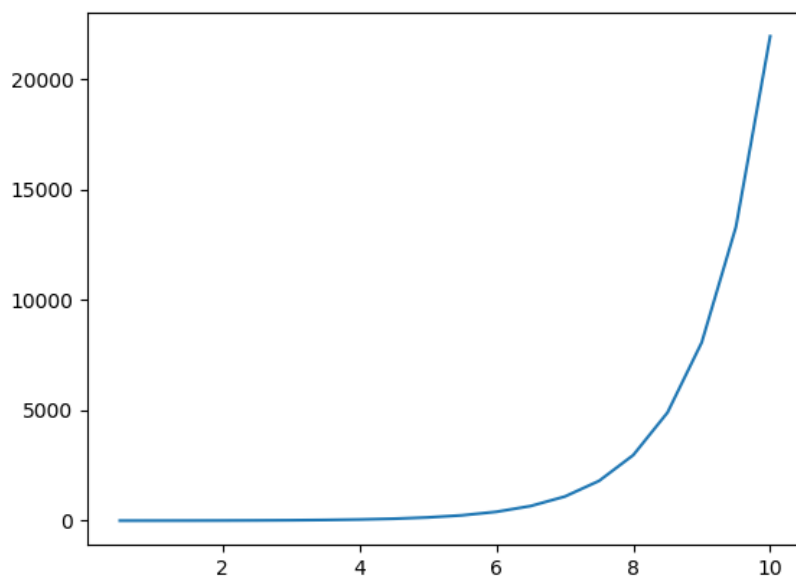
$$k_4 = 1.6484375 + 1 \cdot 2.1635742187 \cdot \frac{1}{2} = 2.730224608752.$$

$$y_1 = 1.6484375 + \frac{1}{12} \cdot 1.6484375 + \frac{1}{6} \cdot 2.060546875 + \frac{1}{6} \cdot 2.1635742175 + \frac{1}{12} \cdot 2.730224608752 \approx 2.71734619140625.$$

Rozwiązaniem rzeczywistym tego równania jest oczywiście funkcja e^t ,
 $e^1 = e \approx 2.71828182846$.

Przedstawimy rozwiązanie numeryczne tego równania dla $h = 0.5$ i $t_n = 10$.

Wykres 1. Rozwiązanie metodą Rungego-Kutty rzędu IV równania $y'(t) = y$:



Uwaga. Na potrzeby przykładu zastosowaliśmy krok $h = 0.5$ do prezentacji rozwiązania. W praktyce jest nie wskazane używanie tak dużego kroku.

3.3 Sposób rozwiązywania równań wyższych rzędów

Do tej pory skupialiśmy się na tym, jak rozwiązywać równania różniczkowe pierwszego rzędu.

W praktyce do modelowania problemów potrzebne są układy równań a czasem nawet układy równań wyższych rzędów. W tym Podrozdziale zobaczymy, w jaki sposób metoda, którą opracowaliśmy powyżej, może być łatwo przystosowana do rozwiązywania równań wyższych rzędów.

Analiza w tym Podrozdziale częściowo pochodzi z [7].

Na początku przeanalizujemy sytuację, w której naszym problemem jest równanie rzędu drugiego, sprowadzając je do dwóch równań rzędu pierwszego jak w Podrozdziale 2.2. Otrzymujemy następujący wzór:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = g(t, y, z). \end{cases}$$

Następnie chcąc rozwiązać to zagadnienie musimy każde równanie przybliżyć metodą Rungego-Kutta w określonej kolejności.

Wykonamy to przybliżenie dla metody rzędu IV:

$$\begin{aligned} k_1^1 &= f(t_n, y_n, z_n), \\ k_1^2 &= g(t_n, y_n, z_n), \\ k_2^1 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1^1h, z_n + \frac{1}{2}k_1^2h), \\ k_2^2 &= g(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1^1h, z_n + \frac{1}{2}k_1^2h), \\ k_3^1 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2^1h, z_n + \frac{1}{2}k_2^2h), \\ k_3^2 &= g(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2^1h, z_n + \frac{1}{2}k_2^2h), \\ k_4^1 &= f(t_n + h, y_n + k_3^1h, z_n + k_3^2h), \\ k_4^2 &= g(t_n + h, y_n + k_3^1h, z_n + k_3^2h), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1^1 + 2k_2^1 + 2k_3^1 + k_4^1), \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{6}(k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + k_4^2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że wszystkie k_i^1 i k_i^2 gdzie $i \in \{2, 3, 4\}$ są definiowane na podstawie k_{i-1}^1 oraz k_{i-1}^2 odpowiednio.

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na rozwiązanie równania rzędu drugiego metodą Rungego-Kutta rzędu IV.

3.4 Wahadło matematyczne jako przykład rozwiązywania równań wyższego rzędu.

Analiza w tym Podrozdziale pochodzi częściowo z [1].

Rozważamy obiekt zawieszony na strunie w punkcie, który porusza się ruchem wahadłowym. Na początku ustalmy co będą oznaczać symbole:

L = długość wahadła $[m]$,
 θ = kąt między pozycją struny a pozycją struny w spoczynku $[rad]$,
 t = czas $[s]$,
 g = przyspieszenie ziemskie spowodowane grawitacją $[\frac{m}{s^2}]$,
 a = przyspieszenie $[\frac{m}{s^2}]$,
 m = masa na końcu wahadła $[kg]$,
 F = siła $[N]$.

Będziemy teraz wyprowadzać proste równanie ruchu harmonicznego wahadła z drugiego prawa Newtona:

$$F = m \cdot a.$$

Przyspieszenie spowodowane grawitacją będzie funkcją θ .

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow |a| = g \quad \text{i gdy } \theta = 0 \rightarrow a = 0$$

obserwując stosunek przyspieszenia do θ dostajemy:

$$a = -g \cdot \sin \theta, \tag{3}$$

Długość łuku D_L wahadła można uważać za pozycję systemu:

$$D_L = L\theta,$$

zatem przyspieszeniem systemu będzie teraz:

$$a = L \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

łącąc to równanie ze wzorem (3) otrzymujemy wzór na prosty ruch harmoniczny wahadła:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

Jeżeli odchylenia są bardzo małe to możemy przyjąć, że $\sin \theta = \theta$ wtedy równanie przyjmuje następującą postać:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

Dla uproszczenia obliczeń przyjmijmy, że długość od punktu zawieszenia do środka masy czyli stała $L = 1[m]$ a przyspieszenie ziemskie $g = 9,81[\frac{m}{s^2}]$ Teraz chcąc rozwiązać to równanie Metodą Rungego-Kutty sprowadźmy je do układu równań rzędu pierwszego:

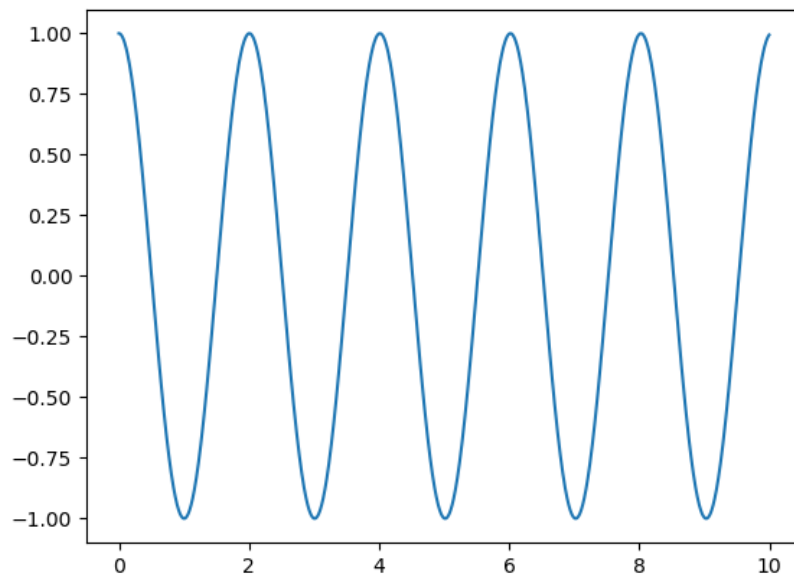
$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -9,81\theta, \end{cases}$$

z warunkiem początkowym:

$$\begin{cases} \theta(0) = 1, \\ \theta'(0) = 0. \end{cases}$$

Obliczenia wykonamy analogicznie jak zostało to opisane w Podrozdziale 3.3. Zostały one wykonane za pomocą implementacji opisanej w Rozdziale 6 dla Klasycznej metody Rungego-Kutty rzędu IV.

Wykres 2. Dla $h = 0.001$ oraz $\theta_n = 10$ wynik zaprezentujemy na następującym wykresie:



Można zauważyć, że wahadło prawidłowo powraca do początkowego przesunięcia po każdym cyklu.

4 Szacowanie i ocena błędu dla metody Rungego-Kutty

Każdemu przybliżeniu numerycznemu powinno towarzyszyć wiarygodne oszacowanie błędu.

W tym Rozdziale zajmiemy się analizą błędu dla Rungego-Kutta rzędu IV, na jego podstawie pokażemy jak szacuje się błąd dla wszystkich rzędów w tej metodzie. Analiza w tym Rozdziale pochodzi częściowo z [4], [12], [6] oraz z [2].

4.1 Błąd lokalny i spójność rozwiązania

Definicja 8. Błąd lokalny jest to różnica między rozwiązaniem rzeczywistym a numerycznym w jednym kroku h :

$$E_h(t_i) = |y_i - y(t_i)|,$$

jeżeli:

$$y_{i-1} = y(t_{i-1}),$$

gdzie y_i, y_{i-1} oraz $y(t_i), y(t_{i-1})$ są rozwiązaniami przybliżonymi i rzeczywistymi odpowiednio w punktach t_i i t_{i-1} .

Definicja 9. Metodę numeryczną uważa się za spójną, jeśli:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_h(t_n)}{h} = 0.$$

Pokażemy jak się szacuje błąd lokalny w metodzie Rungego-Kutty.

Definicja 10. [14] (Szereg Taylora). Szereg potęgowy postaci:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

nazywamy rozwinięcie funkcji f w Szereg Taylora w punkcie a . Funkcja jest rozwijalna w Szereg Taylora, jeżeli posiada pochodne każdego rzędu.

Teraz rozwińmy funkcję $f(x+h)$ w szereg Taylora:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2!} + \dots + h^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + O(h^{n+1}),$$

gdzie $O(h^{n+1})$ to oszacowanie pozostałych wyrazów.

Uwaga. W szeregu Taylora funkcji dwóch zmiennych, zamiast pochodnych pojawi się suma pochodnych mieszanych odpowiedniego stopnia.

Stosując RK IV mamy znane $y(t_n)$ a szukamy $y(t_n + h)$, rozpisując $y(t_n + h)$ w szereg Taylora do wyrazu 5 i szacując resztę przez $O(h^5)$ otrzymujemy:

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + h^2 \frac{y''(t_n)}{2!} + h^3 \frac{y'''(t_n)}{3!} + h^4 \frac{y^{(4)}(t_n)}{4!} + O(h^5) \quad (*)$$

W (*) podstawiamy pod $y^{(i)}(t_n)$ funkcje $\frac{d^{(i-1)}f(t_n, y_n)}{dt_n^{i-1}}$ gdzie $i \in \{2, 3, 4\}$ dostając nowe rozpisanie $y(t_n + h)$ przez wyrazy, w których pojawiają się pochodne mieszane i gdzie ogon jest szacowany przez $O(h^5)$.

Zapiszemy to w następujący sposób:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y), \\ y''(t) &= \frac{dy'(t)}{dt} = \frac{df(t, y)}{dt}, \\ y'''(t) &= \frac{dy''(t)}{dt} = \frac{d^2 f(t, y)}{dt}, \\ y^4(t) &= \frac{dy'''(t)}{dt} = \frac{d^3 f(t, y)}{dt}. \end{aligned}$$

Definicja 11. Niech wyrażenie $E(f(t, y), t_n, y_n, h, k)$ będzie częścią rozwinięcia Taylora $f(t + h, y(t + h))$ zawierającym pochodne mieszane stopnia mniejszego bądź równego k , tak że dla $y'(t) = f(t, y)$ zachodzi:

$$y(t_n + h) = E(f(t, y), t_n, y_n, h, k) + O(h^{k+1}).$$

Uwaga. Dla $f(t, y)$ zawsze $y_n = y(t_n)$.

Dla tak zdefiniowanego wyrażenia $E(f(t, y), t_n, y_n, h, k)$, podstawiając je pod (*) otrzymujemy nowe rozpisanie $y(t_n + h)$:

$$y(t_n + h) = E(f(t, y), t_n, y_n, h, 4) + O(h^5) = A + O(h^5).$$

Oznaczmy tą równość przez (**).

Następnie rozwijamy również wszystkie k_i gdzie $i \in (2, 3, 4)$ w szereg Taylora szacując ogony przez $O(h^4)$.

Definicja 12. Niech wyrażenie $F(f(t, y), t_n, y_n, k)$ będzie rozwinięciem funkcji $f(t, y)$ w szereg Taylora zawierającym pochodne mieszane k w punkcie t_n, y_n , szacując ogon przez $O(h^k)$.

Wtedy:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= F(f(t, y), t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1h, 4) + O(h^4), \\ k_3 &= F(f(t, y), t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2h, 4) + O(h^4), \\ k_4 &= F(f(t, y), t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_3h, 4) + O(h^4). \end{aligned}$$

Wstawiamy teraz k_i i rozpisujemy wyrażenie $y(t_n + h)$.

$$\begin{aligned} y(t_n + h) &= y(t_n) + \frac{h}{6}(f(t_n, y_n) + 2F(f(t, y), t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1h, 4) + O(h^4) \\ &\quad + 2F(f(t, y), t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2h, 4) + O(h^4) + F(f(t, y), t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \\ &\quad + \frac{1}{2}k_3h, 4) + O(h^4)) = B + O(h^5). \end{aligned}$$

Oznaczmy to równanie jako $(***)$.

Teraz odejmiemy $|(***) - (**)|$ otrzymując :

$$|(***) - (**)| = |A + O(h^5) - (B + O(h^5))| = |A - B + O(h^5)|.$$

Lemat 13. Błąd lokalny Metody Rungego-Kutty rzędu μ wynosi $O(h^{\mu+1})$ gdy $A = B$.

Uwaga. [2] Warunki na Tabele Butchera, potrzebne do uzyskania równości $A = B$, są zadane przez układ równań algebraicznych. Stosuje się Tabele metod, o współczynnikach spełniających te równania, a same warunki zależą od rzędu metody.

Fakt. Z Lematu 13 oraz z Definicji 8 wynika, że metoda Rungego-Kutty jest metodą spójną, jeżeli ma rząd większy od 0.

4.2 Błąd globalny i zbieżność rozwiązania

Definicja 14. Błąd globalny to różnica między rozwiązaniem rzeczywistym a numerycznym w punkcie końcowym. Niech $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ gdzie $0 = t_0$ i $t_n = t_0 + h \cdot n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy błąd globalny będzie wynosił:

$$e(t_n) = |y_n - y(t_n)|,$$

gdzie y_n jest wartością przybliżoną w punkcie t_n , natomiast $y(t_n)$ wartością rzeczywistą odpowiednio również w punkcie t_n .

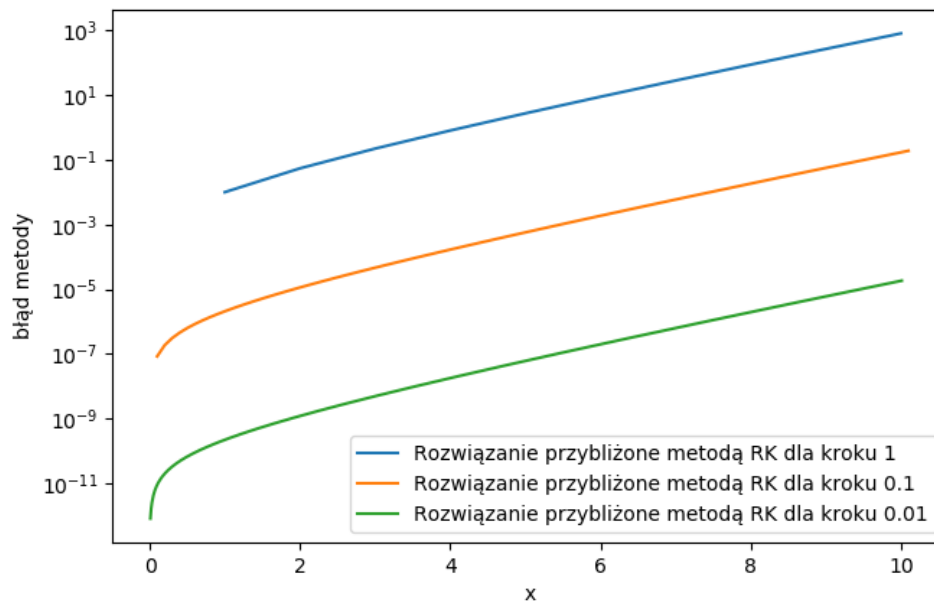
Twierdzenie 15. Błąd globalny metody Rungego-Kutty rzędu k wynosi $O(h^k)$.

Definicja 16. Metodę numeryczną uważa się za zbieżną, jeśli rozwiązanie numeryczne zbliża się do rozwiązania rzeczywistego, wtedy gdy wielkość kroku h zbiega do 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |y_n - y(t_n)| = 0.$$

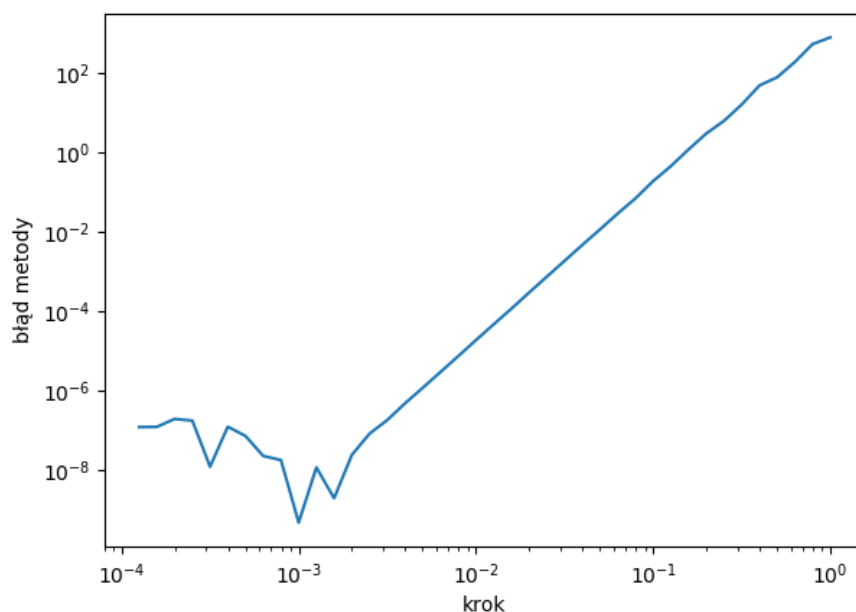
Weźmy równanie, którego rozwiązanie jest znane analitycznie: $y'(t) = y$ przy warunku początkowym $y(0) = 1$ i porównajmy jak będzie generowany błąd globalny dla różnych kroków h w metodzie Rungego-Kutty rzędu IV.

Wykres 3. Ocena błędów dla równania $y'(t) = y$ rozwiązanego metodą RK rzędu IV dla różnych kroków. Rysunek wykonano w skali logarytmicznej.



Obserwacja. Na wykresie 3 można zaobserwować, że błąd globalny rośnie wykładniczo, proporcjonalnie do wartości funkcji.

Wykres 4. $|e_{h,10} - e^{10}|$, gdzie $e_{h,10}$ jest wartością przybliżoną dla różnych kroków h metodą Rungego-Kutty rzędu IV. Rysunek wykonano w skali podwójnie logarytmicznej.



Obserwacja. W skali podwójnie logarytmicznej, jeżeli funkcja ma wykres liniowy o nachyleniu h to oznacza, że rząd metody wynosi h . Gdy krok maleje 10 razy to błąd globalny maleje o 10^h razy.

Uwaga. Gwałtowne zmiany na poziomie od 10^{-4} do 10^{-3} związane są z błędami numerycznymi, niedokładność związana jest z reprezentacją liczb rzeczywistych przez oprogramowanie.

5 Mechanika orbitalna

Wszystkie obliczenia w tym Rozdziale będą wykonywane dla Klasycznej metody Rungego-Kutty rzędu IV.

Analiza tej metody pochodzi częściowo z [3].

5.1 Niska orbita okołozemska

W tym Podrozdziale zajmiemy się opisem niskiej orbity okołozemskiej. Rozważamy dwa ciała: Ziemię która znajduje się w środku układu i inny obiekt. Współrzędne obiektu w czasie wyrażają się jako $(x(t), y(t))$ i którego prędkość w czasie wynosi $(v_x(t), v_y(t))$. Wtedy ruch tego ciała opisuje następujące równania:

$$\begin{cases} x'(t) &= v_x(t), \\ y'(t) &= v_y(t), \\ v'_x(t) &= -(x(t)^2 + y(t)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-x(t)) \cdot \mu, \\ v'_y(t) &= -(x(t)^2 + y(t)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-y(t)) \cdot \mu, \end{cases}$$

gdzie μ jest iloczynem masy Ziemi i stałej grawitacyjnej G .

Definicja 17. [13] Dokładna prędkość orbitalna ciała wyraża się następującym wzorem:

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)},$$

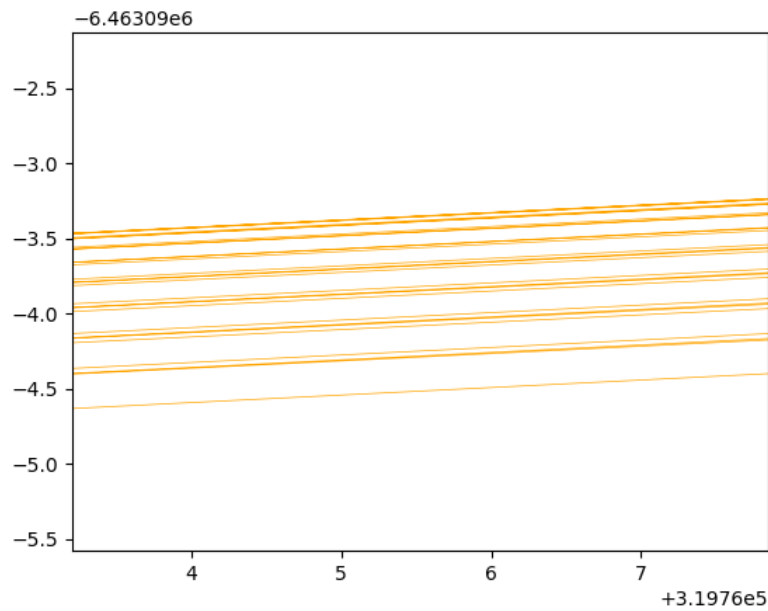
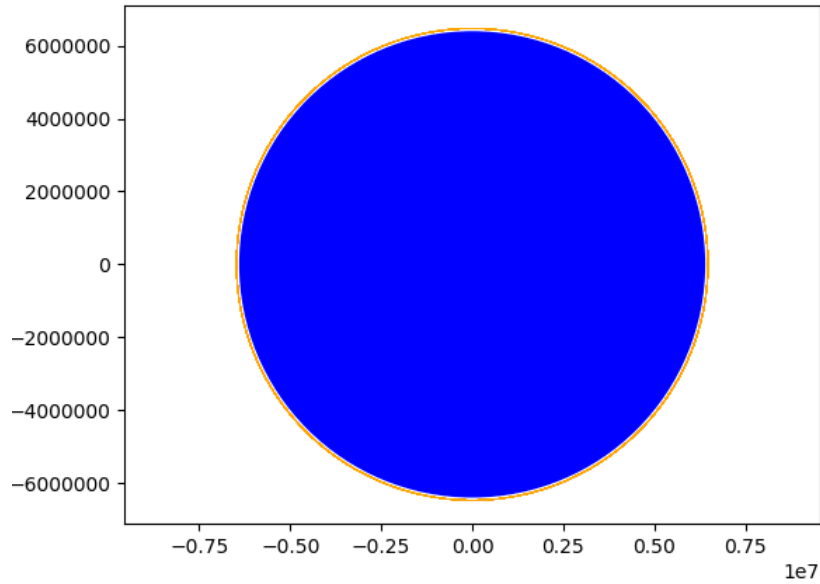
gdzie r jest odległością dla której obliczana jest prędkość, natomiast a jest długością pół-wielkiej osi orbity eliptycznej.

Uwaga. Zakładamy, że $a = r$, ponieważ chcemy uzyskać prędkość orbity kołowej.

Zakładamy, również że obiekt startuje z punktu odległego o 100 000 metrów od powierzchni Ziemi z prędkością, która jest prostopadła do odcinka łączącego obiekt ze środkiem Ziemi. Przyjmujemy następujące warunki początkowe oraz wartości stałych:

- $\mu = 398600.43544 \cdot 10^9 \left[\frac{m^3}{s^2} \right],$
- $r = 6371\,000 \text{ [m]} + 100\,000 \text{ [m]},$
- $v = 7848.15010 \left[\frac{m}{s} \right].$

Wykres 5. Rysunki wykonano dla czasu $t_n = 150000[s]$ oraz kroku $h = 1$.



Obserwacja. Można dostrzec że, prędkość z która obiekt wystartował mimo kilkudziesięciu obiegów, pozwoliła mu pozostać na podobnej orbicie.

5.2 Trajektoria wolnego powrotu

W tym Podrozdziale zajmiemy się problemem uzyskania trajektorii wolnego powrotu dla układu Księżyc i Ziemia. Bliskość Księżycy do Ziemi sprawiła, że stał się on obiektem zainteresowania od początku istnienia całej ludzkiej egzystencji. Od wczesnych astronomów, którzy starali się dokładnie obserwować ruch Księżycy aż do Newtona i innych fizyków i matematyków.

Rozważmy następujące ciała:

- Ziemię, która znajduje się w centrum układu i nie działa na nią nic grawitacyjnie,
- Księżyc, którego współrzędne w czasie wyrażają się jako $x_1(t), y_1(t)$ i którego prędkość w czasie wynosi $v_{x_1}(t), v_{y_1}(t)$,
- obiekt, którego współrzędne w czasie wyrażają się jako $x_2(t), y_2(t)$ i którego prędkość w czasie wynosi $v_{x_2}(t), v_{y_2}(t)$.

Na początku ustalmy co będą oznaczać symbole:

- $R_z = 6371\ 000$ – promień Ziemi $[m]$,
- $R_k = 384\ 400\ 000$ – średnia odległość Księżycy od Ziemi $[m]$,
- $\mu_z = 398600.43544 \cdot 10^9$ – standardowy współczynnik grawitacyjny Ziemi $\left[\frac{m^3}{s^2}\right]$,
- $\mu_k = 4902.80006 \cdot 10^9$ – standardowy współczynnik grawitacyjny Księżycy $\left[\frac{m^3}{s^2}\right]$.

Uwaga. Dla uproszczenia obliczeń zignorujemy działanie grawitacji obiektu na Ziemię i Księżyc oraz Księżycy na Ziemię.

Ruch tych ciał opisują następujące równania:

$$\begin{cases} x_1'(t) = v_{x_1}(t), \\ y_1'(t) = v_{y_1}(t), \\ x_2'(t) = v_{x_2}(t), \\ y_2'(t) = v_{y_2}(t), \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_{x_1}(t) = -(x_1(t)^2 + y_1(t)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot x_1(t) \cdot \mu_z, \\ v'_{y_1}(t) = -(x_1(t)^2 + y_1(t)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot y_1(t) \cdot \mu_z, \\ v'_{x_2}(t) = -(x_1(t)^2 + y_1(t)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot x_2(t) \cdot \mu_z + \\ \quad + ((x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x_1(t) - x_2(t)) \cdot \mu_k, \\ v'_{y_2}(t) = -(x_1(t)^2 + y_1(t)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot y_2(t) \cdot \mu_z + \\ \quad + ((x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (y_1(t) - y_2(t)) \cdot \mu_k. \end{array} \right.$$

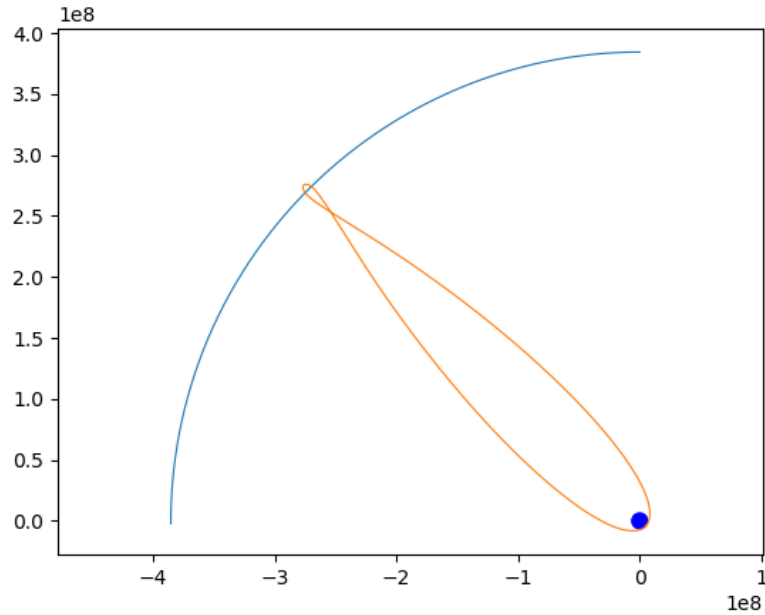
Przyjmujemy następujące warunki początkowe oraz wartości stałych:

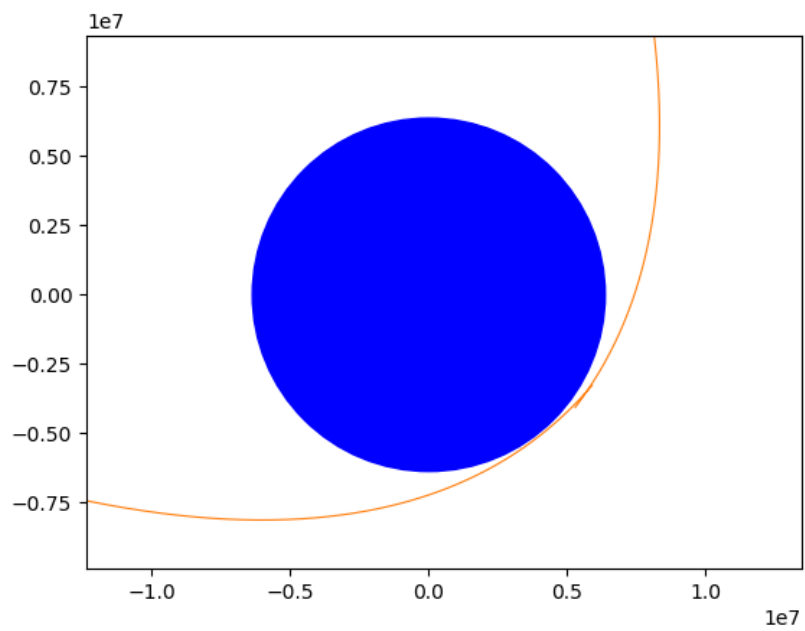
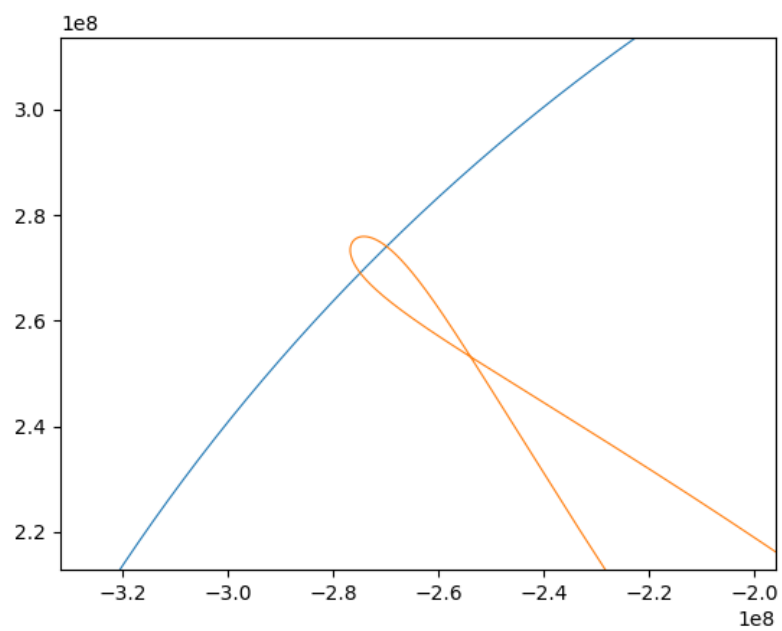
- Prędkość orbitalna Księżyca = $1019.4 \left[\frac{m}{s}\right]$,
- prędkość początkowa obiektu = $10849.505 \left[\frac{m}{s}\right]$,
- kąt nachylenia do osi OX na układzie współrzędnych = 37.5° .

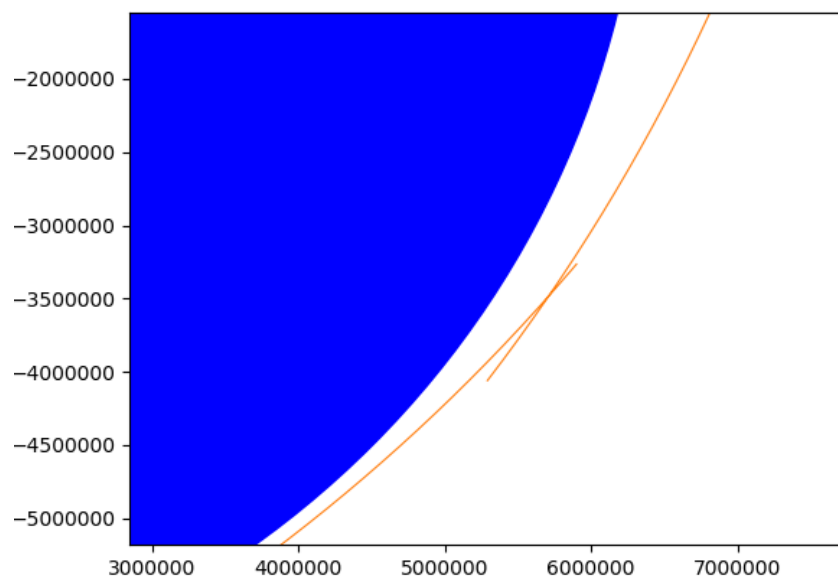
Dodatkowo zakładamy, że obiekt startuje z punktu $(6371\ 000[m] + 300\ 000[m], 0)$, natomiast Księżyc z punktu $(0, 384\ 400\ 000[m])$. Prędkości początkowe Księżyca i obiektu są prostopadłe do odcinka łączącego ciała ze środkiem Ziemi.

Wykres 6. Rysunki wykonano dla czasu $t_n = 595\ 450[s]$ oraz kroku $h = 1$.

Kolor niebieski to ruch Księżyca, natomiast kolor pomarańczowy to trasa obiektu.







Obserwacja. Obiekt okrążając Księżyc zbliża się do jego powierzchni najbliżej na odległość około $3465.5[km]$ dla $t_n = 296854[s]$.

Warto zaznaczyć, że trajektoria nie uderza w Księżyc.

Obserwacja. Obiekt okrążając Księżyc powraca w stronę Ziemi i zbliża się do jej powierzchni najbliżej na odległość około $104.5[km]$ dla $t_n = 595204[s]$.

6 Implementacja

6.1 Kod

```
from sympy import *
from matplotlib import pyplot as plt
import math

init_printing(use_unicode=True)

class ButcherTable:
    def __init__(self, vector_b, vector_c, matrix_a):
        self.vector_b = vector_b
        self.vector_c = vector_c
        self.matrix_a = matrix_a

    def get_vector_b(self):
        return self.vector_b

    def get_vector_c(self):
        return self.vector_c

    def get_matrix_a(self):
        return self.matrix_a

class RungeKutta:
    def __init__(self, equations_1, equations_2, symbol_1,
                 symbol_2, butcher_table):
        self.equations_1 = equations_1
        self.equations_2 = equations_2
        self.symbol_1 = symbol_1
        self.symbol_2 = symbol_2
        self.amount_of_equations = len(equations_1)
        self.butcher_table = butcher_table

    def calculate(self, h, t0, initial_values_1, initial_values_2,
                 tn):
        n = len(self.butcher_table.get_vector_c())
        c = self.butcher_table.get_vector_c()
        a = self.butcher_table.get_matrix_a()
        b = self.butcher_table.get_vector_b()
```

```

k = [list(range(len(c))) for i in
      range(self.amount_of_equations)]
l = [list(range(len(c))) for i in
      range(self.amount_of_equations)]
i1 = [(self.symbol_1[i], initial_values_1[i]) for i in
       range(0, len(self.symbol_1))]
i2 = [(self.symbol_2[j], initial_values_2[j]) for j in
       range(0, len(self.symbol_2))]

yield t0, tuple(initial_values_1), tuple(initial_values_2)
while (tn > t0):

    for e1 in range(0, len(i1)):
        k[e1][0] = self.equations_1[e1].subs(i1 + i2)
    for e2 in range(0, len(i2)):
        l[e2][0] = self.equations_2[e2].subs(i1 + i2)

    for i in range(1, n):

        for p in range(0, self.amount_of_equations):
            i1 = [(self.symbol_1[v], initial_values_1[v] +
                    sum([h * a[i - 1, j] * k[v][j]
                        for j in range(0, i)]))
                  for v in range(0, len(self.symbol_1))]
            i2 = [(self.symbol_2[v], initial_values_2[v] +
                    sum([h * a[i - 1, j] * l[v][j]
                        for j in range(0, i)]))
                  for v in range(0, len(self.symbol_2))]

            k[p][i] = (self.equations_1[p].subs(i1 + i2))

        for p in range(0, self.amount_of_equations):
            i1 = [(self.symbol_1[v], initial_values_1[v] +
                    sum([h * a[i - 1, j] * k[v][j]
                        for j in range(0, i)]))
                  for v in range(0, len(self.symbol_1))]
            i2 = [(self.symbol_2[v], initial_values_2[v] +
                    sum([h * a[i - 1, j] * l[v][j]
                        for j in range(0, i)]))
                  for v in range(0, len(self.symbol_2))]

            l[p][i] = (self.equations_2[p].subs(i1 + i2))

```

```

for p in range(0, len(initial_values_1)):
    initial_values_1[p] = initial_values_1[p] + h *
        sum([b[i] * k[p][i] for i in range(0, n)])
for p in range(0, len(initial_values_2)):
    initial_values_2[p] = initial_values_2[p] + h *
        sum([b[i] * l[p][i] for i in range(0, n)])
t0 = t0 + h

yield t0, tuple(initial_values_1), tuple(initial_values_2)

```

6.2 Analiza obiektowa

Implementacja została wykonana w języku Python, rozwiązuje ona równania różniczkowe metodą Rungego-Kutty dowolnego rzędu dla równań stopnia drugiego.

Opis klas:

1. **ButcherTable** — Klasa, która przechowuje współczynniki Tabeli Butchera. Posiada konstruktor oraz metody, dzięki którym możemy odwołać się bezpośrednio do odpowiednich współczynników tabeli:

- `__init__(self, vector_b, vector_c, matrix_a),`
- `get_vector_c(),`
- `get_vector_b(),`
- `get_matrix_a().`

2. **RungeKutta** — Zawiera klasę **ButcherTable**. Klasa posiada konstruktor oraz jedną metodę:

- `__init__(self, equations_1, equations_2, symbol_1, symbol_2, butcher_table),`
 - `equations_1` i `equations_2` są listami, które reprezentują układ równań różniczkowych.
equations_1 zawiera zmienne, natomiast *equations_2* zawiera wyrażenia, które równają się pochodnym odpowiednich zmiennych z *equations_1*.
 - `symbol_1` i `symbol_2` są listami, które reprezentują zmienne z których składa się układ równań różniczkowych, gdzie pochodne zmiennych z `symbol_1` równają się odpowiednim zmiennym z `symbol_2`.

- `calculate(self, h, t0, initial_values_1, initial_values_2, tn),`
 - Rozwiązuje równanie na podstawie warunków początkowych: `initial_values_1, initial_values_2`, dla kroku `h` oraz do czasu `tn`.
Zmienne z `symbol_1, symbol_2` w punkcie `t0` równają się kolejno odpowiednim zmiennym z `initial_values_1, initial_values_2`.

7 Podsumowanie

W tej pracy pokazaliśmy, że za pomocą metod Rungego-Kutty można symulować problemy fizyczne z dostatecznie dużą dokładnością.

Implementacja, która została przedstawiona i której analizę obiektową przedstawiliśmy w Rozdziale 6 pozwala na przybliżenie rozwiązania równania różniczkowego w dowolnym punkcie, dla metody Rungego-Kutty dowolnego rzędu, wliczając metodę rzędu pierwszego czyli tak zwany schemat Eulera.

Wadą implementacji jest to, że obliczenia wykonują się długo. Na przykład dla trajektorii wolnego powrotu trwały one kilkanaście godzin. Jest to spowodowane wydajnością biblioteki SymPy, której używamy by radzić sobie z obliczaniem wartości funkcji w odpowiednich punktach podczas każdej iteracji.

Warto zaznaczyć, że w tej pracy do analizy problemów fizycznych stosowaliśmy metodę Rungego-Kutty rzędu IV, ponieważ jej błąd lokalny jak i globalny jest wystarczająco mały by dostatecznie dobrze przybliżać rozwiązania równań.

Literatura

- [1] Joel Ballard. *The Simple Harmonic Pendulum*. Spring 2012. Materiały do wykładu, <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/nmf/Njihal0.pdf>.
- [2] John Butcher. *Runge–Kutta methods for ordinary differential equations*. 2005. <https://www.math.auckland.ac.nz/~butcher/CONFERENCES/JAPAN/KYUSHU/kyushu-slides.pdf>.
- [3] E. Hairer, P.S. Norsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff Problems*. Springer, 1993.
- [4] Ernst Hairer, Christian Lubich, and Michel Roche. *The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge-Kutta methods*, volume 1409. Springer, 2006.
- [5] Arieh Iserles. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Number 44. Cambridge university press, 2009.
- [6] Iwona Karcz. *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych*. Materiały do wykładu, http://anna.czemplik.staff.iia.pwr.wroc.pl/images/Danaliza/wyklad_met_num.pdf.
- [7] Jim Lambers. *Lecture 7 Notes*. 2009-2010. <http://www.math.usm.edu/lambers/mat461/spr10/lecture7.pdf>.
- [8] Leszek Marcinkowski. *Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych*. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, 2011. <http://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/nrr/wyklad.pdf>.
- [9] Marcin Orchel. *Układy równań różniczkowych*. Skrypt do wykładu, <http://home.agh.edu.pl/~morchel/files/rr/zajecia06-rr.pdf>.
- [10] Andrzej Palczewski. *Równania różniczkowe zwyczajne*. 2004. Skrypt do wykładu, <http://dydmat.mimuw.edu.pl/sites/default/files/wyklady/rrz.pdf>.
- [11] Andrzej Raczyński. *Równania różniczkowe (A1)*. Skrypt do wykładu, http://www.math.uni.wroc.pl/sites/default/files/skrypt_rr1.pdf.
- [12] J.K. Ryan. *Lecture 6: Truncation Error, Consistency, and Convergence*. 2012. Materiały do wykładu, http://ta.twi.tudelft.nl/users/vuik/wi3097/lecture6_consistency.pdf.

- [13] Kimberly Strong. *Section 2 - Satellite Orbits*. 2005. Materiały do wykładu, http://www.atmosp.physics.utoronto.ca/people/strong/phy499/section2_05.pdf.
- [14] Filip Wudarski. *Matematyczne metody fizyki*. Materiały do wykładu, https://fizyka.umk.pl/~fifi/Materiay_MMF_files/taylor_dywer.pdf.
- [15] Todd Young and Martin J Mohlenkamp. *Introduction to numerical methods and matlab programming for engineers*. Department of Mathematics, Ohio University, 2014. Lecture 29, <http://www.ohiouniversityfaculty.com/youngt/IntNumMeth/lecture29.pdf>.
- [16] Grzegorz Łysik. *Równania Różniczkowe*. Kielce 2009. Skrypt do wykładu, <https://www.impan.pl/~lysik/RRZw-skrypt09.pdf>.