Instrukcja do ćwiczeń

Przedmiot: Elementy metod numerycznych
Rodzaj zajęć: ćwiczenia komputerowe
Numer zajęć: ćwiczenia nr 3
Temat: Wzory interpolacyjne Newtona
Prowadzący: dr Artur Woike

Napisać skrypt Scilab'a przybliżający wartość funkcji f w punkcie $\bar{x}$ wartością $W_n(\bar{x})$ wielomianu interpolacyjnego. W zależności od tego jakie są węzły interpolacji należy użyć wzoru interpolacyjnego Newtona dla węzłów dowolnych lub równoodległych.

Dane:
$n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n$, $\bar{x} \in \langle x_0, x_n \rangle$, $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$.

Szukane:
tablica ilorazów różnicowych lub różnic progresywnych,
$W_n(\bar{x})$.

Dane testowe 1:
$n = 7$, $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = sin(x)$,
$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6, x_6 = 7, x_7 = 8$,
$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), y_4 = f(x_4)$,
$y_5 = f(x_5), y_6 = f(x_6), y_7 = f(x_7)$.

Dane testowe 2:
$n = 5$, $\bar{x} = 0$, $f(x) = e^x$,
$x_0 = -3, x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3$,
$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), y_4 = f(x_4)$,
$y_5 = f(x_5)$.

Schemat skryptu:
1. Wprowadzić dane: n, $x_0, \ldots, x_n$, $\bar{x}$.
2. Zadeklarować funkcję f.
3. Wygenerować wartości $y_0, \ldots, y_n$.
   $y_i = f(x_i)$
4. Zbadać czy węzły $x_0, \ldots, x_n$ są równoodległe (jeśli tak to wyznaczyć h).
5. Zadeklarować funkcję ω_n.
   $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x1) \ldots (x - x_n)$
   a) Wygenerować wektor o składowych $(x - x_i)$.
   b) Wyliczyć iloczyn składowych tego wektora za pomocą funkcji "`prod`".
   c) Obliczony iloczyn zwrócić jako wynik funkcji ω_n.
6. Przygotować pustą tablicę na ilorazy różnicowe lub różnice progresywne:
   a) Prawdziwe wymiary tablicy to $(n + 1) \times (n + 1)$.
   b) Kolejne kolumny tablicy będą przechowywały kolejne rzędy ilorazów lub różnic.

c) Pierwsza kolumna powinna zawierać rząd 0 ilorazów lub różnic, czyli wektor kolumnowy wartości $y_i = f(x_i)$.
d) Należy uwzględnić różnice w numeracji elementów tablicy i numeracji elementów we wzorach.
e) Z wyjątkiem pierwszej kolumny (rząd 0) kolejne kolumny tablicy nie będą w pełni wykorzystane (w każdym kolejnym rzędzie jest o jeden element mniej).
f) Elementy tablicy obliczamy kolejnymi kolumnami (tj. kolejnymi rzędami ilorazów lub różnic).
g) Ilorazy lub różnice występujące we wzorach Newtona znajdują się w pierwszym wierszu naszej tablicy.

7. Jeśli węzły są dowolne:
   a) Obliczyć tablicę ilorazów różnicowych:

$$
\begin{aligned}
f(x_i, x_{i+1}) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},\ i = 0, \ldots, n-1 \\
f(x_i, \ldots, x_{i+k}) &= \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}, \\
&\quad k = 2, \ldots, n, \qquad i = 0, \ldots, n-k.
\end{aligned}
$$

   b) Obliczyć wartość $W_n(\bar{x})$:

$$
W_n(\bar{x}) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f(x_0, \ldots, x_i)\omega_{i-1}(\bar{x}).
$$

   Sumę obliczamy za pomocą pętli "`for`":
   i. Utworzyć i zainicjować odpowiednio zmienną tymczasową $s = f(x_0)$.
   ii. W pętli "`for`" obliczać kolejne elementy sumy i dodawać je do zmiennej tymczasowej s.
   iii. Po zakończeniu działania pętli "`for`" w zmiennej s znajduje się szukana wartość $W_n(\bar{x})$.

8. Jeśli węzły są równoodległe:
   a) Obliczyć tablicę różnic różnic progresywnych:

$$
\begin{aligned}
\Delta^0 y_i &= y_i, \quad i = 0, \ldots, n, \\
\Delta^k y_i &= \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \\
&\qquad k = 1, \ldots, n, \quad i = 0, \ldots, n-k.
\end{aligned}
$$

   b) Obliczyć wartość $W_n(\bar{x})$:

$$
W_n(x) = \Delta^0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i}\omega_{i-1}(\bar{x}).
$$

   Sumę obliczamy za pomocą funkcji "`sum`":
   i. Wygenerować wektor tymczasowy przechowujący kolejne składniki obliczanej sumy.
   ii. Wyliczyć sumę składowych tego wektora za pomocą funkcji "`sum`".
   iii. Obliczoną sumę zwrócić jako $W_n(\bar{x})$.

9. Wypisać w konsoli wartość $W_n(\bar{x})$.

Instrukcja do ćwiczeń

Przedmiot: Elementy metod numerycznych
Rodzaj zajęć: ćwiczenia komputerowe
Numer zajęć: ćwiczenia nr 4
Temat: Metody połowienia, regula falsi i siecznych
Prowadzący: dr Artur Woike

Napisać skrypt Scilab'a wyznaczający z dokładnością 10^{-r} rozwiązanie przybliżone równania nieliniowego $f(x) = 0$ położone wewnątrz przedziału $\langle a, b\rangle$.
Wykorzystać następujące połączenie metody połowienia i metody regula falsi (lub metody siecznych):
1. jeśli spełnione są założenia metody regula falsi (metody siecznych), to stosujemy jedną z tych metod do wyznaczenia rozwiązania,
2. jeśli nie są spełnione założenia metody regula falsi, ale są spełnione założenia metody połowienia, to wykonujemy jeden krok metody połowienia (zmniejszamy przedział $\langle a, b\rangle$) i wracamy do punktu 1;
3. jeśli nie są spełnione założenia metody połowienia, to nie wykonujemy żadnych obliczeń.

Założenia metody regula falsi (metody siecznych) weryfikujemy w sposób przybliżony:
— pierwszą i drugą pochodną przybliżamy za pomocą odpowiednich ilorazów różnicowych;
— cały przedział $\langle a, b\rangle$ zastępujemy punktami a i b (czyli sprawdzamy tylko warunek konieczny).

Wykorzystujemy dodatkowy warunek przerwania obliczeń – łączna liczba iteracji nie może przekroczyć ustalonej wartości n_{max}.

Dane:
funkcja f, przedział $\langle a, b\rangle$, parametry r, n_{max} i h.

Szukane:
przybliżenie x_i, takie że $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-r}$ oraz $i \leqslant n_{max}$.

Dane testowe:
$f(x) = (x^2 - 3)\sin x$, $\langle a, b\rangle = \langle 0.5, -2\rangle$,
$r = 4$, $n_{max} = 50$, $h = 0.001$.

Schemat skryptu:
1. Wprowadzić dane: a, b, r, n_{max}, h.
2. Zadeklarować funkcję f.

3. Zadeklarować przybliżenia pierwszej i drugiej pochodnej funkcji f za pomocą ilorazów różnicowych:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

4. Przyjąć aktualną liczbę wykonanych iteracji $wi = 0$.
5. Sprawdzić założenia metody połowienia:

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

   Jeśli powyższy warunek nie jest spełnione, to skrypt kończy działanie.
6. Sprawdzić (w dwóch punktach) założenia metody regula falsi (metody siecznych):

$$f'(a) \cdot f'(b) > 0,$$
$$f''(a) \cdot f''(b) > 0.$$

7. Jeśli warunki z punktu 6 nie są spełnione, to obliczamy za pomocą metody połowienia przybliżenie $\bar{x}$ i używamy go do wyznaczenia nowego przedziału $\langle a, b\rangle$:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2},$$

   jeśli $f(a) \cdot f(\bar{x}) < 0$, to $\langle a, b\rangle := \langle a, \bar{x}\rangle$, w przeciwnym wypadku $\langle a, b\rangle := \langle \bar{x}, b\rangle$.
   Po wyznaczeniu nowego przedziału $\langle a, b\rangle$ zwiększamy o 1 licznik wi wykonanych iteracji i wracamy do punktu 6.
8. Jeśli warunki z punktu 6 są spełnione to stosujemy metodę regula falsi lub metodę siecznych:
   a) metoda regula falsi:
      i. jeżeli $f'(x)f''(x) < 0$, to $c = a$ i $x_0 = b$, w przeciwnym wypadku $c = b$ i $x_0 = a$;
      ii. obliczamy nowe przybliżenie x_n,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(c) - f(x_{n-1})}(c - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots;$$

      iii. zwiększamy o 1 licznik wi wykonanych iteracji;
      iv. jeśli $wi > n_{max}$ to kończymy działanie skryptu (nie udało się osiągnąć żądanej dokładności);
      v. jeżeli zachodzi warunek na dokładność przybliżenia $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-r}$, to kończymy obliczenia (ostatnie wyliczone przybliżenie jest naszym rozwiązaniem przybliżonym), w przeciwnym wypadku wracamy do punktu ii.
   b) metoda siecznych:
      i. jeżeli $f'(x)f''(x) < 0$, to $x_{-1} = b$ i $x_0 = a$, w przeciwnym wypadku $x_{-1} = a$ i $x_0 = b$;
      ii. obliczamy nowe przybliżenie x_n,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}(x_{n-1} - x_{n-2}), \quad n = 1, 2, \ldots;$$

      iii. zwiększamy o 1 licznik wi wykonanych iteracji;

iv. jeśli $wi > n_{max}$ to kończymy działanie skryptu (nie udało się osiągnąć żądanej dokładności);

v. jeżeli zachodzi warunek na dokładność przybliżenia $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-r}$, to kończymy obliczenia (ostatnie wyliczone przybliżenie jest naszym rozwiązaniem przybliżonym), w przeciwnym wypadku wracamy do punktu ii.

9. obliczone w ten sposób rozwiązanie przybliżone wypisujemy w konsoli wraz z zawartością licznika wi.

Instrukcja do ćwiczeń

Przedmiot: Elementy metod numerycznych
Rodzaj zajęć: ćwiczenia komputerowe
Numer zajęć: ćwiczenia nr 5
Temat: Metody Newtona, Steffensena i Halleya
Prowadzący: dr Artur Woike

Napisać skrypt Scilab'a wyznaczający z dokładnością 10^{-r} rozwiązanie przybliżone równania nieliniowego $f(x) = 0$ położone wewnątrz przedziału $\langle a, b\rangle$.
Do rozwiązania numerycznego powyższego równania wykorzystać metodę Steffensena.
Założenia metody Steffensena (metody Newtona) weryfikujemy w sposób przybliżony:
— pierwszą i drugą pochodną przybliżamy za pomocą odpowiednich ilorazów różnicowych;
— cały przedział $\langle a, b\rangle$ zastępujemy punktami a i b (czyli sprawdzamy tylko warunek konieczny).
Wykorzystać przybliżony warunek przerwania obliczeń $|x_n - \alpha| < 10^{-r}$ w połączeniu z dodatkowym warunkiem przerwania obliczeń – łączna liczba iteracji nie może przekroczyć ustalonej wartości n_{max}.

Dane:
funkcja f, przedział $\langle a, b\rangle$, parametry r, n_{max} i h.

Szukane:
przybliżenie x_n, takie że $|x_n - \alpha| < 10^{-r}$ oraz $n \leqslant n_{max}$.

Dane testowe:
$f(x) = x\exp(\sin x) + \cos x$, $\langle a, b\rangle = \langle -2, -0.8\rangle$,
$r = 10$, $n_{max} = 100$, $h = 0.001$.

Schemat skryptu:
1. Wprowadzić dane: a, b, r, n_{max}, h.
2. Zadeklarować funkcję f.
3. Zadeklarować przybliżenia pierwszej i drugiej pochodnej funkcji f za pomocą ilorazów różnicowych:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

4. Zadeklarować pomocniczą funkcję g z metody Steffensena:

$$g(x) = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}.$$

5. Przyjąć aktualną liczbę wykonanych iteracji $wi = 0$.

6. Sprawdzić (w dwóch punktach) założenia metody Steffensena (Newtona):

$$\begin{aligned} f(a)\cdot f(b) &< 0,\\ f'(a)\cdot f'(b) &> 0,\\ f''(a)\cdot f''(b) &> 0. \end{aligned}$$

7. Jeśli powyższe warunki nie są spełnione, to skrypt kończy działanie.
8. Jeśli warunki z punktu 6 są spełnione to stosujemy metodę Steffensena:
   a) jeżeli $f(a)\cdot f''(a) > 0$, to $x_0 = a$, w przeciwnym wypadku $x_0 = b$;
   b) obliczamy nowe przybliżenie x_n,

   $$x_n = x_{n-1} - \frac{f\left(x_{n-1}\right)}{g\left(x_{n-1}\right)}, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

   c) zwiększamy o 1 licznik wi wykonanych iteracji;
   d) jeśli $wi > n_{max}$ to kończymy działanie skryptu (nie udało się osiągnąć żądanej dokładności);
   e) jeżeli zachodzi przybliżony warunek na dokładność przybliżenia

   $$|x_n - \alpha| \approx \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|f(x_n) - f(x_{n-1})|}|f(x_n)| < 10^{-r},$$

   to kończymy obliczenia (ostatnie wyliczone przybliżenie jest naszym rozwiązaniem przybliżonym), w przeciwnym wypadku wracamy do punktu b.
9. obliczone w ten sposób rozwiązanie przybliżone wypisujemy w konsoli wraz z zawartością licznika wi.