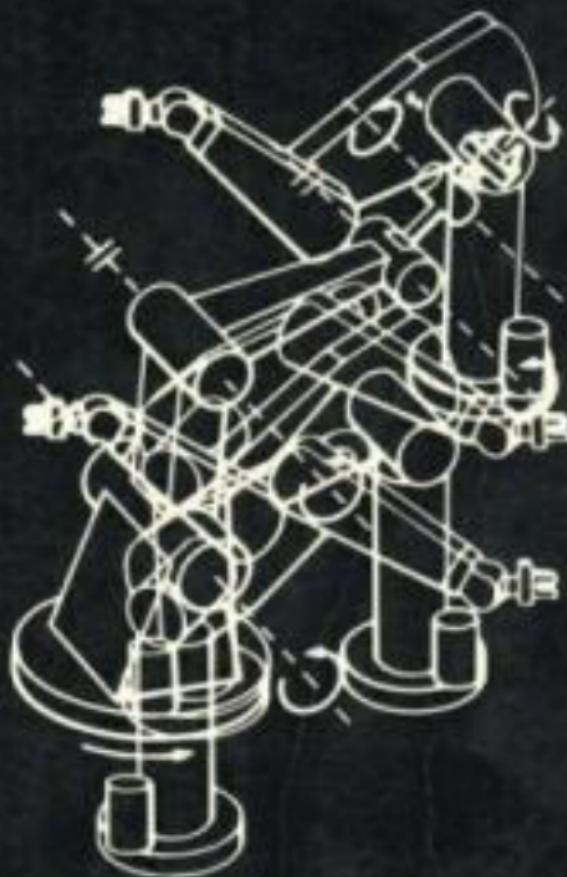


JOHN J. CRAIG

WPROWADZENIE DO ROBOTYKI

Mechanika i sterowanie



JOHN J. CRAIG

**WPROWADZENIE
DO ROBOTYKI**

*Mechanika
i sterowanie*

Tłumaczył z języka angielskiego

Józef Knapczyk

Wydanie drugie uzupełnione



Wydawnictwa Naukowo-Techniczne • Warszawa

Dane o oryginalu:

John J. Craig

Silma, Inc.

INTRODUCTION TO ROBOTICS: MECHANICS AND CONTROL SECOND EDITION

Copyright © 1989, 1986 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Tłumaczenie, wydanie i rozpowszechnianie za zgodą
Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
Reading, Massachusetts, U.S.A.

Obecne wydanie zostało uzupełnione przez Autora w 1995 r.

Opiniadawca: *prof. zw. dr inż. Adam Marecki*

Redaktorzy naukowi: *mgr inż. Sławomir Dzierżek*
dr inż. Tadeusz Olszowski

Redaktor WNT: *mgr inż. Halina Wierzbicka*

Okładkę i strony tytułowe projektował: *Piotr Kwiecki*

Skład komputerowy: *mgr inż. Marek Kowalski*

007.5

Książka wprowadza Czytelnika w tajniki nauki i praktyki procesów manipulacji i zawiera pełny przegląd pojęć dotyczących mechaniki i sterowania manipulatorów. Opisano w niej sterowanie, projektowanie i wytwarzanie wspomagane komputerem, włączając projektowanie mechanizmów manipulatora, liniowe i nieliniowe układy sterowania oraz układy programowania autonomicznego. Obecne wydanie zostało uzupełnione odpowiedziami do ćwiczeń zamieszczonych w poszczególnych rozdziałach, zebranymi na końcu książki w formie dodatku.

Książka jest przeznaczona dla inżynierów projektantów układów zrobotyzowanych, a także dla osób zajmujących się mechaniką, sterowaniem i programowaniem układów zrobotyzowanych.

© Copyright for the Polish edition by
Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993, 1995

Utwór, ani żadna część tego utworu nie może być powielana ani
rozpowszechniana za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych,
kopiących, nagrywających i innych bez pisemnej zgody
posiadacza praw autorskich.

All rights reserved
Printed in Poland

ISBN 83-204-1835-6

SPIS TREŚCI

O autorze	9
Przedmowa	11
Przedmowa do polskiego wydania	15
1.WPROWADZENIE	17
1.1. Rys historyczny	17
1.2. Mechanika i sterowanie manipulatorów	20
1.3. Oznaczenia	31
Bibliografia	33
Zadania	34
Zadanie z zakresu programowania (część 1)	34
2. OPisy PRZESTRZENNE I PRZEKSZTAŁCENIA	35
2.1. Wprowadzenie	35
2.2. Opisy: pozycji, orientacji i lokalnych układów współrzędnych	36
2.3. Odwzorowania: przekształcenia opisów przy przejściu z jednego układu do drugiego	41
2.4. Operatory: przesunięcia, obroty, przekształcenia	48

2.5. Podsumowanie interpretacji	53
2.6. Arytmetyka przekształcenia	53
2.7. Równania przekształceń	56
2.8. Jeszcze o opisie orientacji	59
2.9. Przekształcenie swobodnych wektorów	73
2.10. Zagadnienia obliczeniowe	75
Bibliografia	76
Ćwiczenia	76
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 2)	82
 3. KINEMATYKA MANIPULATORA	84
3.1. Wprowadzenie	84
3.2. Opis członu	85
3.3. Opis połączeń członu	88
3.4. Zasada przywiązywania układów współrzędnych do członów	91
3.5. Kinematyka manipulatora	99
3.6. Przestrzenie napędów, przegubów i kartezjańska	101
3.7. Przykłady: Kinematyka dwóch robotów przemysłowych	102
3.8. Układy odniesienia o standardowych nazwach	115
3.9. GDZIE jest narzędzie?	117
3.10. Rozważania obliczeniowe	118
Bibliografia	119
Ćwiczenia	119
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 3)	127
 4. ZADANIE ODWROTNE KINEMATYKI MANIPULATORA	129
4.1. Wprowadzenie	129
4.2. Rozwiążalność	130
4.3. Zapis podprzestrzeni manipulatora, gdy $n < 6$	136
4.4. Algebraiczne czy geometryczne	139
4.5. Rozwiązywanie algebraiczne przez redukcję do wielomianu	144
4.6. Rozwiązywanie Piepera dla manipulatora o parach obrotowych, z których trzy kolejne mają osie przecinające się w jednym punkcie	145
4.7. Przykłady zadań odwrotnych kinematyki manipulatora	148
4.8. Układy standardowe	157
4.9. Realizacja rozwiązania zadania dla manipulatora	158
4.10. Powtarzalność i dokładność	159
4.11. Zagadnienia obliczeniowe	160

Bibliografia	160
Ćwiczenia	161
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 4)	166
5.JAKOBIANY: PRĘDKOŚCI I SIŁY STATYCZNE	168
5.1. Wprowadzenie	168
5.2. Oznaczenie zmiennych w czasie pozycji i orientacji	169
5.3. Prędkość liniowa i kątowa ciała sztywnego	172
5.4. Więcej o prędkości kątowej	174
5.5. Ruchy członów robota	179
5.6. "Przenoszenie" prędkości od członu do członu	180
5.7. Jakobiany	185
5.8. Osobliwości	187
5.9. Siły statyczne w manipulatorach	190
5.10. Jakobiany w dziedzinie siły	194
5.11. Przekształcenie kartezjańskie prędkości i sił statycznych	195
Bibliografia	198
Ćwiczenia	198
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 5)	201
6.DYNAMIKA MANIPULATORA	203
6.1. Wprowadzenie	203
6.2. Przyśpieszenie ciała sztywnego	204
6.3. Rozkład masy	206
6.4. Równania Newtona, równania Eulera	210
6.5. Iteracyjne sformułowania dynamiki Newtona-Eulera	211
6.6. Procedura iteracyjna a rozwiązanie w postaci jawnej	216
6.7. Przykład równań dynamiki podanych w jawnej postaci	216
6.8. Struktura równań dynamiki manipulatora	220
6.9. Formalizm Lagrange'a w zagadnieniach dynamiki manipulatora	222
6.10. Sformułowanie dynamiki manipulatora we współrzędn. kartezjańskich	226
6.11. Uzgławdnenie wpływu innych czynników fizycznych	229
6.12. Symulacja dynamiki	231
6.13.Rozważania obliczeniowe	231
Bibliografia	234
Ćwiczenia	237
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 6)	241

7.GENEROWANIE TRAJEKTORII	243
7.1. Wprowadzenie	243
7.2. Ogólne rozważania dotyczące opisu i generowania trajektorii	244
7.3. Schematy planowania trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych	245
7.4. Schematy generowania trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej	261
7.5. Problemy geometryczne związane z torami kartezjańskimi	265
7.6. Generowanie trajektorii w czasie rzeczywistym	268
7.7. Opis trajektorii w języku programowania robota	271
7.8. Planowanie trajektorii przy wykorzystaniu modelu dynamicznego	271
7.9. Planowanie trajektorii bezkolizyjnej	272
Bibliografia	273
Ćwiczenia	274
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 7)	276
8.PROJEKTOWAŃIE MECHANIZMÓW MANIPULATORA	278
8.1. Wprowadzenie	278
8.2. Oparcie projektu na wymaganiach stawianych przez zadanie	279
8.3. Konfiguracja kinematyczna	283
8.4. Ilościowe miary własności manipulatorów	288
8.5. Struktury łańcuchów redundantnych i zamkniętych	292
8.6. Schematy napędów	295
8.7. Sztywność i odkształcenia	299
8.8. Czujniki położenia	304
8.9. Czujniki siły	305
Bibliografia	308
Ćwiczenia	309
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 8)	314
9.LINIOWE UKŁADY STEROWANIA MANIPULATORÓW	315
9.1. Wprowadzenie	315
9.2. Sprzężenie zwrotne i zamknięty układ sterowania	316
9.3. Układy liniowe drugiego rzędu	318
9.4. Sterowanie układami drugiego rzędu	326
9.5. Rozdzielenie prawa sterowania	328
9.6. Sterowanie nadążne	330
9.7. Eliminowanie zakłóceń	331

9.8. Sterowanie ciągłe w czasie albo dyskretne	333	
9. 9. Modelowanie i sterowanie jednego stopnia swobody	334	
9.10. Architektura sterowników robota przemysłowego	341	
Bibliografia	343	
Ćwiczenia	344	
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 9)	346	
 10. NIELINIOWE UKŁADY STEROWANIA MANIPULATORÓW	 347	
10. 1. Wprowadzenie	347	
10.2.Układy nieliniowe i zmienne w czasie	348	
10. 3. Wielowejściowe i wielowyjściowe układy sterowania	353	
10.4.Zadanie sterowania manipulatorów	353	
10.5. Rozważania praktyczne	355	
10. 6. Układy sterowania współczesnych robotów przemysłowych	360	
10.7.Analiza stabilności Lapunowa	363	
10.8.Sterowanie w przestrzeni kartezjańskiej	368	
10.9. Sterowanie adaptacyjne	374	
Bibliografia	375	
Ćwiczenia	376	
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 10)	379	
 11. STEROWANIE MANIPULATORÓW Z REGULOWANĄ WARTOŚCIĄ SIŁY	 381	
11.1.Wprowadzenie	381	
11.2.Zastosowanie robotów przemysłowych do zadań montażowych	382	
11.3.Układ sterowania dla zadań częściowo ograniczonych	383	
11.4. Zadanie połączonego sterowania pozycja/siłą	389	
11. 5. Sterowania siłą w układzie masa-sprężyna	390	
11.6. Schemat sterowania hybrydowego pozycja-siła	394	
11. 7. Układy sterowania współczesnych robotów przemysłowych	399	
Bibliografia	402	
Ćwiczenia	403	
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 11)	405	
 12. JĘZYKI I UKŁADY PROGRAMOWANIA ROBOTÓW	 406	
12.1.	Wprowadzenie	406
12. 2. Trzy poziomy programowania robota	407	
12.3. Przykładowe zastosowania	410	

12.4.Wymagania stawiane językowi programowania robota	412
12.5.Przykładowe zastosowanie zapisane w trzech językach programowania robota	416
12.6.Specyficzne problemy związane z językami programowania robota	422
Bibliografia	426
Ćwiczenia	427
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 12)	428
 13.UKŁADY PROGRAMOWANIA AUTONOMICZNEGO	 430
13.1.Wprowadzenie	430
13.2.Główne kwestie układów programowania autonomicznego	433
13.3.Stanowisko symulacji komputerowej (CimStation)	439
13.4.Automatyzacja podzadań w układach autonomicznego programowania	452
13.5.Podsumowanie	454
Bibliografia	454
Ćwiczenia	456
Ćwiczenie z zakresu programowania (część 13)	456
 DODATEK A: TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE	 457
DODATEK B: 24 KONWENCJE ZBIORU KĄTÓW	459
DODATEK C: WZORY DLA ZADANIA ODWROTNEGO KINEMATYKI	463
DODATEK D: ODPowiedzi do Ćwiczeń	465
SKOROWIDZ	489

O AUTORZE

John J. Craig uzyskał stopień doktora na Wydziale Elektrotechniki Uniwersytetu w Stanford. Studia pierwszego i drugiego stopnia ukończył w Polytechnice im. Rensselaer'a w Troy, stan Nowy Jork.

Uczestniczył w charakterze konsultanta w pracach kilku zespołów badawczo-rozwojowych, opracowujących systemy zrobotyzowane w przemyśle, a obecnie jest wiceprezesem ds. badań i rozwoju firmy SILMA, Inc., Cupertino, w Kalifornii, USA.

Przedmiotem jego zainteresowań naukowych jest wiele działów robotyki, w tym kinematyka i dynamika manipulatorów, sterowanie siłączną, sterowanie adaptacyjne robotów, języki i układy programowania autonomicznego oraz badania symulacyjne robotów przemysłowych.

Drugie wydanie tej wysoko cenionej książki wprowadza czytelnika w świat nauki i techniki robotów i manipulatorów, obejmując pełny przegląd podstawowych pojęć z zakresu ich mechaniki i sterowania. Pierwsze wydanie tej książki (z 1986 roku) w 1987 roku zostało wyróżnione Nagrodą im. M. Eugene Merchant'a, przyznaną przez Stowarzyszenie Inżynierów Technologów, jako najlepszy podręcznik akademicki w dziedzinie techniki wytwarzania i było wprowadzone w ponad 70 uczelniach na całym świecie.

W niniejszym wydaniu zamieszczono nowy materiał z zakresu sterowania, wspomaganego komputerem projektowania i wytwarzania, włączając rozdziały dotyczące projektowania mechanizmu manipulatora, liniowych i nielinowych układów sterowania manipulatorów oraz układów autonomicznego programowania. Każdy rozdział zawiera omówienie podstawowych zagadnień oraz specjalnie opracowane przykłady wyjaśniające ich zastosowanie. Liczne zadania i ćwiczenia dotyczące programowania podano na końcu każdego z rozdziałów. Do niniejszego wydania książki wprowadzono także nowe zadania, pozycje bibliograficzne i załączniki.

Książka ta jest podstawowym podręcznikiem dla inżynierów rozwijających systemy zrobotyzowane, jak również dla wszystkich tych, którzy zajmują się mechaniką, sterowaniem lub programowaniem systemów zrobotyzowanych.

PRZEDMOWA

Uczniowie odnoszą często wrażenie, że dzięki swojej pracy poznają pewne zagadnienia dotyczące ich samych. Związek taki obserwują w swojej pracy fizycy, jak również psychologowie i chemicy. W robotyce związek między dziedziną badań a badaczami jako takimi jest bardzo wyraźny. W przeciwnieństwie do nauki, zajmującej się tylko analizą, robotyka stała się jedną z dyscyplin technicznych, która skłania się obecnie ku syntezie. Jest to prawdopodobnie jedną z przyczyn, z powodu których robotyka fascynuje tak wielu z nas.

Robotyka zajmuje się syntezą pewnych funkcji człowieka poprzez wykorzystanie mechanizmów, czujników, zespołów wykonawczych i komputerów. Jest to ogromne przedsięwzięcie, wymagające znajomości wielu "klasycznych" dyscyplin naukowych.

Obecnie prace badawcze dotyczące wybranych zagadnień robotyki są prowadzone przez ekspertów z różnych dziedzin. Z reguły nie spotyka się pojedynczych ludzi, którzy opanowali całą wiedzę z zakresu robotyki. Stąd podział tej dyscypliny wydaje się naturalną koleją rzeczy. Zakładając względnie wysoki poziom abstrakcji, robotykę można podzielić na cztery dziedziny: manipulację mechaniczną, lokomocję, komputerowe systemy wizyjne i sztuczną inteligencję.

Niniejsza książka stanowi wprowadzenie do nauki i techniki manipulacji mechanicznej. Ten dział robotyki wywodzi się z wielu nauk klasycznych. Do

najważniejszych z nich zalicza się: mechanikę, teorię sterowania i informatykę. W rozdziałach od 1 do 8 omówiono zagadnienia z zakresu mechaniki technicznej i matematyki, w rozdziałach od 9 do 11 - z teorii sterowania, natomiast materiał wyłożony w rozdziałach 12 i 13 można zaliczyć do informatyki. Ponadto w całej książce położono szczególny nacisk na stronę obliczeniową omawianych zagadnień. Np. w każdym rozdziale, w którym dominują zagadnienia z zakresu mechaniki, umieszczono krótki podrozdział poświęcony sprawom obliczeniowym.

Podstawę do napisania niniejszej książki stanowiły notatki do wykładów z przedmiotu "Wprowadzenie do robotyki", prowadzonych na Uniwersytecie Stanforda w latach 1983-1985 oraz pierwsze wydanie książki stosowanej w Stanford i wielu innych uczelniach w latach 1986-1988. Stosowanie podręcznika wpłynęło korzystnie na kształt niniejszego wydania. Wprowadzono do niego poprawki i udoskonalenia zebrane z różnych źródeł. Na Uniwersytecie Stanforda kurs wprowadzenia do robotyki jest pierwszym z cyklu prowadzonego w trzech trymestrach. W drugim trymestrze prowadzony jest wykład z komputerowych systemów wizyjnych, a w trzecim - sztucznej inteligencji, lokomocji oraz innych bardziej złożonych zagadnień.

Niniejsza książka jest przeznaczona dla studentów ostatniego roku studiów pierwszego stopnia (undergraduate) lub pierwszego roku studiów drugiego stopnia (graduate). Wskazane jest, aby studenci mieli zaliczony podstawowy kurs statyki i dynamiki, kurs algebry liniowej oraz umieli sami programować w języku wyższego poziomu. Zaleca się, lecz nie jest to absolutnie konieczne, aby studenci mieli ukończony wykład teorii sterowania. Materiał książki został ujęty w sposób przejrzysty i intuicyjny. Osoby sięgające po tę książkę nie muszą być inżynierami mechanikami, mimo że większość materiału dotyczy tego kierunku studiów. Wielu inżynierów elektryków, informatyków i matematyków z Uniwersytetu Stanforda uznało, że pierwsze wydanie tej książki czyta się dobrze.

Pomimo że książka ta jest przeznaczona głównie dla inżynierów opracowujących systemy zrobotyzowane, materiał w niej zawarty należy uważać za podstawowy dla każdego, kto pragnie zajmować się robotyką. Podobnie jak osoby pracujące nad oprogramowaniem zaczynają studiować podstawy wiedzy o sprzęcie, tak ludzie nie będący specjalistami w dziedzinie mechaniki i sterowania robotów powinni posiąć pewne podstawy tych dyscyplin, np. w zakresie objętym podręcznikiem.

Drugie wydanie zawiera 13 rozdziałów. Podział materiału jest dostosowany do semestralnego cyklu wykładów. W przypadku konieczności przekazywania materiału w czasie trymestru, wykładowca będzie prawdopodobnie zmuszony zrezygnować z wyłożenia dwóch rozdziałów. Mimo podjęcia takiej decyzji nie

wszystkie zagadnienia będzie można przedstawić z wystarczającym stopniem szczegółowości. Układ książki uwzględnia również w pewien sposób tę możliwość; np. w większości rozdziałów przedstawiono wprost tylko jedno podejście do rozwiązywania problemów. Jednym z powodów, które skłoniły autora do napisania tej książki, była potrzeba przedstawienia problemów w sposób uwzględniający ograniczenia czasowe spotykane zwykle w procesie nauczania. Jedyną metodą osiągnięcia tego celu było skoncentrowanie się tylko na materiale dotyczącym bezpośrednio przedmiotu manipulacji mechanicznej. Na końcu pierwszego rozdziału podano wiele pozycji bibliograficznych, łącznie z listą czasopism naukowych publikujących artykuły z dziedziny robotyki.

Na końcu każdego rozdziału umieszczono zestaw zadań. Przy każdym zadaniu, bezpośrednio po kolejnym numerze zadania, podano w nawiasie kwadratowym stopień jego trudności. Stopień trudności zawiera się w zakresie od [00] do [50], przy czym [00] oznacza zadanie trywialne, a [50] oznacza problem dotychczas nie rozwiązany⁽¹⁾. Oczywiście, to co dla jednego jest trudne, dla drugiego może być łatwe. Stąd niektórzy czytelnicy w pewnych przypadkach mogą uważać przyjętą skalę za mylącą. Pomimo to podjęto wysiłek oceny trudności zadań.

Oprócz tego na końcu każdego rozdziału zamieszczono zalecane do wykonania ćwiczenie z zakresu programowania. Celem tego ćwiczenia jest danie studentowi możliwości sprawdzenia umiejętności zastosowania wiedzy zawartej w rozdziale na przykładzie prostego 3-członowego manipulatora płaskiego. Ten prosty manipulator jest na tyle złożony, że umożliwia zademonstrowanie prawie wszystkich zasad odnoszących się do dowolnych manipulatorów, a jednocześnie na tyle prosty, że student nie jest obciążony problemem zbyt dużej złożoności zadania. Każde następne zadanie dotyczące programowania jest oparte na poprzednim, dzięki czemu w momencie zakończenia kursu student dysponuje całą biblioteką oprogramowania manipulatora.

Rozdział 1 wprowadza w dziedzinę robotyki. Przedstawiono w nim rys historyczny, oznaczenia przyjęte w książce, kilka podstawowych pojęć oraz przegląd treści następnych rozdziałów.

W rozdziale 2 opisano aparat matematyczny stosowany do zapisu pozycji i orientacji w przestrzeni 3-wymiarowej. Jest to szczególnie ważny materiał, ponieważ jak wynika z definicji manipulacja mechaniczna zajmuje się problemami ruchu obiektów (przedmiotów, narzędzi, samego robota) w przestrzeni. Potrzebne są nam zatem zrozumiałe i intuicyjne metody opisu tych ruchów.

W rozdziałach 3 i 4 omówiono zagadnienia geometrii ruchu manipulatorów

1) Przyjąłem tę samą skalę jaką zastosowano w książce pt."Sztuka programowania komputera" D. Knuth'a (Addison-Wesley).

mechanicznych. Wprowadzają one czytelnika w działy mechaniki zwany kinematyką lub analizą kinematyczną, bez uwzględniania wpływu sił wywołujących ruch. W rozdziałach tych zajmujemy się kinematyką manipulatorów, lecz ograniczamy się tylko do zadań pozycjonowania statycznego.

Rozdział 5 rozszerza nasze rozważania kinematyczne i obejmuje zagadnienia rozkładu prędkości i sił statycznych.

W rozdziale 6 zajmujemy się po raz pierwszy siłami i momentami sił potrzebnymi do wywołania ruchu manipulatora. Jest to zadanie dynamiki manipulatora.

Rozdział 7 dotyczy zapisywania ruchów manipulatora w postaci trajektorii przemieszczeń w przestrzeni.

W rozdziale 8 zebrano wiele informacji dotyczących konstruowania manipulatora. Można znaleźć w nim odpowiedź np. na takie pytanie: Ile powinno być przegubów, jakiego typu powinny być te przeguby i jakie powinno być ich rozmieszczenie?

W rozdziałach 9 i 10 podane są metody sterowania manipulatorem (zwykle z wykorzystaniem komputera), dzięki którym może on przemieszczać się zgodnie z zadaną w przestrzeni trajektorią ruchów. Rozdział 9 dotyczy metod sterowania liniowego, a rozdział 10 rozszerza te rozważania o metody sterowania nieliniowego.

W rozdziale 11 omówiono stosunkowo nowe zagadnienie sterowania siłą czynną rozwijaną przez manipulator. Rozpatrzone problemy sterowania siłami wywieranymi przez manipulator. Ten rodzaj sterowania jest ważny w przypadkach kontaktu manipulatora z otoczeniem, jak np. podczas mycia okna za pomocą gąbki.

W rozdziale 12 dokonano przeglądu metod programowania robotów, a w szczególności elementów składowych systemu programowania robota oraz specyficznych problemów programowania robotów przemysłowych.

Rozdział 13 stanowi wprowadzenie do systemów symulacji niezależnej ("off-line") i programowania. Systemy te pojawiły się niedawno i stanowią ostatnie osiągnięcie w dziedzinie komunikacji człowiek-robot.

Chciałbym podziękować wielu ludziom, którzy poświęcili swój czas, pomagając mi w przygotowaniu tej książki. Najpierw chciałbym podziękować studentom kierunku mechanika (ME 219) z Uniwersytetu Stanforda, którzy podczas jesieni w latach 1983-1985, cierpliwie studując pierwsze szkice, znaleźli w nich wiele błędów i podsunęli mi wiele sugestii. Wkład Prof. Bernarda Roth'a polegał zarówno na konstruktywnej krytyce rękopisu, jak i na zapewnieniu warunków przygotowania pierwszego wydania książki. W SILMA Inc. cieszyłem się poparciem stymulującego otoczenia, jak również miałem dostęp do zasobów firmy, co pomogło mi przygotować drugie wydanie. Dr. Jeff Kerr na-

pisał pierwszy szkic rozdziału 8. Opinia tak doświadczonego konstruktora systemów zrobotyzowanych podniosła prestiż tego wydania. Bardzo dziękuję moim nauczycielom robotyki: Marcowi Raibertowi, Carlowi Ruoffowi i Tomowi Binfordowi.

Pomogło mi również wiele innych osób związanych z Uniwersytetem Stanforda, SILMA oraz z innymi instytucjami. Składam moje podziękowania: Johnowi Markowi Agoscie, Mike'owi Aliemu, Lynn Balling, Alowi Barrowi, Stephenowi Boydowi, Chuckowi Buckleyowi, Joelowi Burdickowi, Jimowi Callanowi, Monique Craig, Subas Desa, Tri Dai Do, Karłowi Garcii, Ashitava Ghosal, Chrisowi Goadowi, Ronowi Goldmanowi, Billowi Hamiltonowi, Steve Hollandowi, Peterowi Jacksonowi, Ericowi Jacobsowi, Johannowi Jagerowi, Paulowi Jamesowi, Jeffowi Kerrowi, Oussamie Khatibowi, Jimowi Kramerowi, Dave'owi Lowe'owi, Jimowi Maplesowi, Dave'owi Marimontowi, Dave'owi Meerowowi, Kentowi Ohlundowi, Madhusudanowi Raghavanowi, Richardowi Royowi, Kenowi Salisbury'emu, Donaldowi Speightowi, Bobowi Tilove, Sandy"emu Wellsowi, i Dave'owi Williamsowi. Moim marzeniem było dysponowanie czasem, który pozwoliłby mi na szersze wykorzystanie ich sugestii.

W końcu chciałbym podziękować Tomowi Robbinsowi i Donowi Fowleyowi z Wydawnictwa Addison-Wesley oraz kilku anonimowym recenzentom.

Palo Alto, California

J.J.C.

PRZEDMOWA DO POLSKIEGO WYDANIA

Było mi bardzo przyjemnie, kiedy dowiedziałem się, że mój podręcznik będzie przetłumaczony na język polski. Uzasadnieniem polskiego tłumaczenia jest fakt, że polscy robotycy od dłuższego już czasu wykazują zainteresowanie problematyką badawczą i przemysłową. W Polsce zaprojektowano konstrukcje własnych manipulatorów, rozwijano manipulatory licencyjne oraz co drugi rok Polska jest gospodarzem znanych dobrze sympozjów RO.MAN.SY. Ta działalność świadczy o dużym zainteresowaniu w Polsce problematyką robotyki. Mam nadzieję, że czytelnicy polscy przychylnie ocenią mój wysiłek włożony w napisanie tej książki. Wyrażam podziękowanie prof. Józefowi Knapczykowi za trud przetłumaczenia tej książki oraz pomocne komentarze.

John J. Craig

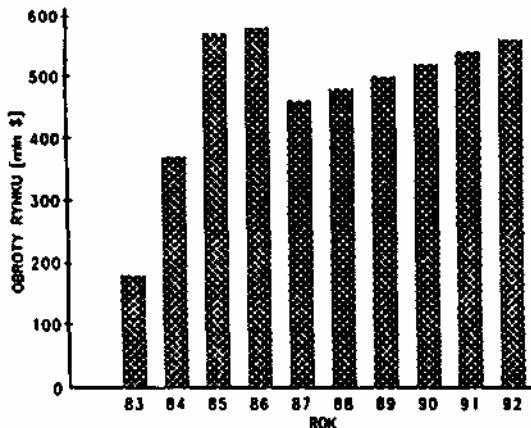
Luty, 1992,
Kalifornia, USA

WPROWADZENIE

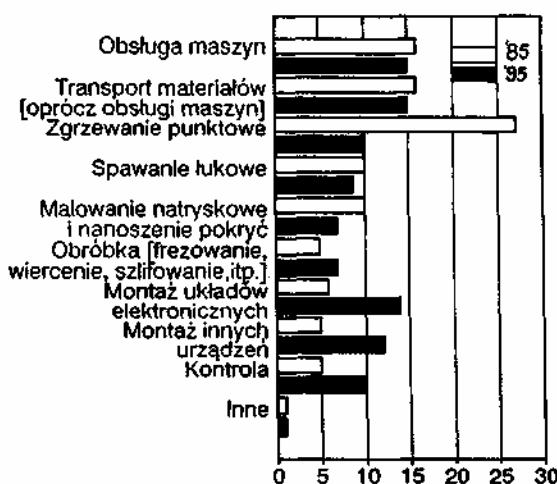
1.1. RYS HISTORYCZNY

Historia automatyzacji przemysłowej charakteryzuje się występowaniem określów gwałtownych zmian dotąd powszechnie stosowanych metod. Czy to jako przyczyna, czy też być może jako skutek, występowanie takich okresów zmian technik automatyzacji wydaje się być ściśle związanego ze zmianami w gospodarce światowej. Stosowanie robotów przemysłowych, uznanych w latach sześćdziesiątych za odrębne urządzenia, obok systemów komputerowo wspomaganeego projektowania (CAD) i wytwarzania (CAM) charakteryzuje obecne tendencje w automatyzacji procesu wytwarzania [1]. Techniki te będą dominującymi w automatyzacji przemysłowej do momentu pojawiennia się kolejnej zmiany, której zasięg jest wciąż jeszcze nieznany.

Mimo że obroty rynku robotów powoli znowu osiągnęły poziom porównywalny z wcześniejszymi latami osiemdziesiątymi (rys. 1.1), to zgodnie z niektórymi prognozami zastosowania robotów przemysłowych nie wyszły jeszcze z wieku niemowlęcego. Czy prognozy te spełniają się, czy też nie, to na pewno będą istnieć roboty przemysłowe w tej lub innej postaci.



Rys.1.1. Obroty rynku robotów Ameryki Północnej w milionach dolarów.
Źródło: DataQuest, Inc.

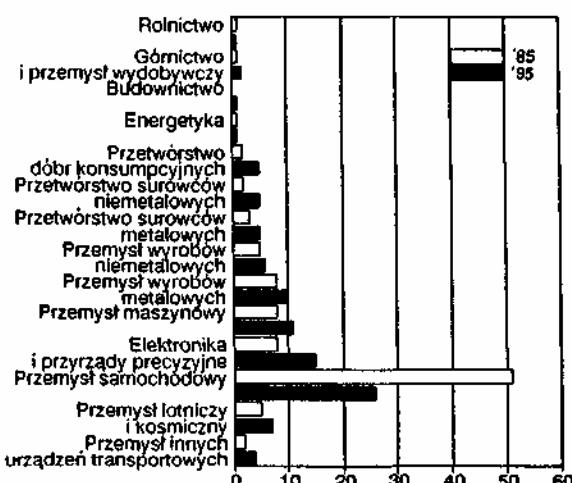


Rys.1.2. Rozkład procentowy sprzedaży robotów w USA według zastosowań [3]

W obecnych zastosowaniach robotów przemysłowych z reguły dominują zadania proste i powtarzalne, nie wymagające wysokich dokładności. Z rys. 1.2 wynika, że w latach osiemdziesiątych ekonomiczne obszary zastosowań robotyzacji wyznaczały stosunkowo proste zadania, jak np. obsługa maszyn, transport materiałów, malowanie i spawanie. Analitycy rynku środków produkcji przewidują, że w latach dziewięćdziesiątych będzie zwiększał się obszar zastosowań robotów przemysłowych o zadania wymagające większej dokładności i rozbudowania funkcji sensorycznych, np. zadania montażowe.

Ponadto, z rys. 1.3 można zorientować się, jak przewidywany wzrost możliwości robotów przemysłowych wpłynie na zmianę rozkładu ich zastosowań w poszczególnych gałęziach przemysłu. Głównym użytkownikiem robotów przemysłowych będzie nadal przemysł samochodowy, w którym zastosowanie robotów było ekonomicznie uzasadnione już od początku lat siedemdziesiątych, mimo że zasadniczy wzrost liczby robotów w USA wystąpi w przemysłach niesamochodowych.

W niniejszej książce skupiono uwagę na mechanice i sterowaniu najważniejszej odmiany robota przemysłowego – manipulatora mechanicznego. Od czasu do czasu mówi się o tym, czym jest robot przemysłowy. Zawsze omawia się przy tym takie urządzenia, jak pokazano na rys. 1.4. Natomiast z reguły nie omawia się np. frezarki sterowanej numerycznie. Różnica wynika z sofistyki pojęcia programowalności urządzenia. Jeśli urządzenie mechaniczne można przystosować do realizacji wielu różnorodnych zadań poprzez zmianę programu, to prawdopodobnie jest to robot przemysłowy. Maszyny skierowane na



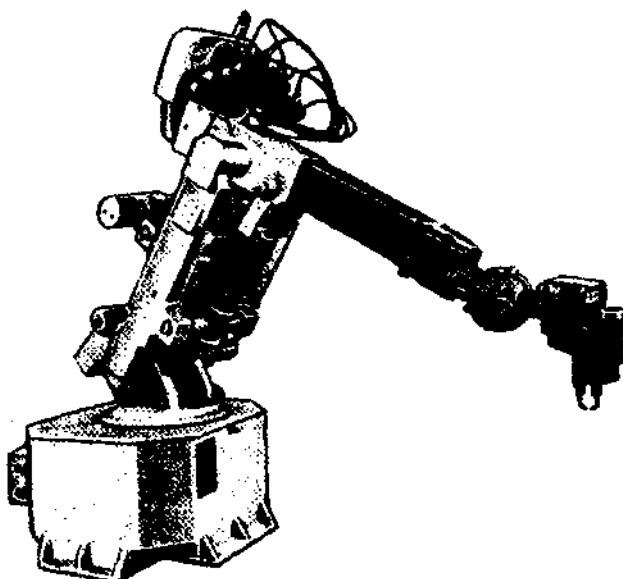
Rys.1.3. Rozkład procentowy sprzedaży robotów w USA w różnych gałęziach gospodarki

długi okres czasu do wykonywania zadań jednego rodzaju są zaliczane do środków sztywnej automatyzacji. W niniejszym podręczniku różnice te nie muszą być rozstrzygane, ponieważ większość materiału, ze względu na jego podstawowy charakter, dotyczy szerokiej gamy maszyn programowalnych.

Ogólnie biorąc mechanika i sterowanie manipulatorów nie stanowią nowej dziedziny nauki, lecz zaledwie zbiór zagadnień wybranych z klasycznych dyscyplin naukowych. Mechanika określa metodologię badania maszyn w warunkach statycznych i dynamicznych. Matematyka dostarcza narzędzi do opisu przestrzennego ruchu oraz innych właściwości manipulatorów. Narzędzia teorii sterowania umożliwiają opracowanie i ocenę algorytmów realizacji pożądanych ruchów lub przebiegów siłowych. Metody elektrotechniki wykorzystywane są do projektowania czujników oraz interfejsów (sprzęgów) robotów przemysłowych, a informatyka stanowi podstawę do programowania tych urządzeń celem realizacji określonego zadania.

1.2. MECHANIKA I STEROWANIE MANIPULATORÓW

W kolejnych podrozdziałach oprócz terminologii omówiono pokrótkę każde z zagadnień poruszonych w książce.



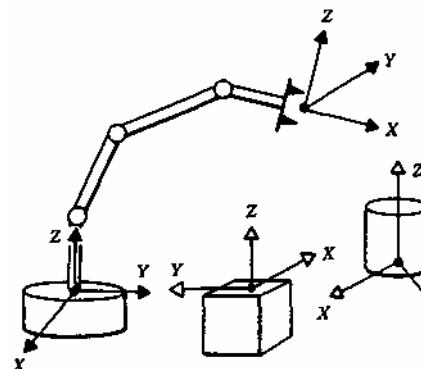
Rys. 1.4. Manipulator Cincinnati Milacron 776 z sześcioma połączeniami obrotowymi, powszechnie stosowany do zgrzewania punktowego. Za zgodą Cincinnati Milacron

Opis pozycji i orientacji

Studiując robotykę jesteśmy ciągle zainteresowani usytuowaniem obiektów w przestrzeni trójwymiarowej. Obiekty tymi są człony manipulatora, przedmioty i narzędzia, którymi robot operuje oraz inne obiekty znajdujące się w jego otoczeniu. Na podstawowym, lecz ważnym poziomie obiekty te są opisane poprzez ich dwa atrybuty: pozycję i orientację. Naturalnie ważną kwestią będzie zatem sposób, w jaki będziemy zapisywać te wielkości i wykonywać na nich operacje matematyczne.

W celu opisania pozycji i orientacji ciała w przestrzeni z obiektem będziemy przywiązywać zwykle sztywno układ współrzędnych lub też lokalny układ odniesienia. Następnie przystępujemy do opisu pozycji i orientacji tego lokalnego układu odniesienia względem pewnego innego układu współrzędnych odniesienia (patrz rys. 1.5).

Ponieważ każdy lokalny układ odniesienia może spełniać rolę układu odniesienia, względem którego określa się pozycję i orientację ciała, często wymagane jest przekształcenie lub zmiana zapisu tych atrybutów ciała odpowiednio do przechodzenia z jednego układu odniesienia do drugiego. W rozdziale 2 omawia się zasady i metodologię przekształceń zapisu pozycji i orientacji oraz aparat matematyczny przekształcania tych wielkości względem różnych układów współrzędnych.



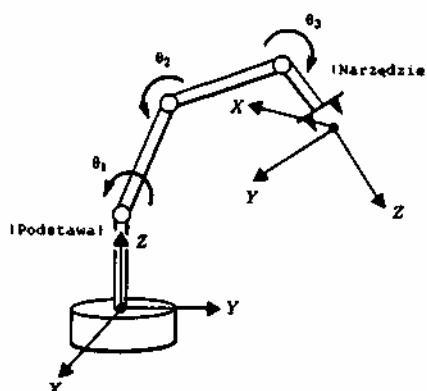
Rys. 1.5. Układy współrzędnych lub lokalne układy odniesienia związane z manipulatorem i obiektami otoczenia

Proste zadanie kinematyki manipulatorów

Kinematyka jest nauką zajmującą się badaniem ruchu, bez uwzględniania sił wywołujących ten ruch. W ramach kinematyki badamy zmiany położenia, prędkości, przyśpieszenia oraz wszystkich wyższych pochodnych zmiennych położenia (względem czasu albo innej zmiennej lub zmiennych). Stąd przedmiotem kinematyki manipulatorów są wszystkie geometryczne i czasowe właściwości ruchu.

Manipulatory składają się z członów prawie sztywnych, połączonych w sposób umożliwiający ruch wzajemny sąsiednich członów. W połączeniach ruchowych umieszcza się zwykle czujniki (sensory) położenia, umożliwiające pomiar względnych położen sąsiednich członów. W przypadku par obrotowych te przemieszczenia wzajemne są nazywane kątami konfiguracyjnymi. W niektórych manipulatorach występują pary przesuwne (pryzmatyczne). Wzajemne przemieszczenie między członami w takiej parze jest przesunięciem, czasem zwany odunięciem wzdłuż osi pary.

Liczba stopni swobody manipulatora nazywa się liczbą niezależnych zmiennych położenia, które należy podać w celu określenia położenia wszystkich części składowych manipulatora. Definicja ta dotyczy każdego mechanizmu, np. mechanizm czworoboku przegubowego wykazuje tylko jeden stopień swobody (choć ma trzy ruchome człony). W przypadku typowych robotów przemysłowych, w skład których wchodzi manipulator z otwartym łańcuchem kinematycznym, a położenie każdego połączenia ruchowego określa zazwyczaj jedna zmienna, liczba połączeń ruchowych odpowiada liczbie stopni swobody.



Rys.1.6. Równania kinematyki opisują położenie układu współrzędnych narzędzia względem układu współrzędnych związanego z podstawą w postaci funkcji zmiennych przegubowych

Na swobodnym końcu łańcucha członów, tworzącego manipulator, znajduje się człon roboczy. Odpowiednio do przewidawanego zastosowania robota członem roboczym robota może być chwytak, uchwyt elektrody spawalniczej, elektromagnes lub inne urządzenie. Położenie manipulatora przedstawiamy zwykle w postaci opisu położenia układu współrzędnych narzędzia, związanego z końcówką wykonawczą, względem układu współrzędnych podstawy, związanego z nieruchomą podstawą manipulatora (patrz rys. 1.6).

Podstawowym zadaniem w badaniu manipulacji mechanicznej jest tzw. proste zadanie kinematyki. Jest to zadanie statyczno-geometryczne polegające na obliczeniu pozycji i orientacji członu roboczego manipulatora. W szczególności w przypadku, gdy dany jest zbiór kątów konfiguracyjnych, proste zadanie kinematyki polega na obliczeniu pozycji i orientacji układu narzędzia względem układu podstawy. Zadanie to czasem traktujemy jako zadanie odwzorowania opisu położenia manipulatora w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych na opis w przestrzeni współrzędnych kartezjańskich¹. Zadanie to zostanie omówione w rozdziale 3.

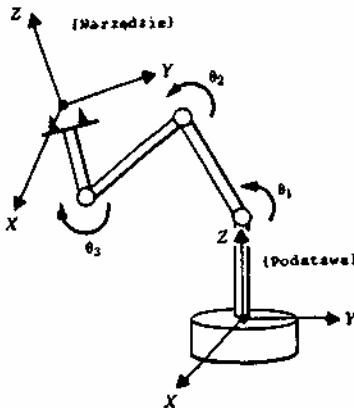
Zadanie odwrotne kinematyki manipulatorów

W rozdziale 4 zajmiemy się zadaniem odwrotnym kinematyki. Zadanie to formuluje się w następujący sposób: Dane są pozycja i orientacja członu roboczego manipulatora, należy obliczyć wszystkie możliwe zbiory współrzędnych konfiguracyjnych, umożliwiające osiągniecie zadanych pozycji i orientacji (patrz rys. 1.7). Jest to podstawowe zadanie praktyki zastosowań manipulatorów.

Zadanie odwrotne kinematyki jest bardziej skomplikowane od zadania prostego kinematyki. Ze względu na to, że równania kinematyki są nieliniowe, ich rozwiązanie nie zawsze jest łatwe, a nawet możliwe do otrzymania w postaci jawniej. Pojawiają się wątpliwości co do istnienia jednego rozwiązania lub rozwiązań wielokrotnych.

Istnienie lub brak rozwiązań równań kinematyki określa przestrzeń roboczą danego manipulatora. Brak rozwiązań oznacza, że manipulator nie może osiągnąć pożądanych pozycji i orientacji, ponieważ znajdują się one poza jego przestrzenią roboczą.

Przez pojęcie przestrzeni współrzędnych kartezjańskich rozumiemy przestrzeń, w której pozycję punktu określa trójką liczb, a orientację ciała trzy inne liczby. Przestrzeń ta nazywana jest czasem przestrzenią, zadaniem lub przestrzenią operacyjną..



Rys. 1.7. Dla danej pozycji i orientacji układu współrzędnych narzędzia wartości zmiennych konfiguracyjnych mogą być obliczone przez rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki

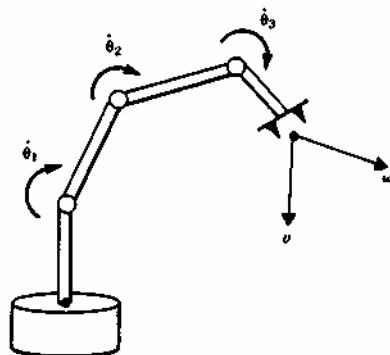
Predkosci, sily statyczne, osobliwosi

Oprócz rozwiązywania zadań pozycjonowania statycznego może zachodzić potrzeba analizy ruchu manipulatorów. Często podczas przeprowadzania analizy prędkości mechanizmu wygodne jest zapisywanie tych wielkości w postaci macierzy zwanej Jakobianem manipulatora. Jakobian opisuje odwzorowanie prędkości określonych w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych na prędkości w przestrzeni współrzędnych kartezjańskich (patrz rys. 1.8). Postać tego odwzorowania zmienia się wraz z konfiguracją manipulatora. W pewnych punktach, zwanych osobliwymi, odwzorowanie to nie jest odwracalne. Zrozumienie tego zjawiska jest ważne dla projektantów i użytkowników manipulatorów.

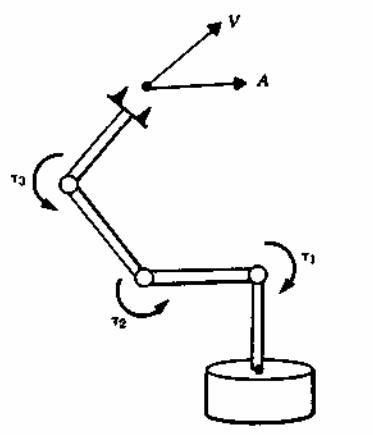
Zadaniem manipulatorów nie zawsze jest tylko ruch w przestrzeni; czasami wymaga się również, aby po zetknięciu z przedmiotem lub powierzchnią obrabianą wywierały nań siłę statyczną. Przypadek ten możemy sformułować w następujący sposób: Określić wartości sił i/lub momentów napędowych, niezbędnych do rozwinięcia zadanej siły i momentu siły w punkcie styku. Podkreślimy to jeszcze raz, że Jakobian manipulatora powstaje w sposób naturalny w trakcie rozwiązywania tego zadania.

Dynamika

Dynamika jest obszerną dziedziną nauki zajmującą się badaniem ruchu ciał pod działaniem sił wywołujących te ruchy. Rozruch manipulatora ze stanu spoczynku, przemieszczanie organu roboczego ze stałą prędkością, a w końcu



Rys. 1.8. Zależności geometryczne między prędkościami ruchu w połączeniach a prędkością organu roboczego można zapisać w postaci macierzy jakobianowej



Rys. 1.9. Zależność między momentami napędowymi a wypadkowym ruchem manipulatora wyraża równanie dynamiki ruchu

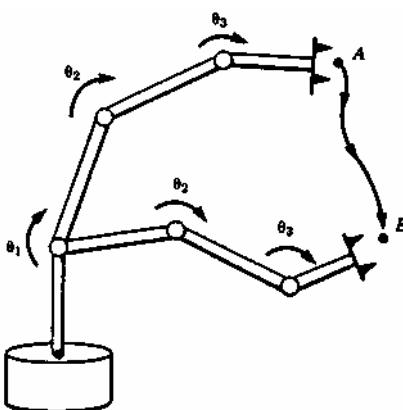
hamowanie aż do zatrzymania wymagają, aby napędy połączeń ruchowych rozwiązały momenty/siły napędowe o współzależnych przebiegach. Dokładna postać żądanego funkcji momentów/sił napędowych zależy od przestrzennych i czasowych parametrów ruchu organu roboczego, jak również rozkładów mas członów, ciężaru użytkownika, tarcia w przegubach itp. Jedna z metod sterowania ruchem manipulatora zgodnie z zadana trajektorią polega na obliczaniu tych funkcji momentów/sił napędowych z równań dynamiki ruchu manipulatora.

Równania dynamiki ruchu znajdują zastosowanie także do modelowania (symulacji) robotów. Po przekształceniu równań dynamiki tak, aby przyśpieszenie było wyrażone w funkcji momentu napędowego, można zamodelować ruch manipulatora wywołany działaniem zbioru momentów/sił napędowych (patrz rys. 1.9.).

W rozdziale 6 wyprowadzamy równania dynamiki ruchu, które można zastosować do sterowania lub modelowania ruchu manipulatorów.

Generowanie trajektorii

Znany sposób sprawiający, że manipulator może poruszać się w sposób płynny i sterowany z jednego do drugiego miejsca polega na tym, aby ruch w każdym połączeniu ruchowym był zadany w postaci gładkiej funkcji czasu. Zwykle wszystkie połączenia rozpoczynają i kończą swój ruch jednocześnie, dzięki czemu wydaje się, że ruchy manipulatora są skoordynowane. Właściwy sposób obliczania tych funkcji ruchu jest przedmiotem zadania generowania trajektorii (rys. 1.10.).



Rys. 1.10. U celu wywołania ruchu organu roboczego w przestrzeni z punktu A do punktu B należy obliczyć odpowiednią trajektorię dla każdego połączenia

²⁾Przez pojęcie napędu połączenia ruchowego rozumiemy urządzenie napędzające, np.: silnik elektryczny, hydrauliczny i pneumatyczny, mięśnie itp.

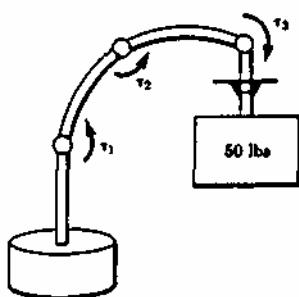
Często w opisie trajektorii oprócz zadanego położenia końcowego podawanych jest kilka położen lub punktów pośrednich, przez które manipulator powinien przejść, zanim osiągnie położenie przeznaczenia. W takich przypadkach używane jest czasem pojęcie funkcji sklejanej "spline" do opisania gładkiej funkcji, przechodzącej przez zbiór punktów pośrednich.

Aby organ roboczy mógł poruszać się po linii prostej (lub linii o innym kształcie geometrycznym) w przestrzeni, należy wyrazić pożądany ruch w postaci równoważnego zbioru ruchów w połączeniach ruchowych. W rozdziale 7 rozpatrzmy również generowanie trajektorii w przestrzeni współrzędnych kartezjańskich.

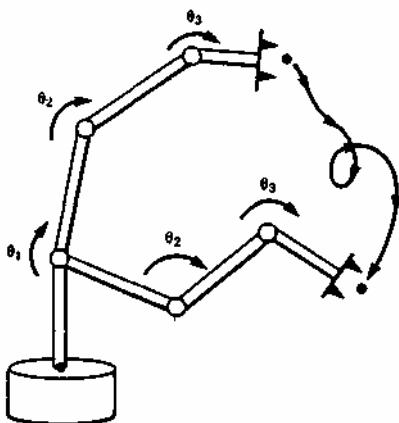
Konstrukcja manipulatora i czujniki

Chociaż z teoretycznego punktu widzenia manipulatory są urządzeniami uniwersalnymi, przeznaczonymi dla wielu zastosowań, to zazwyczaj z przyczyn ekonomicznych konstrukcję części mechanicznej manipulatora dostosowuje się do przewidywanego zakresu zadań. Oprócz podjęcia decyzji co do wymiarów, prędkości i udźwigu konstruktor musi również określić liczbę połączeń ruchowych i ich strukturę geometryczną. Rozważania te mają wpływ na wielkość i jakość przestrzeni roboczej, sztywność konstrukcji manipulatora oraz inne własności.

Integralnie związane z procesem konstruowania manipulatora są zagadnienia doboru i usytuowania silowników, układów przenoszenia napędów oraz wewnętrznych czujników położenia (a czasem siły) (patrz rys. 1.11). Te i inne zagadnienia konstrukcyjne będą omawiane w rozdziale 8.



Rys. 1.11. Proces konstruowania manipulatora mechanicznego powinien obejmować m. in. zagadnienia doboru i usytuowania napędu, układu przeniesienia, sztywności konstrukcji, rozmieszczenia czujników i wiele innych



Rys. 1.12. Uzyskanie ruchu manipulatora zgodnie z zadana trajektorią wymaga stosowania układu sterowania pozycyjnego. Układ ten wykorzystuje sygnały sprzężenia zwrotnego z czujników umieszczonych w parach obrotowych w celu utrzymania manipulatora na zadanym "kursie"

Liniowe sterowanie położeniem

Część manipulatorów jest wyposażona w silniki krokowe lub inne napędy, umożliwiające w sposób bezpośredni wykonywanie ruchów zgodnie z zadana trajektorią. Jednak w większości manipulatorów stosowane są napędy rozwijające siłę lub moment napędowy, powodujące ruch członów. W takim przypadku niezbędny jest algorytm obliczania wartości tych sił lub momentów napędowych, wywołujących pożądany ruch. W projektowaniu takiego algorytmu podstawowe znaczenie mają zagadnienia dynamiki, które jednak same w sobie nie zawierają rozwiązań. Głównym zadaniem układu sterowania pozycyjnego jest automatyczna kompensacja błędów na podstawie znajomości parametrów układu oraz eliminacja zakłóceń, wpływających na odchodzenie układu od zadanej trajektorii. Aby to osiągnąć, algorytm sterowania, obliczający zadane wartości sił/momentów napędowych, kontroluje sygnały czujników położenia i prędkości (patrz rys. 1.12). W rozdziale 9 zapoznamy się z algorytmami sterowania, do syntezy których wykorzystano zlinearyzowane równania dynamiki manipulatora. Metody liniowe są obecnie powszechnie stosowane w praktyce przemysłowej.

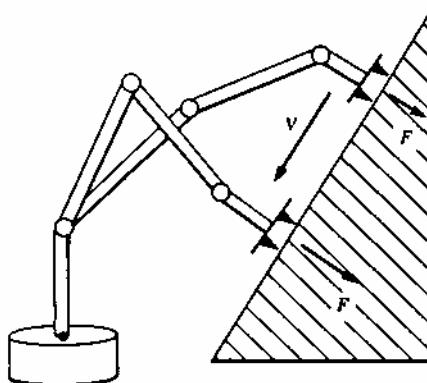
Nieliniowe sterowanie położeniem

Mimo że układy sterowania, oparte na przybliżonych modelach liniowych, są szeroko stosowane we współczesnych robotach przemysłowych, to na etapie syntezy algorytmów sterowania celowym jest całościowe przeanalizowanie rów-

nań dynamiki manipulatora. W pewnej liczbie obecnie wprowadzanych robotów przemysłowych zastosowano sterowanie nieliniowe. Te nieliniowe techniki sterowania manipulatorem zapewniają uzyskiwanie lepszych osiągów w porównaniu z prostymi układami liniowymi. Rozdział 10 wprowadza czytelnika w nieliniowe układy sterowania manipulatorów mechanicznych.

Sterowanie siłą

Zdolność manipulatora do sterowania wartością siły rozwijanej w miejscu styku manipulatora z częściami, narzędziami lub powierzchniami roboczymi wydaje się bardzo ważna w przypadku nieprzemysłowych zastosowań manipulatorów. Układ sterowania siłą stanowi uzupełnienie układu sterowania położeniem w tym sensie, że każdy z nich znajduje zastosowanie w odmiennych sytuacjach. W przypadku ruchu manipulatora w przestrzeni swobodnej pracuje tylko układ sterowania położeniem, ponieważ nie występuje powierzchnia, na której miałby oddziaływać. Natomiast w przypadku, gdy manipulator styka się ze sztywną powierzchnią, to działanie tylko układu sterowania położeniem może spowodować występowanie nadmiernych sił w punkcie styku albo utratę styku z powierzchnią, co jest niepożądane w pewnych zastosowaniach ze względu na to, że rzadko kiedy ruch manipulatora jest ograniczony przez powierzchnie oporowe jednocześnie we wszystkich kierunkach. Stąd zachodzi potrzeba stosowania układu sterowania mieszanego lub hybrydowego, które w wybranych kierunkach działają zgodnie z zasadą sterowania położeniem, a w pozostałych kierunkach - z zasadą sterowania siłą (patrz rys. 1.13). W rozdziale 11 podano metodologię wprowadzenia układu sterowania siłą.



Rys. 1.13. W przypadku wymagania, aby człon roboczy manipulatora przesuwał się po powierzchni i wywierał na nią stałą siłę, należy zastosować hybrydowy układ sterowania położeniem i siłą

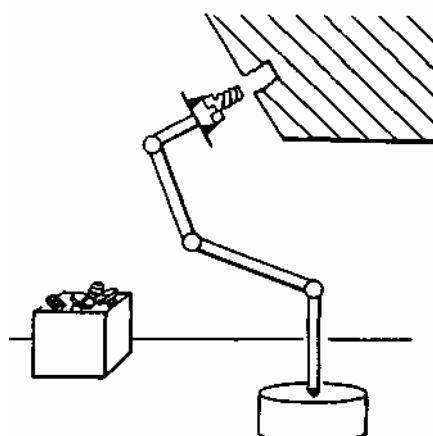
Programowanie robotów

Język programowania robota spełnia rolę łącznika (interfejsu) między użytkownikiem a robotem przemysłowym. W związku z tym pojawiają się następujące podstawowe pytania: Jak programista może w prosty sposób opisać trajektorię ruchu w przestrzeni? Jak można zaprogramować wiele manipulatorów tak, aby mogły pracować równolegle? Jak zapisać w języku programowania czynności, których wykonanie zależy od sygnałów przesyłanych z czujników?

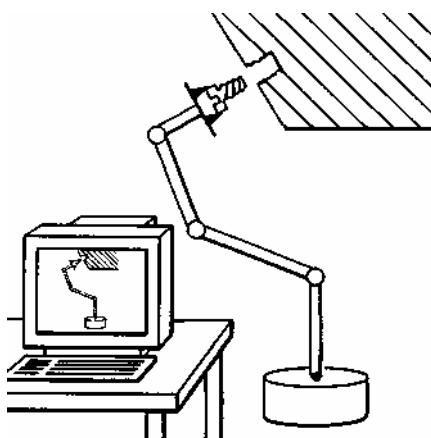
Roboty manipulacyjne różnią się od innych środków sztywnej automatyzacji przez to, że są elastyczne, tzn. programowalne. Oprócz programowalności, dzięki wykorzystaniu sygnałów z czujników od innych środków automatyzacji zakładu, manipulatory mają zdolność adaptacji do zmian zachodzących w trakcie realizacji zadania (patrz rys. 1.14).

Sofistyka interfejsu użytkownika nabiera szczególnego znaczenia ze względu na wzrost zastosowań manipulatorów i innych urządzeń elastycznej automatyzacji do coraz bardziej złożonych zadań.

Zadanie programowania manipulatorów obejmuje wszystkie kwestie "tradycyjnego" programowania komputerów i stąd samo w sobie jest bardzo obszerne. Oprócz tego obejmuje ono również problemy wynikające ze specyfiki zadania programowania manipulatora. Niektóre z nich przedstawiono w rozdziale 12.



Rys. 1.14. Pożądane ruchy manipulatora i końcówki wykonawczej, pożądane siły w punktach styku i złożone strategie manipulacji mogą być opisane w języku programowania robota



Rys. 1.15. Układy programowania autonomicznego, wyposażone z reguły w interfejs grafiki komputerowej, umożliwiają programowanie robotów bez bezpośredniego dostępu do samego robota podczas programowania

Programowanie autonomiczne i symulacja

Układ programowania autonomicznego (off-line) stanowi otoczenie programowania robota, które dzięki odpowiedniemu rozbudowaniu, przede wszystkim o środki grafiki komputerowej, umożliwia opracowanie programów pracy robota bez konieczności bezpośredniego dostępu do samego robota. Głównym argumentem przemawiającym za stosowaniem tego układu jest to, że w przypadku potrzeby przeprogramowania urządzenia technologicznego (tzn. robota) nie zachodzi potrzeba wyłączania go z ruchu, w rezultacie czego uzyskuje się wysoki udział wykorzystania czasu pracy zautomatyzowanych systemów produkcyjnych (patrz rys. 1.15).

Umieściwszy on również przyłączenie, w naturalny sposób, baz danych dla wspomaganego komputerowo systemu projektowania (CAD); z tych baz korzysta się w fazie projektowania wyrobu i w procesie jego wytwarzania. W pewnych przypadkach bezpośredni dostęp do danych CAD przyczynia się do bardzo istotnego skrócenia czasu programowania dla potrzeb procesu wytwarzania. W rozdziale 13 scharakteryzowano moduły układu autonomicznego programowania robota przemysłowego.

1.3. OZNACZENIA

W nauce i technice zwykle brak jest jednoznaczności co do oznaczeń. W tej książce przyjęto następujące umowne oznaczenia:

1. Zazwyczaj zmienne zapisane dużymi literami oznaczają wektory lub macierze. Zmienne oznaczone małymi literami są skalarami.
2. Górnny i dolny indeks przed oznaczeniem określa układ współrzędnych, w którym została zapisana dana wielkość. Na przykład zapis ${}^A P$ oznacza wektor pozycji zapisany w układzie współrzędnych $\{A\}$, natomiast ${}^A {}_B R$ oznacza macierz obrotu, która opisuje zależność między układami współrzędnych $\{A\}$ i $\{B\}$.
3. Górne indeksy za oznaczeniem przyjęto zgodnie ze zwyczajem do oznaczania macierzy odwrotnej lub transponowanej, tzn. R^{-1} , R^T .
4. Dolne indeksy za literą nie są żadnym oznaczeniem umownym; stosowane są do oznaczenia składowych wektora (tzn. x , y lub z) lub do opisu zmiennej; np. zapis $P_{\text{śrub}}^{\text{śruba}}$ oznacza wektor pozycji śruby.
5. Będziemy stosować wiele funkcji trygonometrycznych. Zapis funkcji kosinusu kąta θ . może przyjąć każdą z następujących postaci: $\cos \theta_1 = c \theta_1 = c_1$

Przyjęto, że wektory są wektorami kolumnowymi. Wektory wierszowe będą oznaczane za pomocą indeksów transponowania.

Uwaga ogólna dotycząca zapisu wektorowego: W wielu opracowaniach z zakresu mechaniki operuje się wielkościami wektorowymi na wysokim poziomie uogólnienia, co znajduje wyraz w rutynowym zapisywaniu w wyrażeniach wektorów określonych względem różnych układów współrzędnych. Typowym przykładem jest dodawanie wektorów, które są określone lub o których wiadomo, że są określone względem różnych układów współrzędnych. Konwencja ta jest często bardzo wygodna; dzięki niej uzyskuje się zwarte i bardziej eleganckie wzory. Na przykład rozważmy prędkość kątową u. ostatniego ciała z łańcucha czterech połączonych ze sobą ciał sztywnych (podobnie jak to ma miejsce w przypadku członów manipulatora) względem ustalonej podstawy łańcucha. Z uwagi na to, że prędkości kątowe dodaje się wektorowe, uzyskujemy bardzo proste równanie wektorowe prędkości kątowej ostatniego członu

$${}^0 \omega_4 = {}^0 \omega_1 + {}^1 \omega_2 + {}^2 \omega_3 + {}^3 \omega_4 \quad (1.1)$$

Niemniej jednak, dopóki wielkości te nie zostaną wyrażone w jednym wspólnym układzie współrzędnych, dopóty nie mogą być dodane. Tak więc, w tych eleganckich równaniach (1.1) ukryta jest dominująca część pracy związanej z obliczeniami. W odniesieniu do szczególnego przypadku badania manipulatorów mechanicznych, w wyrażeniach podobnych do (1.1) ukryta jest "czarna" robota związana z wykorzystaniem układów współrzędnych przyjętych w książce, która często jest główną pracą, z jaką mamy do czynienia w praktyce.

³⁾Wyraz ten będzie wprowadzony w rozdziale 2.

Stąd w niniejszej książce w zapisie wektorowym podajemy informację o układzie odniesienia i nie wykonujemy dodawania wektorów, dopóki wszystkie wektory nie zostaną wyrażone w tym samym układzie współrzędnych. W ten sposób wyprowadzamy wyrażenia, będące rozwiązańem zadania w określonym układzie współrzędnych, które można bezpośrednio zastosować do bieżących obliczeń numerycznych.

Bibliografia

- [1] B.Roth, "Principles of Automation", Future Directions in Manufacturing
Technology, Based on the Unilever Research and Engineering Division
Symposium held at Port Sunlight, April 1983, Published by Unilever Research, UK.
- [2] R. Ayres, " Impact on Employment", in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons,1988.
- [3] D.Smith and P.Heytler, "Industrial Robots Forecast and Trends", Delphi Study, 2nd edition, Society of Manufacturing Engineers, Dearborn, Mich.,1985.

Podstawowe podręczniki

- [4] R.Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, 1981.
- [5] M.Brady et al., *Robot Motion*, MIT Press, 1983.
- [6] G.Beni, S.Hackwood, Editors, *Recent Advances in Robotics*, Wiley, 1985.
- [7] R. Dorf, *Robotics and Automated Manufacturing*, Reston, 1983.
- [8] A.Critchlow, *Introduction to Robotics*, Macmillan, 1985.
- [9] W.Synder, *Industrial Robots: Computer Interfacing and Control*, Prentice-Hall,1985.
- [10] Y.Koren, *Robotics for Engineers*, McGraw Hill, 1985.
- [II] V.Hunt, *Industrial Robotics Handbook*, Industrial Press, 1983.
- [12] J.Engelberger, *Robots in Practice*, AMACOM, 1980.
- [13] W.Wolovich, *Robotics: Basic Analysis and Design*, Holt, Rinehart, and Winston, 1987. [14] K. Fu, R.Gonzalez and C. S. G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*, McGraw Hill, 1987. [15] H.Asada and J.J.Slotine, *Robot Analysis and Control*, Wiley, 1986.

Podstawowe czasopisma i periodyki

- [20] *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics.*
- [21] *IEEE Transactions on Automatic Control.*
- [22] *International Journal of Robotics Research.* (MIT Press).
- [23] *ASME Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control.*
- [24] *International Journal of Robotics and Automation.* (IASTED)
- [25] *The Robotics Review* (MIT Press).

Ćwiczenia

- 1.1. [20] Opisz chronologicznie najważniejsze wydarzenia w rozwoju robotów przemysłowych w ostatnim 30-leciu. Patrz bibliografia.
- 1.2. [20] Sporządź wykres słupkowy procentowego rozkładu liczby zainstalowanych robotów przemysłowych w funkcji ich głównych zastosowań (np. do zgrzewania punktowego, montażu itp.). Twój wykres powinien być podobny do wykresu na rys.1.2. Dane do wykresu powinieneś zaczerpnąć z najnowszych dostępnych ci materiałów. Patrz bibliografia.
- 1.3. [20] Sporządź wykres udziałów ważniejszych sprzedawców robotów przemysłowych w obrotach amerykańskiego (USA) lub światowego rynku robotów. Patrz bibliografia.
- 1.4. [10] W jednym lub dwu zdaniach zdefiniuj pojęcia: kinematyka, przestrzeń robocza, trajektoria.
- 1.5. [10] W jednym lub dwu zdaniach zdefiniuj pojęcia: układ współrzędnych, stopień swobody, sterowanie położeniem.
- 1.6. [10] W jednym lub dwu zdaniach wyjaśnij terminy: sterowanie siłą, język programowania robota.
- 1.7. [10] W jednym lub dwu zdaniach wyjaśnij terminy: sztywność konstrukcji, sterowanie nieliniowe i programowanie autonomiczne.
- 1.8. [20] Sporządź wykres ilustrujący wzrost kosztów robocizny w ciągu ubiegłych 20 lat.
- 1.9. [20] Opracuj wykres ilustrujący wzrost wydajności komputerów w stosunku do ich ceny za okres ostatnich 20 lat.
- 1.10. [20] Wykonaj wykres słupkowy procentowego rozkładu liczby robotów w funkcji ich głównych użytkowników przemysłowych (tzn. przemysłu lotniczego, samochodowego itp.). Twój wykres powinien być podobny do wykresu na rys. 1.3, lecz dane do jego sporządzenia powinny być w miarę aktualne. Patrz bibliografia.

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 1)

Zapoznaj się z komputerem, na którym będziesz rozwiązywał zadania z zakresu programowania w końcu każdego rozdziału. Upewnij się, czy umiesz tworzyć i redagować pliki, a także kompilować oraz wykonywać programy.

2

OPISY PRZESTRZENNE I PRZEKSZTAŁCENIA

2.1. WPROWADZENIE

W robotyce przez pojęcie manipulacji rozumiemy przemieszczanie w przestrzeni przedmiotów i narzędzi za pomocą specjalnego mechanizmu. W związku z tym pojawia się potrzeba opisu pozycji i orientacji przedmiotów, narzędzi, a także samego mechanizmu. W celu umożliwienia określenia i przekształcenia wielkości matematycznych, opisujących pozycję i orientację, musimy zdefiniować układy współrzędnych oraz opracować zasady ich opisu. Wiele rozwiązań, przyjętych w tym rozdziale w związku z opisem pozycji i orientacji, będzie stanowiło bazę dla naszych późniejszych rozważań dotyczących prędkości liniowych i katowych, jak również sił i momentów sił.

Przyjmujemy zasadę, że gdzieś w przestrzeni jest umieszczony **globalny układ współrzędnych**, względem którego będziemy mogli określać wszystkie rozpatrywane przez nas wielkości. Opiszemy wszystkie pozycje i orientacje względem globalnego układu osi współrzędnych lub względem innych układów współrzędnych kartezjańskich, których położenie jest (lub może być) określone względem układu globalnego.

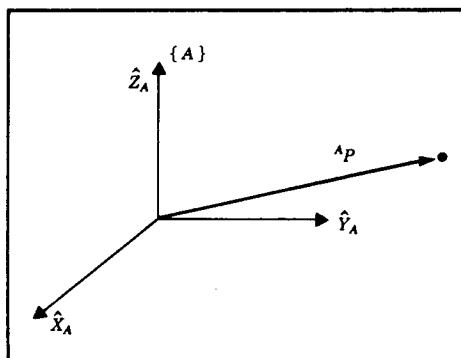
2.2. OPISY: POZYCJI, ORIENTACJI I LOKALNYCH UKŁADÓW WSPÓŁRZĘDNYCH

W celu umożliwienia opisu właściwości różnych obiektów, którymi operuje układ manipulacyjny, wprowadza się odpowiedni formalizm zapisu. Wyżej wymienionymi obiektemi mogą być przedmioty, narzędzia, a nawet sam manipulator. W tym podrozdziale rozpatrujemy sposoby opisu pozycji, orientacji oraz bloków opisujących równocześnie pozycję i orientację.

Opis pozycji

Jeśli dany jest układ współrzędnych, to położenie dowolnego punktu w przestrzeni możemy określić za pomocą wektora pozycji (3×1). Ze względu na to, że obok globalnego układu współrzędnych będziemy często wprowadzać dodatkowo inne układy współrzędnych, wektory muszą zawierać również informację identyfikującą układ współrzędnych, w którym zostały określone. W tej książce oznaczenia wektorów będą zawsze poprzedzane górnym indeksem wskazującym układ współrzędnych, w którym zostały zdefiniowane (nawet wtedy, gdy wynika to w sposób oczywisty z kontekstu), np. A_P oznacza, że wartości liczbowe składowych wektora A_P odpowiadają współrzędnym wzdłuż osi układu $\{A\}$. Wartości współrzędnych wzdłuż kolejnych osi odpowiadają miarom rzutów wektora na odnośną oś.

Na rys. 2.1 przedstawiono układ współrzędnych $\{A\}$, który tworzą trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe (wersory), o ustalonych kierunkach. Punkt A_P , odpowiadający pozycji w przestrzeni, określa się za pomocą wektora lub prościej za pomocą uporządkowanej trójki liczb. Poszczególne składowe wektora oznacza się odpowiednio indeksem x , y lub z , umieszczonym poniżej oznaczenia punktu (pozycji)



Rys. 2.1. Wektor pozycji w przykładowym układzie współrzędnych

$$\mathbf{A}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Reasumując, położenie punktu w przestrzeni będziemy opisywać za pomocą wektora pozycji. Inne możliwości opisu położen punktów w przestrzeni trójwymiarowej, np. w układzie współrzędnych sferycznych lub cylindrycznych, przedstawiono w ćwiczeniach na końcu rozdziału.

Opis orientacji

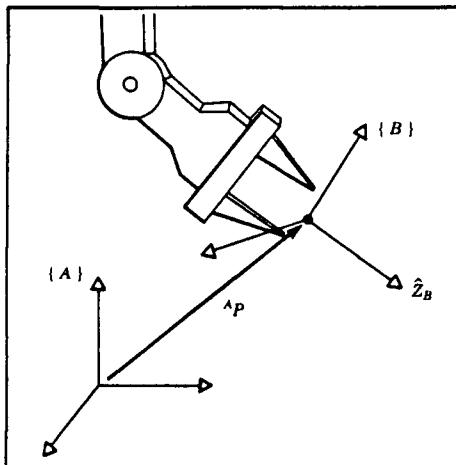
Często występuje konieczność nie tylko określenia pozycji punktu w przestrzeni, lecz również opisania orientacji ciała w przestrzeni. Na przykład, mimo że wektor $\mathbf{A}_{\mathbf{P}}$ na rys. 2.2 wskazuje położenie punktu równo odległego od końcówek chwytaka manipulatora, to usytuowanie chwytaka pozostało nadal nieokreślone, dopóki nie ustali się jego orientacji. Przyjmując, że manipulator ma wystarczającą liczbę połączeń ruchowych¹⁾, chwytak mógłby być zorientowany dowolnie przy zachowaniu stałej pozycji w przestrzeni punktu leżącego między końcówkami chwytaka. W celu opisania orientacji ciała zwiążemy z nim układ współrzędnych, a następnie opiszemy położenie tego układu współrzędnych względem układu odniesienia. Na rys. 2.2 z ciałem związanej układy współrzędnych $\{B\}$. Opis położenia układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ jest wystarczający do określenia orientacji ciała.

Zatem, pozycje punktów są opisane przez wektory, a orientacje ciał przez związane z nimi układy współrzędnych. Jeden ze sposobów opisania układu $\{B\}$, связаного z ciałem, polega na zapisie wersorów jego trzech osi głównych²⁾ w układzie $\{A\}$.

Wersory opisujemy stosując oznaczenia głównych kierunków układu współrzędnych $\{B\}$ w postaci $\hat{\mathbf{x}}_B$, $\hat{\mathbf{y}}_B$ i $\hat{\mathbf{z}}_B$. Jeżeli zostaną one opisane w układzie współrzędnych $\{A\}$, wtedy zapis przyjmie postać $A_{\hat{\mathbf{x}}_B}$, $A_{\hat{\mathbf{y}}_B}$, $A_{\hat{\mathbf{z}}_B}$. Wygodne jest równoczesne operowanie na trzech wersorach zestawionych w kolumnach macierzy 3×3 w kolejności: $A_{\hat{\mathbf{x}}_B}$, $A_{\hat{\mathbf{y}}_B}$, $A_{\hat{\mathbf{z}}_B}$. Takie zestawienie będziemy nazywać macierzą obrotu, a ponieważ ta szczególna macierz obrotu opisuje orientację układu $\{B\}$ względem $\{A\}$, będziemy ją zapisywać w postaci A_B^A . Wybór dolnych i górnych indeksów w zapisie macierzy obrotu zostanie wyjaśniony w następnych akapitach.

¹⁾ Jaka liczba połączeń ruchowych "wystarcza", dowiemy się z rozdz. 3 i 4.

²⁾ Często jest wygodne operowanie trzema wersorami, mimo że wystarczyłoby operowanie dowolną parą wersorów, ponieważ trzeci można zawsze uzyskać z iloczynu wektorowego dwóch danych.



Rys. 2.2. Usytuowanie obiektu co do pozycji i orientacji

$$\begin{matrix} {}^A_R \\ {}^B \end{matrix} = \left[\begin{matrix} {}^A_{\hat{X}}_B & {}^A_{\hat{Y}}_B & {}^A_{\hat{Z}}_B \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix} \right] \quad (2.2)$$

Reasumując, orientację opisujemy za pomocą zbioru trzech wektorów. Dla wygody, będziemy tworzyć macierz 3×3 , której kolumny będą odpowiadały tym trzem wektorom. Zatem, jeżeli położenie punktu jest określone za pomocą wektora, to orientację ciała opisujemy za pomocą macierzy. W podrozdziale 2.8 omówimy inne sposoby zapisu orientacji, wymagające podania tylko trzech parametrów.

Każdy ze skalarów r_{ij} w (2.2) możemy zastąpić wyrażeniem, jeśli zauważymy, że składowe każdego wektora odpowiadają rzutom tego wektora na kierunki osi jego układu odniesienia. A zatem, każdy składnik macierzy obrotu $\begin{matrix} {}^A_R \\ {}^B \end{matrix}$ w (2.2) może być zapisany w postaci iloczynu skalarnego pary wersorów

$$\begin{matrix} {}^A_R \\ {}^B \end{matrix} = \left[\begin{matrix} {}^A_{\hat{X}}_B & {}^A_{\hat{Y}}_B & {}^A_{\hat{Z}}_B \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{matrix} \right] \quad (2.3)$$

Dla zwięzłości pominęliśmy poprzedzające indeksy górne w prawej skrajnej macierzy w równaniu (2.3). W rzeczywistości wybór układu, w którym opisywane są wersory, może być dowolny, jednak pod warunkiem, że będzie on taki sam dla każdej pary wektorów mnożonych skalarnie. Ze względu na to, że iloczyn skalarny dwóch wersorów jest równy kosinusowi kąta między nimi, to elementy macierzy obrotu nazywane są często kosinusami kierunkowymi.

Z głębszej analizy (2.3) wynika, że wiersze macierzy $\begin{matrix} {}^A_R \\ {}^B \end{matrix}$ są wersorami układu $\{A\}$ wyrażonymi w układzie $\{B\}$; a zatem

$$\begin{matrix} A_R^B \\ \end{matrix} = \left[\begin{matrix} A_{\hat{X}}_B & A_{\hat{Y}}_B & A_{\hat{Z}}_B \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} B_{\hat{X}}^T \\ A \\ B_{\hat{Y}}^T \\ A \\ B_{\hat{Z}}^T \\ A \end{matrix} \right] \quad (2.4)$$

Stąd macierz $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$, opisująca orientację układu {A} względem {B}, otrzymuje się w wyniku transponowania (2.3), to znaczy

$$\begin{matrix} B \\ A \end{matrix}^R = \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}^T \quad (2.5)$$

Można stąd wnioskować, że odwrotna macierz obrotu jest równa jej macierzy transponowanej, co można łatwo sprawdzić jak poniżej

$$\begin{matrix} A_R^T \\ B \end{matrix} \cdot \begin{matrix} A_R \\ B \end{matrix} = \left[\begin{matrix} A_{\hat{X}}^T \\ B \\ A_{\hat{Y}}^T \\ B \\ A_{\hat{Z}}^T \\ B \end{matrix} \right] \cdot \left[\begin{matrix} A_{\hat{X}}_B & A_{\hat{Y}}_B & A_{\hat{Z}}_B \end{matrix} \right] = T_3 \quad (2.6)$$

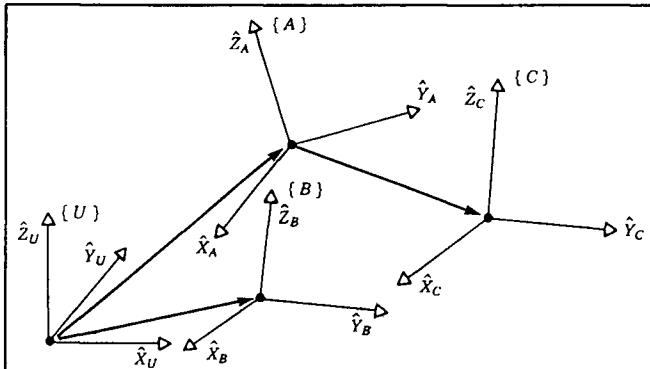
gdzie T_3 oznacza macierz jednostkową 3x3. Zatem

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}^R = \begin{matrix} B \\ A \end{matrix}^{-1} = \begin{matrix} B \\ A \end{matrix}^T \quad (2.7)$$

Co prawda, z algebry liniowej [1] wiemy, że odwrócenie macierzy z kolumnami ortonormalnymi jest równoważne z jej transponowaniem. Powyżej wykazaliśmy to na drodze geometrycznej.

Opis lokalnego układu współrzędnych

W celu jednoznacznego określenia położenia chwytaka manipulatora, jak np. na rys. 2.2, trzeba dysponować informacją o jego pozycji i orientacji. Punkt ciała, którego pozycję będziemy opisywać, może być wybrany dowolnie, jednak dla ułatwienia, wybrano punkt w początku lokalnego układu współrzędnych, związanego z ciałem. Równoczesny opis pozycji i orientacji występuje w robotyce bardzo często, dlatego też zdefiniujemy pojęcie bloku, będącego zbiorem czterech wektorów, zapisanych w postaci macierzy położenia, informującej o pozycji i orientacji układu. Na przykład na rys. 2.2 jeden wektor określa pozycję skrajnego punktu na osi symetrii końcówek chwytaka, a trzy pozostałe opisują jego orientację. Równoważnie, opis układu może być utożsamiany z wektorem pozycji i macierzą obrotu. Zauważmy, że macierz położenia opisuje lokalny układ współrzędnych, przy czym obok orientacji układu należy podać wektor pozycji, określający pozycję początku tego układu współrzędnych względem pewnego innego zewnętrznego układu współrzędnych. Na przykład lokalny układ współrzędnych {B} jest opisany przez macierz obrotu $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$ oraz wektor $A_{P_{BORG}}$ określający pozycję początku układu {B}



Rys. 2.3. Przykład zbioru układów

$$\{B\} = \{\begin{matrix} A_R \\ A_P \\ BORG \end{matrix}\} \quad (2.8)$$

Na rys. 2.3 przedstawiono trzy lokale układy współrzędnych wraz z globalnym układem współrzędnych. Położenia układów $\{A\}$ i $\{B\}$ są określone względem globalnego układu współrzędnych, natomiast położenie układu $\{C\}$ określono względem układu $\{A\}$.

Na rys. 2.3 pokazano graficzną reprezentację układów, którą będziemy posługiwać się przy ich wizualizacji. Układ reprezentują trzy strzałki, będące wersorami, określającymi główne osie lokalnego układu współrzędnych. Pogrubiętą strzałką, łączącą początki układów współrzędnych, oznaczono wektor określający pozycję punktu początku układu współrzędnych, wskazanego strzałką, względem układu, z którego wyprowadzono strzałkę. Zwrot tej strzałki informuje nas, jak np. na rys. 2.3, że położenie układu $\{C\}$ jest określone względem $\{A\}$, a nie odwrotnie.

Reasumując, macierz położenia można stosować do opisu jednego układu współrzędnych względem drugiego. W tej macierzy zawarte są informacje zarówno o pozycji, jak i orientacji, dlatego będziemy się nią posługiwać w przypadku równoczesnego operowania tymi dwoma pojęciami. Pozycję można opisać za pomocą macierzy położenia, której część dotycząca obrotu jest macierzą jednostkową, a część będąca wektorem pozycji lokalizuje opisywany punkt. Podobnie orientację można przedstawić za pomocą macierzy, której ostatnia kolumna, będąca wektorem położenia, byłaby wektorem zerowym.

2.3. ODWZOROWANIA: PRZEKSZTAŁCENIA OPISÓW PRZY PRZEJŚCIU Z JEDNEGO UKŁADU DO DRUGIEGO

W większości zadań robotyki zachodzi potrzeba wyrażania tej samej wielkości w różnych układach współrzędnych odniesienia. W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, jak opisuje się pozycję, orientację oraz macierz położenia, obecnie rozpatrzymy podstawy matematyczne odwzorowań, dzięki którym możemy, jak opis zmienia się przy przechodzeniu z jednego układu współrzędnych do drugiego.

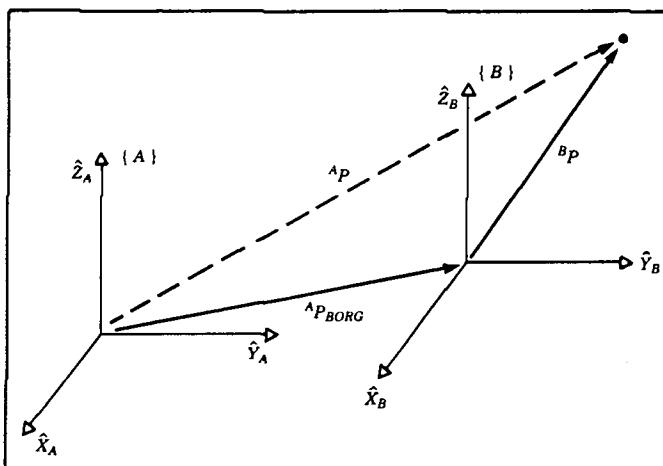
Odwzorowania przesunięć układów współrzędnych

Na rys. 2.4 wybrana pozycja określa wektor B_P . Nasze zadanie polega na opisaniu pozycji tego punktu w przestrzeni w układzie $\{A\}$, przy czym $\{A\}$ ma tę samą orientację co i $\{B\}$. W tym przypadku układ $\{B\}$ jest tylko **przesunięty** względem $\{A\}$. Przesunięcie to jest dane wektorem ${}^A_P_{BORG}$ określającym pozycję punktu początku układu $\{B\}$ względem $\{A\}$.

Ze względu na to, że oba wektory są określone względem układów o tej samej orientacji, wektor A_P pozycji punktu P względem $\{A\}$ wyznacza sumę wektorów

$${}^A_P = {}^B_P + {}^A_P_{BORG} \quad (2.9)$$

Zauważmy, że tylko w szczególnych przypadkach równoważnych orientacji możemy dodawać wektory, określone względem różnych układów.



Rys. 2.4. Odwzorowanie przez przesunięcie

Na tym prostym przykładzie zilustrowano odwzorowanie w jednym układzie wektora opisanego w innym układzie. Odwzorowania lub zmiany opisu przy przejściu z jednego układu do drugiego są szczególnie ważne. Wielkość jako taka (w naszym przypadku punkt w przestrzeni) nie zmieniała się, natomiast zmieniał się jej opis. Zilustrowano to na rys. 2.4, gdzie punkt opisany wektorem $\overset{B}{P}$ nie został przesunięty, lecz pozostał w tym samym miejscu, natomiast znaleźliśmy nowy opis tego samego punktu, tym razem względem układu $\{A\}$. Wektor $\overset{A}{P}_{BORG}$ określa to odwzorowanie, ponieważ wszystkie informacje, niezbędne do wykonania zmiany opisu, są zawarte w tym wektorze (dotyczy to oczywiście przypadku identycznych orientacji układów).

Odwzorowanie obrotów układów współrzędnych

W podrozdziale 2.2 wprowadzono opis orientacji za pomocą trzech wersorów, wyznaczających główne osie układu współrzędnych związanego z ciałem. Dla ułatwienia grupujemy te trzy wersory i przedstawiamy w postaci kolumn macierzy 3x3. Macierz tę będziemy nazywać macierzą obrotu i jeśli ta szczególna macierz obrotu będzie opisywać układ $\{B\}$ względem układu $\{A\}$, to zapiszemy ją w postaci $\overset{A}{R}_B$.

Zauważmy, że zgodnie z naszą definicją, wszystkie kolumny macierzy obrotu mają wartość jednostkową, a ponadto wersory te są ortogonalne. W związku z tym, co wykazaliśmy wcześniej, będzie

$$\overset{A}{R}_B = \overset{B}{R}_A^{-1} = \overset{B}{R}_A^T \quad (2.10)$$

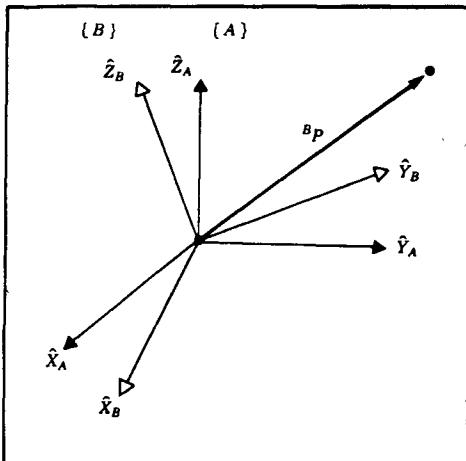
Zatem kolumny macierzy $\overset{A}{R}_B$ są wersorami układu $\{B\}$ opisanymi w układzie $\{A\}$, a wiersze $\overset{A}{R}_B$ są wersorami $\{A\}$ opisanymi w $\{B\}$.

Stąd macierz obrotu może być interpretowana jako zbiór trzech wektorów kolumnowych lub jako zbiór trzech wektorów wierszowych, jak poniżej

$$\overset{A}{R}_B = \begin{bmatrix} \overset{A}{X}_B & \overset{A}{Y}_B & \overset{A}{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{B}{X}_A^T \\ \overset{B}{Y}_A^T \\ \overset{B}{Z}_A^T \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Sytuację, jak na rys. 2.5, możemy scharakteryzować następująco: znany jest opis wektora względem pewnego układu $\{B\}$, natomiast chcielibyśmy poznać jego opis względem innego układu $\{A\}$, przy czym początki obu układów pokrywają się. Rachunek taki jest możliwy, o ile znany jest opis orientacji układu $\{B\}$ względem $\{A\}$. Orientację określa macierz obrotu $\overset{A}{R}_B$, której kolumny są wersorami układu $\{B\}$ opisanymi w układzie $\{A\}$.

W celu znalezienia $\overset{A}{P}$ zauważmy, że składowe każdego wektora odpowiadają wprost rzutom tego wektora na osie jego układu współrzędnych. Składowe te znajdujemy z iloczynu skalarnego. Widzimy zatem, że składowe wektora $\overset{A}{P}$ można obliczyć z następujących zależności



Rys. 2.5. Opis wektora względem obróconego układu współrzędnych

$$\begin{aligned}\vec{A_P}_X &= \vec{B_X}_A \cdot \vec{B_P} \\ \vec{A_P}_Y &= \vec{B_Y}_A \cdot \vec{B_P} \\ \vec{A_P}_Z &= \vec{B_Z}_A \cdot \vec{B_P}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Zauważmy, że zgodnie z (2.11), kolejnymi wierszami $\vec{A_R}$ odpowiadają $\vec{B_X}_A$, $\vec{B_Y}_A$ i $\vec{B_Z}_A$. Zatem (2.12) możemy przedstawić w zwartej postaci z macierzą obrotu

$$\vec{A_P} = \vec{A_R} \cdot \vec{B_P}\tag{2.13}$$

Równanie (2.13) odpowiada odwzorowaniu, tzn. zmienia opis wektora z postaci $\vec{B_P}$, tzn. opisu punktu w przestrzeni względem układu $\{B\}$, na postać $\vec{A_P}$, tzn. opis tego samego punktu względem układu $\{A\}$.

Widzimy teraz, że nasz zapis ułatwi nam śledzenie zamian odwzorowań i układów odniesienia. Wprowadzony przez nas zapis można łatwo sprawdzić pod względem poprawności; należy tylko wyobrazić sobie, że dolny indeks poprzedzający kasuje i następuje górny indeks poprzedzający następną wielkość, np. indeksy B w zależności (2.13).

PRZYKŁAD 2.1

Na rys. 2.6 pokazano układ $\{B\}$, który został obrócony o $\pi/6$ wokół osi \hat{Z} układu $\{A\}$. Oś \hat{Z} jest prostopadła do płaszczyzny kartki i skierowana w naszą stronę.

Jeśli wektory układu $\{B\}$ opiszemy względem układu $\{A\}$, to po zgrupowaniu przedstawimy je jako kolumny macierzy obrotu, otrzymując

$$\begin{matrix} A_R \\ B \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

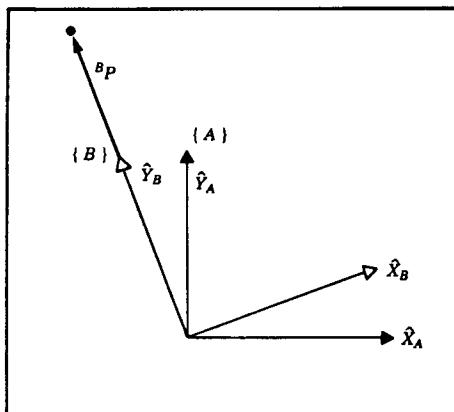
Dany jest wektor

$$B_P = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 2,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Wektor A_P znajdujemy z zależności

$$A_P = \begin{matrix} A_R \\ B \end{matrix} B_P = \begin{bmatrix} -1,000 \\ 1,732 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Macierz $\begin{matrix} A_R \\ B \end{matrix}$ odpowiada tutaj odwzorowaniu, które zastosowano w celu przekształcenia B_P , tzn. wektora pozycji opisanego względem układu $\{B\}$, w A_P , tzn. ten sam wektor opisany względem układu $\{A\}$. Tak samo jak w przypadku przesunięć, należy pamiętać, że odwzorowany wektor P nie zmienia swoego położenia w przestrzeni. Ściśle mówiąc, znajdujemy nowy opis wektora względem innego układu. ■



Rys. 2.6. Układ $\{B\}$ obrócony o kąt $\pi/6$ wokół osi \hat{Z}

Uogólniony przypadek odwzorowywania układów

Bardzo często znamy opis wektora względem pewnego układu $\{B\}$, natomiast chcielibyśmy znaleźć jego opis względem innego układu, $\{A\}$. Rozpatrzmy teraz ogólny przypadek odwzorowania. Niech początek układu $\{B\}$ nie pokrywa się z początkiem układu $\{A\}$, a wielkość przesunięcia będzie dana ogólniejącym wektorem. Oznaczmy przez ${}^A_P_{BORG}$ wektor określający pozycję początku układu $\{B\}$. Oprócz tego układ $\{B\}$ jest obrócony względem układu $\{A\}$, co wyraża macierz obrotu A_R_B . Dany jest wektor B_P , a naszym zadaniem jest znalezienie wektora A_P , przedstawionego na rys. 2.7.

Najpierw możemy znaleźć opis wektora B_P względem układu pośredniego o orientacji zgodnej z $\{A\}$ i początku pokrywającym się z początkiem układu $\{B\}$. Otrzymuje się to z iloczynu macierzy A_R_B i wektora B_P (patrz opis do rys. 2.5). Następnie uwzględniamy przesunięcie między początkami układów współrzędnych, co zapisujemy w postaci sumy wektorowej (podobnie jak w przypadku na rys. 2.4)

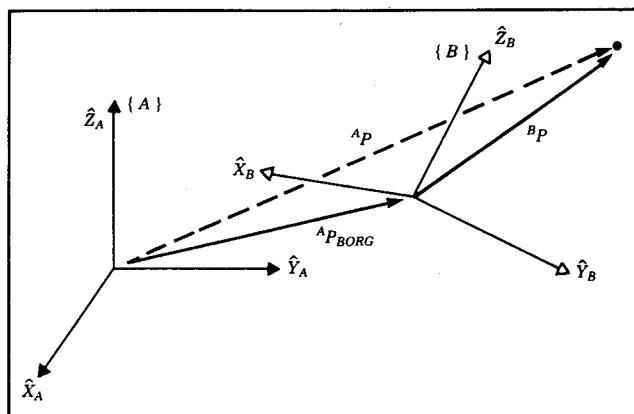
$${}^A_P = {}^A_R_B {}^B_P + {}^A_P_{BORG} \quad (2.17)$$

Równanie (2.17) opisuje ogólne przekształcanie odwzorowujące opis wektora względem jednego układu w opis względem drugiego układu. Zapamiętajmy powinnowiną interpretację wprowadzonego przez nas zapisu na przykładzie zależności (2.17): poprzedzający indeks B informuje o zmianie układu odniesienia, zatem wszystkie wielkości wektorowe są opisane względem $\{A\}$, dzięki czemu można je dodawać.

Postać (2.17) nie odpowiada naszym wyobrażeniom

$${}^A_P = {}^A_T_B {}^B_P \quad (2.18)$$

zgodnie z którymi chcielibyśmy, aby odwzorowanie jednego układu w drugim można było przedstawić za pomocą operatora w postaci macierzowej.



Rys. 2.7. Ogólne przekształcanie wektora

Wówczas zapis równań byłby zwarty i bardziej zrozumiały niż (2.17). Aby spełnić ten wymóg, wyrażenie (2.17) możemy zapisać w postaci operatora macierzowego, zaproponowanego w (2.18). Definiujemy zatem operator macierzowy 4×4 i wprowadzamy wektory pozycji 4×1 , w wyniku czego wyrażenie (2.18) przyjmuje strukturę

$$\begin{bmatrix} A_P \\ -- \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} A_R & & A_{P,BORG} & B_P \\ B & & & -- \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} B_P \\ -- \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

gdzie:

"1" - czwarty, dodany element wektorów pozycji 4×1 ,
wiersz $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ - dodany, ostatni wiersz macierzy 4×4 .

Przyjmujemy konwencję, że wektor pozycji ma wymiar 3×1 lub 4×1 , w zależności od tego, czy jest mnożony przez macierz 3×3 , czy też macierz 4×4 . Łatwo zauważyc, że wyrażenie (2.19) jest zgodne z

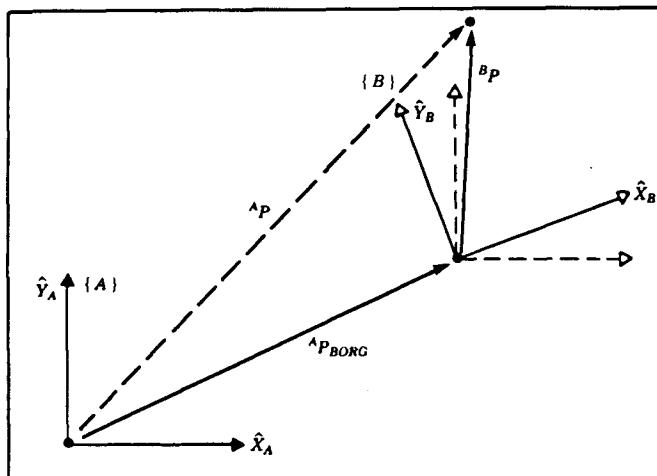
$$A_P = A_R B_P + A_{P,BORG} \quad (2.20)$$

1 = 1

Macierz 4×4 w (2.19) jest nazywana **przekształceniem jednorodnym**. Dla naszych celów można ją traktować jako operację wyrażającą równocześnie obrót i przesunięcie w postaci ogólnego przekształcenia za pomocą jednej macierzy. W innych dziedzinach badań można ją stosować w operacjach rzutowania i skalowania (gdy ostatni wiersz jest inny od "[0 0 0 1]" lub gdy macierz obrotu nie jest ortonormalna). Zainteresowanym czytelnikom polecamy przeczytanie pozycji [2].

Często wtedy, gdy będzie to wynikało jednoznacznie z kontekstu, będziemy zapisywać równania podobne do (2.18) bez żadnych oznaczeń wskazujących, że jest to odwzorowanie jednorodne. Zauważmy, że o ile stosowanie przekształceń jednorodnych jest wygodne do zwartego zapisu równań, to wykorzystanie ich w programie komputerowym w celu przekształcania wektorów jest na ogół niecelowe ze względu na zbędne straty czasu mnożeń przez jedynkę i zero. Zatem odwzorowaniem tym będziemy posługiwać się głównie ze względu na komfort procesu tworzenia i zapisu równań.

Tak samo, jak w przypadku zastosowań macierzy obrotu do opisu orientacji, przekształcenia (wykł. w postaci odwzorowania jednorodnego) będziemy używać do opisu układu. Zauważmy, że przekształcenia jednorodne, wprowadzone w związku z odwzorowaniami, nadają się również do opisu układów współrzędnych. Opis układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ będziemy przedstawiać w postaci A_B^T .

Rys. 2.8. Układ współrzędnych $\{B\}$ obrócony i przesunięty względem układu $\{A\}$

PRZYKŁAD 2.2

Na rys. 2.8 pokazano układ współrzędnych $\{B\}$, obrócony względem układu $\{A\}$ o kąt $\pi/6$ wokół osi \hat{Z} oraz przesunięty o 10 jednostek w kierunku osi \hat{X}_A i o 5 jednostek w \hat{Y}_A . Znajdź A_P^B , gdy $B_P = [3, 0 \quad 7, 0 \quad 0, 0]^T$.

Opis układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ jest następujący

$$A_T^B = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 10,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 5,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Dany jest wektor

$$B_P = \begin{bmatrix} 3,0 \\ 7,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Wyżej podany opis układu $\{B\}$ potraktujemy jako przekształcenie

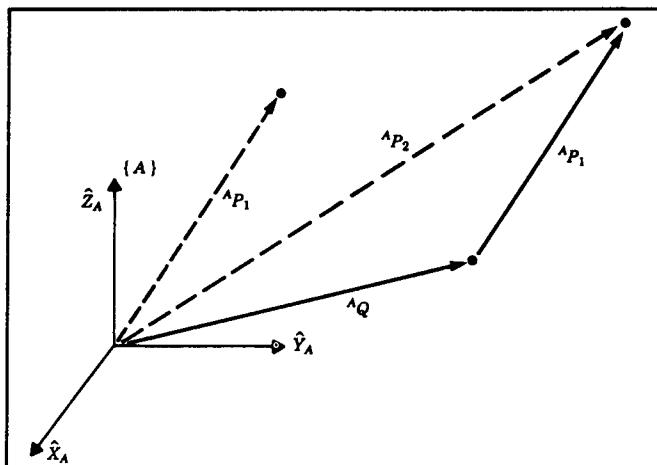
$$A_P^B = A_T^B B_P = \begin{bmatrix} 9,098 \\ 12,562 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.4. OPERATORY: PRZESUNIĘCIA, OBROTY, PRZEKSZTAŁCENIA

Te same wyrażenia matematyczne, których użyliśmy do odwzorowania punktów w różnych układach, mogą być również traktowane jak operatory przesunięć punktów, obrotów wektorów lub obu naraz. Niniejszy podrozdział przybliża nam tę interpretację zapisów matematycznych, dopiero co wprowadzonych.

Operatory przesunięć

W wyniku przesunięcia przemieszcza się punkt w przestrzeni o skończoną odległość wzdłuż danego kierunku wektora. W tej interpretacji do określenia bieżącego przesunięcia punktu w przestrzeni wymagana jest znajomość tylko jednego układu współrzędnych. Stąd można wywnioskować, że przesunięcie punktu w przestrzeni można opisać wg tych samych reguł matematycznych jak w przypadku odwzorowywania punktu w drugim układzie. W każdym przypadku ważne jest zrozumienie użytych reguł matematycznych. Różnica ta jest podobnie subtelna jak w przypadku przesunięcia wektora "w przód" względem układu, możemy wówczas sądzić zarówno że wektor został przesunięty "w przód", jak i że układ został przesunięty "w tył". Reguły matematyczne stosowane w obu tych przypadkach są identyczne, różna jest tylko interpretacja sytuacji. Rys. 2.9 obrazuje sposób przesunięcia wektora $\overset{A}{P_1}$ wzdłuż wektora $\overset{A}{Q}$, który zawiera informację niezbędną do wykonania tego przesunięcia.



Rys. 2.9. Operator przesunięcia

W wyniku tej operacji otrzymamy nowy wektor ${}^A P_2$

$${}^A P_2 = {}^A P_1 + {}^A Q \quad (2.24)$$

W celu zapisania tej operacji przesunięcia w postaci operatora macierzowego zastosujemy następującą notację

$${}^A P_2 = D_Q(q) {}^A P_1 \quad (2.25)$$

gdzie q jest wartością przesunięcia (ze znakiem) wzdłuż kierunku wektora \hat{Q} . Operator D_Q można przedstawić w postaci jednorodnego przekształcenia o szczególnie prostej formie

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

gdzie q_x , q_y , q_z są składowymi wektora przesunięcia Q , a $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$.

W równaniach (2.9) i (2.24) zastosowano te same reguły matematyczne. Zauważ, że gdybyśmy na rys. 2.4 określili wektor ${}^B P_{AORG}$ (zamiast ${}^A P_{BORG}$) i zapisali go w równaniu (2.9), wówczas wystąpiłyby różne znaki w równaniach (2.9) i (2.24). Ta zmiana znaku wskazywałaby różnicę między przesuwaniem wektora "w przód" a ruchem układu współrzędnych "w tył". Jeśli wyrazimy pozycję układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ (przez ${}^A P_{BORG}$), to reguły matematyczne dla tych dwóch interpretacji będą takie same. Teraz, dzięki wprowadzeniu notacji " D_Q ", możemy ją stosować zarówno do opisu układów, jak i odwzorowań.

Operatory obrotu

Macierz obrotu może być interpretowana jako *operator obrotu*, który działając na wektor ${}^A P_1$ zmienia go w nowy wektor ${}^A P_2$ za pomocą obrotu R . W przypadku gdy macierz obrotu spełnia rolę operatora, to w zapisie pomija się zarówno indeks górnny, jak i dolny, ponieważ operator nie określa wzajemnych relacji dwóch układów. A zatem możemy napisać

$${}^A P_2 = R {}^A P_1 \quad (2.27)$$

Podobnie jak w przypadku przesunięć, matematyczna strona wyrażeń (2.13) i (2.27) jest taka sama; występuje tylko różnica w naszej interpretacji. Znajomość tego faktu umożliwia nam zrozumienie, w jaki sposób uzyskuje się macierze obrotu, spełniające rolę operatorów:

Macierz obrotu, obracająca wektory na skutek pewnego obrotu R , jest taka sama jak macierz obrotu, opisująca układ obrócony w wyniku obrotu R względem układu odniesienia.

Mimo łatwości interpretacji macierzy obrotu jako operatora, zdefiniujemy również inną notację operatora obrotu, wskazującego wprost oś, względem której następuje obrót

$${}^A P_2 = R_K(\theta) {}^A P_1 \quad (2.28)$$

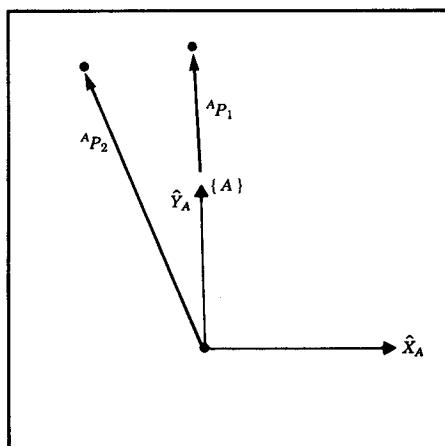
W tym zapisie $R_K(\theta)$ jest operatorem obrotu, powodującym wykonanie obrotu wokół osi o kierunku \hat{K} o kąt θ radianów. Operator ten można zapisać w postaci przekształcenia jednorodnego, z zerową częścią wektora pozycji. Np. przez podstawienie do (2.11) otrzymuje się operator, wywołujący obrót wokół osi \hat{Z} o kąt θ jako

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Oczywiście, w celu obrócenia wektora pozycji moglibyśmy równie dobrze zastosować macierz obrotu 3×3 , stanowiącą część przekształcenia jednorodnego. Notacja " R_K " reprezentuje zatem macierz 3×3 lub 4×4 . Dalej w rozdziale tym poznamy, jak zapisuje się macierz obrotu dla obrotu wokół dowolnej osi \hat{K} .

PRZYKŁAD 2.3

Na rys. 2.10 pokazano wektor ${}^A P_1$. Znajdź wektor otrzymany w wyniku obrotu tego wektora wokół osi \hat{Z} o kąt $\pi/6$. Nowy wektor nazwij ${}^A P_2$.



Rys. 2.10. ${}^A P_1$ - wektor obrócony o kąt $\pi/6$ wokół osi \hat{Z}

Macierz obrotu, która obraca wektory o $\pi/6$ wokół osi \hat{Z} , jest taka sama jak macierz obrotu, opisująca układ obrócony o $\pi/6$ wokół osi \hat{Z} względem układu odniesienia. Stąd poprawny operator obrotu

$$R_Z(\pi/6) = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Dany jest wektor

$$A_{P_1} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 2,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Znajdujemy A_{P_2} z zależności

$$A_{P_2} = R_Z(\pi/6) A_{P_1} = \begin{bmatrix} -1,000 \\ 1,732 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad ■ \quad (2.32)$$

Równania (2.13) i (2.27) są identyczne od strony matematycznej. Zauważmy, że jeśli w zależności (2.13) wprowadzimy B_R (zamiast A_R), to w równaniu (2.27) powinna pojawić się macierz odwrotna. Zmiana ta wskazuje na różnicę, jaka występuje między wektorem obracanym "w przód" względem układu współrzędnych obracanego "wstecz". Jeśli zdefiniujemy położenie układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ (przez B_R), wówczas obie interpretacje będą takie same pod względem matematycznym.

Operatory przekształceń

Podobnie jak w przypadku wektorów przesunięć i macierzy obrotów, ich blok może być interpretowany jako operator przekształcenia. W interpretacji tej występuje tylko jeden układ współrzędnych, w związku z czym stosuje się symbol T bez obu indeksów. Operator T obraca i przesuwa wektor A_{P_1} , umożliwiając znalezienie nowego wektora A_{P_2} . Zatem

$$A_{P_2} = T A_{P_1} \quad (2.33)$$

Znowu tak, jak w przypadku obrotu, zależności matematyczne (2.18) i (2.33) są takie same, inna jest tylko ich interpretacja. Dzięki znajomości tego faktu wiemy już, w jaki sposób otrzymuje się przekształcenia jednorodne, spełniające rolę operatorów.

Przekształcenie, powodujące obrót za pomocą R i przesunięcie za pomocą Q odpowiada przekształceniu, opisującemu układ obrócony za pomocą R i przesunięty za pomocą Q względem układu odniesienia.

Przekształcenie to jest zwykle przedstawiane w postaci przekształcenia jednorodnego, opisanego za pomocą uogólnionej macierzy obrotu i wektora pozycji.

PRZYKŁAD 2.4

Na rys. 2.11 przedstawiono wektor ${}^A P_1$. Zadaniem naszym jest obrócenie go wokół osi \hat{Z} o kąt $\pi/6$ i przesunięcie o 10 jednostek w kierunku osi \hat{X}_A , oraz o 5 jednostek w kierunku osi \hat{Y}_A . Znajdź ${}^A P_2$, gdy ${}^A P_1 = [3, 0 \ 7, 0 \ 0, 0]^T$.

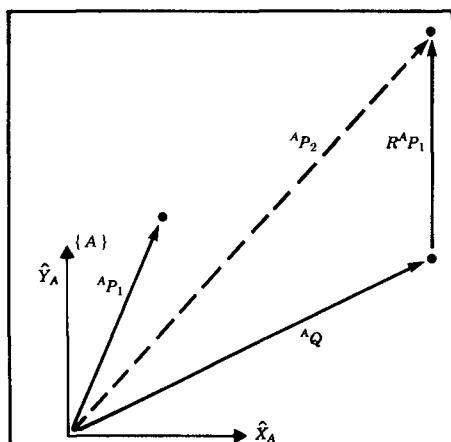
Operator T , wywołujący przesunięcie i obrót, przyjmuje postać

$$T = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 10,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 5,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Dany jest wektor

$${}^A P_1 = \begin{bmatrix} 3,0 \\ 7,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

W celu znalezienia wektora ${}^A P_2$ posłużymy się przekształceniem T w rozumieniu operatora



Rys. 2.11. Wektor ${}^A P_1$ obrócony i przesunięty do postaci ${}^A P_2$

$${}^A P_2 = T {}^A P_1 = \begin{bmatrix} 9,098 \\ 12,562 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Zwróć uwagę na to, że przykład ten jest liczbowo dokładnie taki sam jak przykład 2.2, lecz jego interpretacja jest całkiem inna.

2.5. PODSUMOWANIE INTERPRETACJI

Najpierw wprowadziliśmy pojęcia dotyczące tylko przypadku przesunięcia, następnie - obrotu, a w końcu - uogólnionego przypadku obrotu wokół punktu i przesunięcia tego punktu. Jeśli jest dla nas zrozumiałym uogólniony przypadek obrotu i przesunięcia, to zbędne jest szczegółowe rozważanie tych dwóch prostszych przypadków, ponieważ są one uwzględnione w uogólnionej operacji.

W celu reprezentacji bloków wprowadziliśmy uogólnione narzędzie w postaci przekształcenia jednorodnego - macierzy 4×4 , zawierającej informacje o orientacji i pozycji.

Podaliśmy trzy interpretacje tego przekształcenia jednorodnego:

1. Jako opisu układu. Macierz ${}^A_T B$ opisuje układ $\{B\}$ względem układu $\{A\}$. W szczególności, kolumny ${}^A_B R$ są wersorami definiującymi kierunki głównych osi $\{B\}$, a ${}^A_P_{BORG}$ określa pozycję początku układu $\{B\}$.
2. Jako przekształcenia odwzorowującego. Macierz ${}^A_T B$ odwzorowuje ${}^B_P \rightarrow {}^A_P$.
3. Jako operatora przekształcenia. Macierz T działa na ${}^A P_1$ tworząc ${}^A P_2$.

W związku z tym pojęcia bloku i przekształcenia będą stosowane w odniesieniu do wektora pozycji i macierzy orientacji. Blok jest pojęciem zaliczanym wtedy, gdy mówimy o zapisie, natomiast pojęcie przekształcenia jest zwykle używane w rozumieniu odwzorowania lub operatora. Zapamiętaj, że pojęcie przekształcenia łączy w sobie przesunięcia i obroty, stąd często będziemy używać pojęcia przekształcenie wtedy, gdy będziemy mówić wyłącznie o obrocie (lub przesunięciu).

2.6. ARYTMETYKA PRZEKSZTAŁCENIA

W tym podrozdziale zajmiemy się operacjami mnożenia i odwracania przekształceń. Te dwie elementarne operacje tworzą funkcjonalnie skończony zbiór operatorów przekształceń.

Przekształcenia złożone

Dany jest wektor C_P , a naszym zadaniem jest znalezienie wektora A_P (patrz rys. 2.12).

Znane jest położenie układu $\{C\}$ względem układu $\{B\}$ oraz układu $\{B\}$ względem układu $\{A\}$. Możemy zatem przekształcić wektor C_P w B_P

$$B_P = C_T^{-1} C_P \quad (2.37)$$

a następnie przekształcić wektor B_P w A_P

$$A_P = A_T^{-1} B_P \quad (2.38)$$

Po podstawieniu (2.37) do (2.38) otrzymujemy następujący, nieoczekiwany wynik

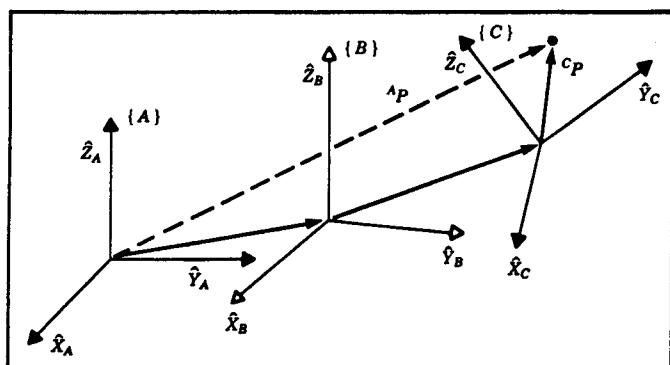
$$A_P = A_T^{-1} B_T^{-1} C_P \quad (2.39)$$

na podstawie którego możemy zdefiniować zależności między przekształceniami

$$A_T = A_T^{-1} B_T^{-1} C_T \quad (2.40)$$

Zwróć ponownie uwagę na to, że dzięki znajomości notacji z dolnym i górnym indeksem manipulacje te są łatwo zrozumiałe. Zależność na A_T^{-1} możemy wyrazić za pomocą znanych opisów układów $\{B\}$ i $\{C\}$

$$A_T^{-1} = \begin{bmatrix} A_R & B_R \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A_R - B)} \begin{bmatrix} A_R & B_R \\ B & C \end{bmatrix} \quad (2.41)$$



Rys. 2.12. Sprzężone układy współrzędnych: położenie każdego układu jest określone względem układu poprzedzającego

Przekształcenie odwrotne

Rozpatrzmy układ $\{B\}$, którego położenie jest określone względem układu $\{A\}$; a zatem znana jest macierz A_T^T . Czasami występuje potrzeba odwrócenia tego przekształcenia, w celu określenia opisu $\{A\}$ względem $\{B\}$; tzn. A_T^T . Przekształcenie odwrotne można znaleźć w prosty sposób, obliczając macierz odwrotną przekształcenia jednorodnego 4×4 . Jeśli jednak postapimy w ten sposób, to utracimy zalety struktury przekształcenia. Łatwo można znaleźć obliczeniowo prostszą metodę obliczania macierzy odwrotnej, wykorzystującą zalety tej struktury.

Aby znaleźć A_T^T , musimy obliczyć B_R i B_P _{AORG} z A_R^T i A_P _{BORG}.

Najpierw przypomnijmy sobie z naszych rozważań dotyczących macierzy obrotu, że

$$B_R \approx \frac{A_R^T}{B} \quad (2.42)$$

Następnie zapiszemy wektor A_P _{BORG} w układzie $\{B\}$, korzystając z równania (2.12)

$$B(A_P)_{BORG} = \frac{B_R}{A} A_P_{BORG} + B_P_{AORG} \quad (2.43)$$

Ponieważ lewa strona równania (2.43) jest równa zeru, to otrzymujemy

$$B_P_{AORG} = - \frac{B_R}{A} A_P_{BORG} = - \frac{A_R^T}{B} A_P_{BORG} \quad (2.44)$$

Z zależności (2.42) i (2.43) możemy zapisać macierz A_T^T w postaci

$$\frac{B_T}{A} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A_R^T}{B} & - \frac{A_R^T}{B} A_P_{BORG} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.45)$$

Zgodnie z przyjętą przez nas notacją

$$\frac{B_T}{A} = \frac{A_T^{-1}}{B}$$

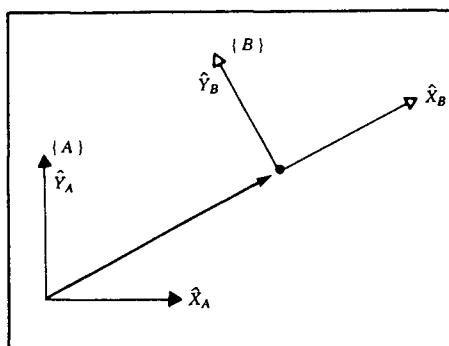
Równanie (2.45) ma charakter ogólny i podaje bardzo użyteczny sposób obliczenia macierzy odwrotnej przekształcenia jednorodnego.

PRZYKŁAD 2.5

Na rys. 2.13 przedstawiono układ współrzędnych $\{B\}$, obrócony względem układu $\{A\}$ o kąt 30° wokół osi \hat{Z} i przesunięty o cztery jednostki w kierunku osi \hat{X}_A oraz o trzy jednostki w kierunku \hat{Y}_A . Zatem znane jest przekształcenie A_T^T . Znaleźć B_T .

Macierz określająca położenie układu $\{B\}$ wygląda następująco

$$\frac{B_T}{A} = \left[\begin{array}{cccc} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 4,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 3,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.46)$$

Rys. 2.13. Położenie układu $\{B\}$ względem układu $\{A\}$

Z zależności (2.45) znajdujemy

$$\begin{matrix} B_T \\ A_T \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc} 0,866 & 0,500 & 0,000 & -4,964 \\ -0,500 & 0,866 & 0,000 & -0,598 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.47)$$

2.7. RÓWNANIA PRZEKSZTAŁCEN

Na rys. 2.14 przedstawiono sytuację, w której położenie układu $\{D\}$ można wyrazić w postaci iloczynów przekształceń na dwa różne sposoby. Pierwszy

$$\begin{matrix} U_T \\ D_T \end{matrix} = \begin{matrix} U_T \\ A_T \end{matrix} \begin{matrix} A_T \\ D_T \end{matrix} \quad (2.48)$$

i drugi

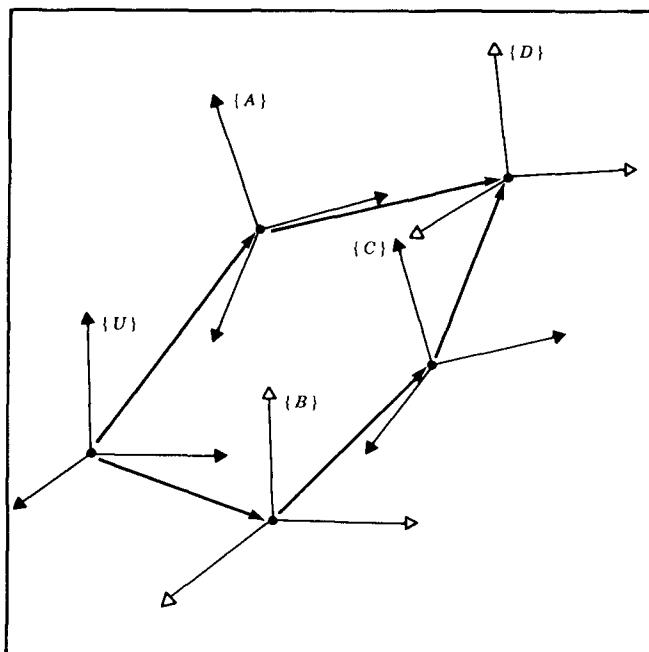
$$\begin{matrix} U_T \\ D_T \end{matrix} = \begin{matrix} U_T \\ B_T \end{matrix} \begin{matrix} B_T \\ C_T \end{matrix} \begin{matrix} C_T \\ D_T \end{matrix} \quad (2.49)$$

Oba sposoby zapisu $\begin{matrix} U_T \\ D_T \end{matrix}$ możemy przyrównać do siebie, uzyskując postać równania przekształcenia

$$\begin{matrix} U_T \\ D_T \end{matrix} = \begin{matrix} U_T \\ B_T \end{matrix} \begin{matrix} B_T \\ C_T \end{matrix} \begin{matrix} C_T \\ D_T \end{matrix} \quad (2.50)$$

Równania przekształceń mogą być stosowane do znajdowania przekształceń w przypadku, gdy występuje n niewiadomych przekształceń i n równań przekształceń. Rozważmy równanie (2.50) w przypadku, gdy wszystkie przekształcenia są znane z wyjątkiem $\begin{matrix} B_T \\ C_T \end{matrix}$. Mamy tutaj jedno równanie przekształcenia i jedno niewiadome przekształcenie; zatem łatwo jest je rozwiązać jako

$$\begin{matrix} B_T \\ C_T \end{matrix} = \begin{matrix} U_T^{-1} \\ B_T \end{matrix} \begin{matrix} U_T \\ A_T \end{matrix} \begin{matrix} A_T \\ D_T \end{matrix} \begin{matrix} C_T \\ D_T \end{matrix}^{-1} \quad (2.51)$$



Rys. 2.14. Zbiór przekształceń tworzących zamknięty wielobok

Na rys. 2.15 przedstawiono inną podobną sytuację.

Zwróć uwagę, że na wszystkich rysunkach stosujemy graficzną reprezentację macierzy przekształcenia w postaci strzałki wychodzącej z początku jednego układu współrzędnych i wchodzącej do drugiego. Zwrot strzałki określa sposób definiowania układów współrzędnych: na rys. 2.14 układ $\{D\}$ jest określony względem $\{A\}$, natomiast na rys. 2.15 układ $\{A\}$ jest określony względem $\{D\}$. W celu znalezienia superpozycji przekształceń w przypadku, gdy strzałki skierowane są w jedną stronę, wystarczy wprost obliczyć iloczyn przekształceń. Jeśli ktorąś ze strzałek jest zwrócona w przeciwną stronę w łańcuchu przekształceń, wtedy najpierw musimy obliczyć jej odwrócenie.

Na rys. 2.15 występują dwie możliwości opisu układu $\{C\}$

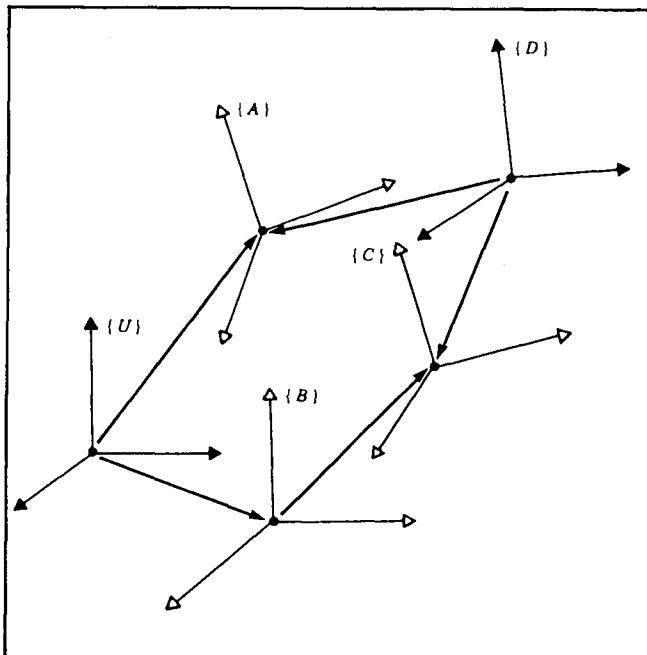
$$C^T = \frac{U}{A^T} \frac{D}{A^T}^{-1} \frac{D}{C^T} \quad (2.52)$$

oraz

$$C^T = \frac{U}{B^T} \frac{B}{C^T} \quad (2.53)$$

Mogemy przyrównać (2.52) i (2.53), w celu znalezienia np. macierzy $\frac{U}{A^T}$

$$\frac{U}{A^T} = \frac{U}{B^T} \frac{B}{C^T} \frac{D}{C^T}^{-1} \frac{D}{A^T} \quad (2.54)$$



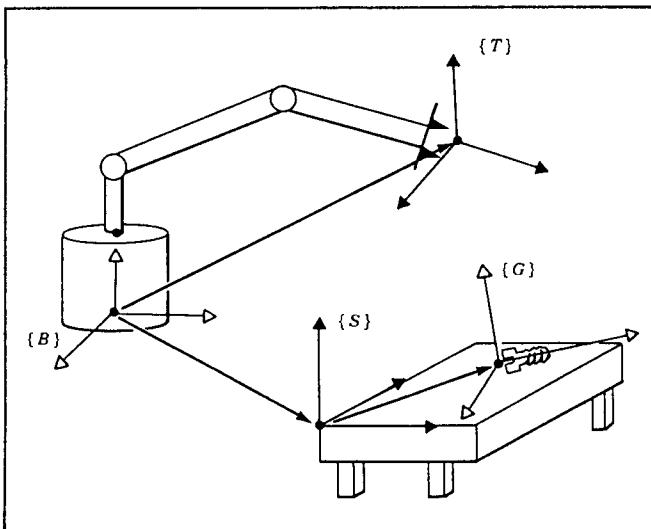
Rys. 2.15. Przykład równania przekształcenia

PRZYKŁAD 2.6

Przyjmijmy, że znamy przekształcenie $\frac{B}{T}T$ (rys. 2.16), opisujące układ przyporządkowany do chwytaka manipulatora $\{T\}$ względem podstawy manipulatora, $\{B\}$. Znamy również położenie blatu stołu w przestrzeni względem podstawy manipulatora, ponieważ znany jest nam opis układu $\{S\}$, związanego ze stołem, w postaci macierzy $\frac{B}{S}T$. W końcu, znamy także położenie układu związanego ze śrubą leżącą na stole względem układu stołu, opisane przez $\frac{S}{G}T$. Oblicz pozycję i orientację śruby względem chwytaka manipulatora $\frac{T}{G}T$.

Zgodnie z naszą notacją (a także, mam nadzieję, że sposobem rozumowania) znajdujemy pozycję i orientację śruby względem układu chwytaka

$$\frac{T}{G}T = \frac{B}{T}T^{-1} \frac{B}{S}T \frac{S}{G}T \quad (2.55)$$



Rys. 2.16. Manipulator siegający po śrubę

2.8. JESZCZE O OPISIE ORIENTACJI

Dotychczas poznaliśmy tylko jeden sposób opisu orientacji za pomocą macierzy obrotu 3×3 . Jak pokazano, macierze obrotów są specjalne w tym sensie, że kolumny są wzajemnie ortogonalne i mają jednostkową wartość. Ponadto zobaczymy, że wyznacznik macierzy obrotu jest zawsze równy +1. Macierze obrotów można również nazywać właściwymi macierzami ortonormalnymi, przy czym słowo "właściwy" wskazuje na to, że wyznacznik macierzy jest równy +1 (wyznacznik niewłaściwych macierzy ortonormalnych wynosi -1).

Całkiem naturalne jest pytanie: Czy orientację można opisać przy użyciu mniej niż dziewięciu liczb? Z algebry liniowej znany jest wzór Cayleya dla macierzy ortonormalnych [3], zgodnie z którym dla każdej właściwej macierzy ortonormalnej, R , istnieje macierz skośniesymetryczna, S , taka że

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S) \quad (2.56)$$

gdzie I_3 oznacza macierz jednostkową 3×3 . W macierzy skośniesymetrycznej (tzn. $S = -S^T$), o wymiarze 3, występują trzy parametry (s_x, s_y, s_z)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Zatem, z zależności (2.56) można wywnioskować, że każdą macierz obrotu 3×3 można opisać dokładnie za pomocą trzech parametrów.

Oczywiście, nie wszystkie z dziewięciu elementów macierzy obrotu są elementami niezależnymi. Faktycznie, dla każdej macierzy obrotu \mathbf{R} można łatwo wypisać sześć zależności między elementami. Wyobraźmy sobie macierz \mathbf{R} w postaci trzech kolumn, tzn. w postaci wprowadzonej już wcześniej

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Z podrozdziału 2.2 wiemy, że te trzy wektory są wersorami osi pewnego układu opisanego względem układu odniesienia. Z faktu, że każdy z nich jest wersorem oraz że wszystkie trzy muszą być wzajemnie prostopadłe, możemy wyrowadzić tutaj sześć zależności między dziewięcioma elementami macierzy

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{x}}| &= 1, & |\hat{\mathbf{y}}| &= 1, & |\hat{\mathbf{z}}| &= 1 \\ \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} &= 0, & \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} &= 0, & \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

W naturalny sposób nasuwa się nam pytanie, który ze sposobów opisu orientacji należy preferować w obliczu wygody opisu orientacji za pomocą trzech parametrów. W tym podrozdziale omówimy wiele takich przypadków opisu.

O ile wyobrażenie sobie przesunięć wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych osi jest całkiem łatwe do wizualizacji, to w przypadku obrotów intuicja może nas zawieść. Niestety, ludzie napotykają trudności w opisie i określaniu orientacji w przestrzeni 3-wymiarowej. Jedna z trudności polega na tym, że obroty na ogół nie są przemienne. To znaczy, że $\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} \mathbf{R} \begin{smallmatrix} B \\ C \end{smallmatrix} \mathbf{R}$ nie jest równoważne $\begin{smallmatrix} B \\ C \end{smallmatrix} \mathbf{R} \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} \mathbf{R}$.

PRZYKŁAD 2.7

Rozważmy dwa obroty, jeden o kąt $\pi/6$ wokół $\hat{\mathbf{z}}$ i drugi o kąt $\pi/6$ wokół osi $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{R}_z(\pi/6) = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$R_X(\pi/6) = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,866 & -0,500 \\ 0,000 & 0,500 & 0,866 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$R_Z(\pi/6) R_X(\pi/6) = \begin{bmatrix} 0,87 & -0,43 & 0,25 \\ 0,50 & 0,75 & -0,43 \\ 0,00 & 0,50 & 0,87 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$* R_X(\pi/6) R_Z(\pi/6) = \begin{bmatrix} 0,87 & -0,50 & 0,00 \\ 0,43 & 0,75 & -0,50 \\ 0,25 & 0,43 & 0,87 \end{bmatrix}$$

Nie jest to dla nas niespodzianka, ponieważ do opisu obrotów stosowaliśmy macierze, a mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne. ■

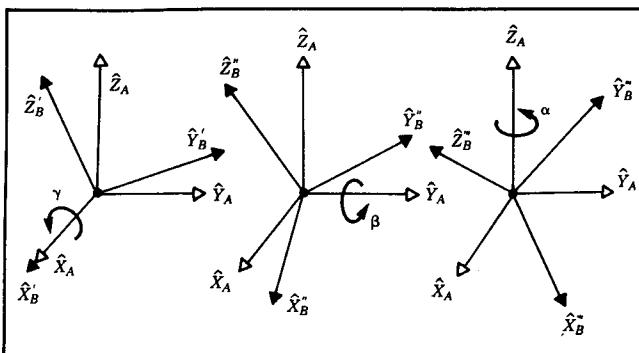
Obroty te mogą być rozumiane przez nas jako operatory albo jako opisy orientacji, zatem nie zdziwi nas to, że dla każdego z tych zastosowań występuje preferowana forma zapisu. Operatory wygodnie jest przedstawiać w formie macierzy obrotu. Ich postać macierzowa jest taka, że w momencie mnożenia przez wektor powoduje wykonanie operacji obrotu. Macierze obrotu są nieporęczne w zastosowaniach do opisu orientacji. Operator obsługujący końcówkę komputera, w przypadku wprowadzenia do niej opisu pożądanej orientacji chwytaka robota, ma zwykle kłopoty z wprowadzeniem dziewięcioelementowej macierzy z kolumnami ortonormalnymi. Znacznie prostszy byłby opis wymagający wprowadzenia tylko trzech liczb. W następnych podrozdziałach podano szereg takich opisów.

Kąty obrotu wokół osi X-Y-Z ustalonego układu współrzędnych

Jedną z metod opisu orientacji układu $\{B\}$ można sformułować następująco:

Po wybraniu układu pokrywającego się ze znanym układem odniesienia $\{A\}$, najpierw dokonuje się obrotu układu $\{B\}$ wokół osi \hat{x}_A o kąt γ , potem - wokół osi \hat{y}_A o kąt β , a w końcu - wokół osi \hat{z}_A o kąt α .

Każdy z trzech obrotów jest wykonywany wokół poszczególnych osi ustalonego układu odniesienia $\{A\}$. Tę konwencję opisu orientacji nazwiemy kątami obrotów wokół ustalonych osi X-Y-Z. Słowo "ustalone" oznacza, że obroty są wykonywane wokół osi ustalonego (tzn. nieruchomego) układu odniesienia. Czasami konwencję tę utożsamia się z kątami przechylania, pochylenia i skręcania (w j. ang. roll, pitch, yaw). Jednak należy pamiętać, że ta



Rys. 2.17. Kąty obrotów wokół osi ustalonego układu X-Y-Z. Obroty są wykonywane w kolejności: $R_x(\gamma), R_y(\beta), R_z(\alpha)$

nazwą określa się inne, podobne, lecz różniące się konwencje.

Wyprowadzenie równoważnej macierzy obrotu $R_{XYZ}^A(\gamma, \beta, \alpha)$ jest dość proste, ponieważ wszystkie obroty są wykonywane wokół osi układu odniesienia

$$\begin{aligned}
 R_{XYZ}^A(\gamma, \beta, \alpha) &= R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) = \\
 &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

gdzie $c\alpha$ jest skrótownym zapisem funkcji $\cos\alpha$, a $s\alpha$ – funkcji $\sin\alpha$ itp. Nienazmiernie ważne jest zrozumienie kolejności zapisu w zależności (2.63). Jeśli obroty będziemy traktować jako operatory, to wykonamy obroty (od prawej do lewej) $R_X(\gamma)$, następnie $R_Y(\beta)$ i w końcu $R_Z(\alpha)$. Po wykonaniu mnożeń zapisanych w (2.63), otrzymujemy

$$R_{XYZ}^A(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} cac\beta & cas\beta s\gamma - sacy & cas\beta c\gamma + sas\gamma \\ sac\beta & sas\beta s\gamma + cac\gamma & sas\beta c\gamma - cas\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Zapamiętaj, że podana wyżej definicja uwzględnia kolejność trzech obrotów. Równanie (2.64) jest poprawne tylko dla obrotów wykonywanych w następującej kolejności: obrót wokół osi X_A o kąt γ , wokół Y_A o kąt β , wokół Z_A o kąt α .

Często zachodzi potrzeba rozwiązania zadania odwrotnego, tzn. znalezienia równoważnych kątów obrotów wokół ustalonych osi X-Y-Z dla danej macierzy obrotu. W celu znalezienia takiego rozwiązania należy rozwiązać układ równań przestępnych. Jeśli zależność (2.64) przyrównamy do danej macierzy obrotu, to uzyskamy dziewięć równań z trzema niewiadomymi. Wśród tych dziesięciu równań występuje sześć równań współzależnych. W rezultacie, po skróceniu, mamy trzy równania z trzema niewiadomymi. Niech

$$A_{RXYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Z zależności (2.64) wynika, że pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów r_{11} i r_{21} jest równy $\cos\beta$. Kąt β znajdujemy z funkcji arcus tangens ilorazu r_{31} przez obliczoną wcześniej wartość $\cos\beta$. Następnie dla wartości $c\beta \neq 0$ określamy wartość kąta α z funkcji tangens ilorazu $(r_{21}/c\beta)$ przez $(r_{11}/c\beta)$, a kąta γ z funkcji tangens ilorazu $(r_{32}/c\beta)$ przez $(r_{33}/c\beta)$.

Łącznie

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Atan } 2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \\ \alpha &= \text{Atan } 2(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta) \\ \gamma &= \text{Atan } 2(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta) \end{aligned} \quad (2.66)$$

gdzie $\text{Atan}(y, x)$ jest dwuargumentową funkcją arcus tangens³⁾.

Mimo istnienia drugiego rozwiązania na kąt β nas interesuje tylko jedno rozwiązanie, dla którego znak przed pierwiastkiem jest dodatni, a kąt β zawiera się w przedziale $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$. Przyjęcie tego ograniczenia ma znaczenie praktyczne, ponieważ pozwala nam na zdefiniowanie wzajemnie jednoznacznych funkcji odwzorowań między różnymi opisami orientacji. Jednak w pewnych przypadkach ważne jest znalezienie wszystkich rozwiązań (przypadek ten przybliżymy w rozdziale 4). Jeśli $\beta = \pm \pi/2$ (tzn. $c\beta = 0$), wtedy rozwiązanie (2.66) ulega degeneracji. W takich przypadkach można obliczyć tylko sumę lub różnicę kątów α i γ . Jedyną możliwą konwencją jest w takich przypadkach przyjęcie $\alpha = 0, 0$. Wówczas otrzymuje się poniższe rozwiązanie:

Jeśli $\beta = \pi/2$, wtedy rozwiązanie znajduje się z zależności

$$\beta = \pi/2, \alpha = 0, 0, \gamma = \text{Atan}(r_{12}, r_{22}) \quad (2.67)$$

Jeśli $\beta = -\pi/2$, wtedy rozwiązanie znajduje się wg wzoru

$$\beta = -\pi/2, \alpha = 0, 0, \gamma = -\text{Atan}(r_{12}, r_{22}) \quad (2.68)$$

³⁾ $\text{Atan}(y, x)$ oblicza wartość $\text{arctg}(y/x)$ oraz uwzględnia znaki zarówno przy x jak i y w celu wyznaczenia ćwiartki, w której leży znaleziony kąt. Np. $\text{Atan}(-2, 0, -2, 0) = -3\pi/4$, podczas gdy $\text{Atan}(2, 0, 2, 0) = \pi/4$. Zastosowanie jednoargumentowej funkcji arctg nie pozwala na rozróżnienie tych wyników. Z uwagi na to, że obliczane przez nią kąty mogą być kątami z całego zakresu $0 + 2\pi$, będziemy regularnie używać funkcji Atan2 . Zwrót uwagę na to, że Atan2 jest nieokreślone w przypadku, gdy obydwa argumenty są równe zeru. Funkcję tę czasami nazywa się "4-ćwiartkowym arcusem tangentsem", jest ona spotykana w bibliotekach funkcji niektórych języków programowania.

Kąty Eulera Z-Y-X

Układ $\{B\}$ można również opisać w inny sposób, a mianowicie:

Zaczynamy od warunku, że układ $\{B\}$ pokrywa się ze znanym układem $\{A\}$.

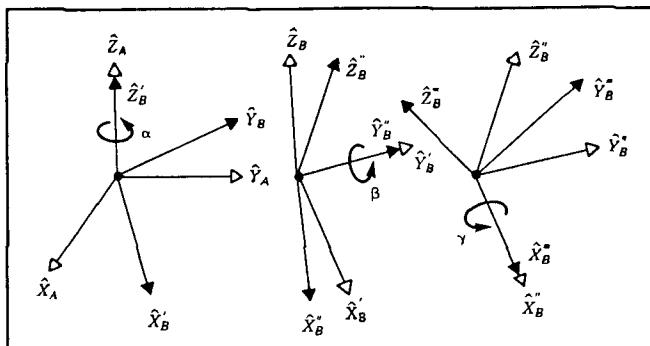
Najpierw obracamy układ $\{B\}$ o kąt α wokół osi \hat{Z}_B , potem - wokół osi \hat{Y}_B o kąt β , a w końcu - wokół osi \hat{X}_B o kąt γ .

W tym podejściu każdy obrót jest wykonywany wokół osi ruchomego układu $\{B\}$ zamiast wokół osi ustalonego układu odniesienia $\{A\}$. Taki zbiór trzech obrotów nazywamy kątami Eulera. Zwróć uwagę na to, że każdy obrót jest wykonywany wokół osi, której położenie zależy od poprzednich obrotów. Ze względu na to, że te trzy obroty wykonywane są odpowiednio wokół osi \hat{Z} , \hat{Y} i \hat{X} , reprezentację tę będziemy nazywać kątami Eulera Z-Y-X.

Na rys. 2.18 przedstawiono osie układu $\{B\}$ po kolejnych obrotach o kąty Eulera. Obrót o kąt α wokół osi \hat{Z} powoduje obrócenie osi \hat{X} i \hat{Y} w położenia odpowiednio \hat{X}' i \hat{Y}' itd. Dodatkowy indeks "prim" wprowadza się przy oznaczeniu każdej z osi po wykonaniu obrotu. Macierz obrotu, parametryzowaną za pomocą kątów Eulera Z-Y-X, będziemy zapisywać w postaci $A_B^R Z' Y' X' (\alpha, \beta, \gamma)$. Zwróć uwagę na to, że górne indeksy "prim" wprowadziliśmy w celu zaznaczenia, że obrót opisują kąty Eulera.

W celu znalezienia macierzy obrotu $A_B^R Z' Y' X' (\alpha, \beta, \gamma)$ możemy, tak jak na rys. 2.18, wprowadzić pośrednie układy $\{B'\}$ i $\{B''\}$. Traktując obroty jako opisy tych układów, możemy wprost napisać

$$\frac{A}{B} R = \frac{A}{B'} R \quad \frac{B'}{B''} R \quad \frac{B''}{B} R \quad (2.69)$$



Rys. 2.18. Kąty Eulera Z-Y-X

gdzie każdy z pośrednich opisów, występujących po prawej stronie (2.69), podano w konwencji kątów Eulera Z-Y-X. Oczywiście, ostateczna orientacja układu $\{B\}$ jest określona względem $\{A\}$ jako

$$\begin{aligned} {}^A_B R_{Z'Y'X'} &= R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) = \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.70)$$

gdzie $c\alpha = \cos\alpha$; $s\alpha = \sin\alpha$ itd. Po wymnożeniu otrzymujemy

$${}^A_B R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Zwróć uwagę na to, że ten wynik jest dokładnie taki sam jak wynik otrzymany w przypadku wykonywania tych trzech obrotów w odwrotnej kolejności wokół osi ustalonych! Ten poniekąd nieintuicyjny wynik potwierdza fakt, że w wyniku trzech obrotów wykonanych wokół osi ustalonych uzyskuje się taką samą orientację końcową, jak w przypadku wykonania identycznych trzech obrotów w odwrotnej kolejności wokół osi ruchomego układu.

Zależność (2.71) jest równoważna (2.64), można zatem zrezygnować z ponownego wyrowadzania zależności dla poszczególnych kątów Eulera Z-Y-X wg macierzy obrotu. Z zależności (2.66) można zatem skorzystać w celu znalezienia kątów Eulera Z-Y-X, odpowiadających danej macierzy obrotu.

Kąty Eulera Z-Y-Z

Możliwy jest także inny opis układu $\{B\}$:

Zaczynamy od układu pokrywającego się ze znanym układem $\{A\}$.

Najpierw obracamy układ $\{B\}$ wokół osi \hat{Z}_B o kąt α , potem wokół \hat{Y}_B o kąt β , i w końcu - wokół \hat{Z}_B o kąt γ .

Zwróć uwagę na to, że w przypadku gdy obroty są opisywane względem układu $\{B\}$, który obracamy, wówczas mamy do czynienia z opisem nazywanym kątami Eulera. Z uwagi na to, że trzy kolejne obroty są wykonywane odpowiednio wokół osi \hat{Z} , \hat{Y} i \hat{Z} , to reprezentację tę będziemy nazywać kątami Eulera Z-Y-Z.

Wykonując przekształcenie w ten sam sposób jak w ostatnim podrozdziale, uzyskujemy następującą równoważną macierz obrotu

$$A_{B'Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \text{c}\alpha\text{c}\beta\gamma - \text{s}\alpha\gamma & -\text{c}\alpha\beta\text{s}\gamma - \text{s}\alpha\gamma & \text{c}\alpha\beta \\ \text{s}\alpha\beta\gamma + \text{c}\alpha\gamma & -\text{s}\alpha\beta\text{s}\gamma + \text{c}\alpha\gamma & \text{s}\alpha\beta \\ -\text{s}\beta\gamma & \text{s}\beta\gamma & \text{c}\beta \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Niżej podano zależności dla kątów Eulera Z-Y-Z, wyprowadzone z macierzy obrotu.

Dana jest macierz

$$A_{B'Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Jeśli $\sin\beta \neq 0$, wtedy

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Atan2}(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}) \\ \alpha &= \text{Atan2}(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta) \\ \gamma &= \text{Atan2}(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Mimo istnienia drugiego rozwiązania, jeśli będziemy operować tylko dodatnią wartością pierwiastka we wzorze na kąt β , to zawsze znajdziemy jedno rozwiązanie, dla którego $0,0 \leq \beta \leq \pi$. Jeśli $\beta = 0,0$ lub π , wtedy rozwiązanie zależności (2.74) degeneruje się. W tych przypadkach można znaleźć tylko sumę lub różnicę kątów α i γ . Jeden z możliwych sposobów rozwiązania polega na założeniu, że $\alpha = 0,0$. Wówczas uzyskujemy następujące rozwiązania:

Jeśli $\beta = 0,0$, wtedy rozwiązanie znajduje się z zależności

$$\beta = 0,0, \alpha = 0,0, \gamma = \text{Atan2}(-r_{12}, r_{11}) \quad (2.75)$$

Jeśli $\beta = \pi$, wtedy oblicza się wg wzorów

$$\beta = \pi, \alpha = 0,0, \gamma = \text{Atan2}(r_{12}, -r_{11}) \quad (2.76)$$

Inne umowne zbiory kątów

W poprzednich podrozdziałach zostały przedstawione trzy konwencje opisu orientacji: kąty ustalone X-Y-Z, kąty Eulera Z-Y-X i kąty Eulera Z-Y-Z. W każdej z tych konwencji założono wykonanie w określonej kolejności trzech obrotów wokół głównych osi. Wyżej wymienione konwencje opisu wybrano, dla przykładu, ze zbioru 24 konwencji, które będą nazywać **umownymi zbiorami kątów**. Wśród nich 12 konwencji dotyczy kątów ustalonych, a 12 konwencji – zbiorów kątów Eulera. Zwróci uwagę na to, że ze względu na powtórzenia w zbiorach kątów ustalonych oraz zbiorach kątów Eulera, w rzeczywistości istnieje tylko 12 niepowtarzalnych parametryzacji macierzy obrotu za pomocą kolejnych obrotów wokół osi głównych. Z uwagi na brak szczególnych powodów

do faworyzowania jednej konwencji, tym bardziej, że inni autorzy mogą wybrać każdą inną, celowym jest wypisanie równoważnych macierzy obrotu dla wszystkich 24 konwencji. W załączniku B (zamieszczonym na końcu książki) zestawiono równoważne macierze obrotu dla wszystkich 24 konwencji.

Opis równoważny w postaci "kąt-oś"

Za pomocą notacji $R_X(\pi/6)$ opisujemy orientację określona osią \hat{X} i kątem $\pi/6$. Jest to przykład równoważnego opisu w postaci "kąt-oś". Jeśli oś określa główny kierunek (lub inaczej mówiąc jeden z kierunków jednostkowych), to każdą orientację można uzyskać przez wybór właściwej osi i dobór kąta. Rozpatrzmy następujący opis układu $\{B\}$:

Zaczynamy od układu pokrywającego się ze znanym układem $\{A\}$. Następnie obracamy układ $\{B\}$ wokół wektora \hat{K} o kąt θ zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej. Wektor \hat{K} jest czasem nazywany wersorem osi równoważnego skończonego obrotu.

Ogólna orientacja układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ może być zapisana w postaci macierzy $R_B(\hat{K}, \theta)$ lub $R_K(\theta)$. Tę ostatnią będziemy nazywać równoważnym opisem w postaci "kąt-os"⁴⁾. Specyfikacja wektora \hat{K} wymaga podania tylko dwóch parametrów, ponieważ przyjmuje się, że jego długość jest zawsze równa jedności. Kąt jest trzecim parametrem. Często będziemy mnożyć wersor kierunkowy \hat{K} przez wartość kąta obrotu θ w celu uzyskania zwartego wektora (3×1) opisu orientacji, oznaczonego przez K (bez "daszka") - patrz rys. 2.19.

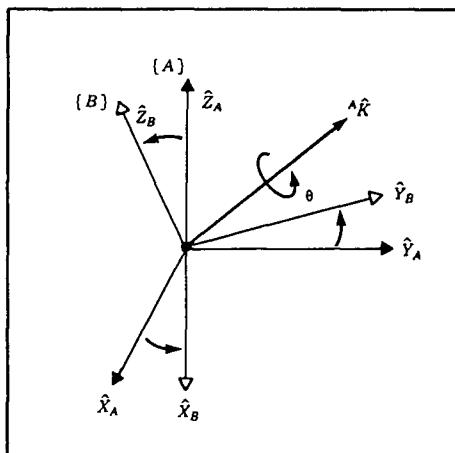
Gdy za oś obrotu wybierzemy jedną z głównych osi układu $\{A\}$, wtedy równoważna macierz obrotu przyjmie znana postać dla obrotów wykonywanych w jednej płaszczyźnie (płaskich)

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

⁴⁾ Istnienie takich \hat{K} i θ dla każdej orientacji układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ udowodnił jako pierwszy Euler; jest to tzw. twierdzenie Eulera [3].



Rys. 2.19. Opis równoważny w postaci "kąt-oś"

Jeśli osь obrotu jest osią główną, to można wykazać (patrz ćwiczenie 2.6), że równoważna macierz obrotu jest następująca

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

gdzie $c\theta = \cos\theta$, $s\theta = \sin\theta$, $v\theta = 1 - \cos\theta$ oraz $\hat{A}_{\hat{K}} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$. Znak kąta θ jest określony regułą prawej ręki, zgodnie z którą kciuk wskazuje dodatni zwrot $\hat{A}_{\hat{K}}$.

Równanie (2.80) przekształca opis typu "kąt-oś" w opis wyrażony przez macierz obrotu. Zwróć uwagę na to, że w przypadku gdy znane są osią obrotu i wartość kata, to można łatwo wyprowadzić równoważną macierz obrotu.

Zadanie odwrotne, polegające na wyznaczeniu \hat{K} i θ z danej macierzy obrotu, pozostawiamy do rozwiązania w formie ćwiczenia (ćwiczenia 2.6 i 2.7). Wynik częściowy podano niżej [3]. Jeśli

$$\hat{A}_{\hat{R}_K(\theta)} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

wówczas

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad (2.82)$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Z tego rozwiązania uzyskuje się zawsze wartość kąta θ z przedziału między 0 i π . Każdej postaci "oś-kąt" (${}^A\hat{\mathbf{k}}$, θ) odpowiada inna postać (${}^{-A}\hat{\mathbf{k}}$, $-\theta$), o tej samej orientacji w przestrzeni, opisana tą samą macierzą obrotu. Zatem w procesie przejścia z opisu za pomocą macierzy obrotu na opis w konwencji "kąt-oś" napotykaliśmy problem wyboru rozwiązania. Z powaźniejszym problemem mamy do czynienia w przypadku małych obrotów kątowych, w których os jest słabo określona. Oczywiście, jeśli wartość kąta obrotu dąży do zera, to os obrotu staje się całkowicie nieokreślona. Rozwiązanie określone zależnościami (2.82) zawodzi, jeśli $\theta = 0$ lub $\theta = \pi$. Patrz ćwiczenie 2.7.

PRZYKŁAD 2.8

Układ $\{B\}$ opisano w następujący sposób: Układ $\{B\}$, pokrywający się początkowo z $\{A\}$, obracamy wokół wektora ${}^A\hat{\mathbf{k}} = [0, 0, 1]^T$ (przechodzącego przez początek układu współrzędnych) o kąt $\theta = \pi/6$. Znajdź opis układu $\{B\}$.

Po podstawieniu danych do (2.80) otrzymujemy macierz obrotu jako część opisu układu. Ze względu na to, że nie wystąpiło tutaj przesunięcie początku układu współrzędnych, wektor pozycji jest równy $[0, 0, 0]^T$. Zatem

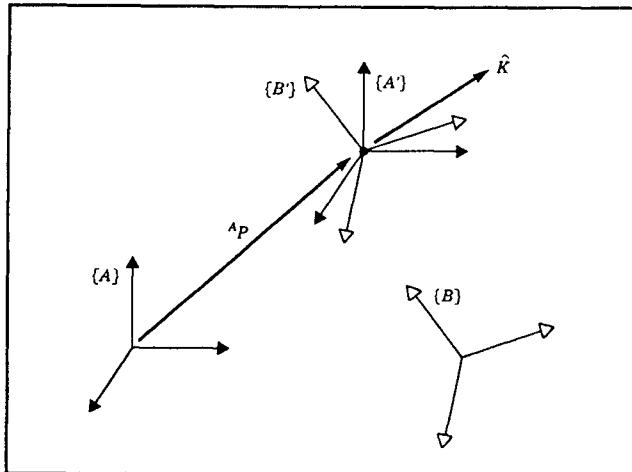
$${}_{B^T}^A = \begin{bmatrix} 0,933 & 0,067 & 0,354 & 0,0 \\ 0,067 & 0,933 & -0,354 & 0,0 \\ -0,354 & 0,354 & 0,866 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Aż do tego momentu, wszystkie rozpatrywane przez nas obroty były wykonywane wokół osi przechodzących przez początek układu odniesienia. W innych przypadkach problem możemy sprowadzić do zadania obrotu wokół osi przechodzącej przez początek układu poprzez wprowadzenie dodatkowych układów, których początki leżą na osi, a następnie rozwiązać równanie przekształcenia.

PRZYKŁAD 2.9

Układ $\{B\}$ opisano w następujący sposób: Układ $\{B\}$, pokrywający się początkowo z $\{A\}$, obracamy wokół wektora ${}^A\hat{\mathbf{k}} = [0, 0, 1]^T$, przechodzącego przez punkt ${}^A\mathbf{P} = [1, 0, 2]^T$, o kąt $\theta = \pi/6$. Znajdź opis (pozycji i orientacji) układu $\{B\}$.

Przed wykonaniem obrotu układy $\{A\}$ i $\{B\}$ pokrywają się. Tak, jak to pokazano na rys. 2.20, wprowadzamy dwa nowe układy $\{A'\}$ i $\{B'\}$, nie pokrywające się ze sobą, o orientacjach odpowiadających orientacjom układów $\{A\}$ i $\{B\}$, lecz przesunięte względem $\{A\}$ tak, aby ich początki znalazły się na osi obrotu. Znajdujemy



Rys. 2.20. Obrót wokół osi, nie przechodzącej przez początek układu $\{A\}$. Początkowo układ $\{B\}$ pokrywał się z $\{A\}$

$$\begin{matrix} A' \\ A' \end{matrix} T = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 2,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 3,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Podobnie opis $\{B\}$ względem $\{B'\}$

$$\begin{matrix} B' \\ B' \end{matrix} T = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & -2,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & -3,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Teraz, przy niezmienności innych zależności, możemy obrócić układ $\{B'\}$ względem $\{A'\}$. Obrót ten wykonujemy wokół osi przechodzącej przez początek układu, a zatem w celu znalezienia orientacji układu $\{B'\}$ względem $\{A'\}$ możemy skorzystać z zależności (2.80). Po podstawieniu danych do (2.80) otrzymuje się macierz obrotu jako część opisu układu. Z uwagi na to, że nie było przesunięcia początku układu, wektor położenia jest równy $[0 \ 0 \ 0]^T$. Zatem mamy

$$\begin{matrix} A' \\ B' \end{matrix} T = \begin{bmatrix} 0,933 & 0,067 & 0,354 & 0,0 \\ 0,067 & 0,933 & -0,354 & 0,0 \\ -0,354 & 0,354 & 0,866 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

W końcu, możemy napisać równanie przekształcenia w celu znalezienia szukanego układu

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} T = \begin{matrix} A \\ A' \end{matrix} T \begin{matrix} A' \\ B' \end{matrix} T \begin{matrix} B' \\ B \end{matrix} T \quad (2.87)$$

Po podstawieniu wartości

$$\begin{matrix} A_T \\ B \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0,933 & 0,067 & 0,354 & -1,13 \\ 0,067 & 0,933 & -0,354 & 1,13 \\ -0,354 & 0,354 & 0,866 & 0,05 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,00 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Obrót wokół osi, nie przechodzącej przez początek układu, pociąga za sobą zmianę pozycji oraz osiąganie ostatecznej orientacji identycznej z tą, jaka zostałaaby osiągnięta, gdyby osią przechodziła przez początek układu. Zwróci uwagę na to, że moglibyśmy przyjąć dowolną definicję dla $\{A'\}$ i $\{B'\}$, taką aby początki tych układów współrzędnych znajdowały się na osi obrotu. Nasz wybór szczególnej orientacji był dowolny, natomiast dokonany przez nas wybór pozycji początku układu był jednym z wielu możliwych punktów leżących na osi obrotu. Zobacz również ćwiczenie 2.14.

Parametry Eulera

Orientację można opisać również inaczej za pomocą czterech liczb nazywanych parametrami Eulera. Mimo że wyczerpujące rozważenie tego problemu wykracza poza ramy tej książki, wyjaśnimy poniżej tę konwencję w celu umożliwienia porównania jej z innymi.

W konwencji równoważnej osi $\hat{k} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$ oraz równoważnego kata θ , parametry Eulera określają następujące zależności

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= k_x \sin \frac{\theta}{2} \\ \epsilon_2 &= k_y \sin \frac{\theta}{2} \\ \epsilon_3 &= k_z \sin \frac{\theta}{2} \\ \epsilon_4 &= \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Jest oczywistym, że powyższe cztery wielkości nie są wielkościami niezależnymi, ponieważ równość

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = 1 \quad (2.90)$$

musi być zawsze spełniona. Stąd orientację można prezentować w postaci punktu na jednostkowej hipersferze w przestrzeni czterowymiarowej.

Czasem parametry Eulera są przedstawiane za pomocą wektora 3×1 oraz skalara. Parametry Eulera, przedstawione w postaci wektora 4×1 , są również znane pod nazwą jednostkowego kwaternionu.

Macierz obrotu R_ϵ , równoważna zbiorowi parametrów Eulera, wygląda następująco

$$R_{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1 - 2\epsilon_2^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3\epsilon_4) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_4) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Dla danej macierzy obrotu równoważnymi parametrami Eulera są

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{r_{32} - r_{23}}{4\epsilon_4} \\ \epsilon_2 &= \frac{r_{13} - r_{31}}{4\epsilon_4} \\ \epsilon_3 &= \frac{r_{21} - r_{12}}{4\epsilon_4} \\ \epsilon_4 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Zwróć uwagę na to, że zależności (2.92) nie są przydatne do obliczeń, jeśli macierz obrotu opisuje obrót o kąt π wokół pewnej osi, ze względu na to, że ϵ_4 dąży do zera. Jednak można wykazać, że w granicy wszystkie wyrażenia w (2.92) są skończone, łącznie z powyższym przypadkiem. Z definicji podanej w (2.89) wynika jasno, że wszystkie ϵ_i zawierają się w przedziale $[-1, 1]$.

Orientacje uzyskane przez nauczanie i wstępnie określone

W wielu układach zrobotyzowanych jest możliwość "uczenia się" pozycji i orientacji poprzez uczenie samego robota. Po przemieszczeniu manipulatora do żądanej pozycji, pozycja ta jest zapamiętywana. Położenie, wprowadzone metodą uczenia, niekoniecznie musi być tym położeniem, do którego robot ma wracać; może ono odpowiadać położeniu części lub uchwytu. Innymi słowy, robot jest używany w charakterze narzędzia pomiarowego o sześciu stopniach swobody. Wyżej wspomniane uczenie orientacji całkowicie eliminuje konieczność wnikania przez programistę w problem opisu orientacji. Położenie "uczonego" punktu jest wprowadzane do pamięci komputera w postaci macierzy obrotu lub czegoś podobnego, lecz użytkownik nigdy nie widzi tego ani nie zdaje sobie z tego sprawy. Stąd też bardzo zalecane jest stosowanie systemów zrobotyzowanych, mających możliwości uczenia się położień za pomocą robota.

Oprócz uczenia położen w pewnych systemach mogą występuwać zbiory zawsze określonych orientacji, jak np. "zwrot w dół" lub "zwrot w lewo". Instrukcje te są bardzo wygodne dla operatora posługującego się nimi. Jeśli jednak sposób ten jest jedynym środkiem opisywania i zadawania orientacji, to może on prowadzić do znacznego ograniczenia możliwości systemu.

2.9. PRZEKSZTAŁCENIE SWOBODNYCH WEKTORÓW

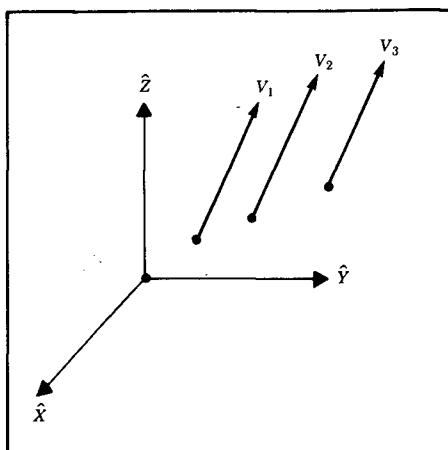
Dotychczas w tym rozdziale zajmowaliśmy się przede wszystkim wektorami pozyycji. W następnych rozdziałach będziemy zajmować się zarówno wektorami prędkości, jak i sił. Wektory te będące przekształcać w inny sposób, ponieważ są one wektorami innego typu.

W mechanice rozróżnia się pojęcia równości i równoważności wektorów. Dwa wektory są równe, jeśli mają taki sam moduł, kierunek i wymiar. Równe wektory mogą mieć różne linie działania, jak np. trzy równe wektory na rys. 2.21. Są to wektory prędkości, mające ten sam wymiar, kierunek i moduł. Zatem są one równe, zgodnie z naszą definicją.

Dwa wektory są równoważne, zgodnie z wybranym kryterium, jeśli skutki ich oddziaływania są identyczne. Zatem, jeśli wektory przedstawione na rys. 2.21 będące porównywać pod względem wielkości przesunięcia, to stwierdzimy, że wynik działania każdego z tych trzech wektorów jest taki sam. Zatem są one równoważne, zgodnie z powyższym kryterium. Jeśli natomiast kryterium będzie wysokość nad płaszczyzną xy, to wektory te nie są równoważne, mimo ich równości. Stąd związki równości lub równoważności wektorów zależą wyłącznie od sytuacji. Np. w pewnych przypadkach wektory nie spełniające warunku równości mogą wywoływać równoważny skutek.

Podamy teraz definicje dwóch podstawowych klas wielkości wektorowych.

Wektorem liniowym nazywamy wektor o określonym kierunku i wartości, a także zależy od linii jego działania, którego punkt przyłożenia wybiera się w momencie określenia skutków jego działania. Zazwyczaj skutek działania wektora siły zależy od linii jego działania (lub punktu przyłożenia), a zatem może być on traktowany jako wektor liniowy (przesuwalny).



Rys. 2.21. Równe wektory prędkości

Wektorem swobodnym nazywamy wektor, którego punkt przyłożenia można umieścić w dowolnym miejscu w przestrzeni przy zachowaniu zadanego kierunku i wartości.

Na przykład wektor czystego momentu jest zawsze wektorem swobodnym. Jeśli dany jest wektor momentu, B_N , określony w układzie $\{B\}$, to możemy znaleźć ten sam moment jako określony w układzie $\{A\}$ wg zależności

$${}^A_N = {}^A_R {}^B_N \quad (2.93)$$

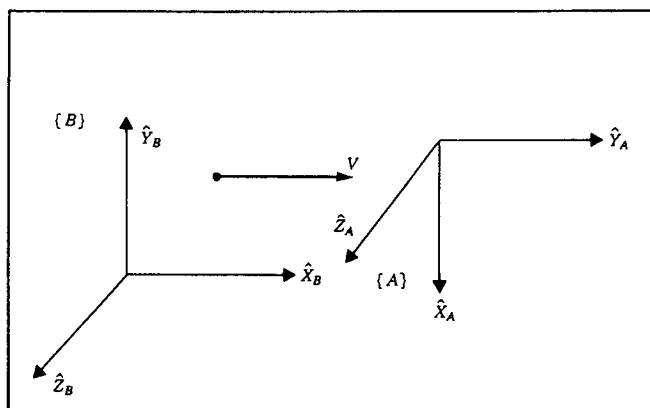
Jej postać wynika stąd, że obliczenia dotyczą tylko wartości i kierunku (w przypadku wektora swobodnego). Do przekształcenia wystarcza tylko macierz obrotu, określająca zależność między dwoma układami. W obliczeniach pomija się względne usytuowanie początków układów.

Podobnie wektor prędkości, opisany w układzie $\{B\}$ jako B_V , można opisać w układzie $\{A\}$ jako

$${}^A_V = {}^A_R {}^B_V \quad (2.94)$$

Prędkość punktu jest wektorem swobodnym, zatem jej istotnymi parametrami są jej kierunek i wartość. Operacja obrotu (jak w zależności (2.94)) nie wpływa na wartość wektora, lecz powoduje obrót, zmieniający opis wektora z układu $\{B\}$ do $\{A\}$. Zwróć uwagę na to, że wektor ${}^A_P_{BORG}$, który powinien wystąpić w przekształceniu wektora pozycji, nie występuje w przekształceniu wektora prędkości. Na przykład na rys. 2.22, jeśli ${}^B_V = 5\hat{x}$, to ${}^A_V = 5\hat{y}$.

Wektory prędkości oraz wektory sił i momentów zostaną wyczerpująco omówione w rozdziale 5.



Rys. 2.22. Przekształcenie prędkości

2.10. ZAGADNIENIA OBLICZENIOWE

Dostępność tanich środków obliczeniowych w znacznym stopniu decyduje o rozwoju przemysłu robotów; jeszcze przez pewien czas efektywność obliczeniowa pozostanie ważnym czynnikiem w projektowaniu układu manipulacyjnego.

Jednorodny opis przekształcenia jest stosowany do jednolitego przedstawiania pojęć i nie może być bezpośrednio używany w typowym oprogramowaniu, używanym w przemysłowych układach manipulacyjnych ze względu na zbyt długi czas tracony na operacje wielokrotnego mnożenia przez zero i jedynkę. Zwykle przeprowadza się obliczenia jak w zależnościach (2.41) i (2.45), zamiast bezpośredniego mnożenia lub odwracania macierzy 4×4 .

Kolejność przekształceń może mieć wpływ na liczbę operacji obliczeniowych niezbędnych do obliczenia określonej wielkości. Rozważmy przypadek wielokrotnego obracania wektora wg zależności

$$\overset{A}{P} = \begin{matrix} A_R \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \overset{B}{R} \overset{C}{R} \overset{D}{R} \overset{D}{P} \quad (2.95)$$

Jeden ze sposobów polega na przemnożeniu przez siebie trzech macierzy obrotu w celu znalezienia macierzy $\overset{A}{D}$ występującej w wyrażeniu

$$\overset{A}{P} = \begin{matrix} A_R \\ D \end{matrix} \overset{D}{P} \quad (2.96)$$

Znalezienie $\overset{A}{D}$ z jej trzech składników wymaga wykonania 54 mnożeń i 36 dodawań. Końcowe przemnożenie macierzy przez wektor (patrz (2.96)) wymaga wykonania dodatkowo 9 mnożeń i 6 dodawań, co w sumie daje 63 mnożenia i 42 dodawania.

Jeśli zamiast tego będziemy równocześnie wykonywać przekształcenia wektora przez macierze, tzn.

$$\begin{aligned} \overset{A}{P} &= \begin{matrix} A_R \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \overset{D}{P} \\ \overset{A}{P} &= \begin{matrix} A_R \\ B \\ C \end{matrix} \overset{B}{P} \\ \overset{A}{P} &= \begin{matrix} A_R \\ B \end{matrix} \overset{B}{P} \\ \overset{A}{P} &= \overset{A}{P} \end{aligned} \quad (2.97)$$

to znalezienie rozwiązania wymaga tylko 27 mnożeń i 18 dodawań, tzn. o ponad połowę obliczeń mniej niż w poprzedniej metodzie.

Oczywiście, w pewnych przypadkach zależności $\overset{A}{R}$, $\overset{B}{R}$ i $\overset{C}{R}$ mogą być stałymi, natomiast może wystąpić potrzeba przekształcenia wielu wektorów $\overset{D}{P}_i$ w $\overset{A}{P}_i$. W tym przypadku efektywniejszym sposobem jest obliczenie najpierw macierzy $\overset{A}{D}$, a następnie użycie jej w celu znalezienia kolejnych odwzorowań. Patrz również ćwiczenie 2.16.

PRZYKŁAD 2.10

Podaj metodę obliczania iloczynu dwóch macierzy obrotu, tzn. $\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}_R \begin{smallmatrix} B \\ C \end{smallmatrix}_R$, przy użyciu mniej niż 27 mnożeń i 18 dodawań.

Przyjmując, że \hat{L}_i odpowiada kolumnom $\begin{smallmatrix} B \\ C \end{smallmatrix}_R$, a \hat{C}_i - trzem kolumnom macierzy wynikowej, obliczamy

$$\begin{aligned}\hat{C}_1 &= \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}_R \hat{L}_1 \\ \hat{C}_2 &= \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}_R \hat{L}_2 \\ \hat{C}_3 &= \hat{C}_1 \times \hat{C}_2\end{aligned}\tag{2.98}$$

co wymaga 24 mnożeń i 15 dodawań.

Bibliografia

- [1] B.Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1969.
- [2] D.Ballard i C.Brown, *Computer Vision*, Prentice-Hall, 1982.
- [3] O.Bottema i B.Roth, *Theoretical Kinematics*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [4] R.P.Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, 1981.
- [5] I.Shames, *Engineering mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, 1967.
- [6] Symon, *Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley, 1971.
- [7] B.Gorla i M.Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.

Ćwiczenia

- 2.1. [15] Wektor $\begin{smallmatrix} A \\ P \end{smallmatrix}$ został najpierw obrócony wokół osi \hat{Z}_A o kąt θ radianów, a następnie wokół \hat{X}_A o kąt ϕ radianów. Znajdź macierz obrotu, realizującą te obroty w podanej kolejności.
- 2.2. [15] Wektor $\begin{smallmatrix} A \\ P \end{smallmatrix}$ został obrócony najpierw wokół osi \hat{Y}_A o kąt $\pi/6$, a następnie wokół osi \hat{X}_A o kąt $\pi/4$. Znajdź macierz obrotu, realizującą te obroty w podanej kolejności.
- 2.3. [16] Układ $\{B\}$ został usytuowany w następujący sposób: Układ $\{B\}$, pokrywający się początkowo z układem $\{A\}$, obrócono wokół osi \hat{Z}_B o kąt θ radianów, a następnie otrzymany układ obrócono wokół osi \hat{X}_B o kąt ϕ radianów. Znajdź macierz obrotu, zmieniającą opis wektorów z $\begin{smallmatrix} B \\ P \end{smallmatrix}$ w $\begin{smallmatrix} A \\ P \end{smallmatrix}$.
- 2.4. [16] Układ $\{B\}$ został usytuowany w następujący sposób: Układ $\{B\}$, pokrywający się początkowo z układem $\{A\}$, obrócono wokół osi \hat{Z}_B o kąt $\pi/6$, a następnie otrzymany układ obrócono wokół \hat{X}_B o kąt $\pi/4$. Znajdź macierz obrotu, zmieniającą opis wektorów z $\begin{smallmatrix} B \\ P \end{smallmatrix}$ w $\begin{smallmatrix} A \\ P \end{smallmatrix}$.

- 2.5. [13] $\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$ R jest macierzą 3×3 z wartościami własnymi $1, e^{+\alpha i}$ oraz $e^{-\alpha i}$, gdzie $i = \sqrt{-1}$. Jakie jest fizyczne znaczenie wektora własnego $\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$ R związanego z wartością własną 1?
- 2.6. [21] Wyprowadź równanie (2.80).
- 2.7. [24] Ułóż algorytm lub napisz program znajdowania równoważnego kąta i osi obrotu z macierzy obrotu. Zaczniź od równania (2.82), lecz upewnij się, jak twój algorytm reaguje na przypadki specjalne $\theta = 0$ i $\theta = \pi$.
- 2.8. [29] Napisz podprogram zmieniający opis orientacji z postaci macierzy obrotu na równoważną postać "kąt-os". Deklaracja procedury w języku Pascal mogłaby zaczynać się:

```
Procedure RMTOAA(VAR R:mat33; VAR K:vec3; VAR theta: real);
```

Napisz inny podprogram zmieniający równoważny opis w postaci "kąt-os" na opis w postaci macierzy obrotu:

```
Procedure AATORM(VAR K:vec3 VAR theta: real: VAR R:mat33);
```

Wykonaj te procedury jedna za drugą dla różnych przypadków danych testowych i sprawdź, czy otrzymany wynik jest zgodny z tym co wprowadziłeś. Uwzględnij również kilka trudnych przypadków!

- 2.9. [27] Wykonaj ćwiczenie 2.8 dla kątów przechylenia, pochylenia i skrętu wokół osi ustalonych.
- 2.10. [27] Wykonaj ćwiczenie 2.8 dla kątów Eulera Z-Y-Z.
- 2.11. [10] Podaj warunek, jaki musi być spełniony, aby dwie macierze obrotu opisujące skończone obroty uległy przestawieniu. Dowód nie jest wymagany.

- 2.12. [14] Dany jest wektor prędkości

$$\begin{smallmatrix} B \\ V \end{smallmatrix} = \begin{bmatrix} 10,0 \\ 20,0 \\ 30,0 \end{bmatrix}$$

oraz macierz

$$\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}_T = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 11,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & -3,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 9,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oblicz $\begin{smallmatrix} A \\ V \end{smallmatrix}$.

- 2.13. [21] W tym rozdziale podano definicje układów odniesień. Narysuj te układy (podobnie jak na rys 2.15) tak, aby można było ocenić jakościowo ich usytuowanie. Znajdź rozwiązanie dla $\begin{smallmatrix} B \\ C \end{smallmatrix}_T$.

$$U_T^A = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 11,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & -1,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 8,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_T^A = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0,0 \\ 0,000 & 0,866 & -0,500 & 10,0 \\ 0,000 & 0,500 & 0,866 & -20,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_T^U = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & -3,0 \\ 0,433 & 0,750 & -0,500 & -3,0 \\ 0,250 & 0,433 & 0,866 & 3,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.14. [31] Wyprowadź ogólny wzór na $\frac{A}{B}T$ dla przypadku, gdy układ $\{B\}$ początkowo pokrywający się z $\{A\}$ jest obracany o kąt θ wokół osi \hat{K} przechodzącej przez punkt A_P (na ogół nie przechodzącej przez początek układu $\{A\}$).

2.15. [34] $\{A\}$ i $\{B\}$ są układami różniącymi się tylko orientacją. Usytuowanie $\{B\}$ uzyskuje się następująco: Układ $\{B\}$, początkowo pokrywający się z $\{A\}$, jest obracany o kąt θ radianów wokół wersora \hat{K}

$$\frac{A}{B}R = \frac{A}{B}R_K(\theta)$$

Pokaż, że

$$\frac{A}{B}R = e^{K\theta}$$

gdzie

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$$

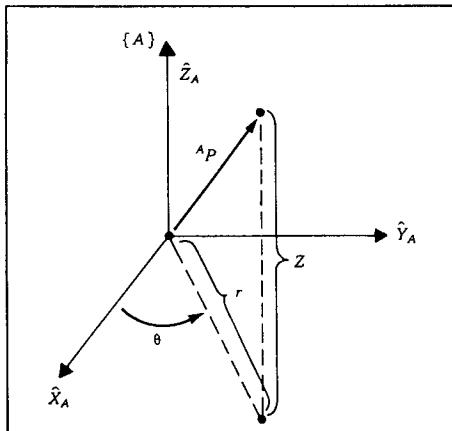
2.16. [22] Wektor A_P powinien być przekształcony przez trzy macierze obrotu

$$A_P = \frac{A}{B}R \frac{B}{C}R \frac{C}{D}R D_P$$

Jedna z możliwych metod rozwiązania polega na pomnożeniu przez siebie najpierw trzech macierzy obrotu w celu znalezienia $\frac{A}{D}R$ w wyrażeniu

$$A_P = \frac{A}{D}R D_P$$

Inna metoda polega na równoczesnym przekształceniu wektora przez macierze, a mianowicie



Rys. 2.23. Współrzędne cylindryczne

$${}^A_P = \begin{pmatrix} A_R & B_R & C_R & D_P \\ B & C & D & P \end{pmatrix}$$

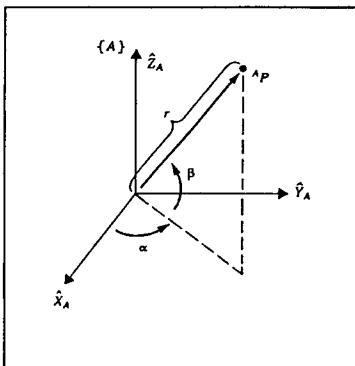
$${}^A_P = \begin{pmatrix} A_R & B_R & C_P \\ B & C & P \end{pmatrix}$$

$${}^A_P = \begin{pmatrix} A_R & B_P \\ B & P \end{pmatrix}$$

$${}^A_P = A_P$$

Obliczając A_P uwzględnij, że D_P zmienia się z częstotliwością 100 Hz. A równocześnie trzy macierze obrotu $\begin{pmatrix} A_R \\ B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B_R \\ C \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ są wyznaczane przez układ wizyjny co 30 Hz. Znajdź najlepszy sposób organizacji obliczeń, minimalizujący czas obliczeń (liczbę mnożeń i dodawań).

- 2.17. [16] Inny znany zbiór trzech współrzędnych, stosowany do opisu punktu w przestrzeni, to współrzędne cylindryczne. Trzy współrzędne definiuje się tak jak na rys. 2.23. Współrzędna θ określa kierunek w płaszczyźnie xy , zgodnie z którym następuje przemieszczenie wzdłuż promienia o wartość r . Rzędna Z określa wysokość nad płaszczyzną xy . Wyznacz współrzędne kartezjańskie punktu A_P w zależności od współrzędnych cylindrycznych θ , r i Z .
- 2.18. [18] Inny zbiór trzech współrzędnych, w którym opisuje się położenie punktu w przestrzeni, to współrzędne sferyczne. Trzy współrzędne definiuje się tak, jak to przedstawiono na rys. 2.24. Kąty α i β opisują azymut i wznieśienie promienia skierowanego w przestrzeni. Trzecia współrzędna r jest odlegością, mierzoną wzdłuż promienia, od początku układu do opisywanego punktu. Wyznacz współrzędne kartezjańskie punktu A_P w zależności od współrzędnych sferycznych α , β i r .
- 2.19. [24] Przedmiot jest obracany wokół jego osi \hat{x} o wartość ϕ , a następnie jest obracany wokół jego nowej osi \hat{y} o kąt ψ . Z naszych rozważań dotyczących kątów Eulera wiemy, że wynikową orientację określa



Rys. 2.24. Współrzędne sferyczne

$$R_x(\phi) R_y(\psi)$$

Natomiast, jeśli dwa obroty zostały wykonane wokół osi ustalonego układu odniesienia, wynik byłby następujący:

$$R_y(\psi) R_x(\phi)$$

Wynika stąd, że kolejność mnożeń zależy od tego, czy obroty są opisane względem ustalonych osi czy też względem osi układu przemieszczanego. Tym niemniej, w przypadku wyszczególniania obrotu wokół osi układu przemieszczanego, bardziej odpowiednim sposobem realizacji, jest wyszczególnienie obrotu w układzie ustalonym, określonym (dla tego przypadku) przez

$$R_x(\phi) R_y(\psi) R_x^{-1}(\phi)$$

To przekształcenie podobieństwa [1] pomnożone przez początkowe $R_x(\phi)$ z lewej strony sprowadza wyrażenie wynikowe do takiej postaci, jakby kolejność macierzy została odwrócona. Kierując się tym rozumowaniem, poważ wyprowadzenie dla postaci macierzy obrotu, równoważnej zbiorowi kątów Eulera Z-Y-Z(α, β, γ) (wynik podano wg zależności (2.72)).

2.20. [20] Wyobraź sobie obracanie wektora Q wokół wektora \hat{K} o wartość θ , mające na celu utworzenie nowego wektora Q' , a mianowicie

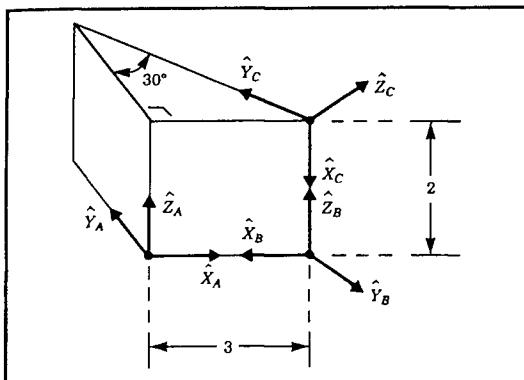
$$Q' = R_k(\theta)Q$$

Wyprowadź wzór Rodrigues'a, korzystając z zależności (2.80)

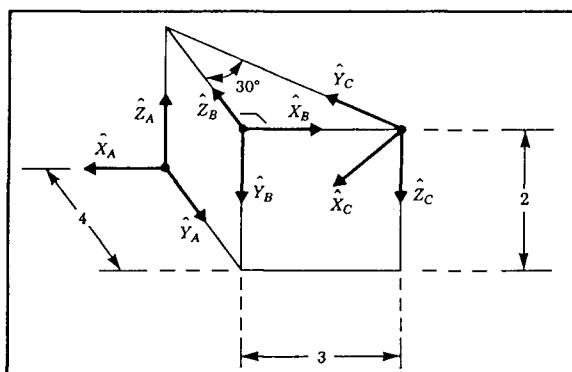
$$Q' = Q \cos \theta + \sin \theta (\hat{K} \times Q) + (1 - \cos \theta)(\hat{K} \cdot \hat{Q})\hat{K}$$

2.21. [15] Dla wystarczająco małych obrotów, dla których w przybliżeniu $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$ i $\theta^2 = 0$, wyprowadź macierz obrotu równoważną obrotowi o kąt θ wokół dowolnej osi \hat{K} . Zaczni j wyprowadzenie od (2.80).

2.22. [20] Korzystając z wyniku ćwiczenia 2.21 wykaż, że dwa nieskończenie małe obroty są zamienne (tzn. kolejność wykonywania takich obrotów jest dowolna).



Rys. 2.25. Układy odniesienia ulokowane w narożnikach klinu



Rys. 2.26. Układy odniesienia ulokowane w narożnikach klinu

2.23. [25] Podaj algorytm tworzenia definicji układu ${}^U_A T$, gdy dane są trzy punkty ${}^U P_1$, ${}^U P_2$ i ${}^U P_3$, przy czym wiadomo, że:

- 1) ${}^U P_1$ leży w początku $\{A\}$.
- 2) ${}^U P_2$ leży gdzieś po dodatniej stronie osi \hat{X} układu $\{A\}$.
- 3) ${}^U P_3$ leży w pobliżu dodatniej strony osi \hat{Y} w płaszczyźnie XY układu $\{A\}$.

2.24. [45] Udowodnij wzór Cayleya dotyczący własności macierzy ortonormalnych.

2.25. [30] Pokaż, że wartościami własnymi macierzy obrotu są 1 , $e^{\alpha i}$ i $e^{-\alpha i}$, gdzie $i = \sqrt{-1}$.

2.26. [33] Udowodnij, że każdy zespół kątów Eulera jest wystarczający do wyrażenia wszystkich możliwych macierzy obrotu.

2.27. [15] Dla warunków określonych na rys. 2.25 znajdź macierz ${}^A_B T$.

2.28. [15] Dla warunków określonych na rys. 2.25 podaj wartość ${}^A_C T$.

2.29. [15] Dla warunków przedstawionych na rys. 2.25 podaj wartość ${}^B_C T$.

2.30. [15] Dla warunków przedstawionych na rys. 2.25 znajdź wartość ${}^C_A T$.

- 2.31. [15] Dla warunków określonych na rys. 2.26 podaj wartość $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}_T$.
- 2.32. [15] Dla warunków określonych na rys. 2.26 znajdź wartość $\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}_T$.
- 2.33. [15] Dla warunków określonych na rys. 2.26 podaj wartość $\begin{matrix} B \\ C \end{matrix}_T$.
- 2.34. [15] Dla warunków określonych na rys. 2.26 znajdź wartość $\begin{matrix} C \\ A \end{matrix}_T$.
- 2.35. [20] Udowodnij, że wyznacznik każdej macierzy obrotu jest zawsze równy 1.

2.36. [36] Ciało sztywne, poruszające się na płaszczyźnie (tj. w przestrzeni 2-wymiarowej) ma trzy stopnie swobody. Ciało sztywne poruszające się w przestrzeni 3-wymiarowej ma 6 stopni swobody. Pokaż, że ciało w przestrzeni N -wymiarowej ma $\frac{1}{2}(N^2 + N)$ stopni swobody.

- 2.37. [15] Dana jest macierz

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}_T = \left[\begin{array}{cccc} 0,25 & 0,43 & 0,86 & 5,0 \\ 0,87 & -0,50 & 0,00 & -4,0 \\ 0,43 & 0,75 & -0,50 & 3,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Podaj wartość elementu $(2,4)$ macierzy $\begin{matrix} B \\ A \end{matrix}_T$.

- 2.38. [25] Wyobraź sobie dwa wersory v_1 i v_2 , związane z ciałem sztywnym. Zwróć uwagę na to, że niezależnie od obrotu ciała, kąt geometryczny między tymi wersorami nie zmienia się (tzn. obrót ciała sztywnego jest operacją "katowo-zachowawczą"). Korzystając z tego faktu podaj zwieżły (cztery lub pięć wierszy) dowód tego, że odwrócenie macierzy obrotu musi być równe jej transponowaniu oraz że macierz obrotu jest ortonormalna.

- 2.39. [37] Podaj algorytm (może być w postaci programu w języku Pascal) obliczania jednostkowego kwaternionu, odpowiadającego danej macierzy obrotu. Zaczniij od zależności (2.91).

- 2.40. [33] Podaj algorytm (może być w postaci programu w języku Pascal) obliczania kątów Eulera Z-X-Z, odpowiadających danej macierzy obrotu. Patrz załącznik B.

- 2.41. [33] Podaj algorytm (może być w postaci programu w języku Pascal) obliczania kątów ustalonych X-Y-X, odpowiadających danej macierzy obrotu. Patrz załącznik B.

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 2)

- Jeśli w twojej bibliotece funkcji brak jest podprogramu funkcji Atan2, to napisz go.
- W celu zapewnienia "przyjaznego" interfejsu postanowiliśmy opisywać orientacje w płaskim układzie tylko za pomocą jednego kąta θ , zamiast macierzy obrotu 2×2 . Użytkownik będzie zawsze porozumiewać się z ma-

szyną za pomocąkąta θ , natomiast wewnętrznie będzie nam potrzebna postać macierzy obrotu. Dla wektora pozycji, jako części macierzy położenia, użytkownik będzie podawał wartości x i y . Naszym zamiarem jest umożliwienie użytkownikowi opisywania układu za pomocą trójkii: (x, y, θ) . Wewnątrz będziemy stosować wektor pozycji 2×1 oraz macierz obrotu 2×2 , co wymaga opracowania programu przetwarzającego. Napisz program, którego zapis w Pascalu mógłby zaczynać się następująco:

```
Procedure UTOI(VAR uform: vec3; VAR iform: frame);
```

gdzie "UTOI" oznacza "Przekształcenie postaci użytkownika w postać wewnętrzną". Pierwszy argument jest 3-liczbowy (x, y, θ) , a drugi argument określa wydruk macierzy. Wydruk macierzy składa się z wektora pozycji 2×1 oraz macierzy obrotu 2×2 . Jeśli chcesz, możesz przedstawić blok w postaci macierzy (3×3) przekształcenia jednorodnego, w której trzeci wiersz ma postać $[0 \ 0 \ 1]$. Należy również opracować program odwrotny:

```
Procedure ITOU(VAR iform: frame; VAR uform: vec3);
```

3. Napisz podprogram mnożenia przez siebie dwóch macierzy przekształceń. Przyjmij następujący nagłówek procedury:

```
Procedure TMULT(VAR brela, crelb, crela: frame);
```

Pierwsze dwa argumenty określają wejście, a trzeci wyjście. Zwróć uwagę na to, że nazwy argumentów określają przeznaczenie programu ($brela = \frac{A}{B}T$).

4. Napisz podprogram odwracania macierzy przekształcenia. Przyjmij następujący nagłówek:

```
Procedure TINVERT(VAR brela, arelb: frame);
```

Pierwszy argument określa wejście, a drugi - wyjście. Zwróć uwagę na to, że nazwy argumentów określają przeznaczenie programu ($brela = \frac{A}{B}T$).

5. W tym rozdziale podane są definicje bloków. Bloki te stanowią wejście dla użytkownika $[x \ y \ \theta]$ (gdzie θ jest wyrażone w radianach). Przedstaw na rysunku te układy (podobnie jak na rys. 2.15, lecz tylko w dwóch wymiarach) tak, aby można było jakościowo ocenić ich rozmieszczenie. Napisz program wywołujący procedury TMULT i TINVERT (zdefiniowane powyżej w punktach 3 i 4) tyle razy, ile potrzeba do znalezienia $\frac{B}{C}T$.

$$\frac{U}{A}T = [x \ y \ \theta] = [11,0 \ -1,0 \ \pi/6],$$

$$\frac{B}{A}T = [x \ y \ \theta] = [0,0 \ 7,0 \ \pi/4],$$

$$\frac{C}{U}T = [x \ y \ \theta] = [-3,0 \ -3,0 \ -\pi/6].$$

Wydrukuj $\frac{B}{C}T$ zarówno w postaci wewnętrznej, jak i użytkownika.

3

KINEMATYKA MANIPULATORA

3.1. WPROWADZENIE

Kinematyka jest nauką, zajmującą się badaniem ruchu, bez wnikania w przyczyny ruch ten wywołujące. W zakresie kinematyki bada się położenie ciała, jego prędkość, przyśpieszenie oraz pochodne wyższych rzędów względem zmiennych położenia (względem czasu lub innej zmiennej albo zmiennych). Zatem w ramach kinematyki manipulatorów będziemy zajmować się wszystkimi geometrycznymi i czasowymi własnościami ruchu. Związkami między występującymi ruchami a siłami i momentami sił, wywołującymi te ruchy, zajmuje się dynamika, będąca przedmiotem rozdziału 6.

W tym rozdziale będziemy rozpatrywać położenie i orientację mechanizmów manipulatora w warunkach statycznych. Natomiast w rozdziałach 5 i 6 zajmiemy się kinematyką z uwzględnieniem prędkości i przyśpieszeń.

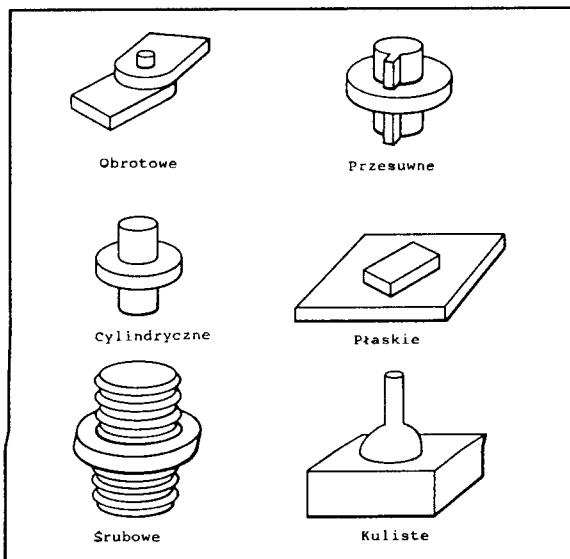
W celu stworzenia możliwości analizowania złożonej geometrii manipulatora będziemy przyłączać układy współrzędnych do różnych części manipulatora, a następnie opisywać zależności między nimi. Badanie kinematyki manipulatora, oprócz innych zagadnień, obejmuje również badanie zmian usytuowania tych układów współrzędnych podczas ruchu mechanizmu. W tym rozdziale szcze-

gólną uwagę poświęcono metodzie obliczania pozycji i orientacji organu roboczego manipulatora względem jego podstawy w funkcji zmiennych przemieszczeń w przegubach.

3.2. OPIS CZŁONU

Manipulator możemy sobie wyobrazić w postaci zbioru ciał (na ogół sztywnych), połączonych w łańcuch kinematyczny otwarty. Ciała te noszą nazwę członów. Połączenie ruchowe łączy dwa sąsiadujące ze sobą człony. **Parą niższego rzędu** określa się takie połączenie pary ciał, w którym ich wzajemny ruch opisują dwie współpracujące ze sobą powierzchnie. Na rys. 3.1 pokazano sześć możliwych połączeń ruchowych w postaci par kinematycznych niższego rzędu.

Z analizy rozwiązań mechanicznych manipulatorów wynika, że w ich konstrukcji na ogół stosuje się połączenia ruchowe o tylko jednym stopniu swobody. Większość manipulatorów ma **pary obrotowe** lub przesuwne zwane **postępowymi**. W wyjątkowym przypadku zastosowania w konstrukcji mechanizmu połączenia ruchowego o n stopniach swobody można go zamodelować w postaci n połączeń ruchowych, każdy o jednym stopniu swobody, połączonych $n-1$ członami o zerowej długości. Dzięki temu, nie zmniejszając ogólności rozważań, rozpatrzmy tylko manipulatory z połączeniami ruchowymi o jednym stopniu swobody.



Rys. 3.1. Sześć możliwych połączeń ruchowych niższego rzędu

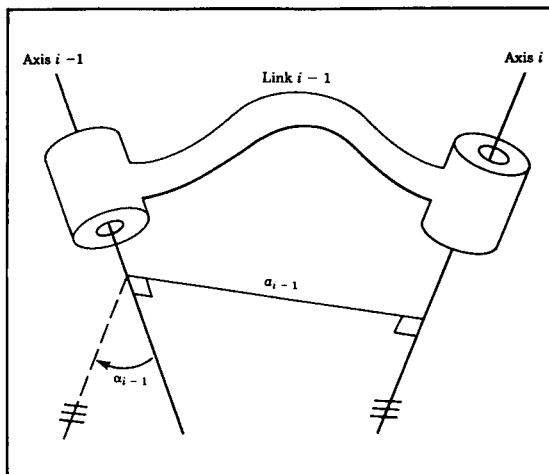
Człony numeruje się począwszy od nieruchomej podstawy ramienia, nazwanej członem 0. Do pierwszego, poruszającego się członu, przyporządkowuje się liczbę 1, oznaczającą człon 1. Podobnie postępujemy aż do osiągnięcia swobodnego końca ramienia, odpowiadającego członowi o numerze n . Do pozycjonowania końcówki wykonawczej w dowolnym punkcie przestrzeni 3-wymiarowej trzeba¹⁾ zastosować co najmniej łańcuch o sześciu połączeniach ruchowych. Typowy manipulator ma pięć lub sześć połączeń ruchowych. Obecnie, niektóre roboty nie mają prostej konstrukcji pojedynczego łańcucha kinematycznego, lecz mogą mieć mechanizmy równoległowodowe lub inne zamknięte łańcuchy kinematyczne. Jeden z takich manipulatorów opiszymy później w tym rozdziale.

Pojedynczy człon typowego robota ma wiele cech, o których konstruktor musiał zadecydować podczas jego projektowania. Zalicza się do nich typ zastosowanego materiału, wytrzymałość i sztywność członu, usytuowanie i typ łożysk przegubów, kształt zewnętrzny, ciężar i bezwładność itd. W celu znalezienia równań kinematyki mechanizmu człon traktowany jest wyłącznie jako ciało sztywne, określające związek między dwoma sąsiednimi osiami połączeń ruchowych manipulatora. Oś połączenia ruchowego i definiuje linia w przestrzeni lub kierunek wektora, wokół którego człon i obraca się względem członu $i-1$. Okazało się, że dla potrzeb kinematyki człon można opisać za pomocą dwóch liczb, określających względne usytuowanie dwóch osi w przestrzeni.

Dla każdych dwóch osi w przestrzeni trójwymiarowej istnieje dobrze określona miara odległości między nimi. Odległość tę mierzy się wzduż prostej prostopadłej równocześnie do obu osi. Ta prosta obustronnie prostopadła zawsze istnieje. Natomiast w przypadku, gdy obie osie są równoległe, to występuje wiele takich obustronnych prostopadłych o równej długości. Na rys. 3.2 przedstawiono człon $i-1$ oraz prostą obustronnie prostopadłą do osi, wzduż której mierzy się **długość członu a_{i-1}** . Inny sposób ułatwiający znalezienie parametru a_{i-1} polega na wyobrażeniu sobie cylindra o zwiększającej się średnicą, o osi pokrywającej się z osią pary obrotowej $i-1$. W momencie zetknięcia powierzchni cylindra z osią przegubu i promień cylindra odpowiada odległości a_{i-1} .

Drugi parametr, niezbędny do zdefiniowania względnego usytuowania dwóch osi, nazywany jest **kątem skręceniem członu**. Jeśli wyobrażmy sobie płaszczyznę, której normalna odpowiada dopiero co znalezionej obustronnie prostopadłej do osi połączeń ruchowych, a następnie zrzutujemy obie osie $i-1$ oraz i na tę płaszczyznę, to możemy zmierzyć kąt zawarty między nimi.

¹⁾ Jest to intuicyjnie poprawne, ponieważ do opisu obiektu w przestrzeni wymagane jest podanie sześciu parametrów – trzech dla pozycji i trzech dla orientacji.



Rys. 3.2. Funkcja kinematyczna członu polega na utrzymaniu stałej zależności między dwoma przegubów, które są z nim związane. Zależność ta może być opisana dwoma parametrami: długością członu a i kątem skręcenia α

Kąt ten jest mierzony w kierunku od osi $i-1$ do osi i , zgodnie z regułą prawej ręki wokół prostej a_{i-1} ²⁾. Zastosujemy tę definicję do kąta skręcenia członu $i-1$, α_{i-1} . Na rys. 3.2 kąt α_{i-1} odpowiada kątowi między osiami $i-1$ oraz i (gdzie linie równoległe oznaczono trzema kreskami). W przypadku przecinania się osi kąt skręcenia jest mierzony w płaszczyźnie zawierającej obie osie. Jednak nie można określić znaku α_{i-1} . W tym specjalnym przypadku znak kąta α_{i-1} można przyjąć dowolnie.

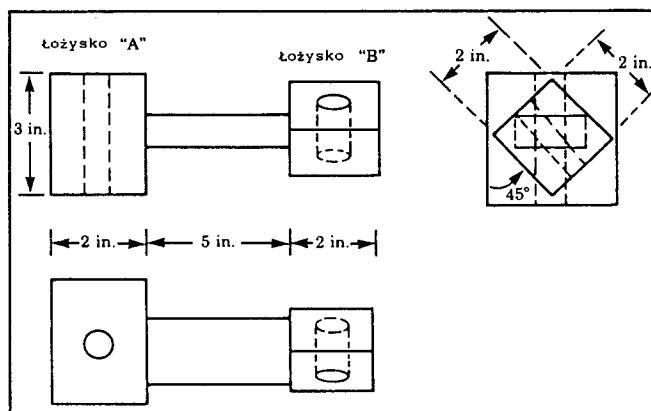
Czytelnik może przekonać się sam, że te dwa parametry, długość i kąt skręcenia, jak zdefiniowano powyżej, można stosować do określania zależności między dwoma dowolnymi prostymi (w tym przypadku osiami) w przestrzeni.

PRZYKŁAD 3.1

Na rys. 3.3 pokazano rysunek techniczny członu robota. Podaj długość i kąt skręcenia tego członu, jeśli po zamontowaniu w robocie łożysko "A" występuje w parze obrotowej o niższej liczbie porządkowej. Przyjmij, że otwory są usytuowane w osi symetrii każdego łożyska (podpory).

Po przeanalizowaniu rysunku stwierdzamy, że prosta obustronnie prostopadła do osi otworów leży w osi metalowego ogniwka łączącego łożyska. Stąd długość członu wynosi 0,176 m. Widok z prawej strony rysunku odpowiada rzeźbiowi łożysk na płaszczyźnie, której normalna pokrywa się z prostą obustronnie prostopadłą. Kąt skręcenia członu mierzy się zgodnie z regułą prawej ręki wokół prostej obustronnie prostopadłej, skierowanej od osi $i-1$ do osi i . Dla naszego przykładu kąt ten wynosi $+\pi/4$. ■

²⁾W tym przypadku prosta a_{i-1} jest skierowana od osi $i-1$ do osi i .



Rys. 3.3. Prosty człon, wiążący dwie pary obrotowe

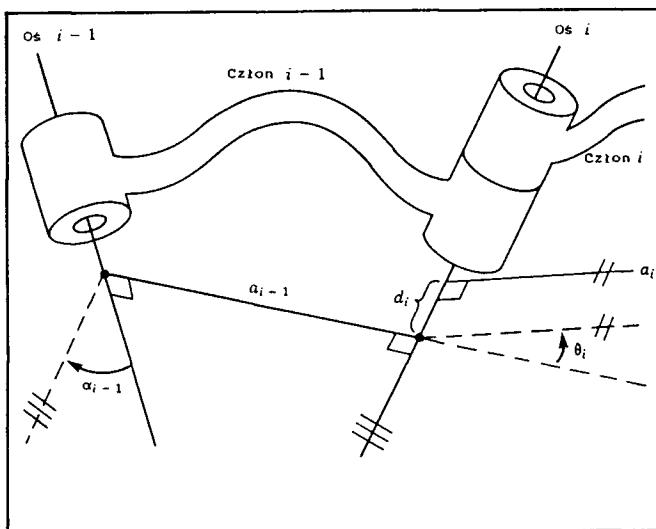
3.3. OPIS POŁĄCZEŃ CZŁONU

Rozwiązywanie zadania połączenia ze sobą członów robota wymaga od konstruktora podjęcia wielu kolejnych decyzji. Dotyczą one wytrzymałości połączeń, smarowania, łożyskowania oraz montażu przekładni itd. Tym niemniej, z punktu widzenia kinematyki będą nas interesować tylko dwie wielkości, wystarczające do pełnej identyfikacji sposobu połączenia ze sobą członów.

Pośrednie człony w łańcuchu

Dwa współpracujące ze sobą człony mają wspólną osь połączenia ruchowego. Pierwszy parametr połączenia członów określa odległość między nimi, mierzoną wzdłuż tej wspólnej osi. Parametr ten jest nazywany **odsunięciem członu**. Wielkość odsunięcia wzdłuż osi połączenia ruchowego i będziemy oznaczać przez d_i . Drugi parametr określa wartość kąta obrotu wokół tej wspólnej osi, o jaki obrócono względem siebie sąsiadujące człony. Parametr ten nazywa się **kątem konfiguracji członów połączenia ruchowego** i oznaczmy go przez θ_i .

Na rys. 3.4 pokazano połączenie członu $i-1$ z członem i . Przypominamy, że a_{i-1} jest prostą obustronnie prostopadłą do obu osi członu $i-1$. Podobnie a_i jest prostą obustronnie prostopadłą do osi członu i . Pierwszy parametr połączenia, tzn. odsunięcie członu d_i , określa odległość ze znakiem, mierzoną wzdłuż osi połączenia i od punktu, w którym a_{i-1} przecina tę osią, do punktu przecięcia prostej a_i ze wspólną osią. Odsunięcie d_i pokazano na rys. 3.4. Odsunięcie członu d_i jest zmienne, jeśli połączenie i jest przesuwna.



Rys. 3.4. Odsunięcie członu d oraz kąt θ konfiguracji pary obrotowej są tymi parametrami, za pomocą których można opisać istotę połączenia dwóch sąsiednich członów

Drugim parametrem połączenia jest kąt zawarty między przedłużeniem a_{i-1} oraz a_i , mierzony wokół osi połączenia i . Pokazano to na rys 3.4, przy czym dwoma kreskami oznaczono linie równoległe. Parametr ten oznaczono θ_i . Jest on zmienną konfiguracyjną dla pary obrotowej.

Pierwszy i ostatni człon w łańcuchu

Długość członu a_i i kąt skręcenia członu α_i zależą od wzajemnego położenia osi połączeń i oraz $i+1$. Stąd dla a_1, \dots, a_{n-1} oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ obowiązują definicje podane powyżej w tym podrozdziale. Zgodnie z przyjętą przez nas konwencją, na końcu łańcucha wielkości te przyjmują wartości zerowe. To znaczy $a_0 = a_n = 0$ i $\alpha_0 = \alpha_n = 0$ ³⁾. Odsunięcie członu d_i i kąt θ_i konfiguracji połączenia ruchowego są dobrze określone dla przegubów od 2 do $n-1$ zgodnie z zasadami omówionymi powyżej. Jeśli połączenie 1 jest parą obrotową, wówczas można dowolnie przyjąć zerową pozycję dla θ_1 , a $d_1 = 0$ będzie zgodne z naszą konwencją. Podobnie, jeśli połączenie 1 jest parą przesuwną, to położenie zerowe d_1 można przyjąć dowolnie, a $\theta_1 = 0$ będzie zgodne z naszą konwencją. Dokładnie to samo dotyczy połączenia n .

³⁾ W rzeczywistości a_n i α_n nie muszą być wcale definiowane.

Powyższe zasady opisu wybrano tak, aby w przypadku, gdy wielkość może być przyjęta dowolnie, została przyjęta wartość zerowa, dzięki czemu upraszcza się późniejsze obliczenia.

Parametry członu

A zatem kinematykę każdego robota można opisać przez podanie dla każdego członu wartości czterech parametrów. Pierwsze dwa opisują sam człon, a dwa następne - połączenie członu z sąsiednim członem. W zazwyczaj spotykanym przypadku pary obrotowej, θ_i jest zmienią konfiguracyjną, a pozostałe trzy wielkości są ustalonymi parametrami członu. Dla par przesuwnych d_i jest zmienią konfiguracyjną, a pozostałe trzy wielkości są ustalonymi parametrami członu. Określanie mechanizmów za pomocą tych wielkości odpowiada konwencji, znanej pod nazwą notacji Denavita-Hartenberga [1]⁴⁾. Można stosować również inne metody opisu mechanizmów, lecz nie prezentujemy ich w tej książce.

W tym podrozdziale możemy już podjąć się analizy każdego mechanizmu i określania opisujących go parametrów Denavita-Hartenberga. Pełny opis stałych parametrów kinematyki sześcioczłonowego manipulatora wymaga podania 18 liczb. W przypadku manipulatora sześcioczłonowego z wszystkimi parami obrotowymi te 18 liczb podaje się w postaci sześciu zbiorów (a_i , α_i , d_i).

PRZYKŁAD 3.2

Dwa człony, jak na rys. 3.3, połączono ze sobą jako człony 1 i 2 robota. Para obrotowa 2 składa się z łożyska "B" członu 1 i łożyska "A" członu 2, ułożonych tak, że płaskie powierzchnie łożysk "A" i "B" leżą naprzeciw siebie. Znajdź wartość d_2 .

Odsunięcie członu d_2 odpowiada odsunięciu w połączeniu 2, równemu odległości mierzonej wzdłuż osi pary obrotowej 2 między prostymi obustronnie prostopadłymi do osi członów 1 i 2. Z rys. 3.3 wynika, że wartość tego odsunięcia wynosi 0,063 m. ■

Zanim przejdziemy do następnych przykładów, podamy zasadę przywiązywania układu współrzędnych do każdego członu manipulatora.

⁴⁾ Wiele pokrewnych konwencji nosi nazwę konwencji Denavita-Hartenberga, lecz różnią się one od przyjętej przez nas w kilku szczegółach. Np. wersja przyjęta w tej książce różni się od niektórych wersji podanych w literaturze robotyki sposobem numeracji układów współrzędnych. W przeciwieństwie do pewnych innych konwencji w tej książce układ $\{i\}$ jest związany z członem i , a jego początek leży na osi przegubu i .

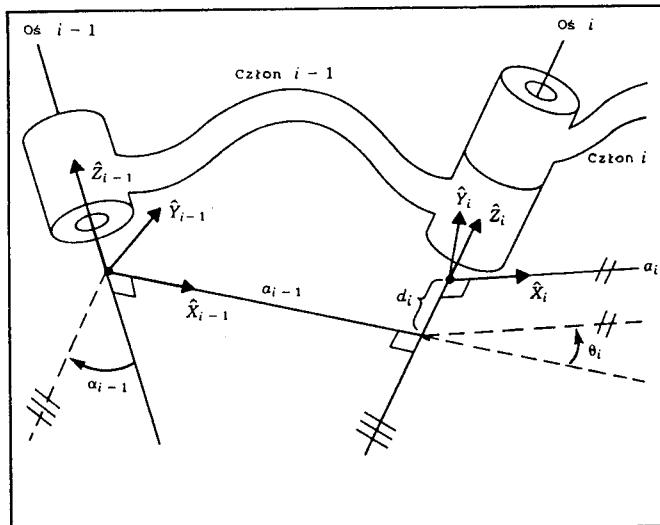
3.4. ZASADA PRZYWIĄZYWANIA UKŁADÓW WSPÓŁRZĘDNYCH DO CZŁONÓW

W celu opisania usytuowania każdego członu względem jego sąsiadów zdefiniujemy układy współrzędnych związane z każdym członem. Układy współrzędnych członów numeruje się tak samo jak człony, z którymi są związane. A zatem układ $\{i\}$ jest związany sztywno z członem i .

Pośrednie człony łańcucha

Będziemy stosować następującą zasadę przywiązywania układów współrzędnych do członów: Przyjmujemy, że oś \hat{Z} układu $\{i\}$, \hat{Z}_i , pokrywa się z osią połączenia i . Początek układu $\{i\}$ jest usytuowany w miejscu przecięcia osi połączenia i przez prostopadłą a_i . Oś \hat{X}_i pokrywa się z prostopadłą a_i i jest skierowana od połączenia i do połączenia $i+1$.

W przypadku gdy $a_i = 0$, \hat{X}_i jest normalną do płaszczyzny \hat{Z}_i i \hat{Z}_{i+1} . Wartość kąta α_i określamy zgodnie z regułą prawej ręki względem osi \hat{X}_i . W naszym przypadku wybór znaku kąta α_i zależy od przyjętego kierunku osi \hat{X}_i . Kierunek \hat{Y}_i przyjmuje się zgodnie z regułą prawej ręki jako uzupełnienie i -tego układu współrzędnych. Na rys. 3.5 przedstawiono usytuowanie układów $\{i-1\}$ oraz $\{i\}$ dla dowolnego manipulatora.



Rys. 3.5. Układy współrzędnych członów przyjmuje się tak, aby układ $\{i\}$ był przywiązywany sztywno do członu i

Pierwszy i ostatni człon łańcucha

Układ współrzędnych $\{0\}$ przywiązujemy do podstawy robota lub do członu 0. Układ ten nie porusza się i dla zadania kinematyki ramienia może być traktowany jako układ odniesienia. Możemy opisać położenie wszystkich innych układów współrzędnych członów względem tego układu.

Z uwagi na dowolność usytuowania układu $\{0\}$ złożoność problemu można uprościć, jeśli przyjmiemy, że os \hat{Z}_0 będzie pokrywać się z osią 1, a układ $\{0\}$ z układem $\{1\}$, o ile zmienna konfiguracyjna 1 jest równa zeru. Dzięki zastosowaniu tej konwencji będziemy zawsze mieć $a_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$. Dodatkowo uzyskujemy $d_1 = 0$ dla pary obrotowej lub $\theta_1 = 0$ dla pary przesuwnej.

Dla n -tej pary obrotowej kierunek \hat{X}_N wybiera się tak, aby przebiegał wzdłuż \hat{X}_{n-1} , o ile $\theta_n = 0$, a początek układu $\{N\}$ leży w punkcie przecięcia \hat{X}_{n-1} z osią połączenia n , gdy $d_n = 0$.

Omówienie parametrów członów na tle układów współrzędnych członów

Jeśli układy współrzędnych członów zostały związane z członami zgodnie z przyjętą przez nas konwencją, to uzyskamy następujące definicje parametrów członów:

- a_i - odległość od osi \hat{Z}_i do \hat{Z}_{i+1} mierzona wzdłuż osi \hat{X}_i ;
- α_i - kąt między osiami \hat{Z}_i i \hat{Z}_{i+1} mierzony wokół \hat{X}_i ;
- d_i - odległość od osi \hat{X}_{i-1} do \hat{X}_i mierzona wzdłuż \hat{Z}_i ;
- θ_i - kąt między osiami \hat{X}_{i-1} i \hat{X}_i mierzony wokół \hat{Z}_i .

Zwykle przyjmujemy $a_i > 0$, ponieważ parametr ten dotyczy odległości; natomiast α_i , d_i i θ_i są wielkościami ze znakami.

Stosowanie tej konwencji gwarantuje jednoznaczność. Przedstawiona wyżej konwencja nie wnika w szczegóły przywiązywania układów do członów. Najpierw w przypadku, gdy umieszczamy os \hat{Z}_i w osi połączenia i , wtedy występują dwie możliwości zwrotu osi \hat{Z}_i . Potem w przypadku przecinania się osi połączeń (tzn. gdy $a_i = 0$) pojawiają się dwie możliwości wyboru kierunku osi \hat{X}_i , odpowiednio do wyboru znaku normalnej do płaszczyzny zawierającej osie \hat{Z}_i i \hat{Z}_{i+1} . W przypadku równoległości osi i oraz $i+1$ wybór miejsca usytuowania początku układu współrzędnych $\{i\}$ jest dowolny (mimo że na ogół przyjmuje się je tak, aby d_i przyjmowało wartość zerową). Również w przypadkach występowania par przesuwnych występuje pewna swoboda wyboru miejsca przywiązania układu. (Patrz również przykład 3.5).

Podsumowanie procedury przywiązywania układu współrzędnych do członu

Poniżej podano procedurę postępowania, jaką stosuje się w celu właściwego przywiązywania układów współrzędnych do członów nowego (nieznanego) mechanizmu:

1. Zidentyfikuj osie połączeń i wybierz sobie (lub narysuj) odzwierciedlające je proste. Dla nich wymienionych kroków od 2 do 5, weź pod uwagę dwie sąsiednie proste (tzn. osie i oraz $i+1$).
2. Znajdź prostą obustronnie prostopadłą do nich lub punkt ich przecięcia. W punkcie ich przecięcia lub w punkcie przecięcia i -tej osi z prostą obustronnie prostopadłą przyjmij początek układu współrzędnych członu.
3. Wybierz osią \hat{Z}_i w osi i -tego połączenia.
4. Wybierz osią \hat{X}_i wzdłuż prostej obustronnie prostopadłej lub jeśli osie przecinają się, przyjmij \hat{X}_i jako normalną do płaszczyzny zawierającej te dwie osie.
5. Wybierz osią \hat{Y}_i tak, aby uzupełniała prawoskrętny układ współrzędnych.
6. Przyjmij, że układ $\{0\}$ pokrywa się z układem $\{1\}$, gdy zmienna pierwszego połączenia jest równa zero. Wybierz dowolnie usytuowanie początku układu $\{N\}$ i zwrot osi \hat{X}_N , tak aby spowodować zerowanie się możliwie największej liczby parametrów.

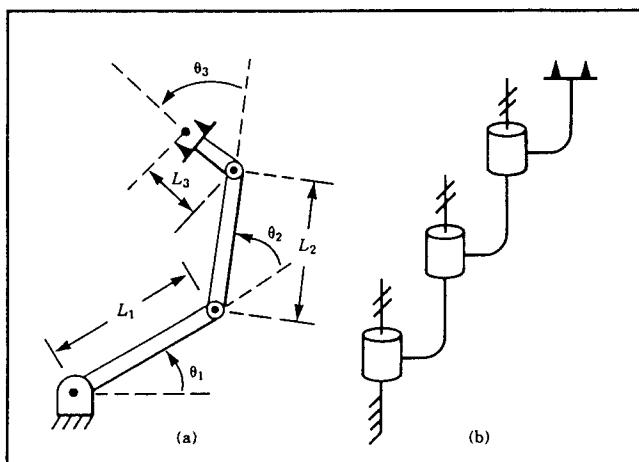
PRZYKŁAD 3.3

Na rys. 3.6a przedstawiono trójczłonowe płaskie ramię. Z uwagi na to, że wszystkie trzy pary są obrotowe, manipulator ten jest czasem nazywany manipulatorem RRR (lub 3R)⁵⁾. Na rys. 3.6b podano schemat tego manipulatora. Zwróć uwagę na podwójne kreski, umieszczone na każdej z trzech osi; informują one o równoległości tych osi. Przyporządkuj układy współrzędnych do członów mechanizmu i określ parametry Denavita-Hartenberga.

Zacznijmy od zdefiniowania układu odniesienia, tzn. układu $\{0\}$. Przywiązuje się go do podstawy tak, aby pokrywał się z układem $\{1\}$, jeśli pierwsza zmienna konfiguracyjna (θ_1) ma wartość zerową. Kierując się tym, umieszczamy układ $\{0\}$ tak, jak pokazano na rys. 3.7, z osią \hat{Z}_0 pokrywającą się z osią połączenia 1. Wszystkie osie połączeń tego ramienia są skierowane prostopadle do płaszczyzny ramienia. Ponieważ ramię jest płaskie i ma wszystkie osie \hat{Z} równoległe, zatem nie występują odsunięcia członów (każde d_i jest równe zero). Z uwagi na to, że wszystkie połączenia są parami obrotowymi, to w przypadku, gdy znajdują się w położeniach zerowych, wszystkie osie \hat{X} będą pokrywać się ze sobą. Korzystając z tych uwag można łatwo znaleźć przyporządkowania układów pokazane na rys. 3.7. Odpowiadające parametry członów wyspecyfikowano na rys. 3.8.

Zwróć uwagę na to, że w przypadku gdy osie połączeń są równoległe, to wszystkie osie \hat{Z} są skierowane na zewnątrz strony książki, a wszystkie katy

⁵⁾ R - od słowa revolute (ang.) - obrotowy - przyp. tłum.



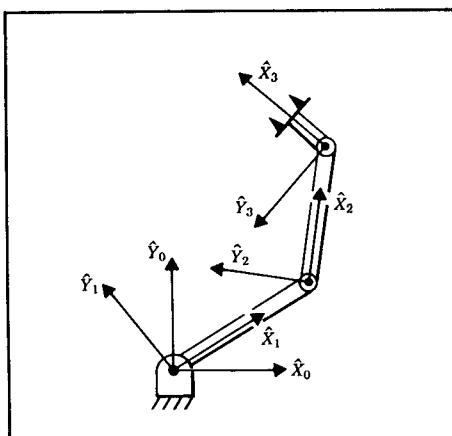
Rys. 3.6. Płaski manipulator trójczłonowy. Z prawej strony przedstawiono ten sam manipulator w postaci prostego schematu. Dwie kreski naniesione na osiach informują o wzajemnej równoległości osi

α_i są równe zero. Jest to oczywiście bardzo prosty mechanizm. Z pewnością zwróciłeś uwagę na to, że nasza analiza kinematyczna zwykle kończy się na układzie, którego początek leży w osi ostatniego połączenia, zatem l_3 nie wystąpił wśród parametrów członu. Później, osobno zajmiemy się odsunięciem układu współrzędnych chwytaka. ■

PRZYKŁAD 3.4

Na rys. 3.9a przedstawiono robot o trzech stopniach swobody i jednej parze przesuwnej. Manipulator ten będziemy nazywać "mechanizmem RPR"⁶⁾. Zapis ten określa zarówno typ, jak i kolejność połączeń. Jest to manipulator "cyllindryczny", ponieważ jeśli spojrzymy na niego z góry, to zobaczymy, że pierwsze dwa połączenia odpowiadają wspólnym biegunkiem. Ostatnie, trzecie połączenie odpowiada za obrót w osi ręki. Na rys. 3.9b przedstawiono schematycznie ten sam manipulator. Zwróć uwagę na symbol stosowany do przedstawiania par przesuwnych oraz na to, że znaku "kropki" używa się do oznaczania punktu przecięcia dwóch sąsiednich osi. Zaznaczono również prostopadłość osi 1 i 2. Na rys. 3.10a pokazano manipulator z minimalnie wysuniętą parą przesuwną. Natomiast na rys. 3.10b - przyporządkowanie układów współrzędnych do członów.

⁶⁾ RPR - oznaczenia par: obrotowa, przesuwna, obrotowa (revolute, prismatic, revolute (ang.)) - przyp. tłum.

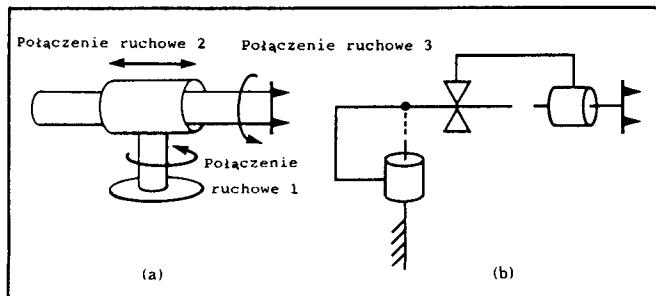


Rys. 3.7. Przyporządkowanie układów współrzędnych do członów

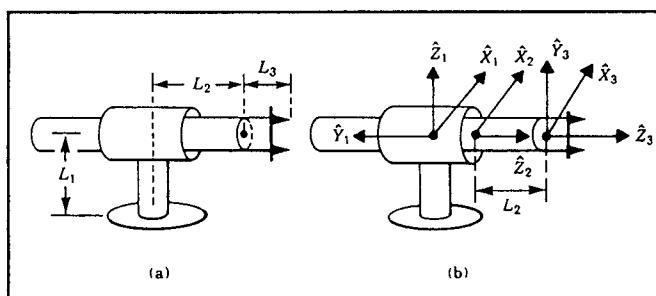
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

Rys. 3.8. Parametry członów manipulatora płaskiego 3-członowego

Zauważ, że na tym rysunku układy $\{0\}$ i $\{1\}$ pokrywają się, ponieważ robot został narysowany w położeniu $\theta_1 = 0$. Zwróć uwagę na to, że mimo nieprzywiązywania układu $\{0\}$ w dolnej części kołnierza podstawy robota, jest on sztywno przyłączany do członu 0, nieruchomej części robota. Tak jak w przypadku ograniczenia się do opisu kinematyki ramienia nie interesuje nas lokalizacja układu współrzędnych członu - chwytyka, nie jesteśmy również zainteresowani umieszczeniem układu współrzędnych podstawy robota w jej najwyżej położonym punkcie. Wystarcza, aby układ $\{0\}$ był przyłączany w dowolnym miejscu do nieruchomego członu 0 oraz aby układ $\{N\}$ (ostatni) był przyłączany w dowolnym miejscu ostatniego członu manipulatora. Inne odsunięcia zostaną omówione później w uogólniony sposób.



Rys. 3.9. Manipulator o trzech stopniach swobody i jednej parze przesuwnej



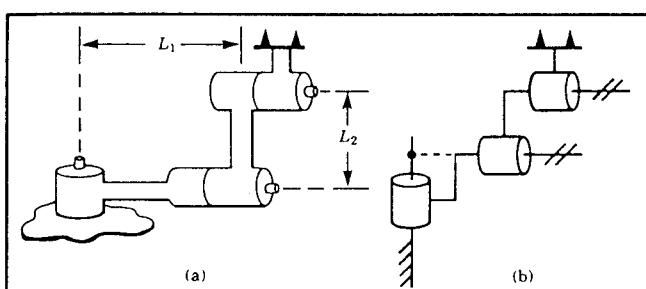
Rys. 3.10. Przyporządkowanie układów odniesienia do członów

Zauważ, że równocześnie występują: obrót w parze obrotowej wokół osi \hat{Z} związanego z nią układu współrzędnych oraz przesunięcie w parze przesuwnej wzduł \hat{Z} . W przypadku, gdy para i jest przesuwna, θ_i jest stała, a d_i - zmienna. Jeśli d_i jest równe zero przy minimalnym wysunięciu członu, to układ $\{2\}$ powinien być przywiązyany tak, jak to pokazano na rysunku, aby parametr d_2 odzwierciedlał rzeczywiste odsunięcie. Parametry członów zestawiono na rys. 3.11.

Zauważ, że dla tego robota θ_2 jest równe zeru, a d_2 jest zmienna. Osie 1 i 2 przecinają się, stąd a_1 jest równe zeru. Kąt α_1 musi wynosić $\pi/2$, aby po obrocie (wokół X_1) os \hat{Z}_1 pokryła się z \hat{Z}_2 .

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

Rys. 3.11. Parametry członów manipulatora RPR z przykładu 3.4



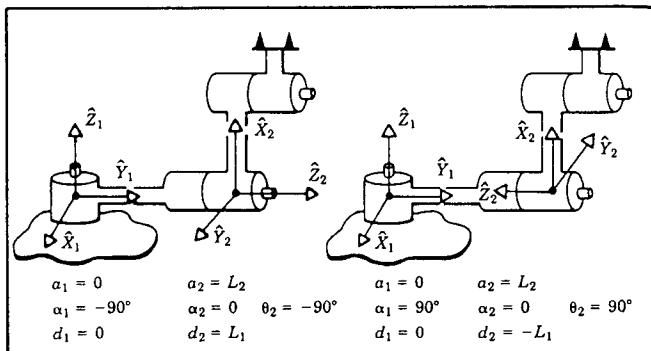
Rys. 3.12. Przestrzenny manipulator 3-członowy

PRZYKŁAD 3.5

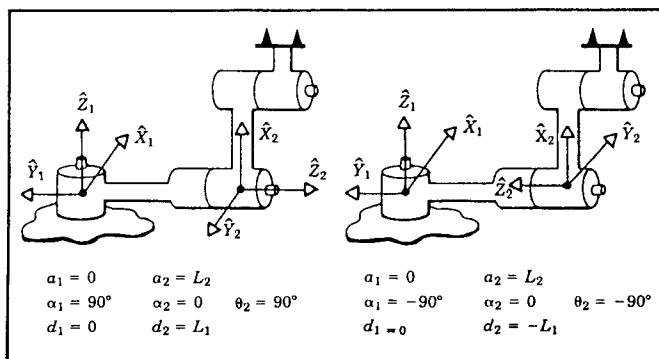
Na rys. 3.12a przedstawiono 3-członowy manipulator typu 3R, u którego osie par obrotowych 1 i 2 przecinają się, a osie 2 i 3 są równoległe. Natomiast na rys. 3.12b - schemat kinematyczny tego manipulatora. Zwróć uwagę na to, jak schematycznie zaznaczono prostopadłość dwóch pierwszych osi oraz równoległość dwóch następnych.

Wykaż istnienie różnych możliwości przywiązywania układów współrzędnych i parametrów Denavita- Hartenberga, pokazując kilka możliwych, poprawnych usytuowań układów {1} i {2}.

Na rys. 3.13 pokazano dwa możliwe przyporządkowania układów wraz z odpowiadającymi im parametrami dla dwóch możliwych kierunków \hat{Z}_2 .



Rys. 3.13. Dwa możliwe sposoby przyporządkowania układów odniesienia



Rys. 3.14. Kolejne dwa możliwe sposoby przyporządkowania układów odniesienia

Zwykle w przypadku przecinania się osi \hat{Z}_i i \hat{Z}_{i+1} występują dwie możliwości wyboru zwrotu osi \hat{X}_i . W naszym przykładzie osie połączeń 1 i 2 przecinają się, a zatem istnieją dwie możliwości wyboru zwrotu osi \hat{X}_1 . Na rys. 3.14 pokazano kolejne dwa możliwe sposoby przyporządkowania układów odpowiadające drugiemu wyborowi \hat{X}_1 .

Oprócz tego istnieją jeszcze cztery następne warianty, różniące się od wyżej przedstawionych przeciwnym zwrotem osi \hat{Z}_1 . ■

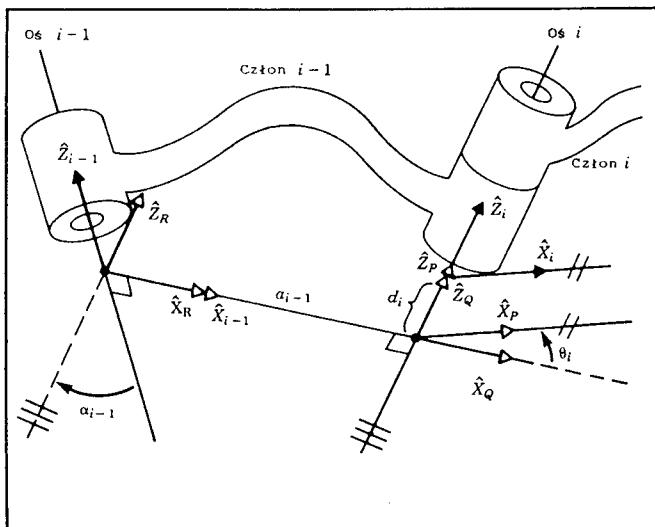
3.5. KINEMATYKA MANIPULATORA

W tym podrozdziale wyprowadziliśmy ogólną postać przekształcenia, określającego związek między układami odniesienia, związanymi z sąsiednimi członami. Połączymy te odrębne przekształcenia w celu określenia pozycji i orientacji członu i względem członu 0.

Wyprowadzenie przekształceń dla poszczególnych członów

Naszym zadaniem jest znalezienie przekształcenia, określającego układ $\{i\}$ względem układu $\{i-1\}$. Na ogół przekształcenie to będzie funkcją czterech parametrów członu. Dla każdego danego robota przekształcenie to będzie funkcją tylko jednej zmiennej, pozostałe trzy parametry są ustalone i wynikają z konstrukcji mechanicznej. Określając układ odniesienia dla każdego członu dokonaliśmy podziału zadania kinematyki na n podzadań. W celu rozwiązania każdego z tych podzadań, przykładowo ${}_{i-1}^i T$, podzielimy każde z nich na cztery pod-podzadania. Każde z tych czterech przekształceń będzie funkcją tylko jednego parametru członu i będzie na tyle proste, że będziemy mogli napisać jego postać przez sprawdzenie. Zaczniemy od zdefiniowania trzech pośrednich układów współrzędnych dla każdego członu, a mianowicie: $\{P\}$, $\{Q\}$ i $\{R\}$.

Na rys. 3.15 pokazano ponownie ten sam człon z parami obrotowymi i zdefiniowanymi układami współrzędnych $\{P\}$, $\{Q\}$ i $\{R\}$. W celu zachowania przejrzystości rysunku pokazano tylko osie \hat{X} i \hat{Z} dla każdego układu odniesienia.



Rys. 3.15. Usytuowanie pośrednich układów odniesienia $\{P\}$, $\{Q\}$ i $\{R\}$

Układ $\{R\}$ jest obrócony względem układu $\{i-1\}$ o kąt α_{i-1} . Natomiast układ $\{Q\}$ jest przesunięty w stosunku do układu $\{R\}$ na odległość a_{i-1} . Układ $\{P\}$ jest obrócony względem $\{Q\}$ o kąt θ_i , a układ $\{i\}$ jest przesunięty względem $\{P\}$ na odległość d_i . Przekształcenie opisu wektorów z układu $\{i\}$ do układu $\{i-1\}$ możemy zapisać w postaci:

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}T \begin{matrix} R \\ Q \\ P \end{matrix} {}^P T {}^i T {}_i P \quad (3.1)$$

lub

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}T {}^i P \quad (3.2)$$

gdzie

$${}^i T = {}^{i-1}T \begin{matrix} R \\ Q \\ P \end{matrix} {}^P T {}^i T \quad (3.3)$$

Po bliższym rozważeniu każdego z tych przekształceń zauważamy, że zależność (3.3) można zapisać w postaci

$${}^i T = R_X(\alpha_{i-1}) D_X(a_{i-1}) R_Z(\theta_i) D_Z(d_i) \quad (3.4)$$

lub

$${}^i T = \text{Skręt}_X(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Skręt}_Z(d_i, \theta_i) \quad (3.5)$$

gdzie Skręt $_Q(r, \phi)$ oznacza równoczesne przesunięcie wzduż osi \hat{Q} na odległość r i obrót wokół tej samej osi o kąt ϕ . Po wykonaniu mnożeń w zależności (3.4) uzyskujemy ogólną zależność dla ${}^i T$

$${}^i T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

PRZYKŁAD 3.6

Znajdź cząstkowe przekształcenia dla każdego członu robota z rys. 3.9, dla którego parametry członów zestawiono na rys. 3.11.

Po podstawieniu parametrów do zależności (3.6) otrzymamy

$$\begin{aligned} {}^0 T &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^1 T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^2 T &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Po wyprowadzeniu tych przekształceń dla każdego z członów zaleca się sprawdzenie ich poprawności. Na przykład elementy czwartej kolumny każdego z przekształceń powinny odpowiadać współrzednym początku następnego "wyższego" układu odniesienia. ■

Złożenie przekształceń cząstkowych

Po zdefiniowaniu układów współrzędnych członów i znalezieniu odpowiednich parametrów członów ułożenie równań kinematyki jest proste. Znajomość wartości parametrów członów umożliwia znalezienie macierzy przekształceń dla poszczególnych członów. Następnie możemy wyznaczyć iloczyn przekształceń członów w celu znalezienia sumarycznego przekształcenia, określającego położenie układu $\{N\}$ względem układu $\{0\}$

$$\begin{matrix} 0 \\ N \end{matrix}^T = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}^T \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}^T \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}^T \cdots \begin{matrix} N-1 \\ N \end{matrix}^T \quad (3.8)$$

Przekształcenie to, zapisane w postaci macierzy $\begin{matrix} 0 \\ N \end{matrix}^T$, będzie funkcją wszystkich n zmiennych konfiguracyjnych. Znajomość przekształcenia $\begin{matrix} 0 \\ N \end{matrix}^T$ umożliwia obliczenie kartezjańskich współrzędnych pozycji i orientacji ostatniego członu w przypadku zainstalowania sensorów pozycji w połączeniach robota.

3.6. PRZESTRZENIE NAPĘDÓW, PRZEGUBÓW I KARTEZJAŃSKA

Pozycje wszystkich członów manipulatora o n stopniach swobody można zestawić w postaci zbioru n zmiennych połączeń ruchowych. Ten zbiór zmiennych jest często przedstawiany w postaci wektora $n \times 1$ współrzędnych konfiguracyjnych. Przestrzeń wszystkich takich wektorów określa się mianem przestrzeni konfiguracyjnej. Dotychczas w tym rozdziale zajmowaliśmy się znajdowaniem opisu przestrzeni kartezjańskiej w oparciu o znajomość przestrzeni konfiguracyjnej. Pojęciem przestrzeni kartezjańskiej posługujemy się wtedy, gdy pozycja określona jest względem osi prostopadłych, a orientacja - zgodnie z jedną z konwencji przedstawionych w rozdziale 2. Czasami to, co my będziemy nazywać przestrzenią kartezjańską, określone jest pojęciem przestrzeni zorientowanej na realizację określonego zadania lub przestrzeni operacyjnej.

Dotychczas zakładaliśmy implicite, że każde połączenie ruchowe jest napędzane bezpośrednio przez napęd określonego rodzaju, co nie ma miejsca w przypadku wielu robotów przemysłowych. Przykładowo dwa układy napędowe poprzez przekładnię różnicową napędzają jedno połączenie ruchowe. Niekiedy stosuje się silowniki napędzające połączenie ruchowe za pomocą mechanizmu czteroczlonowego. W takich przypadkach dogodnie jest operować pojęciem pozycji napędów. Z uwagi na to, że czujniki mierzące pozycję manipulatora

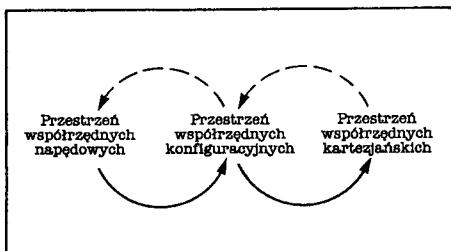
często są zainstalowane przy napędach, konieczne jest wykonanie pewnych obliczeń w celu znalezienia wektora współrzędnych konfiguracyjnych, będącego funkcją zbioru współrzędnych napędowych lub wektora **współrzędnych napędowych**.

Występują trzy reprezentacje pozycji i orientacji manipulatora (patrz rys. 3.16): opisy w przestrzeni współrzędnych napędowych, konfiguracyjnych i kartezjańskich. W tym rozdziale przedmiotem naszego zainteresowania są przekształcenia reprezentacji oznaczone strzałkami, narysowanymi linią ciągłą na rys. 3.16. W rozdz. 4 zajmiemy się przekształceniemi odwrotnymi, oznaczonymi na rysunku linią przerywaną.

Spotyka się różne sposoby przyłączenia napędów do połączeń ruchowych i chociaż można je skatalogować, nie zrobimy tego tutaj. Dla każdego projektowanego lub analizowanego manipulatora musimy znaleźć zależności między współrzędnymi napędowymi i konfiguracyjnymi. W następnym podrozdziale rozwiążemy takie zadanie dla przykładowego robota przemysłowego.

3.7. PRZYKŁADY: KINEMATYKA DWÓCH ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH

Współczesne roboty przemysłowe występują w wielu konfiguracjach kinematycznych [2], [3]. W tym podrozdziale przeanalizujemy kinematykę dwóch typowych robotów przemysłowych. Najpierw zajmiemy się manipulatorem z parami obrotowymi i sześcioma stopniami swobody, o nazwie PUMA 560, firmy Unimation. Rozwiążemy równania kinematyki w postaci funkcji kątów konfiguracyjnych par obrotowych. W tym przykładzie nie będziemy rozpatrywać zależności między współrzędnymi napędowymi i konfiguracyjnymi. Następnie rozważymy robot o pięciu stopniach swobody i parach obrotowych, Yasukawa Motoman L-3. Przykład ten rozwiązano szczegółowo, z uwzględnieniem przekształceń współrzędnych napędowych i konfiguracyjnych. Przykład ten można pominać przy pierwszym czytaniu książki.

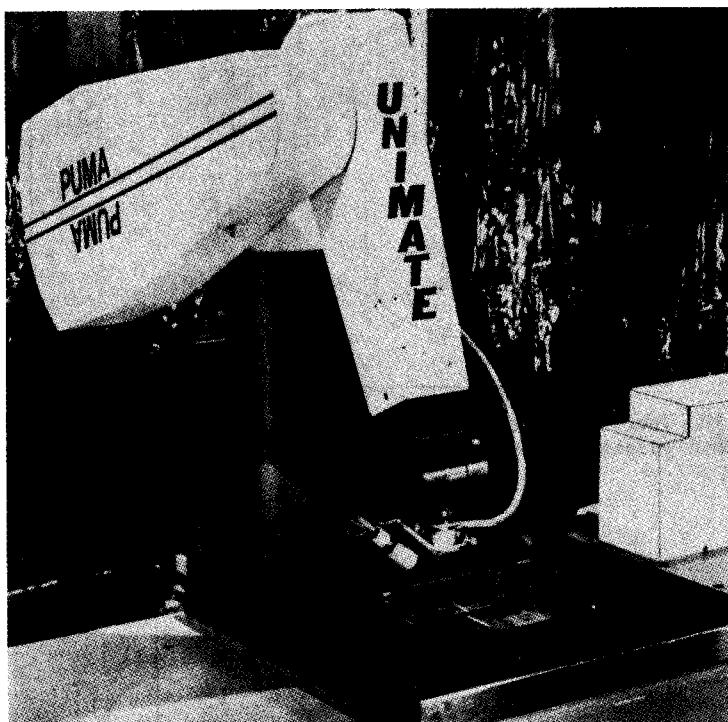


Rys. 3.16. Przekształcenia współrzędnych kinematycznych

PUMA 560

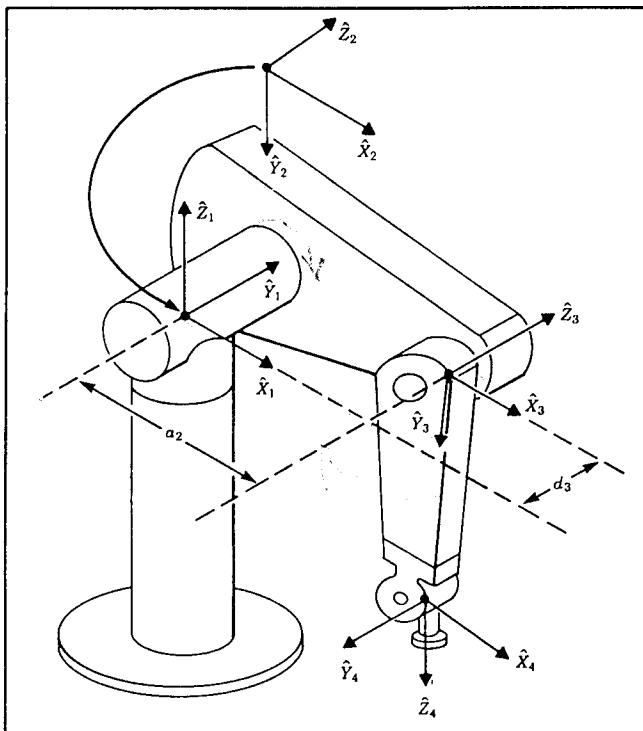
Robot PUMA 560 (rys. 3.17) firmy Unimation jest robotem o sześciu stopniach swobody i połączeniach ruchowych w postaci par obrotowych (tzn. jest manipulatorem typu 6R). Na rys. 3.18. przedstawiono ten robot wraz z układami współrzędnych, przyporządkowanymi do członów w taki sposób, aby wszystkie kąty konfiguracyjne były równe零⁷⁾. Na rys. 3.19 pokazano szczegół przedramienia robota.

Układ współrzędnych {0} (nie pokazany na rysunku) pokrywa się z układem {1}, gdy $\theta_1 = 0$. Zwróć uwagę na to, że w tym robocie, podobnie jak w wielu innych robotach przemysłowych, osie par obrotowych 4, 5 i 6 przecinają się w jednym punkcie, pokrywającym się z początkami układów odniesienia {4}, {5} i {6}. Ponadto osie par obrotowych 4, 5 i 6 są wzajemnie prostopadłe. Mechanizm kiści przedstawiono schematycznie na rys. 3.20.

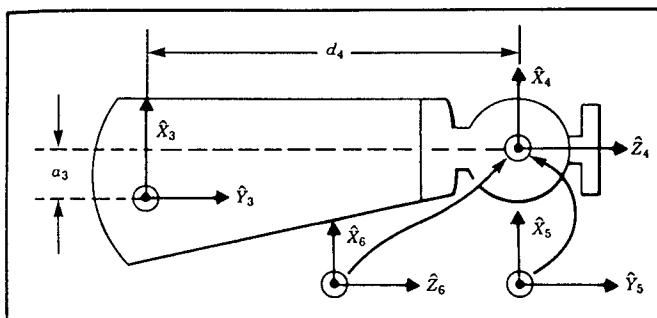


Rys. 3.17. Robot PUMA 560 firmy Unimation
Za zgódą Unimation Inc. Shelter Rock Lane, Danbury, Conn.

⁷⁾ Firma Unimation stosowała nieco inne przyporządkowanie zerowego ustawiania par obrotowych, a mianowicie $\theta_1^* = \theta_3^* - \pi$, gdzie θ_3^* jest kątem konfiguracyjnym trzeciej pary obrotowej wg konwencji przyjętej przez firmę Unimation.



Rys. 3.18. Wybrane parametry kinematyczne i przyporządkowania układów odniesienia manipulatora PUMA 560



Rys. 3.19. Parametry kinematyczne i przyporządkowania układów odniesienia przedramienia manipulatora PUMA 560

Parametry członów odpowiadające przyjętemu usytuowaniu układów odniesienia zestawiono na rys. 3.21. W przypadku robota PUMA 560 przekładnia ulokowana w kiści manipulatora sprzęga ze sobą ruchy par obrotowych 4, 5 i 6. Oznacza to, że dla tych trzech par obrotowych musimy wyróżnić osobno współrzędne napędowe i konfiguracyjne, a zadanie kinematyki rozwiązać w dwóch krokach. W tym przykładzie zajmiemy się tylko odwzorowaniem opisu kinematyki ze współrzędnych konfiguracyjnych we współrzędne kartezjańskie. Wykorzystując zależność (3.6) znajdziemy przekształcenia dla każdego członu

$${}_{1T}^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{2T}^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

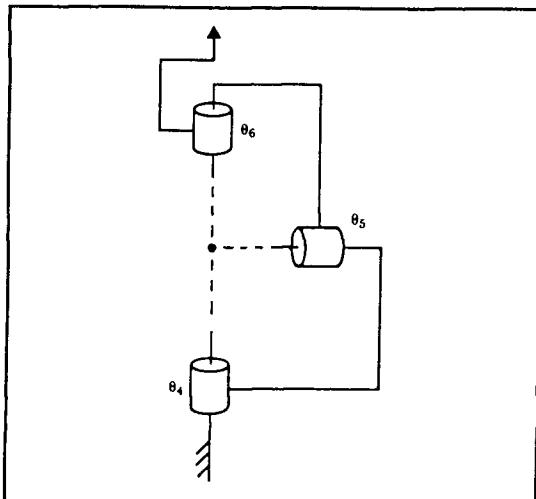
$${}_{3T}^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{4T}^3 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{5T}^4 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{6T}^5 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.9)



Rys. 3.20. Schemat kiści typu 3R o trzech osiach przecinających się w jednym punkcie i wzajemnie prostopadłych. To rozwiązanie zastosowano w robotie PUMA 560 oraz wielu innych robotach przemysłowych

Teraz utworzymy macierz ${}^0_6 T$ jako iloczyn macierzy przekształceń układów odniesienia poszczególnych członów. W trakcie wykonywania tego mnożenia wprowadzimy pewne wyniki cząstkowe, z których skorzystamy w rozdz. 4 przy rozwiązywaniu zadania odwrotnego kinematyki. Zaczniemy od pomnożenia macierzy ${}^4_5 T$ przez ${}^5_6 T$

$${}^4_6 T = {}^4_5 T \cdot {}^5_6 T = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

gdzie c_5 jest skrótem oznaczenia $\cos\theta_5$, a s_5 dla $\sin\theta_5$ itd.⁸⁾ Następnie

$${}^3_6 T = {}^3_4 T \cdot {}^4_6 T = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & a_3 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

⁸⁾ W zależności od pola powierzchni, jaką dysponujemy, stosujemy odpowiednio każdą z trzech postaci: $\cos\theta_5$, $c\theta_5$ lub c_5 .

i	a_{i-1}	d_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

Rys. 3.21. Parametry członów manipulatora PUMA 560

Z uwagi na równoległość osi par obrotowych 2 i 3, najpierw mnożymy ${}^1_2 T$ przez ${}^2_3 T$, a potem zastosujemy wzory na sumę kątów. Postępując tak uzyskamy nieco prostsze wyrażenie. Można tak zrobić zawsze, jeśli osie dwóch kolejnych par obrotowych są równoległe. Otrzymamy zatem

$${}^1_3 T = {}^1_2 T {}^2_3 T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

W macierzy wynikowej skorzystaliśmy z wzorów na sumę kątów (z załącznika A)

$$c_{23} = c_2 c_3 - s_2 s_3$$

$$s_{23} = c_2 s_3 + s_2 c_3$$

W kolejnym kroku znajdujemy

$${}^1_6 T = {}^1_3 T {}^3_6 T = \begin{bmatrix} {}^1 r_{11} & {}^1 r_{12} & {}^1 r_{13} & {}^1 p_x \\ {}^1 r_{21} & {}^1 r_{22} & {}^1 r_{23} & {}^1 p_y \\ {}^1 r_{31} & {}^1 r_{32} & {}^1 r_{33} & {}^1 p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 {}^1r_{11} &= c_{23} [c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6] - s_{23} s_5 s_6 \\
 {}^1r_{21} &= -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\
 {}^1r_{31} &= -s_{23} [c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6] - c_{23} s_5 s_6 \\
 {}^1r_{12} &= -c_{23} [c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6] + s_{23} s_5 s_6 \\
 {}^1r_{22} &= s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \\
 {}^1r_{32} &= s_{23} [c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6] + c_{23} s_5 s_6 \\
 {}^1r_{13} &= -c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 \\
 {}^1r_{23} &= s_4 s_5 \\
 {}^1r_{33} &= s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \\
 {}^1p_x &= a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23} \\
 {}^1p_y &= d_3 \\
 {}^1p_z &= -a_3 s_{23} - a_2 s_2 - d_4 c_{23}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

W końcu otrzymujemy iloczyn wszystkich sześciu przekształceń członów

$${}^0T = {}^0T {}^1T {}^1T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= c_1 [c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6] + s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\
 r_{21} &= s_1 [c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6] - c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\
 r_{31} &= -s_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 \\
 r_{12} &= c_1 [c_{23} (-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6] + s_1 (c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6) \\
 r_{22} &= s_1 [c_{23} (-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6] - c_1 (c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6) \\
 r_{32} &= -s_{23} (-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 \\
 r_{13} &= -c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - s_1 s_4 s_5 \\
 r_{23} &= -s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + c_1 s_4 s_5 \\
 r_{33} &= s_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 \\
 p_x &= c_1 [a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}] - d_3 s_1 \\
 p_y &= s_1 [a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}] + d_3 c_1 \\
 p_z &= -a_3 s_{23} - a_2 s_2 - d_4 c_{23}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wzory (3.14) opisują kinematykę robota PUMA 560. Określają one sposób obliczenia pozycji i orientacji układu odniesienia {6} względem układu {0} robota. Są to podstawowe równania dla całej analizy kinematycznej tego manipulatora.

Robot Yasukawa Motoman L-3

Yasukawa Motoman L-3 jest popularnym manipulatorem przemysłowym o pięciu stopniach swobody (rys. 3.22). W przeciwieństwie do przykładów, którymi dotychczas zajmowaliśmy się, w manipulatorze Motoman występuje złożony łańcuch kinematyczny. Zastosowano w nim dwa napędy liniowe, sprzęgnięte z członami 2 i 3 za pośrednictwem mechanizmu czteroczłonowego. Pary obrotowe 4 i 5 są napędzane przez dwa silowniki, w układzie różnicowym, za pośrednictwem przekładni łańcuchowej.

W tym przykładzie rozwiążemy zadanie kinematyki w dwóch krokach. Najpierw znajdziemy kąty konfiguracyjne, odpowiadające współrzędnym napędowym, a następnie dla wyznaczonych kątów konfiguracyjnych znajdziemy współrzędne kartezjańskie, określające pozycję i orientację ostatniego członu. W tym drugim kroku możemy traktować układ jako prosty otwarty łańcuch kinematyczny typu 5R.

Na rys. 3.23 przedstawiono mechanizm dźwigniowy, łączący napęd o numerze 2 z członami 2 i 3 robota. Jest to napęd liniowy, sterujący bezpośrednio długością segmentu oznaczonego literami DC. Czły trójkąta ABC oraz dźwignia BD mają stałe długości. Oś pary obrotowej 2 przechodzi przez punkt B, natomiast cały napęd obraca się o pewien kąt wokół punktu C, podczas ruchu dźwigni. Przyjmujemy następujące oznaczenia stałych (długości i kątów) związanych z napędem 2:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= AB, & \phi_2 &= AC, & \alpha_2 &= BC, \\ \beta_2 &= BD, & \Omega_2 &= \angle JBD, & l_2 &= BJ,\end{aligned}$$

i następujące oznaczenia zmiennych

$$\theta_2 = -\angle JBQ, \quad \psi_2 = \angle CBD, \quad g_2 = DC.$$

Na rys. 3.24 przedstawiono mechanizm dźwigniowy, łączący napęd o numerze 3 z członami 2 i 3 robota. Jest to napęd liniowy, sterujący bezpośrednio długością segmentu HG. Czły trójkąta EFG oraz dźwignia FH mają stałą długość. Oś pary obrotowej 3 przechodzi przez punkt J, natomiast napęd obraca się o pewien kąt wokół punktu G podczas ruchu dźwigni. Przyjmujemy następujące oznaczenia dla stałych (długości i kątów), związanych z napędem 3:

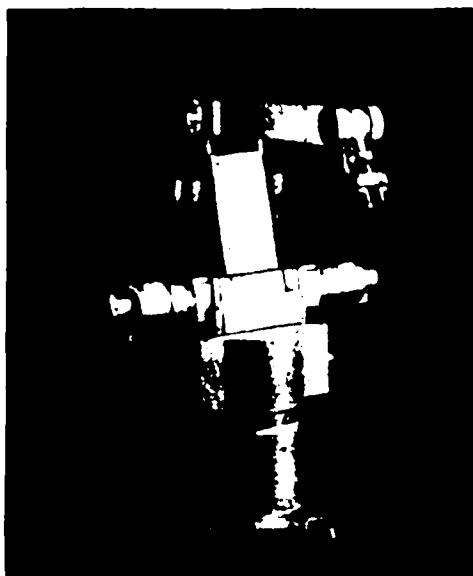
$$\begin{aligned}\gamma_3 &= EF, & \phi_3 &= EG, & \alpha_3 &= GF, \\ \beta_3 &= HF, & l_3 &= JK,\end{aligned}$$

i następujące oznaczenia zmiennych:

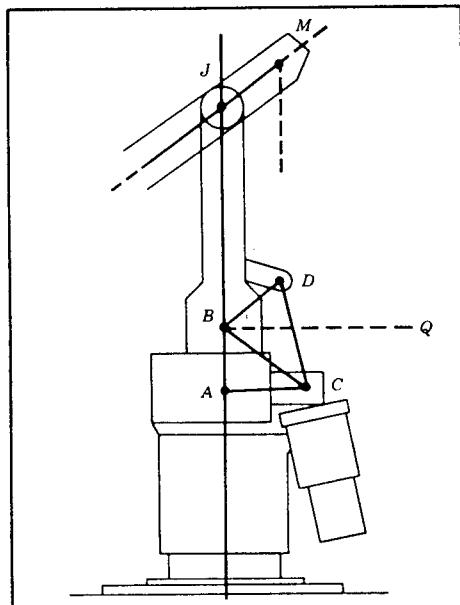
$$\theta_3 = \angle PJK, \quad \psi_3 = \angle GFH, \quad g_3 = GH.$$

Przy takiej konfiguracji napędów i mechanizmów dźwigniowych uzyskuje się następujący efekt funkcjonalny. Podczas gdy napęd 2 pozycjonuje parę obrotową 2, człon 3 pozostaje w tej samej orientacji względem podstawy robota. Napęd 3 służy do regulowania orientacji członu 3 względem podstawy robota (bardziej aniżeli względem poprzedniego członu, jak to ma miejsce w przypadku robota o szeregowym łańcuchu kinematycznym). Jednym z celów zastosowania takiej konfiguracji mechanizmu dźwigniowego było zwiększenie sztywności strukturalnej głównego mechanizmu robota. Jest to często opłacalne z uwagi na uzyskanie możliwości dokładniejszego pozycjonowania robota.

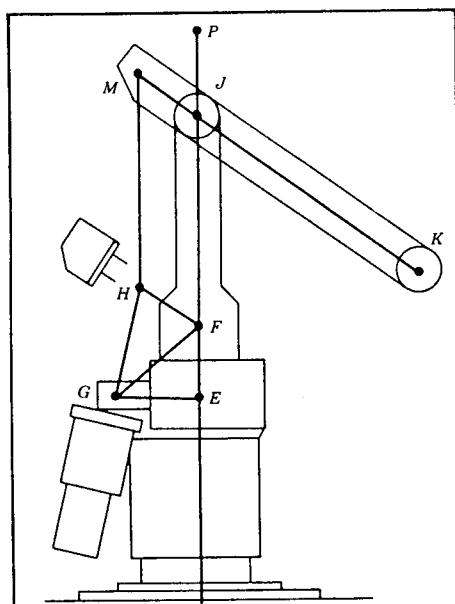
Napędy 4 i 5 są przyłączone do członu 1 robota, a ich osie pokrywają się z osią pary obrotowej 2 (punkty B i F na rys. 3.23 i 3.24). Napędzają one mechanizm kiści za pośrednictwem dwóch układów łańcuchów, jednego umieszczonego wewnątrz członu 2, a drugiego - wewnątrz członu 3. Działanie tego układu przekładniowego łącznie z jego współpracą z napędami członów 2 i 3 można opisać funkcjonalnie w następujący sposób: Napęd 4 zastosowano przede wszystkim do pozycjonowania pary obrotowej 4 względem podstawy robota, a nie względem poprzedniego członu 3. Oznacza to, w przypadku zatrzymania napędu 4 w stałym położeniu, utrzymywanie członu 4 w stałej orientacji względem podstawy robota bez względu na pozycje par obrotowych 2 i 3. W końcu napęd 5 zachowuje się tak, jakby był bezpośrednio przyłączony do pary obrotowej 5.



Rys. 3.22. Robot Yasukawa Motoman L-3
Za zgodą Machine Intelligence Corporation



Rys. 3.23. Schemat kinematyczny mechanizmu napędu 2 manipulatora Yaskawa



Rys. 3.24. Schemat kinematyczny mechanizmu napędu 3 manipulatora Yaskawa

Wyznaczymy teraz równania, przekształcające zbiór współrzędnych napędowych (A_i) w równoważny zbiór współrzędnych konfiguracyjnych (θ_i). W tym przypadku poniższe równania wyprowadzono wprost za pomocą twierdzeń geometrii płaskiej - głównie w oparciu o twierdzenie kosinusów⁹⁾. Występujące w tych równaniach podziałyki (k_i) i odsunięcia (λ_i) są stałe dla każdego napędu. Np. napęd 1 jest bezpośrednio przyłączony do osi pary obrotowej 1, stąd przekształcenie jest proste; określa go właśnie współczynnik skali plus odsunięcie. Zatem

$$\begin{aligned}\theta_1 &= k_1 A_1 + \lambda_1 \\ \theta_2 &= \arccos \left(\frac{(k_2 A_2 + \lambda_2)^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}{2\alpha_2\beta_2} \right) + \arctg \left(\frac{\phi_2}{\gamma_2} \right) + \Omega_2 - 270^\circ \\ \theta_3 &= \arccos \left(\frac{(k_3 A_3 + \lambda_3)^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}{-2\alpha_3\beta_3} \right) - \theta_2 + \arctg \left(\frac{\phi_3}{\gamma_3} \right) - 90^\circ \\ \theta_4 &= -k_4 A_4 - \theta_2 - \theta_3 + \lambda_4 + 180^\circ \\ \theta_5 &= -k_5 A_5 + \lambda_5\end{aligned}\tag{3.15}$$

Na rys. 3.25 przedstawiono układy odniesienia przyporządkowane do członów. Na rysunku tym pokazano manipulator w pozycji odpowiadającej wektorowi współrzędnych konfiguracyjnych $\theta = [0, -\pi/2, \pi/2, \pi/2, 0]$. Na rys. 3.26 zestawiono parametry członów dla tego manipulatora. Wynikowe macierze przekształceń dla kolejnych członów przyjmują postać

$${}^0 T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2 T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⁹⁾ Jeśli katy trójkąta oznaczmy przez a , b i c , tak ze kat a będzie znajdować się naprzeciw boku A itd., wtedy $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos a$.

$$\begin{aligned} {}_3^4 T &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & l_3 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (3.16) \\ {}_4^5 T &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

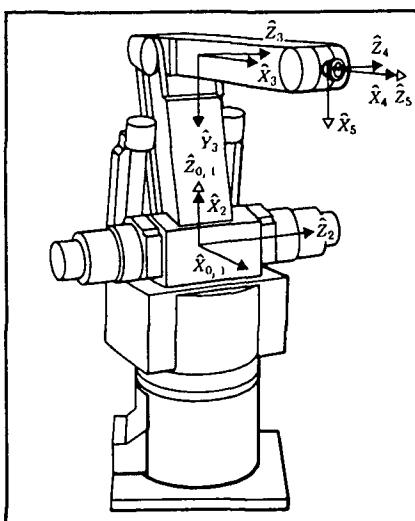
Po wymnożeniu wyżej wymienionych macierzy w celu znalezienia ${}^0_5 T$ otrzymujemy

$${}^0_5 T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1 c_{234} c_5 - s_1 s_5 \\ r_{21} &= s_1 c_{234} c_5 + c_1 s_5 \\ r_{31} &= -s_{234} c_5 \\ r_{12} &= -c_1 c_{234} s_5 - s_1 c_5 \\ r_{22} &= -s_1 c_{234} s_5 + c_1 c_5 \\ r_{32} &= s_{234} s_5 & (3.17) \\ r_{13} &= c_1 s_{234} \\ r_{23} &= s_1 s_{234} \\ r_{33} &= c_{234} \\ p_x &= c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ p_y &= s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ p_z &= -l_2 s_2 - l_3 s_{23} \end{aligned}$$

Równania kinematyki dla manipulatora Yasukawa Motoman wyprowadziliśmy w dwóch krokach. W pierwszym kroku znaleźliśmy wektor współrzędnych konfiguracyjnych z wektora współrzędnych napędowych, natomiast w drugim kroku obliczyliśmy pozycję i orientację układu odniesienia kości za pomocą wektora współrzędnych konfiguracyjnych. Jeśli chcemy obliczyć tylko pozycję kartezjańską, a nie współrzędne konfiguracyjne, wówczas można wyprowadzić równania przekształcające bezpośrednio współrzędne napędowe w kartezjańskie. Są one cokolwiek prostsze pod względem obliczeniowym w porównaniu z metodą "dwukrokową" (patrz ćwiczenie 3.10).



Rys. 3.25. Przyporządkowanie układów odniesienia do członów manipulatora Yasukawa L-3

i	a_{i-1}	$a_i - 1$	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	L_1	0	θ_3
4	0	L_3	0	θ_4
5	90°	0	0	θ_5

Rys. 3.26. Zestawienie parametrów członów manipulatora Yasukawa L-3

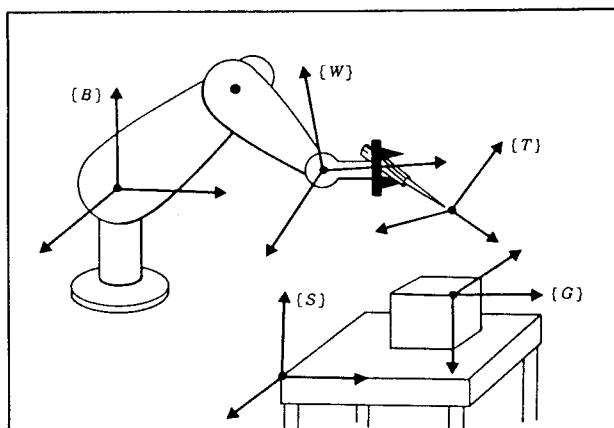
3.8. UKŁADY ODNIESIENIA O STANDARDOWYCH NAZWACH

Wydaje się celowym wprowadzenie konwencji przyporządkowania specyficznych nazw i miejsc usytuowania pewnych "standardowych" układów odniesienia związanych z robotem i jego przestrzenią roboczą. Na rys. 3.27 pokazano typową sytuację, w której robot pobrał pewne narzędzie i zmienia usytuowanie jego końcówki w miejscu zadanym przez użytkownika. Na pięć układów odniesienia, przedstawionych na rys. 3.27, powołujemy się tak często, że celowym jest zdefiniowanie ich nazw. Nazwanie, a następnie używanie tych pięciu układów odniesienia w programowaniu i w układzie sterowania robota, ułatwia przedstawianie jego podstawowych własności w łatwo zrozumiały sposób. Wszystkie ruchy robota można opisać z wykorzystaniem tych układów odniesienia.

Poniżej podano krótkie definicje układów przedstawionych na rys. 3.27.

Układ odniesienia podstawy {B}

Układ $\{B\}$ jest związany z podstawą manipulatora. Jest to jedynie inna nazwa układu $\{0\}$ związanego z nieruchomą częścią robota, nazywana czasem członem 0.



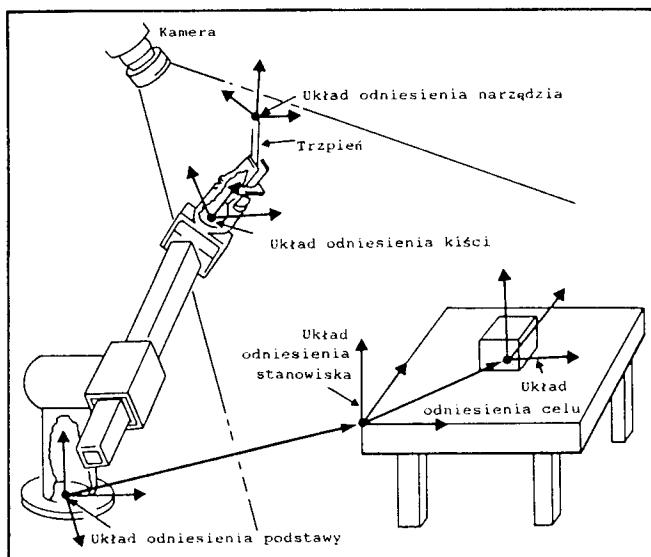
Rys. 3.27. Standardowe układy odniesienia

Układ odniesienia stanowiska {S}

Układ $\{S\}$ jest umieszczony w miejscu związanym z realizowanym zadaniem. Na rys. 3.28 jest to róg stołu, przy którym robot pracuje. Tak długo jak użytkownik tego systemu zrobotyzowanego jest tym zainteresowany, $\{S\}$ jest układem uniwersalnym, względem którego wykonywane są wszystkie czynności robota. Jest on czasem zwany układem zadaniowym, układem globalnym lub układem uniwersalnym. Układ stanowiska jest zawsze opisany względem układu podstawy, tzn. za pomocą macierzy S^T .

Układ odniesienia kości {W}

Układ $\{W\}$ jest związany z ostatnim członem manipulatora. Jest to inna nazwa układu $\{N\}$ przyporządkowanego do ostatniego członu robota. Bardzo często układ $\{W\}$ jest umiejscowiony w środku kości manipulatora. Układ $\{W\}$ porusza się wraz z ostatnim członem manipulatora. Jest on zdefiniowany względem układu podstawy. To znaczy $\{W\} = W^T = N^T$.



Rys. 3.28. Przykład przyporządkowania układów standardowych

Układ odniesienia narzędzia {T}

Układ $\{T\}$ jest związany z końcem każdego narzędzia, którym operuje robot. Gdy chwytką jest pusty, początek układu $\{T\}$ jest zwykle umiejscowiony w osi palców robota. Układ odniesienia narzędzia określa się zwykle względem układu odniesienia kisci. Na rys. 3.28 układ narzędzia zdefiniowano w punkcie wierzchołka trzpienia, trzymanego w uchwycie robota.

Układ docelowy {G}

Układ $\{G\}$ opisuje miejsce, do którego robot przemieszcza narzędzie. W szczególności oznacza to, że w ostatniej fazie ruchu układ odniesienia narzędzia powinien zostać doprowadzony do zgodności z układem docelowym. Układ $\{G\}$ określa się zawsze względem układu odniesienia stanowiska. Na rys. 3.28 układ docelowy umieszczono w otworze, do którego zamierzamy włożyć trzpień.

Bez zmniejszenia ogólności rozważań ruchy robota można opisać za pomocą tych układów odniesienia. Operowanie nimi ułatwia nam typowy język stawiania zadań robota.

3.9. GDZIE JEST NARZĘDZIE ?

Do głównych właściwości, które powinny cechować robota, zalicza się zdolność obliczania pozycji i orientacji trzymanego narzędzia (lub pustego chwytnika robota) względem wybranego układu współrzędnych. Właściwość ta jest konieczna, jeśli chcemy np. obliczyć parametry układu odniesienia narzędzia $\{T\}$ względem układu odniesienia stanowiska $\{S\}$. Wcześniej, za pomocą równań kinematyki, znaleźliśmy przekształcenie ${}^B_W T$. Do obliczenia $\{T\}$ względem $\{S\}$ możemy zastosować przekształcenia kartezjańskie, rozpatrywane w rozdziale 2. Rozwiążanie prostego równania przekształcenia doprowadzamy do postaci

$${}^S_T T = {}^S_T B^{-1} {}^B_W W {}^W_T T \quad (3.18)$$

Równanie (3.18) odpowiada temu, co w pewnych systemach robotowych nazywane jest funkcją "WHERE". Umożliwia ono obliczenie, gdzie znajduje się ramię robota. Dla sytuacji, przedstawionej na rys. 3.28, funkcja "WHERE" mogłaby określać pozycję i orientację trzpienia względem powierzchni stołu.

Równanie (3.18) można traktować jako uogólnione równanie kinematyki. Macierz ${}^S_T T$ służy do obliczeń kinematycznych, stosownie do geometrii mechanizmu łącznie z ogólnym przekształceniem (które mogłyby być traktowane tak, jak dla członu ustalonego) dla układu podstawy $({}^B_S T)$ oraz dla organu robo-

czego $(\frac{W}{T})_T$. Te dodatkowe przekształcenia pozwalają nam na uwzględnienie narzędzi wraz z odsunięciami i skręceniami oraz operowanie względem dowolnego układu odniesienia stanowiska.

3.10. ROZWAŻANIA OBLCZENIOWE

W wielu praktycznych zastosowaniach systemów manipulacyjnych ważną rolę odgrywa czas niezbędny do wykonania obliczeń kinematycznych. W tym podrózdziale rozpatrzymy pokrótko różne kwestie dotyczące obliczeń kinematyki manipulatora, np. określonej zależnościami (3.14) dla robota PUMA 560.

Jedną z kwestii jest wybór stało- lub zmiennoprzecinkowej reprezentacji wprowadzanych wielkości. W wielu implementacjach stosuje się reprezentacje zmiennoprzecinkowe w celu ułatwienia tworzenia oprogramowania. Programista nie musi wówczas zajmować się operacjami skalowania dotyczącymi względnych wielkości zmiennych. Tym niemniej w przypadku, gdy decydującym kryterium jest prędkość, można zastosować reprezentację stałoprzecinkową, ponieważ zakres dynamiki zmiennych jest nieduży, a ponadto zakresy te są dość dobrze znane. Po zgrubnym oszacowaniu liczby bitów potrzebnych dla reprezentacji stałoprzecinkowej wydaje się, że wystarczą 24 bity [4].

Dzięki rozkładowi na czynniki równań takich jak np. (3.14) można zmniejszyć liczbę mnożeń i dodawań kosztem tworzenia zmiennych lokalnych, co jest zwykle dobrym kompromisem. Celem tego jest uniknięcie wielokrotnego obliczania wspólnych wyrazów. Znanych jest kilka zastosowań wspomaganych komputerowo automatycznych rozkładów na czynniki takich równań [5].

W obliczeniach kinematycznych najbardziej pracochłonne jest zwykle obliczanie funkcji przestępnych, tzn. sinusa i kosinusa. Jeśli funkcje te są dostępne w postaci fragmentu typowej biblioteki, to zazwyczaj oblicza się je z rozwinięcia w szereg kosztem wielokrotnego wydłużenia czasu obliczeń. Zwiększaając koszt wymaganej pamięci w wielu systemach manipulacyjnych stosuje się tablice funkcji przestępnych. Dzięki temu, zależnie od algorytmu, uzyskuje się dwu- lub trzykrotne skrócenie czasu potrzebnego do obliczeń sinusa lub kosinusa [6].

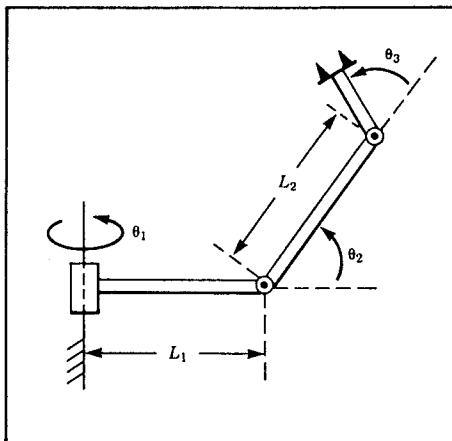
Obliczenia kinematyczne, jak np. (3.14), obarczone są nadmiarowością, ponieważ w celu przedstawienia orientacji należy obliczyć dziewięć wielkości. Jeden ze sposobów, przyczyniających się zwykle do zmniejszenia liczby operacji obliczeniowych, polega na obliczeniu tylko dwóch kolumn macierzy obrotu, a następnie ich iloczynu wektorowego (co wymaga tylko sześciu mnożeń i trzech dodawań) w celu obliczenia trzeciej kolumny. Do obliczeń wybiera się oczywiście dwie najmniej skomplikowane kolumny.

Bibliografia

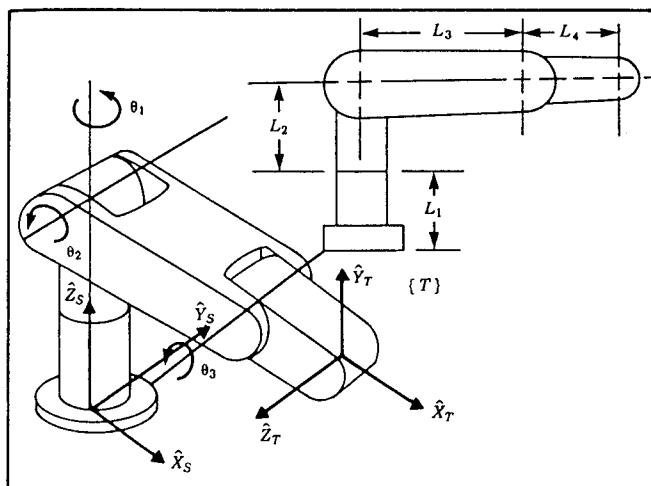
- [1] J.Denavit, R.S.Hartenberg, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 215-221, June 1955.
- [2] J.Lenarčič, "Kinematics", in *The International Encyclopedia of Robotics*, R.Dorf i S.Nof, Editors, John C.Wiley and Sons, 1988.
- [3] J.Colson, N.D.Perreira, "Kinematic Arrangements Used in Industrial Robots", *13th Industrial Robots Conference Proceedings*, April 1983.
- [4] T.Turner, J.Craig, W.Gruver, "A Microprocessor Architecture for Advanced Robot Control", 14th ISIR, Stockholm, Sweden, October 1984.
- [5] W.Schiehlen, "Computer Generation of Equations of Motion" in *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, E.J.Haug, Editor, Springer-Verlag, 1984.
- [6] C.Ruoff, "Fast Trigonometric Functions for Robot Control", *Robotics Age*, November 1981.

Ćwiczenia

- 3.1. [15] Przeprowadź obliczenia kinematyki dla mechanizmu płaskiego ramienia z przykładu 3.3.
- 3.2. [37] Wyobraź sobie ramię, podobne do ramienia robota PUMA 560, z wyjątkiem połączenia 3 zastąpionego parą przesuwną. Przyjmij, że oś pary przesuwnej pokrywa się z kierunkiem \hat{x}_1 pokazanym na rys. 3.18. Tym niemniej nadal pozostaje odsunięcie równe d_3 , które należy uwzględnić. Wprowadź dodatkowe niezbędne założenia. Wyprowadź równania kinematyki.
- 3.3. [25] Ramię o trzech stopniach swobody, pokazane na rys. 3.29, jest podobne do ramienia z przykładu 3.3 z wyjątkiem osi pary obrotowej 1, nierównoległej do dwóch pozostałych. Wartość kąta skręcenia członu z osiami 1 i 2 wynosi $\pi/2$. Wyprowadź parametry członów i równania kinematyki dla $\frac{B}{W}T$. Zauważ, że nie trzeba definiować parametru l_3 .
- 3.4. [22] Ramię o trzech stopniach swobody, przedstawione na rys. 3.30, ma prostopadłe osie par obrotowych 1 i 2 oraz równoległe osie par obrotowych 2 i 3. Na rysunku wszystkie przeguby usytuowane są w położeniu zerowym. Określono również dodatni znak kąta konfiguracji pary obrotowej. Przyporządkuj układy odniesienia do członów $\{0\}, \dots, \{3\}$ tego ramienia. Wykonaj szkic ramienia z przyporządkowaniem układów odniesienia. Następnie wyprowadź macierze przekształceń 0_T , 1_T i 2_T .



Rys. 3.29. Przestrzenny manipulator 3R (ćwiczenie 3.3)



Rys. 3.30. Widok i rzut boczny manipulatora 3R (ćwiczenie 3.4)

3.5. [26] Napisz podprogram obliczeń kinematyki robota PUMA 560. Napisz go tak, aby uzyskać maksymalną prędkość wykonania. Zminimalizuj liczbę mnożeń o tyle, o ile jest to możliwe. Zastosuj nagłówek procedury

```
Procedure KIN(VAR theta: vec6; Var wrelb: frame);
```

Zakładając, że obliczenie wartości sinusa lub kosinusa wymaga 5-krotnie więcej operacji niż mnożenie, dodawanie wymaga 0,333 czasu mnożenia, operacja przypisania wymaga 0,2 czasu mnożenia, a obliczanie pierwiastka kwadratowego wymaga 4-krotnie więcej operacji niż mnożenie, oblicz, ile jednostkowych mnożeń wymaga twój program.

- 3.6. [20] Napisz podprogram obliczeń kinematyki manipulatora cylindrycznego z przykładu 3.4. Zastosuj poniższy nagłówek procedury

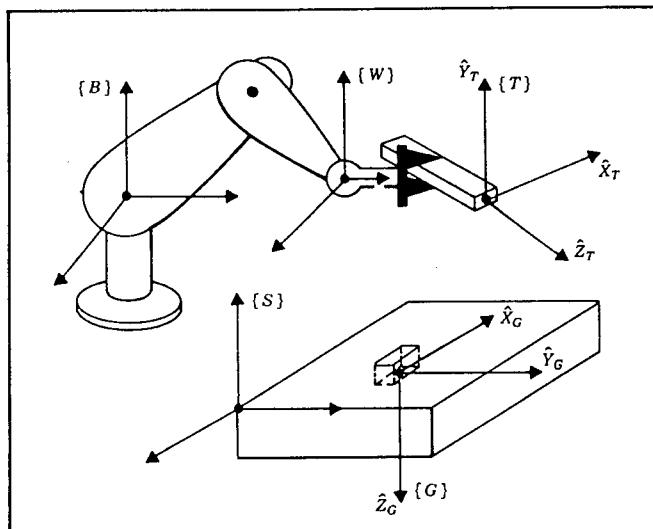
```
Procedure KIN(VAR jointvar: vec3; VAR wrelb: frame);
```

Zakładając, że obliczenie wartości sinusa lub kosinusa wymaga 5-krotnie więcej operacji niż mnożenie, dodawanie wymaga 0,333 czasu mnożenia, operacja przypisania wymaga 0,2 czasu mnożenia, a obliczanie pierwiastka kwadratowego wymaga 4-krotnie więcej operacji niż mnożenie, oblicz, ile jednostkowych mnożeń wymaga twój program.

- 3.7. [22] Napisz podprogram obliczeń kinematyki manipulatora z przykład. 3.3. Zastosuj poniższy nagłówek procedury

```
Procedure KIN(VAR theta: vec3; VAR wrelb: frame);
```

Zakładając, że obliczenie wartości sinusa lub kosinusa wymaga 5-krotnie więcej operacji niż mnożenie, dodawanie wymaga 0,333 czasu mnożenia, operacja przypisania wymaga 0,2 czasu mnożenia, a obliczanie pierwiastka kwadratowego wymaga 4-krotnie więcej operacji niż mnożenie, oblicz, ile jednostkowych mnożeń wymaga twój program.



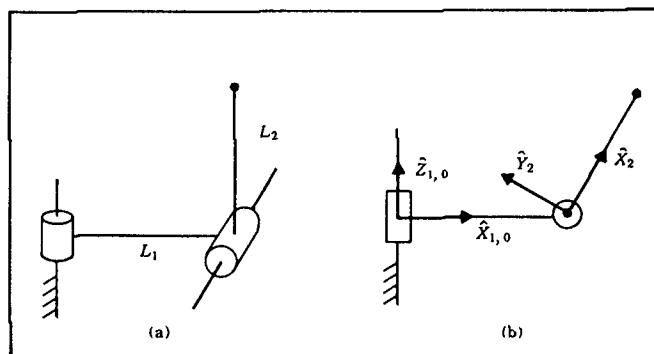
Rys. 3.31. Wyznaczenie układu odniesienia narzędzia (ćwiczenie 3.8)

- 3.8. [13] Na rys. 3.31 usytuowanie narzędzia $\overset{W}{T}$ nie jest dokładnie znane. Pracując w systemie sterowania siłą robot bada otoczenie wierzchołkiem narzędzia, aż do momentu włożenia go do gniazda (zwanego celem) o znanym usytuowaniu $\overset{S}{T}$. W tej konfiguracji "wzorcowania" (w której $\{G\}$ i $\{T\}$ pokrywają się) następuje określenie pozycji robota $\overset{B}{W}$ przez odczyty wskazań sensorów zmiennych konfiguracyjnych oraz obliczenia kinematyki. Zakładając, że $\overset{B}{S}$ i $\overset{S}{T}$ są znane, wyprowadź równanie przekształcenia, umożliwiające obliczanie nieznanego układu odniesienia narzędzia $\overset{W}{T}$.

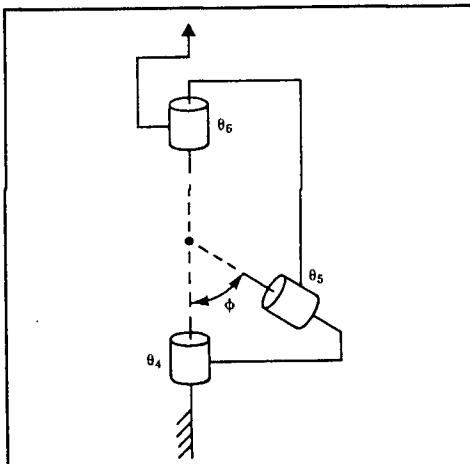
- 3.9. [11] Dla dwuczlonowego manipulatora, pokazanego na rys. 3.32a, wyznaczono macierze przekształceń dla kolejnych członów, $\overset{0}{1}T$ i $\overset{1}{2}T$. Iloczyn ich wygląda następująco

$$\overset{0}{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 & l_1 s\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

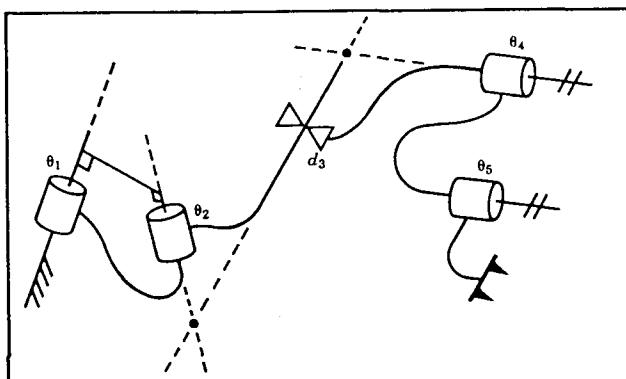
Na rys. 3.32b pokazano sposób przyporządkowania układów odniesienia. Zwróć uwagę na to, że układ $\{0\}$ pokrywa się z układem $\{1\}$, gdy $\theta_1 = 0$. Długość drugiego członu wynosi l_2 . Znajdź wyrażenie dla wektora $\overset{0}{P}_{tip}$ określającego usytuowanie wierzchołka ramienia względem układu odniesienia $\{0\}$.



Rys. 3.32. Dwuczlonowy manipulator z przyporządkowanymi układami odniesienia (ćwiczenie 3.9)



Rys. 3.33. Robot typu 3R o osiach nieortogonalnych (ćwiczenie 3.11)



Rys. 3.34. Schemat manipulatora typu 2RP2R (ćwiczenie 3.13)

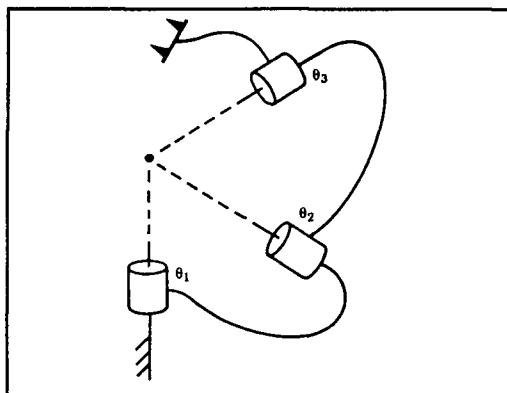
3.10. [39] Wyrowadź równania kinematyki dla robota Yasukawa Motoman (patrz podrozdział 3.7), umożliwiające obliczenie pozycji i orientacji układu odniesienia kości wprost z wartości wspołrzędnych napędowych, bez wcześniejszego obliczania kątów konfiguracyjnych. Można znaleźć rozwiązanie wymagające tylko 33 mnożeń, znajdowania wartości 2 pierwiastków kwadratowych oraz 6 rozwinięć sinusów lub kosinusów.

3.11. [17] Na rys. 3.33 pokazano schemat kości o trzech przecinających się osiach, które nie są do siebie prostopadłe. Przyporządkuj układy odniesienia do członów tej kości (tak jak w przypadku manipulatora o trzech stopniach swobody) i określ parametry członów.

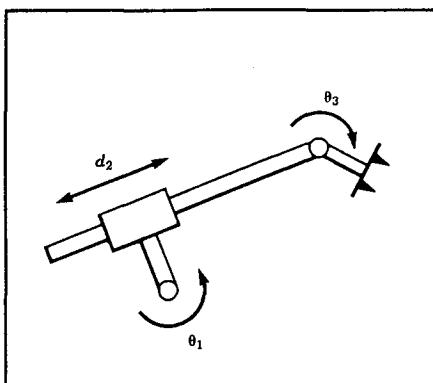
3.12. [08] Czy przekształcenie dowolnego ciała sztywnego można zawsze wyrazić za pomocą czterech parametrów (a , α , d , θ) przy wykorzystaniu równania o postaci (3.6)?

3.13. [15] Pokaż sposób przyporządkowania układów odniesienia do członów manipulatora o pięciu stopniach swobody, pokazanego schematycznie na rys. 3.34.

3.14. [20] Zgodnie z tym co pokazano wcześniej, względna pozycja dowolnych dwóch prostych w przestrzeni może być określona za pomocą dwóch parametrów, a i α , gdzie a jest długością łączącej je wspólnej prostopadłej, a kąt α odpowiada kątowi między rzutami tych dwóch osi na płaszczyznę, której normalną stanowi wspólna prostopadła. Dana jest prosta przechodząca przez punkt p z wersorem kierunkowym \hat{m} oraz druga prosta przechodząca przez punkt q z wersorem kierunkowym \hat{n} . Wyprowadź zależności dla a i α .

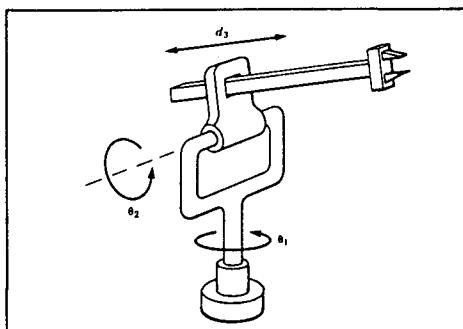


Rys. 3.35. Schemat manipulatora typu 3R (ćwiczenie 3.15)

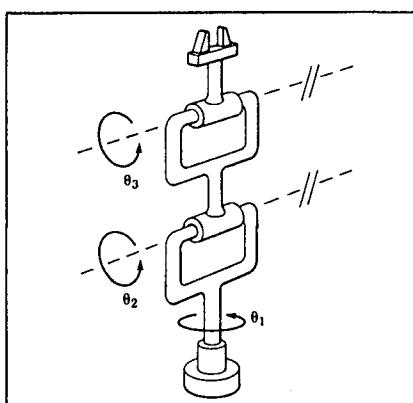


Rys. 3.36. Płaski robot typu RPR (ćwiczenie 3.16)

- 3.15. [15] Pokaż sposób przyporządkowania układów odniesienia do członów manipulatora o trzech stopniach swobody, przedstawionego schematycznie na rys. 3.35.
- 3.16. [15] Przyporządkuj układy odniesienia do członów płaskiego robota typu RPR, pokazanego na rys. 3.36, i podaj parametry mechanizmu.
- 3.17. [15] Pokaż sposób przyporządkowania układów odniesienia do członów robota trójczłonowego, pokazanego na rys. 3.37.
- 3.18. [15] Pokaż sposób przyporządkowania układów odniesienia do członów robota trójczłonowego, pokazanego na rys. 3.38.
- 3.19. [15] Pokaż sposób przyporządkowania układów odniesienia do członów robota trójczłonowego, pokazanego na rys. 3.39.
- 3.20. [15] Pokaż sposób przyporządkowania układów odniesienia do członów robota trójczłonowego, pokazanego na rys. 3.40.
- 3.21. [15] Pokaż sposób przyporządkowania układów odniesienia do członów robota trójczłonowego, pokazanego na rys. 3.41.

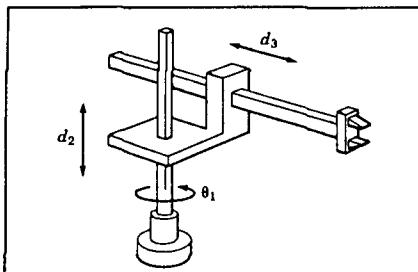


Rys. 3.37. Trójczłonowy manipulator typu RRP (ćwiczenie 3.17)

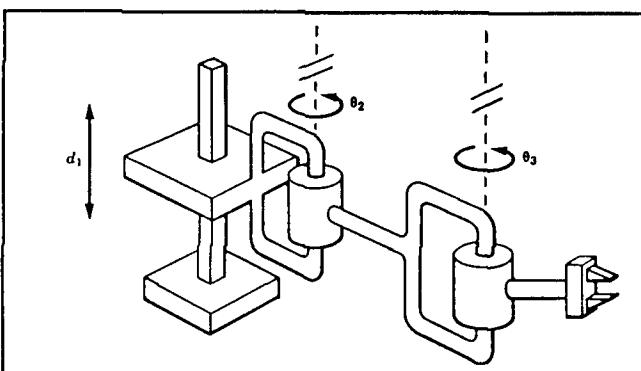


Rys. 3.38. Trójczłonowy manipulator typu RRR (ćwiczenie 3.18)

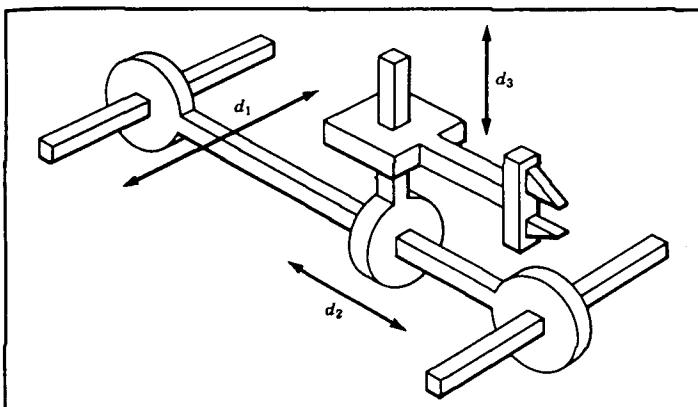
3.22. [15] Pokaż sposób przyporządkowania układów odniesienia do członów robota typu P3R, pokazanego na rys. 3.42. Podaj znaki d_2 , d_3 i a_3 dla wybranych układów odniesienia.



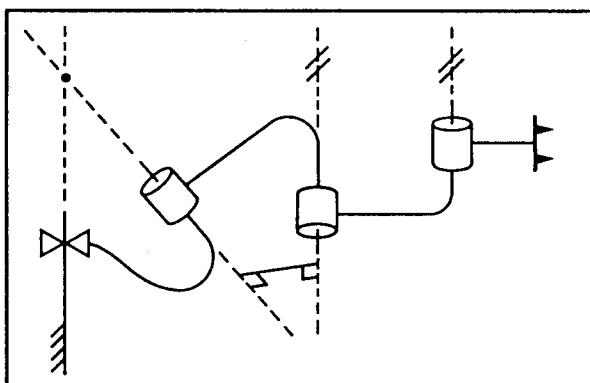
Rys. 3.39. Trójczłonowy manipulator typu RPP (ćwiczenie 3.19)



Rys. 3.40. Trójczłonowy manipulator typu PRR (ćwiczenie 3.20)



Rys. 3.41. Trójczłonowy manipulator typu PPP (ćwiczenie 3.21)



Rys. 3.42. Schemat manipulatora typu P3R (ćwiczenie 3.22)

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 3)

1. Napisz podprogram obliczeń kinematyki płaskiego robota typu 3R z przykładu 3.3. To znaczy procedurę, w której danymi wejściowymi są kąty konfiguracyjne, a wyjściem jest układ odniesienia (kiści względem podstawy). Zastosuj nagłówek procedury

```
Procedure KIN(VAR theta: vec3; VAR wrelb: frame);
```

gdzie "wrelb" jest macierzą przekształcenia układu odniesienia kości względem układu odniesienia podstawy, ${}^B_W T$. Macierz "frame" składa się z macierzy obrotu 2x2 i wektora pozycji 2x1. Układ odniesienia można opisać za pomocą przekształcenia jednorodnego 3x3, w którym trzeci wiersz ma postać [0 0 1]. (Dane są wymiary manipulatora: $l_1 = l_2 = 0,5 \text{ m}$).

2. Napisz procedurę obliczania pozycji narzędzia względem układu odniesienia stanowiska. Wejście procedury stanowi wektor współrzędnych konfiguracyjnych

```
Procedure WHERE(VAR theta: vec3; VAR trels: frame);
```

Oczywiście w procedurze WHERE należy posługiwać się opisami układu odniesienia narzędzia oraz układu odniesienia podstawy robota w celu obliczenia usytuowania narzędzia względem stanowiska. Wartości ${}^W_T T$ i ${}^B_S T$ powinny być zapamiętane w pamięci globalnej (alternatywnie możesz je podać w procedurze WHERE w postaci argumentów).

3. Dla pewnego zadania użytkownik zdefiniował układy odniesienia narzędzi i stanowiska jak niżej:

$$\begin{matrix} W \\ T \end{matrix}^T = [x \ y \ \theta] = [0,1 \ 0,2 \ 30,0],$$

$$\begin{matrix} B \\ S \end{matrix}^T = [x \ y \ \theta] = [-0,1 \ 0,3 \ 0,0].$$

Oblicz pozycję i orientację narzędzia względem układu odniesienia stanowiska dla następujących trzech położen ramienia (w stopniach):

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [0,0 \ 90,0 \ -90,0],$$

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [-23,6 \ -30,3 \ 48,0],$$

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [130,0 \ 40,0 \ 12,0].$$

4

ZADANIE ODWROTNE KINEMATYKI MANIPULATORA

4.1. WPROWADZENIE

W ostatnim rozdziale rozważaliśmy zadanie obliczenia pozycji i orientacji narzędzia względem stanowiska pracy dla danych współrzędnych konfiguracyjnych manipulatora. W tym rozdziale badamy trudniejsze zadanie: dane są pożądana pozycja i orientacja narzędzia względem stanowiska, jak obliczyć wartości współrzędnych konfiguracyjnych, które dadzą ten pożądany wynik? Podczas gdy w rozdziale 3 koncentrowaliśmy się na **zadaniu prostym kinematyki manipulatora**, tutaj celem jest rozwiązanie **zadania odwrotnego kinematyki manipulatora**.

Rozwiązujeając zadanie wyznaczania wymaganych współrzędnych konfiguracyjnych w celu usytuowania układu odniesienia narzędziwa $\{T\}$ względem układu odniesienia stanowiska $\{S\}$ rozdziela się go na dwie części. Najpierw wykonywane są przekształcenia układów tak, aby znaleźć układ odniesienia kisci $\{W\}$ względem bazowego układu odniesienia $\{B\}$, a następnie rozwiązywane jest zadanie odwrotne kinematyki w celu wyznaczenia współrzędnych konfiguracyjnych.

4.2. ROZWIĄZALNOŚĆ

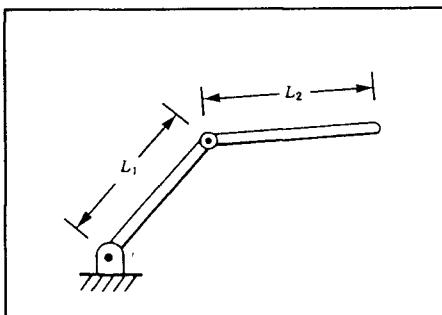
Zadanie rozwiązywania równań kinematyki manipulatora jest zadaniem nielinijnym. Mając dane wartości elementów macierzy ${}^0_1 T$, próbujemy znaleźć wartości zmiennych $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Rozważa się równania (3.14). W przypadku manipulatora PUMA 560 zadanie będzie sformułowane następująco: Dana jest macierz ${}^0_6 T$ w postaci wartości liczbowych szesnastu elementów (cztery z nich są trywialne), trzeba rozwiązać układ (3.14) względem sześciu zmiennych θ_1 do θ_6 .

W przypadku manipulatora o sześciu stopniach swobody (podobnie jak w przypadku manipulatora odpowiadającego równaniom (3.14)) mamy dwanaście równań i sześć niewiadomych. Jednak spośród dziewięciu równań, wynikających z porównania elementów macierzy obrotu, będącej częścią ${}^0_6 T$, tylko trzy równania są niezależne. Dodane do trzech równań wynikających z wektora pozycji, również części ${}^0_6 T$, dają sześć równań o sześciu niewiadomych. Równania te są nieliniowe i przestępne, zatem są dość trudne do rozwiązania. Równania (3.14) mają taką postać dla robota o bardzo prostych parametrach członów - wiele wartości α_i wynosiło 0 lub $\pm\pi/2$; wiele odsunięć członów i długości było równe zeru. Można łatwo wyobrazić sobie, że w przypadku dowolnego manipulatora o sześciu stopniach swobody (gdy wszystkie parametry członów są niezerowe) równania kinematyczne mogłyby być bardziej skomplikowane niż te z układu (3.14). Jak w przypadku każdego nieliniowego układu równań musimy skupić się na istnieniu rozwiązań, rozwiązaniach wielokrotnych i metodach ich wyznaczenia.

Istnienie rozwiązań

Przy postawieniu pytania o istnienie rozwiązań pojawia się problem przestrzeni roboczej manipulatora. Z grubsza mówiąc, przestrzeń robocza stanowi zbiór punktów przestrzeni, które końcówka wykonawcza może osiągnąć. Aby istniało rozwiązanie, określony punkt docelowy musi leżeć wewnątrz przestrzeni roboczej. Czasem użyteczne jest rozważenie dwóch definicji przestrzeni roboczej: **Manipulacyjna przestrzeń robocza** jest to część przestrzeni roboczej, której człon roboczy może osiągnąć z dowolną orientacją. To znaczy, że w każdym punkcie przestrzeni manipulacyjnej człon roboczy może być dowolnie zorientowany. **Przestrzeń robocza osiągalna** jest to zbiór punktów przestrzeni, które robot może osiągnąć przynajmniej przy jednej orientacji. Tak więc przestrzeń manipulacyjna jest częścią przestrzeni osiągalnej.

Rozważmy przestrzeń roboczą manipulatora dwuczlonowego z rys. 4.1. Jeżeli $l_1 = l_2$, to przestrzeń osiągalna zawiera się w kole o promieniu $2l_1$. Przestrzeń manipulacyjna zawiera tylko jeden punkt należący do podstawy.



Rys. 4.1. Dwuczlonowy manipulator o długościach członów l_1 i l_2

Jeśli $l_1 \neq l_2$, to nie ma tutaj przestrzeni manipulacyjnej, a przestrzeń osiągalna staje się pierścieniem o promieniu zewnętrznym $l_1 + l_2$ i promieniu wewnętrznym $|l_1 - l_2|$. Wewnątrz przestrzeni osiągalnej są dwie możliwe orientacje członu roboczego. Na granicach przestrzeni roboczej jest tylko jedna możliwa orientacja.

Rozważania o przestrzeni roboczej dla dwuczlonowego manipulatora przeprowadzone były przy założeniu, że kąty konfiguracyjne w parach obrotowych mogą przyjmować dowolne wartości. Jest to rzadko spotykane dla rzeczywistych mechanizmów. Gdy dopuszczalne kąty konfiguracyjne są częścią kąta pełnego, wtedy przestrzeń robocza odpowiednio redukuje się pod względem obszaru lub współrzędnych orientacji możliwych do uzyskiwania. Np. jeśli dla manipulatora z rys. 4.1 dopuszczalny kąt obrotu $\theta_1 = 2\pi$ rad, lecz $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ rad, wtedy przestrzeń osiągalna ma te same rozmiary, lecz tylko jedna orientacja jest uzyskiwana w każdym punkcie.

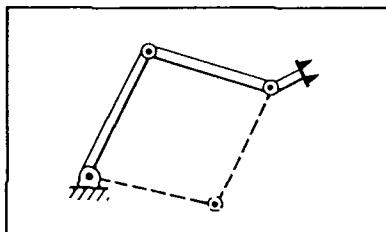
Gdy manipulator ma mniej niż sześć stopni swobody, to nie jest możliwe osiągnięcie dowolnych docelowych pozycji i orientacji w przestrzeni. Oczywiście jest, że płaski manipulator z rys. 4.1 nie może osiągnąć pozycji poza płaszczyzną i tak każdy punkt docelowy o niezerowej współrzędnej Z będzie odrzucony jako nieosiagalny. W wielu sytuacjach, spotykanych w praktyce, manipulatory o czterech lub pięciu stopniach swobody są stosowane jako przestrzenie, lecz oczywiście nie mogą osiągać dowolnego celu. Każdy taki manipulator powinien być zbadany w celu poznania jego przestrzeni roboczej. Na ogół przestrzeń robocza takiego robota jest częścią podprzestrzeni, która może być związana z każdym szczególnym robotem. Jeśli przyjmiemy ogólną specyfikację celów, powstaje interesujący problem wynikający w przypadku manipulatora o mniej niż sześciu stopniach swobody: Jaki jest najbliższy osiągalny układ docelowy?

Przestrzeń robocza zależy również od przekształcenia układu odniesienia narzędzia, ponieważ gdy mówimy o punktach osiągalnych w przestrzeni, rozpatrujemy koniec narzędzia. Ogólne przekształcenie układu narzędzia jest wykonywane niezależnie od kinematyki manipulatora i zadania odwrotnego kinematyki, tak że często prowadzi się rozważania przestrzeni roboczej kłuci $\{W\}$. Dla danej końcówki wykonawczej układ odniesienia narzędzia $\{T\}$ jest określony; dla danego układu odniesienia docelowego $\{G\}$ odpowiedni układ odniesienia $\{W\}$ jest obliczany, a następnie stawiamy pytanie: czy ta pożądana pozycja i orientacja $\{W\}$ leży w przestrzeni roboczej? W ten sposób przestrzeń roboczą, z którą wiążemy się (w sensie obliczeniowym), jest różna od tej, którą wyobraża sobie użytkownik, zainteresowany przestrzenią roboczą końcówki wykonawczej (układ $\{T\}$).

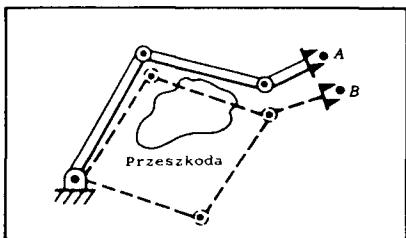
Jeśli pożądana pozycja i orientacja układu kłuci są w przestrzeni roboczej, wtedy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie.

Rozwiązania wielokrotne

Innym możliwym problemem spotykanym przy rozwiązyaniu równań kinematyki jest istnienie rozwiązań wielokrotnych. Płaski manipulator o trzech parach obrótowych ma dużą przestrzeń manipulacyjną na płaszczyźnie (przy danych "dobrych" długościach członów i dużych zakresach kątów konfiguracyjnych), ponieważ każda pozycja wewnątrz tej przestrzeni roboczej może być osiągnięta z dowolną orientacją. Na rys. 4.2 pokazano trójczłonowy manipulator płaski z jego końcówką wykonawczą w pewnej pozycji i orientacji. Linia przerywaną zaznaczono drugą możliwą konfigurację, przy której jest osiągnięta ta sama pozycja i orientacja końcówki wykonawczej.



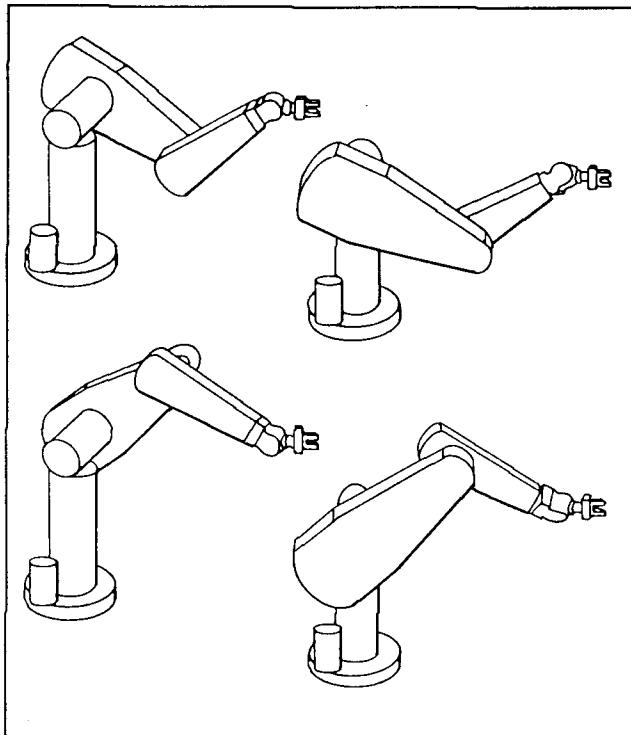
Rys. 4.2. Manipulator trójczłonowy. Linią przerywaną zaznaczono drugie rozwiązanie



Rys. 4.3. Jedno z dwóch możliwych rozwiązań, umożliwiające osiągnięcie punktu B, powoduje kolizję

Fakt istnienia wielu rozwiązań dla manipulatora może powodować problemy, ponieważ układ sterowania musi być zdolny do wybrania jednego rozwiązania. Kryterium decyzyjne zmienia się, lecz bardzo racjonalnym wyborem byłoby rozwiązanie *najbliższe*. Na przykład, jeśli manipulator osiąga punkt A, jak na rys. 4.3 i chcemy przemieścić go do punktu B, dobrym wyborem byłoby rozwiązanie, które minimalizuje wielkość wymaganego przemieszczenia w każdym połączeniu ruchowym. Zatem przy braku przeszkody będzie wybrana górną konfigurację oznaczoną przerywaną linią na rys. 4.3. Sugeruje to, że jednym wyjściowym argumentem w naszej procedurze zadania odwrotnego kinematyki może być aktualna pozycja manipulatora. Jeśli więc wymagany jest wybór, nasz algorytm może znaleźć najbliższe rozwiązanie w przestrzeni konfiguracyjnej. Jednak zapis "bliski" może być określony na wiele sposobów. Na przykład typowe roboty mogą mieć trzy człony pozycjonujące i następujące trzy małe człony orientujące w pobliżu końcówki wykonawczej. W takim przypadku w obliczeniach mogą być zastosowane wagi, w celu znalezienia rozwiązania "bliższego", preferującego poruszanie mniejszych członów bardziej niż poruszanie dużych członów (gdy istnieje możliwość wyboru). Obecność przeszkód może wymuszać wybór "dalszego" rozwiązania w przypadkach, gdy "bliższe" rozwiązanie może powodować kolizję - w przypadku ogólnym powinniśmy więc umieć wyznaczyć wszystkie możliwe rozwiązania. Zatem na rys. 4.3 obecność przeszkody daje do zrozumienia, że w celu osiągnięcia punktu B powinna zostać wybrana niższa konfiguracja, oznaczona linią przerywaną.

Liczba rozwiązań zależy od liczby par obrotowych manipulatora, lecz jest także funkcją parametrów członowych (α_i , a_i i d_i dla manipulatora przegubowego) i dopuszczalnych zakresów ruchów w połączeniach ruchowych. Na przykład PUMA 560 może osiągnąć pewne cele przy ośmiu różnych konfiguracjach. Na rys. 4.4 pokazano cztery konfiguracje manipulatora, umieszczonego chwytką w tej samej pozycji i orientacji. Dla każdej przedstawionej



Rys. 4.4. Cztery rozwiązania dla robota PUMA 560

konfiguracji istnieje inne rozwiązanie, w którym ostatnie trzy pary obrotowe umożliwiają alternatywną konfigurację zgodnie z wzorami

$$\begin{aligned}\theta'_4 &= \theta_4 + \pi \text{ rad} \\ \theta'_5 &= -\theta_5 \\ \theta'_6 &= \theta_6 + \pi \text{ rad}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Tak więc razem może być osiem rozwiązań dla jednego zadanego celu. Z powodu ograniczeń w zakresach ruchu połączeń ruchowych, niektóre z tych ośmiu rozwiązań mogą być nieosiagalne.

a_i	Liczba rozwiązań
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	≤ 4
$a_3 = a_5 = 0$	≤ 8
$a_3 = 0$	≤ 16
Wszystkie $a_i \neq 0$	≤ 16

Rys. 4.5. Liczba rozwiązań w porównaniu do niezerowych wartości a_i

Na ogół, im więcej występuje niezerowych parametrów członów, tym więcej dróg prowadzi do pewnego celu. Na przykład dla rozważanego manipulatora o sześciu parach obrotowych w tablicy na rys. 4.5 zestawiono maksymalne liczby rozwiązań związane z liczbą długości członów (a_i) równych zero. Im więcej jest przypadków niezerowych, tym większa jest maksymalna liczba rozwiązań. Dla całkowicie dowolnego manipulatora o parach obrotowych i sześciu stopniach swobody jest aż szesnaście możliwych rozwiązań [1], [6].

Metoda rozwiązania

W przeciwnieństwie do algorytmów rozwiązań układów równań liniowych nie ma ogólnych algorytmów rozwiązań układów równań nieliniowych. Rozważając metody rozwiązań sensowne byłoby określenie co stanowi "rozwiązań" dla danego manipulatora.

Manipulator będzie uważany za rozwiązały, jeśli zmienne konfiguracyjne mogą być wyznaczane za pomocą algorytmu, który pozwala wyznaczyć wszystkie zbiory zmiennych konfiguracyjnych, związanych z daną pozycją i orientacją [2].

Istotą tej definicji jest to, że w przypadku wielu rozwiązań wymagamy, aby było możliwe wyznaczenie wszystkich rozwiązań. Zatem nie rozważamy pewnych numerycznych procedur iteracyjnych, ponieważ niektóre z tych metod nie gwarantują znalezienia wszystkich rozwiązań.

Podzielimy wszystkie proponowane strategie rozwiązaania kinematyki manipulatora na dwie duże klasy: rozwiązaania w postaci jawnej i rozwiązaania numeryczne. Z powodu ich iteracyjnej natury rozwiązania numeryczne na ogół są znacznie wolniejsze niż odpowiednia jawną postać rozwiązania; rzeczywiście, w większości zastosowań nie jesteśmy zainteresowani numerycznym podejściem do rozwiązaania kinematyki. Iteracyjne rozwiązanie numeryczne równań

kinematyki jest polem badań samo w sobie (patrz [6], [11], [12]) i jest poza zakresem tej pracy.

Ograniczymy nasze rozważania do metod o jawnej postaci rozwiązania. W tym kontekście "jawna postać" oznacza metodę rozwiązywania opartą na analitycznych wyrażeniach lub na rozwiązyaniu wielomianu 4 stopnia lub niższego tak, że nieiteracyjne obliczenia wystarczają do otrzymania rozwiązania. W klasie rozwiązań o postaci jawnej wyróżniamy dwie metody otrzymywania rozwiązań: **algebraiczną i geometryczną**. Ten podział nie jest zbyt przejrzysty, ponieważ metody geometryczne są realizowane za pomocą wyrażeń algebraicznych, tak że obie metody są podobne. Metody różnią się być może tylko podejściem.

Głównym osiągnięciem ostatnich lat w zakresie kinematyki jest to, że zgodnie z naszą definicją rozwiążalności **wszystkie układy z parami obrotowymi i przesuwnymi, mające łącznie sześć stopni swobody w pojedynczym łańcuchu, są teraz rozwiązywalne**. Jednak to ogólne rozwiązanie jest tylko numeryczne. Jedynie w szczególnych przypadkach robotów o sześciu stopniach swobody można otrzymać rozwiązanie analityczne. Roboty, dla których istnieje rozwiązanie analityczne lub w postaci jawnej, charakteryzuje się kilkoma przecinającymi się osiami par obrotowych i/lub wiele α_i równa się 0 lub $\pm\pi/2$ rad. Ponieważ rozwiązania numeryczne są na ogół czasochłonne w porównaniu do obliczeń analitycznych, uważa się za bardzo ważne projektowanie manipulatora tak, aby istniało rozwiązanie w postaci jawnej. Projektanci manipulatorów odkryli to bardzo wcześnie i obecnie roboty przemysłowe są projektowane tak, aby można było wyprowadzić rozwiązanie w postaci jawnej.

Warunkiem wystarczającym, aby manipulator o sześciu parach obrotowych miał rozwiązanie w postaci jawnej, jest przecinanie się w jednym punkcie osi trzech sąsiednich par obrotowych. Warunek ten będzie rozpatrzony w punkcie 4.6. Prawie każdy manipulator o sześciu stopniach swobody, produkowany dzisiaj, ma trzy kolejne pary obrotowe o przecinających się osiach. (Na przykład osie 4, 5 i 6 manipulatora PUMA 560 przecinają się w jednym punkcie).

4.3. ZAPIS PODPRZESTRZENI MANIPULATORA, GDY N < 6

Zbiór osiągalnych układów odniesienia celu dla danego manipulatora tworzy jego przestrzeń osiągalną. Dla manipulatora o n stopniach swobody, gdy $n < 6$, przestrzeń osiągalna może być rozumiana jako część podprzestrzeni o n stopniach swobody. W taki sam sposób, w jaki przestrzeń robocza manipulatora o sześciu stopniach swobody jest częścią przestrzeni, przestrzeń robocza prostszego manipulatora jest częścią tej podprzestrzeni. Na przykład

podprzestrzeń dwuczłonowego robota z rys. 4.1 jest płaszczyzną, lecz przestrzeń robocza jest częścią tej płaszczyzny, czyli np. kołem o promieniu $l_1 + l_2$ dla przypadku, gdy $l_1 = l_2$.

Jeden ze sposobów specyfikacji podprzestrzeni manipulatora o n stopniach swobody polega na podaniu wyrażenia dla układu odniesienia kisci lub narzędzia jako funkcji n zmiennych, które go sytuują. Jeśli założymy, że te zmienne są nieograniczone, to podprzestrzeń jest generowana dla parametrów przyjmujących wszystkie możliwe wartości.

PRZYKŁAD 4.1

Podaj opis podprzestrzeni ${}^B_W T$ dla trójczłonowego manipulatora z rozdziału 3, rys. 3.6.

Podprzestrzeń ${}^B_W T$ jest dana przez

$${}^B_W T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0,0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0,0 & y \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

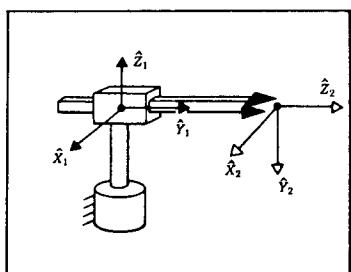
gdzie x i y wyznaczają pozycję kisci, a ϕ opisuje orientację ostatniego członu. Ponieważ x , y i ϕ mogą przyjmować dowolne wartości, to podprzestrzeń jest generowana. Każdy układ kisci, który nie ma struktury (4.2), leży na zewnątrz podprzestrzeni (i dlatego leży na zewnątrz przestrzeni roboczej) tego manipulatora. Długości członów i ograniczenia ruchu w połączeniach ograniczają przestrzeń roboczą manipulatora tak, że staje się ona częścią tej podprzestrzeni. ■

PRZYKŁAD 4.2

Podaj opis podprzestrzeni ${}^0_2 T$ dla pracującego w układzie biegunowym manipulatora o dwóch stopniach swobody, pokazanego na rys. 4.6. Mamy

$${}^0 P_{2ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

gdzie x i y mogą przyjmować każde wartości. Orientacja jest ograniczona, ponieważ ${}^0 \hat{z}_2$ musi wskazywać kierunek, który zależy od x i y . Oś ${}^0 \hat{y}_2$ zawsze jest skierowana w dół, a oś ${}^0 \hat{x}_2$ może być obliczona jako iloczyn wektorowy ${}^0 \hat{y}_2 \times {}^0 \hat{z}_2$. W zależności od x i y mamy



Rys. 4.6. Dwuczłonowy manipulator w układzie biegunkowym

$${}^0\hat{z}_2 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Podprzestrzeń może zatem być dana jako

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Zwykle definiując cel dla manipulatora o n stopniach swobody używamy n parametrów do określenia celu. Jeśli z drugiej strony podamy specyfikację dla pełnych sześciu stopni swobody, na ogół nie będziemy mogli osiągnąć celu stosując manipulator o $n < 6$. W takim przypadku możemy być zainteresowani osiągnięciem celu, który leży w podprzestrzeni manipulatora, a jest tak "blisko" jak to możliwe początkowego pożądanej celu.

Stąd, gdy określa się dowolne cele dla manipulatora o mniej niż sześciu stopniach swobody, strategia rozwiązania jest następująca:

1. Dla danego dowolnego układu celu ${}^{S'}T$ oblicz zmodyfikowany układ celu ${}^S_{G'}T$ tak, by ${}^{S'}T$ leżał w podprzestrzeni manipulatora i był tak "blisko" od ${}^S_{G'}T$ jak to możliwe. Pojęcie "blisko" musi być zdefiniowane.
2. Rozwiąż zadanie odwrotne kinematyki, aby znaleźć współrzędne konfiguracyjne, wykorzystując ${}^S_{G'}T$ jako cel pożądany. Zauważ, że rozwiązanie na-

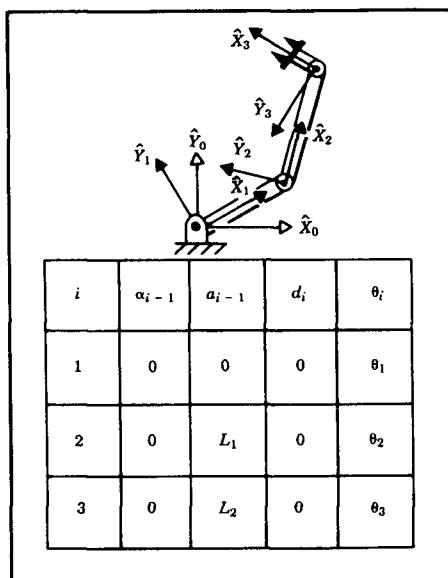
dal nie będzie możliwe, jeśli punkt docelowy nie znajduje się w przestrzeni roboczej manipulatora.

Na ogół korzystne jest pozycjonowanie początku układu narzędziowego w pożądanym miejscu i następnie wybranie osiągalnej orientacji, która jest bliska pożądanej orientacji. Jak przekonaliśmy się na przykładach 4.1 i 4.2, obliczenie podprzestrzeni jest zależne od geometrii manipulatora. Każdy manipulator musi być indywidualnie rozpatrywany w celu znalezienia metody wykonania tych obliczeń.

W podrozdz. 4.7 podano przykład "rzutowania" ogólnego celu do podprzestrzeni manipulatora o pięciu stopniach swobody w celu obliczenia wspólnych konfiguracyjnych, dla których manipulator osiągnie układ odniesienia leżący możliwie najbliżej pożądanej.

4.4. ALGEBRAICZNE CZY GEOMETRYCZNE

Jako wprowadzenie do rozwiązania równań kinematyki rozpatrzymy dwa różne podejścia do rozwiązania kinematyki płaskiego manipulatora trójczłonowego.



Rys. 4.7. Trójczłonowy manipulator płaski i parametry jego członów

Rozwiązańie algebraiczne

Rozpatrzmy trójczłonowy płaski manipulator omówiony w rozdziale 3. Jest on pokazany wraz z parametrami na rys. 4.7.

Postępując wg metody z rozdziału 3, możemy łatwo wykorzystać parametry członów w celu znalezienia równań kinematyki tego ramienia

$$\begin{matrix} B \\ W \end{matrix}^T = \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}^T = \left[\begin{array}{cccc} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (4.6)$$

Aby skupić naszą dyskusję na zadaniu odwrotnym kinematyki przyjmiemy, że konieczne przekształcenia będą wykonane tak, aby punkt docelowy był podany jako układ odniesienia kości względem bazowego układu odniesienia, tzn. $\begin{matrix} B \\ W \end{matrix}^T$. Ponieważ zajmujemy się manipulatorem płaskim, punkty docelowe mogą być łatwo wyszczególnione przez podanie trzech liczb: x, y i ϕ , gdzie ϕ jest orientacją członu 3 na płaszczyźnie (względem osi $+\hat{x}$). Zatem zamiast podawać dowolne $\begin{matrix} B \\ W \end{matrix}^T$ jako specyfikację celu, przyjmujemy przekształcenie o strukturze

$$\begin{matrix} B \\ W \end{matrix}^T = \left[\begin{array}{cccc} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (4.7)$$

Wszystkie osiągalne cele muszą leżeć w podprzestrzeni wskazanej przez strukturę równania (4.7). Przeryównując (4.6) i (4.7) dochodzimy do układu czterech nielinowych równań, które trzeba rozwiązać względem θ_1, θ_2 i θ_3

$$c_\phi = c_{123} \quad (4.8)$$

$$s_\phi = s_{123} \quad (4.9)$$

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \quad (4.10)$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \quad (4.11)$$

Od tej chwili zaczynamy algebraiczne rozwiązywanie równań (4.8) do (4.11). Jeśli podniemy do kwadratu równania (4.10) i (4.11) i dodamy je stronami, otrzymujemy

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 \quad (4.12)$$

gdzie wykorzystujemy

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2 \quad (4.13)$$

$$s_{12} = c_1 s_2 + s_1 c_2$$

Rozwiązuając (4.12) względem c_2 otrzymujemy

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \quad (4.14)$$

Aby rozwiązanie istniało, prawa strona (4.14) musi mieć wartość między -1 a +1. W algorytmie rozwiązania to ograniczenie byłoby sprawdzane w tym momencie, aby przekonać się, czy rozwiązanie istnieje. Fizycznie, jeśli to ograniczenie nie jest spełnione, to punkt docelowy jest zbyt daleko, aby manipulator go osiągnął.

Przyjmując, że cel znajduje się w przestrzeni roboczej, napiszemy wyrażenie na s_2 jako

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (4.15)$$

Ostatecznie obliczamy θ_2 używając dwuargumentowej procedury¹⁾ arctg

$$\theta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2) \quad (4.16)$$

Wybór znaków we wzorze (4.15) odpowiada wielokrotności rozwiązań, z których możemy wybrać konfigurację "łokieć u góry" lub "łokieć u dołu". Wyznaczając θ_2 użyliśmy jednej z rekurencyjnych metod rozwiązania zależności kinematycznych często spotykanego typu, polegającej na wyznaczeniu zarówno sinusa, jak i kosinusa pożądanego kąta i następnie zastosowaniu dwuargumentowej funkcji arctg. Zapewnia to znalezienie wszystkich rozwiązań oraz to, że obliczone kąty leżą we właściwej ćwiartce.

Mając znalezione θ_2 możemy rozwiązać równania (4.10) i (4.11) względem θ_1 . Zapisujemy (4.10) i (4.11) w postaci

$$x = k_1 c_1 - k_2 s_1 \quad (4.17)$$

$$y = k_1 s_1 + k_2 c_1 \quad (4.18)$$

gdzie

$$k_1 = l_1 + l_2 c_2 \quad (4.19)$$

$$k_2 = l_2 s_2$$

W celu rozwiązania równania tej postaci dokonujemy zamiany zmiennych. Obecnie zmieniamy sposób, w jaki zapisujemy stałe k_1 i k_2 .

$$\text{Jeśli } r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (4.20)$$

$$\text{i } \gamma = \text{Atan2}(k_2, k_1)$$

$$\text{to } k_1 = r \cos \gamma, \quad k_2 = r \sin \gamma \quad (4.21)$$

¹⁾ Patrz punkt 2.8.

Równania (4.17) i (4.18) mogą być teraz zapisane w postaci

$$\frac{x}{r} = \cos\gamma \cos\theta_1 - \sin\gamma \sin\theta_1 \quad (4.22)$$

$$\frac{y}{r} = \cos\gamma \sin\theta_1 + \sin\gamma \cos\theta_1 \quad (4.23)$$

lub

$$\cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r} \quad (4.24)$$

$$\sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r} \quad (4.25)$$

Stosując dwuargumentowy arctg dostajemy

$$\gamma + \theta_1 = \text{Atan2}\left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \text{Atan2}(y, x) \quad (4.26)$$

i także

$$\theta_1 = \text{Atan2}(y, x) - \text{Atan2}(k_2, k_1) \quad (4.27)$$

Zauważmy, że gdy wybór znaku jest dokonany uprzednio w rozwiązaniu θ_2 , to spowoduje on zmianę znaku w k_2 , wpływając na θ_1 . Użyte podstawienia (4.20) i (4.21) stanowią metodę rozwiązania często spotykanej w kinematyce postaci (4.10) lub (4.11).

Zauważmy także, że jeśli $x = y = 0$, wtedy wyrażenie (4.27) staje się nieokreślone – w takim przypadku θ_1 jest dowolne. Ostatecznie z (4.8) i (4.9) możemy znaleźć sumę kątów θ_1 do θ_3

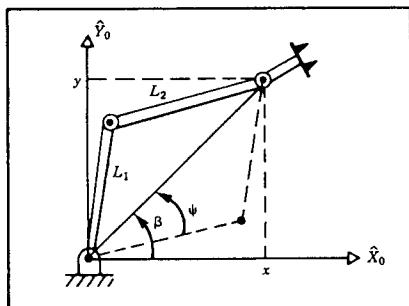
$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{Atan2}(s_\phi, c_\phi) = \phi \quad (4.28)$$

z której możemy wyznaczyć θ_3 , ponieważ znamy dwa pierwsze kąty. Jest to typowe dla manipulatorów o dwóch lub więcej członach poruszających się w płaszczyźnie tak, że w toku rozwiązania występują wyrażenia na sumy kątów.

W podsumowaniu możemy stwierdzić, że podejście algebraiczne do rozwiązywania równań kinematyki jest oparte na przekształcaniu danych równań do postaci, dla której rozwiązanie jest znane. Okazuje się, że dla wielu powięcznie stosowanych układów geometrycznych pojawia się zwykle kilka postaci równań przestępnych. Kilka z nich spotkaliśmy w poprzednim punkcie. W załączniku C (w końcu książki) wymieniono więcej z nich.

Rozwiązanie geometryczne

W podejściu geometrycznym zastosowanym do znajdowania rozwiązania kinematyki manipulatora, staramy się rozdzielić zadania przestrzennej geometrii manipulatora na szereg zadań płaskiej geometrii. Dla wielu manipulatorów (szczególnie gdy $\alpha_i = 0$ lub $\pm \pi/2$ rad) może to być zrobione łatwo. Kąty konfiguracyjne mogą być wyznaczone za pomocą narzędzi geometrii płaskiej [7]. Dla płaskiego manipulatora o trzech stopniach swobody, pokazanego na rys. 4.7, możemy zastosować wprost geometrię płaską w celu znalezienia rozwiązania.



Rys. 4.8. Płaskie zależności geometryczne związane z trójczłonowym robotem płaskim

Na rys. 4.8 pokazano trójkąt utworzony przez l_1 , l_2 oraz prostą łączącą początek układu $\{0\}$ z początkiem układu $\{3\}$. Liniami przerywanymi zaznaczono inną możliwą konfigurację trójkąta, która prowadziłaby do tego samego położenia układu $\{3\}$. Rozpatrując stały trójkąt, możemy zastosować twierdzenie kosinusów do wyznaczenia θ_2

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\pi + \theta_2) \quad (4.29)$$

Ponieważ $\cos(\pi + \theta_2) = -\cos\theta_2$, mamy

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad (4.30)$$

Aby ten trójkąt istniał, odległość punktu docelowego $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ musi być mniejsza lub równa sumie długości członów $l_1 + l_2$. Warunek ten mógłby być kontrolowany w tym miejscu algorytmu obliczeniowego w celu sprawdzenia istnienia rozwiązań. Warunek ten nie jest spełniony, gdy punkt celowy leży poza zasięgiem manipulatora. Przyjmując istnienie rozwiązań, równanie to jest rozwiązywane dla tych wartości θ_2 , które leżą między 0 i $-\pi$ rad, ponieważ tylko dla tych wartości trójkąt na rys. 4.8 istnieje. Inne możliwe rozwiązanie (trójkąt zaznaczony linią przerywaną) może być znalezione przez symetrię jako $\theta'_2 = -\theta_2$.

Aby wyznaczyć θ_1 , znajdujemy wyrażenia dla kątów ψ i β , pokazanych na rys. 4.8. Ponieważ β może być w każdej ćwiartce zależnie od znaków x i y , musimy użyć dwuargumentowej funkcji arctg

$$\beta = \text{Atan2}(y, x) \quad (4.31)$$

Znów stosujemy twierdzenie kosinusów w celu znalezienia ψ

$$\cos\psi = \frac{x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.32)$$

gdzie \arccos musi być wyznaczony tak, aby przy $0 \leq \psi \leq \pi$ zachować związki geometryczne, które prowadzą do wzoru (4.32). Rozważania te są typowe dla podejścia geometrycznego – musimy stosować wzory wyprowadzane tylko dla pewnego zakresu zmiennych, tak aby układ geometryczny był zachowany. Następnie otrzymujemy

$$\theta_1 = \beta \pm \psi \quad (4.33)$$

gdzie znak plus jest użyty, jeśli $\theta_2 < 0$, a znak minus, jeśli $\theta_2 > 0$.

Wiemy, że kąty na płaszczyźnie dodają się, więc suma trzech kątów obrotu przegubów musi być orientacją ostatniego członu

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi \quad (4.34)$$

Równanie to należy rozwiązać względem θ_3 dla uzupełnienia naszego rozwiązania.

4.5. ROZWIĄZANIE ALGEBRAICZNE PRZEZ REDUKCJĘ DO WIELOMIANU

Równania przestępne są trudne do rozwiązania, ponieważ – chociaż mogą być równaniami tylko jednej zmiennej, np. θ – na ogół występuje ona jako $\sin\theta$ i $\cos\theta$. Jednakże czyniąc następujące podstawienia, otrzymujemy wyrażenia w zależności od pojedynczej zmiennej u

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ \cos\theta &= \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ \sin\theta &= \frac{2u}{1 + u^2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Jest to bardzo ważne podstawienie geometryczne, często używane w rozwiązywaniu równań kinematyki. Stosując te podstawienia równania przestępne przekształca się w równania wielomianowe względem u . W załączniku A wymieniono te i inne tożsamości trygonometryczne.

PRZYKŁAD 4.3

Przekształcić równanie przestępne

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \quad (4.36)$$

w wielomian z tangensem kąta połówkowego i rozwiązać względem θ .

Podstawiając z (4.35) i mnożąc przez $1 + u^2$ otrzymamy

$$a(1 - u^2) + 2bu = c(1 + u^2) \quad (4.37)$$

Ułożenie względem potęgi zmiennej u daje równanie kwadratowe

$$(a + c)u^2 - 2bu + (c - a) = 0 \quad (4.38)$$

które rozwiązuje się stosując wzory na pierwiastki

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}{a + c} \quad (4.39)$$

Stąd

$$\theta = 2\arctg \left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}{a + c} \right) \quad (4.40)$$

Jeżeli rozwiązanie na u wg (4.39) jest zespolone, to nie ma rzeczywistego rozwiązania wyjściowego równania przestępnego. Zauważmy, że jeśli $a + c = 0$, to wartość argumentu funkcji arctg zmierza do nieskończoności, a zatem $\theta = \pi$ rad. W programie komputerowym możliwość dzielenia przez zero powinna być sprawdzona wcześniej. Sytuacja taka wynika z tego, że wyraz kwadratowy w równaniu (4.38) jest równy zeru i równanie kwadratowe sprowadza się do równania liniowego. ■

Ponieważ dla wielomianów, do czwartego stopnia włącznie, można zapisać rozwiązania w postaci jawnej [8,9], to manipulatory, dla których rozwiązanie kinematyki prowadzi do równania algebraicznego czwartego stopnia (lub niższego) są nazywane manipulatorami rozwiązywalnymi w postaci jawnej.

4.6. ROZWIĄZANIE PIEPERA DLA MANIPULATORA O PARACH OBROTOWYCH, Z KTÓRYCH TRZY KOLEJNE MAJĄ OSIE PRZECINAJĄCE SIĘ W JEDNYM PUNKCIE

Jak wspomniano wcześniej, chociaż dla dowolnego manipulatora o sześciu stopniach swobody nie można uzyskać rozwiązania w postaci jawnej, to jednak w pewnych ważnych, specjalnych przypadkach można uzyskać takie rozwiązanie. Pieper [3,4] badał manipulatory o sześciu stopniach swobody, u których osie trzech kolejnych par obrotowych przecinają się w jednym punkcie²⁾. W tym podrozdziale naszkicujemy metodę, którą Pieper rozwinał dla przypadku manipulatora o wszystkich sześciu parach obrotowych, z których trzy ostatnie mają osie przecinające się w jednym punkcie. Jego metodę stosuje się również do innych manipulatorów, zawierających ponadto pary przesuwne, a zainteresowany czytelnik powinien zaglądać do [4]. Metoda Piepera znajduje zastosowanie przy rozwiązywaniu zadań kinematyki dla większości handlowo dostępnych robotów przemysłowych.

²⁾Uzważyliśmy w tej rodzinie również manipulatory o parach obrotowych, z których trzy kolejne mają osie równoległe.

Gdy osie trzech ostatnich par obrotowych przecinają się w jednym punkcie, to początki układów odniesienia członów {4}, {5} i {6} umieszcza się w tym punkcie, który przyjmuje się jako dany w układzie współrzędnych podstawy w postaci wektora

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P_{4ORG} \quad (4.41)$$

lub zapisując go jako czwartą kolumnę macierzy (3.6) dla $i = 4$

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 s\alpha_3 \\ d_4 c\alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

lub

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^2T_3 \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 s\alpha_3 \\ d_4 c\alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Uwzględniając zapis (3.6) dla macierzy 2T_3 , występującej w równaniu (4.44), uzyskuje się następujące wyrażenia na f_i

$$\begin{aligned} f_1 &= a_3 c_3 + d_4 s\alpha_3 s_3 + a_2 \\ f_2 &= a_3 c\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 c\alpha_2 c_3 - d_4 s\alpha_2 c\alpha_3 - d_3 s\alpha_2 \\ f_3 &= a_3 s\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 s\alpha_2 c_3 + d_4 c\alpha_2 c\alpha_3 + d_3 c\alpha_2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Uwzględniając zapis (3.6) dla macierzy 0T_1 i 1T_2 w (4.43) otrzymujemy

$${}^0P_{4ORG} = \begin{bmatrix} c_1 g_1 - s_1 g_2 \\ s_1 g_1 + c_1 g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

gdzie

$$\begin{aligned} g_1 &= c_2 f_1 - s_2 f_2 + a_1 \\ g_2 &= s_2 c\alpha_1 f_1 + c_2 c\alpha_1 f_2 - s\alpha_1 f_3 - d_2 s\alpha_1 \\ g_3 &= s_2 s\alpha_1 f_1 + c_2 s\alpha_1 f_2 + c\alpha_1 f_3 + d_2 c\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Teraz zapiszemy wyrażenie na kwadrat modułu wektora ${}^0P_{4ORG}$, które wynika z równania (4.46) jako

$$r = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad (4.48)$$

lub, uwzględniając (4.47) dla g_1 , mamy

$$r = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2f_3 + 2a_1(c_2f_1 - s_2f_2) \quad (4.49)$$

Teraz zapiszemy to równanie, łącznie ze składową Z równania (4.46), jako układ dwóch równań w postaci

$$r = (k_1c_2 + k_2s_2)2a_1 + k_3 \quad (4.50)$$

$$z = (k_1s_2 - k_2c_2)s\alpha_1 + k_4$$

gdzie

$$k_1 = f_1$$

$$k_2 = -f_2$$

$$k_3 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2f_3 \quad (4.51)$$

$$k_4 = f_3c\alpha_1 + d_2c\alpha_1$$

Równanie (4.50) jest użyteczne, ponieważ zależność na θ_1 została wyeliminowana, a zależność na θ_2 przyjmuje prostą postać.

Teraz rozważmy rozwiązanie (4.50) dla θ_3 . Wyróżniamy trzy przypadki:

- Jeśli $a_1 = 0$, to $r = k_3$, gdzie r jest znane. Prawa strona (k_3) jest tylko funkcja θ_3 . Po wykonaniu podstawień (4.35) równanie kwadratowe ze zmienną $\operatorname{tg}(\theta_3/2)$ może być rozwiązane względem θ_3 .
- Jeśli $s\alpha_1 = 0$, to $z = k_4$, gdzie z jest znane. Po podstawieniu (4.35) otrzymuje się równanie kwadratowe, które może być rozwiązane względem θ_3 .
- W pozostałych przypadkach eliminuje się s_2 i c_2 z (4.50), aby otrzymać

$$\frac{(r - k_3)^2}{4a_1^2} + \frac{(z - k_4)^2}{s^2\alpha_1^2} = k_1^2 + k_2^2 \quad (4.52)$$

Równanie to, po podstawieniu (4.35) dla θ_3 , daje w wyniku równanie 4 stopnia, które może być rozwiązane względem θ_3 ³⁾.

Mając rozwiązanie dla θ_3 , możemy rozwiązać równanie (4.50) względem θ_2 i (4.46) względem θ_1 .

Aby skompletować nasze rozwiązanie, musimy wyznaczyć θ_4 , θ_5 i θ_6 . Ponieważ osie tych par obrotowych przecinają się w jednym punkcie, to ich kąty konfiguracyjne mają wpływ na orientację tylko ostatniego członu. Możemy je obliczyć wykorzystując tylko macierz orientacji układu odniesienia zadanego celu, będącą częścią macierzy 0_R . Znając θ_1 , θ_2 i θ_3 , możemy obliczyć

$${}^4_R|_{\theta_4=0} = {}^0_R^{-1}|_{\theta_4=0} {}^0_R \quad (4.53)$$

³⁾ Pomocne jest stwierdzenie, że

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = a_3^2 + d_4^2 + d_3^2 + a_2^2 + 2d_4d_3c\alpha_3 + 2a_2a_3c_3 + 2a_2d_4s\alpha_3s_3$$

Dla wielu manipulatorów te ostatnie trzy kąty mogą być wyznaczone za pomocą rozwiązania kątów Eulera Z-Y-Z podanego w rozdziale 2 i zastosowanego dla ${}^4R|_{\theta_4=0}$. Dla dowolnego manipulatora (o przecinających się osiach par obrotowych 4, 5 i 6) ostatnie trzy kąty konfiguracyjne mogą być wyznaczone dla zbioru odpowiednio określonych kątów Eulera. Ponieważ dla trzech ostatnich par obrotowych są zawsze dwa rozwiązania, łączna liczba rozwiązań dla manipulatora będzie podwojoną liczbą rozwiązań, znalezionych dla pierwszych trzech par obrotowych.

4.7. PRZYKŁADY ZADAŃ ODWROTNYCH KINEMATYKI MANIPULATORA

W tym podrozdziale rozwiążemy zadania odwrotne kinematyki dla dwóch robotów przemysłowych. Jedno rozwiązanie zadania przeprowadzono na drodze czysto algebraicznej, podczas gdy drugie jest częściowo algebraiczne, a częściowo geometryczne. Chociaż rozwiązania te nie tworzą skończonego zbioru metod rozwiązywania zadań kinematyki manipulatora, pokazują one wiele przekształceń, które pojawiają się w większości rozwiązań zadań tego typu.

Robot typu Unimation PUMA 560

Jako przykład metody rozwiązania algebraicznego, stosowanego do manipulatorów o sześciu stopniach swobody, rozwiążemy równania kinematyki robota PUMA 560, które były omówione w rozdz. 3. Formę rozwiązania zaczerpnięto z [5].

Chcemy rozwiązać równanie

$$\begin{aligned} {}^0_6T = & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = {}^0_1T(\theta_1) {}^1_2T(\theta_2) {}^2_3T(\theta_3) {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) \end{aligned} \quad (4.54)$$

względem θ_1 , gdy dane są wartości liczbowe elementów macierzy 0_6T .

Przenosząc zależność na θ_1 na lewą stronę równania (4.54), otrzymano

$$\left[{}^0_1T(\theta_1) \right]^{-1} {}^0_6T = {}^1_2T(\theta_2) {}^2_3T(\theta_3) {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) \quad (4.55)$$

Odwracając macierz 0_1T zapiszemy równanie (4.55) w postaci

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6T \quad (4.56)$$

gdzie macierz $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} T$ jest dana przez równanie (3.13), wyprowadzone w rozdz. 3. Ta prosta metoda mnożenia każdej strony równania przekształcenia przez odwrotność macierzy jest często stosowana ze względu na zalety w wydzielaniu zmiennych przy poszukiwaniu równania rozwiązywalnego.

Przyrównując elementy (2, 4) z obu stron (4.56) mamy

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_3 \quad (4.57)$$

Aby rozwiązać równanie tej postaci, dokonujemy trygonometrycznych podstawień

$$\begin{aligned} p_x &= \rho \cos\phi \\ p_y &= \rho \sin\phi \end{aligned} \quad (4.58)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \phi &= \text{Atan2}(p_y, p_x) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Podstawiając (4.58) do (4.57) otrzymujemy

$$c_1 s_\phi - s_1 c_\phi = \frac{d_3}{\rho} \quad (4.60)$$

Stosując wzór na różnicę kątów, otrzymujemy

$$\sin(\phi - \theta_1) = \frac{d_3}{\rho} \quad (4.61)$$

Zatem

$$\cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}} \quad (4.62)$$

oraz

$$\phi - \theta_1 = \text{Atan2}\left(\frac{d_3}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}}\right) \quad (4.63)$$

Ostateczne rozwiązanie na θ_1 może być zapisane jako

$$\theta_1 = \text{Atan2}(p_y, p_x) - \text{Atan2}\left(d_3, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}\right) \quad (4.64)$$

Zauważmy, że znaleźliśmy dwa możliwe rozwiązania dla θ_1 odpowiadające znakowi plus lub minus w (4.64). Ponieważ θ_1 jest teraz znane, to również lewa strona równania (4.56) jest znana. Jeżeli porównamy elementy (1,4) po obu stronach (4.56) oraz elementy (3,4), to otrzymujemy

$$\begin{aligned} c_1 p_x + s_1 p_y &= a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2 \\ -p_z &= a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Jeśli podniesiemy do kwadratu równania (4.65) i (4.57) i dodamy do siebie wynikowe równania, to otrzymujemy

$$a_3 c_3 - d_4 s_3 = K \quad (4.66)$$

gdzie

$$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2} \quad (4.67)$$

Zauważmy, że zależność na θ_1 była wyprowadzona z (4.66). Równanie (4.66) jest tej samej postaci jak (4.57) i dlatego może być rozwiązyane przez tego samego rodzaju podstawienia trygonometryczne, dające rozwiązanie dla θ_3

$$\theta_3 = \text{Atan2}(a_3, d_4) - \text{Atan2}\left(K, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2}\right) \quad (4.68)$$

Znak plus lub minus w (4.68) prowadzi do dwóch różnych rozwiązań dla θ_3 .

Jeśli ponownie rozważymy równanie (4.54), to teraz możemy zapisać je tak, aby po lewej stronie były tylko znane wartości i θ_2

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3T(\theta_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 6T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} T(\theta_4) \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} T(\theta_5) \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} T(\theta_6) \quad (4.69)$$

lub

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & -s_{23} & -a_2 c_3 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} T \quad (4.70)$$

gdzie macierz $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} T$ jest dana równaniem (3.11), wyprowadzonym w rozdz. 3. Przyrównując elementy (1,4), występujące po obu stronach równania (4.70), jak również elementy (2,4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} c_1 c_{23} p_x + s_1 c_{23} p_y - s_{23} p_z - a_2 c_3 &= a_3 \\ -c_1 s_{23} p_x - s_1 s_{23} p_y - c_{23} p_z + a_2 s_3 &= d_4 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Równania te mogą być rozwiązyane względem s_{23} i c_{23} , dając w wyniku

$$s_{23} = \frac{(-a_3 - a_2 c_3)p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \quad (4.72)$$

$$c_{23} = \frac{(a_2 s_3 - d_4)p_z - (-a_3 - a_2 c_3)(c_1 p_x + s_1 p_y)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2}$$

Ponieważ mianowniki są równe i dodatnie, to wyznaczamy sumę θ_2 i θ_3 jako

$$\theta_{23} = \text{Atan2}\left[\begin{aligned} &(-a_3 - a_2 c_3)p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(d_4 - a_2 s_3), \\ &(a_2 s_3 - d_4)p_z - (a_3 + a_2 c_3)(c_1 p_x + s_1 p_y) \end{aligned}\right] \quad (4.73)$$

Z równania (4.73) obliczamy cztery wartości θ_{23} zgodnie z czterema możliwymi kombinacjami rozwiązań dla θ_1 i θ_3 . Stąd cztery możliwe rozwiązania dla θ_2 są obliczane jako

$$\theta_2 = \theta_{23} - \theta_3 \quad (4.74)$$

gdzie odpowiednie rozwiązań dla θ_3 wykorzystano do obliczenia różnicy po lewej stronie (4.74).

Przyciągając elementy (1,3) z obu stron (4.70) oraz elementy (3,3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} r_{13}c_1c_{23} + r_{23}s_1c_{23} - r_{33}s_{23} &= -c_4s_5 \\ -r_{13}s_1 + r_{23}c_1 &= s_4s_5 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Jeżeli $s_5 \neq 0$, to możemy wyznaczyć θ_4 jako

$$\theta_4 = \text{Atan2}(-r_{13}s_1 + r_{23}c_1, -r_{13}c_1c_{23} - r_{23}s_1c_{23} + r_{33}s_{23}) \quad (4.76)$$

Gdy $\theta_5 = 0$, manipulator znajduje się w konfiguracji osobliwej, w której osie par obrotowych 4 i 6 są współliniowe i powodują taki sam ruch ostatniego członu manipulatora. W tym przypadku odgrywa rolę tylko suma lub różnica θ_4 i θ_6 (i tylko ona może być wyznaczona). Ta sytuacja jest wykrywana poprzez sprawdzenie, czy oba argumenty Atan2 w (4.76) są bliskie zeru. Jeśli tak, to θ_4 jest wybierane dowolnie⁴⁾, a θ_6 – odpowiednio obliczane.

Jeśli uwzględnimy ponownie równanie (4.54), to możemy je teraz zapisać tak, aby wszystkie wyrazy po lewej stronie zależały tylko od znanych wartości i θ_4 . Stąd

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4T(\theta_4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 6T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5T(\theta_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6T(\theta_6) \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

gdzie macierz $\begin{bmatrix} 0 \\ 4T(\theta_4) \end{bmatrix}^{-1}$ jest dana w postaci

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + d_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1c_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & -s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + d_3c_4 + a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

a macierz $\begin{bmatrix} 0 \\ 6T \end{bmatrix}$ jest określona równaniem (3.10), wyprowadzonym w rozdz. 3. Przyciągając elementy (1,3) po obu stronach równania (4.77) oraz podobnie elementy (3,3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} r_{13}(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + r_{23}(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - r_{33}(s_{23}c_4) &= -s_5 \\ r_{13}(-c_1s_{23}) + r_{23}(-s_1s_{23}) + r_{33}(-c_{23}) &= c_5 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Stąd możemy wyznaczyć θ_5 , jako

$$\theta_5 = \text{Atan2}(s_5, c_5) \quad (4.80)$$

gdzie s_5 i c_5 są określone wzorami (4.79) powyżej.

⁴⁾ Jest zwykle wybierane jako równe aktualnej wartości kąta konfiguracyjnego pary obrotowej 4.

Stosując tę samą metodę jeszcze raz, obliczamy macierz $\begin{pmatrix} 0 \\ 5T \end{pmatrix}^{-1}$ i zapisujemy (4.54) w postaci

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 6T \end{pmatrix} = \frac{5}{6} T(\theta_6) \quad (4.81)$$

Przyrównując elementy (3,1) po obu stronach (4.77) oraz podobnie - elementy (1,1), tak jak poprzednio, otrzymujemy

$$\theta_6 = \text{Atan2}(s_6, c_6) \quad (4.82)$$

gdzie

$$\begin{aligned} s_6 &= -r_{11}(c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) - r_{21}(s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) + r_{31}(s_{23} s_4) \\ c_6 &= r_{11}[(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4)c_5 - c_1 s_{23} s_5] + r_{21}[(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4)c_5 - \\ &\quad - s_1 s_{23} s_5] - r_{31}(s_{23} c_4 c_5 + c_{23} s_5) \end{aligned}$$

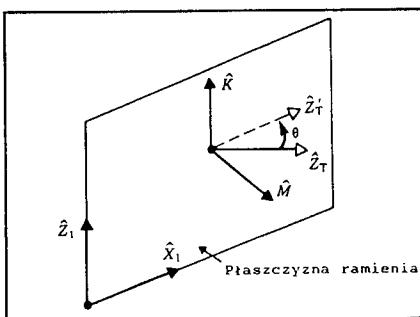
Ponieważ znaki plus lub minus pojawiają się w (4.64) i (4.68), z równań tych otrzymuje się cztery rozwiązania. Dodatkowo mamy tutaj cztery rozwiązania więcej, otrzymane przez "odwrócenie" kości manipulatora. Dla każdego z czterech rozwiązań obliczonych powyżej otrzymujemy rozwiązanie dodatkowe opisane przez zależności

$$\begin{aligned} \theta'_4 &= \theta_4 + \pi \text{ rad} \\ \theta'_5 &= -\theta_5 \\ \theta'_6 &= \theta_6 + \pi \text{ rad} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Po obliczeniu wszystkich ośmiu rozwiązań niektóre lub wszystkie z nich mogą być odrzucone z powodu naruszeń ograniczeń ruchu w parach obrotowych. Z pozostałych rozwiązań zwykle wybierane jest jedno, najbliższe aktualnej konfiguracji manipulatora.

Robot Yasukawa Motoman L-3

Jako drugi przykład rozwiążemy równania kinematyki robota Yasukawa Motoman L-3, które były omówione w rozdziale 3. Rozwiązanie to będzie częściowo algebraiczne, a częściowo geometryczne. Robot Motoman L-3 wykazuje trzy cechy, które powodują, że zadanie odwrotne kinematyki dla tego robota różni się od zadania dla robota PUMA. Po pierwsze, ponieważ manipulator ma tylko pięć par obrotowych, to nie jest zdolny do pozycjonowania lub orientacji jego końcówki wykonawczej w celu osiągnięcia dowolnego układu celowego. Po drugie, ponieważ mechanizm napędowy par obrotowych 2 i 3 ma postać czworoboku przegubowego, a pozostałe są napędzane za pomocą przekładni łańcuchowych, to ruch jednego napędu wywołuje ruchy dwóch lub więcej par obrotowych. Po trzecie, ograniczenia położen siłowników nie są stałe, lecz zależą od położenia innych siłowników i dlatego stwierdzenie, czy obliczony zbiór wartości przemieszczeń siłowników spełnia ograniczenia, nie jest trywialne.



Rys. 4.9. Obrót układu odniesienia celu do podprzestrzeni robota Motoman

Jeśli rozważymy własności podprzestrzeni manipulatora Motoman (to samo odnosi się się do wielu manipulatorów o pięciu stopniach swobody), szybko stwierdzimy, że ta podprzestrzeń może być opisana przez nałożenie jednego ograniczenia na osiągalną orientację: kierunek wskazywany przez narzędzie, tzn. oś \hat{Z}_T musi leżeć w "płaszczyźnie ramienia". Płaszczyzna ta jest płaszczyzną pionową, przechodzącą przez oś pary obrotowej 1 i punkt przecięcia się osi par obrotowych 4 i 5. Orientację najbliższą ogólnej otrzymuje się przez obrót o minimalny kąt wokół osi wskazanej przez kierunek narzędzia tak, aby leżała w tej płaszczyźnie. Bez wyprowadzania jawnego wyrażenia dla tej podprzestrzeni, określmy metodę rzutowania do niej dowolnego układu odniesienia celu. Zauważmy, że cała ta dyskusja obowiązuje dla przypadku, gdy układ kości i układ narzędzia różnią się tylko o przesunięcie wzdłuż osi \hat{Z}_W .

Na rys. 4.9 określono płaszczyznę ramienia przez wersor normalnej \hat{M} , a pożądany kierunek osi narzędzia - przez wersor \hat{Z}_T . Wersor ten musi być obrócony o kąt θ wokół pewnego wektora \hat{K} w celu spowodowania, aby nowy kierunek osi narzędzia, opisany przez wersor \hat{Z}'_T , leżał w tej płaszczyźnie. Jest jasne, że wersor \hat{K} , odpowiadający obrotowi o minimalny kąt θ , leży w płaszczyźnie ramienia i jest prostopadły zarówno do \hat{Z}_T , jak i do \hat{Z}'_T .

Dla każdego danego układu odniesienia celu wersor \hat{M} określa się jako

$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

gdzie p_x i p_y są współrzędnymi X i Y pożądanego położenia narzędzia.

Zatem wersor K jest dany przez

$$K = \hat{M} \times \hat{Z}_T \quad (4.85)$$

a nowy wersor \hat{Z}'_T przez

$$\hat{Z}'_T = \hat{K} \times \hat{M} \quad (4.86)$$

Wartość kąta obrotu θ jest określona następująco

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \hat{Z}_T \cdot \hat{Z}'_T \\ \sin\theta &= (\hat{Z}_T \times \hat{Z}'_T) \cdot \hat{K} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Stosując wzór Rodrigues'a (patrz ćwiczenie 2.20) otrzymujemy

$$\hat{Y}'_T = c\theta\hat{Y}_T + s\theta(\hat{K} \times \hat{Y}_T) + (1 - c\theta)(\hat{K} \cdot \hat{Y}_T)\hat{K} \quad (4.88)$$

W końcu obliczamy pozostałe niewiadome elementy kolumny nowej macierzy orientacji narzędzia jako

$$\hat{X}'_T = \hat{Y}'_T \times \hat{Z}'_T \quad (4.89)$$

Równania (4.84) do (4.89) opisują metodę rzutowania danej ogólnej orientacji celu do podprzestrzeni robota Motoman.

Przyjmując, że dany układ kluczy ${}_{WT}^B$ leży w podprzestrzeni manuipulatora, rozwiązujeśmy równania kinematyki w podany poniżej sposób. Wyprowadzając równania kinematyki dla robota Motoman L-3, tworzymy iloczyn przekształceń członów

$${}_{5T}^{0T} = {}_{1T}^{0T} {}_{2T}^{1T} {}_{3T}^{2T} {}_{4T}^{3T} {}_{5T}^{4T} \quad (4.90)$$

Jeśli weźmiemy

$${}_{5T}^{0T} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

i pomnożymy obie strony przez ${}_{1T}^{0T-1}$, mamy

$${}_{1T}^{0T-1} {}_{5T}^{0T} = {}_{1T}^{1T} {}_{2T}^{2T} {}_{3T}^{3T} {}_{4T}^{4T} {}_{5T}^{5T} \quad (4.92)$$

gdzie lewa strona jest następująca

$$\begin{bmatrix} c_1r_{11} + s_1r_{21} & c_1r_{12} + s_1r_{22} & c_1r_{13} + s_1r_{23} & c_1p_x + s_1p_y \\ -r_{31} & -r_{32} & -r_{33} & -p_z \\ -s_1r_{11} + c_1r_{21} & -s_1r_{12} + c_1r_{22} & -s_1r_{13} + c_1r_{23} & -s_1p_x + c_1p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

prawa zaś wynosi

$$\begin{bmatrix} * & * & s_{234} & * \\ * & * & -c_{234} & * \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

przy czym kilku elementów nie opisano. Przyrównując elementy (3,4) po obu stronach równania (4.92) otrzymujemy równanie

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = 0 \quad (4.95)$$

które daje nam⁵⁾

$$\theta_1 = \text{Atan2}(p_y, p_x) \quad (4.96)$$

Przyrównując odpowiednio elementy (2,3) i (1,3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_5 &= -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} \\ c_5 &= -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} \end{aligned} \quad (4.97)$$

z czego obliczamy θ_5 jako

$$\theta_5 = \text{Atan2}(r_{21}c_1 - r_{11}s_1, r_{22}c_1 - r_{12}s_1) \quad (4.98)$$

Przyrównując odpowiednio elementy (2,3) i (1,3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} c_{234} &= r_{33} \\ s_{234} &= c_1 r_{13} + s_1 r_{23} \end{aligned} \quad (4.99)$$

co prowadzi do

$$\theta_{234} = \text{Atan2}(r_{13}c_1 + r_{23}s_1, r_{33}) \quad (4.100)$$

Aby wyznaczyć pojedyncze kąty θ_2 , θ_3 i θ_4 , zastosujemy metodę geometryczną. Na rys. 4.10 pokazano płaszczyznę ramienia z punktem A leżącym na osi pary obrotowej 2, punktem B - na osi pary obrotowej 3 oraz punktem C - na osi pary obrotowej 4.

Z twierdzenia kosinusów zastosowanego do trójkąta ABC mamy

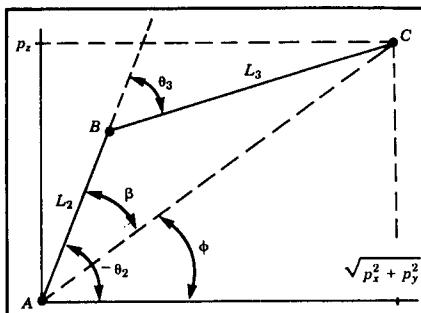
$$\cos\theta_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \quad (4.101)$$

Zatem⁶⁾

$$\theta_3 = \text{Atan2}(\sqrt{1 - \cos^2\theta_3}, \cos\theta_3) \quad (4.102)$$

⁵⁾Dla tego manipulatora drugie rozwiązanie przekraczałoby ograniczenia ruchu w parach obrotowych i dlatego nie jest obliczane.

⁶⁾Dla tego manipulatora drugie rozwiązanie przekraczałoby ograniczenia ruchu w parach obrotowych i dlatego nie jest obliczane.



Rys. 4.10. Płaszczyzna manipulatora Motoman

Z rys. 4.10 wynika, że $\theta_2 = -\phi - \beta$ lub

$$\theta_2 = -\text{Atan}2(p_z, \sqrt{p_x^2 + p_y^2}) - \text{Atan}2(l_3 \sin \theta_3, l_2 + l_3 \cos \theta_3) \quad (4.103)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \quad (4.104)$$

Mając rozwiązania dla kątów konfiguracyjnych, możemy wykonać dalsze obliczenia dotyczące wartości przemieszczeń silowników. Powołując się na podrozdz. 3.7 rozwiązujemy równanie (3.15) względem A_i

$$A_1 = \frac{1}{k_1}(\theta_1 - \lambda_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{k_2} \left(\sqrt{-2\alpha_2 \beta_2 \cos \left(\theta_2 - \Omega_2 - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\phi_2}{r_2} \right) + 270^\circ \right)} + \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \lambda_2 \right)$$

$$A_3 = \frac{1}{k_3} \left(\sqrt{-2\alpha_3 \beta_3 \cos \left(\theta_2 - \theta_3 - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\phi_3}{r_3} \right) + 90^\circ \right)} + \alpha_3^2 + \beta_3^2 - \lambda_3 \right)$$

$$A_4 = \frac{1}{k_4}(180^\circ + \lambda_4 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

$$A_5 = \frac{1}{k_5}(\lambda_5 - \theta_5) \quad (4.105)$$

Ponieważ silowniki mają ograniczone zakresy ruchu, musimy sprawdzić, czy nasze obliczone rozwiązania spełnia te ograniczenia. Sprawdzenie to jest skomplikowane, ponieważ z powodu struktury mechanizmu silowniki wpływają wzajemnie na swoje dozwolone zakresy ruchu. Silowniki 2 i 3 robota Motoman oddziałują w ten sposób, że zawsze musi być spełniona następująca zależność

$$A_2 - 10\ 000 > A_3 > A_2 + 3000 \quad (4.106)$$

Znaczy to, że ograniczenia siłownika 2 są funkcją pozycji siłownika 3. Podobnie

$$32\ 000 - A_4 < A_5 < 55\ 000 \quad (4.107)$$

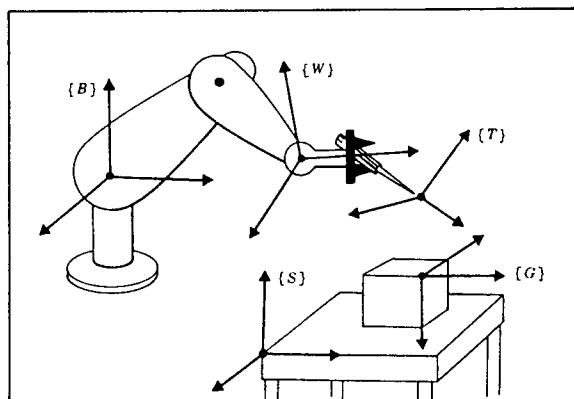
Ponieważ jednemu pełnemu obrotowi pary obrotowej 5 odpowiada 25 600 kroków siłownika, to gdy $A_4 > 2600$, występują dwa możliwe rozwiązania na A_5 . Jest to jedyna sytuacja, w której dla robota Yasukawa Motoman L-3 otrzymuje się więcej niż jedno rozwiązanie.

4.8. UKŁADY STANDARDOWE

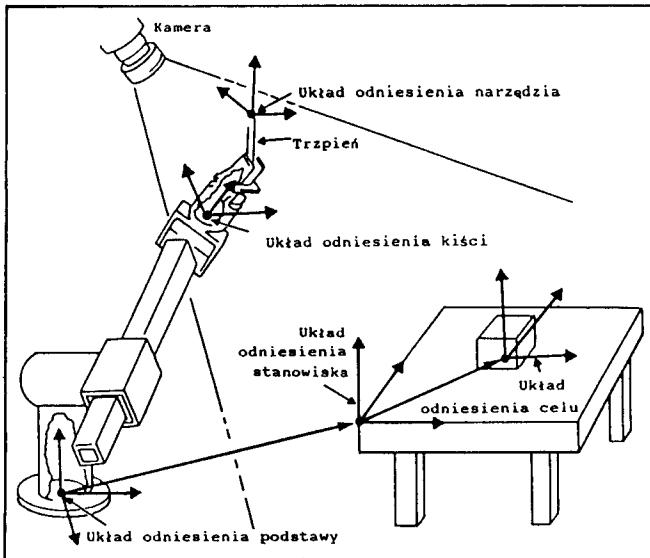
Zdolność wyznaczenia współrzędnych konfiguracyjnych jest główną cechą wielu układów sterowania robotów. Rozważmy ponownie pokazane na rys. 4.11 standardowe układy odniesienia.

Sposób, w jaki te układy są stosowane w ogólnym układzie robota, jest następujący:

1. Użytkownik określa, gdzie chce usytuować układ stanowiska. Może on być w narożniku stanowiska pracy, jak na rys. 4.12 lub nawet przymocowany do poruszającego się przenośnika. Układ stanowiska $\{S\}$ jest zdefiniowany względem bazowego układu odniesienia $\{B\}$.
2. Użytkownik podaje opis narzędzia, używanego przez robota, podając specyfikację układu odniesienia $\{T\}$. Każde narzędzie, które robot zabiera, może mieć inny układ odniesienia $\{T\}$ z nim związany. Zauważmy, że to samo narzędzie uchwycone w różny sposób wymaga różnych określeń układu $\{T\}$, opisanego względem układu $\{W\}$ w postaci macierzy $\frac{W}{T}$.



Rys. 4.11. Usytuowanie układów "standardowych"



Rys. 4.12. Przykład stanowiska pracy

3. Użytkownik podaje punkt docelowy ruchu robota w postaci opisu układu odniesienia celu $\{G\}$ względem układu stanowiska. Często definicje $\{T\}$ i $\{S\}$ pozostają ustalone dla kilku różnych ruchów robota. W tym przypadku są one zdefiniowane raz, a użytkownik podaje tylko zestaw specyfikacji $\{G\}$. W wielu systemach definicja układu odniesienia narzędzia (W_T) jest stała (np. jest on zdefiniowany wraz ze swym początkiem w środku chwytyaka). Również układ stanowiska może być ustalony lub łatwo nauczony przez użytkownika z wykorzystaniem robota. W takim systemie nie wymaga się od użytkownika znajomości pięciu układów standardowych - myśli on tylko o usytuowaniu narzędzia poruszającego się do celu w przestrzeni roboczej, określonej w układzie odniesienia stanowiska.
4. W układzie sterowania robota jest obliczany zbiór współrzędnych konfiguracyjnych, opisujących ruchy w takiej kolejności, aby układ odniesienia narzędzia przemieszczał się płynnie z położenia początkowego do położenia, w którym $\{T\} = \{G\}$ w końcu ruchu.

4.9. REALIZACJA ROZWIĄZANIA ZADANIA DLA MANIPULATORA

Funkcja SOLVE wprowadza przekształcenia kartezjańskie i przywołuje rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki. Zatem zadanie odwrotne kinematyki jest uogólniane tak, aby dowolne opisy układów odniesienia narzędziowego i stanowiskowego mogły być wykorzystane w podstawowym rozwiązyaniu zadania kinematyki odwrotnej, które znajduje rozwiązanie dla układu odniesienia kości względem układu bazowego.

Dla danej specyfikacji układu celu T funkcja SOLVE wykorzystuje opisy układów narzędzia i stanowiska do obliczania macierzy położenia układu $\{W\}$ względem $\{B\}$

$$\frac{B}{W} = \frac{B}{S} \frac{S}{T} \frac{T}{T} \frac{W}{T}^{-1} \quad (4.108)$$

Następnie w zadaniu odwrotnym kinematyki przyjmuje macierz $\frac{B}{W}$ jako wejście i oblicza wartości θ_1 do θ_n .

4.10. POWTARZALNOŚĆ I DOKŁADNOŚĆ

Obecnie wiele robotów przemysłowych wykonuje ruchy do punktów docelowych, które zostały uprzednio nauczone. Punkt nauczony jest to taki punkt, do którego manipulator jest przemieszczany rzeczywiście, po czym następuje odczyt (z sensorów) i zapamiętanie współrzędnych konfiguracyjnych. Gdy robot otrzymuje polecenie powrotu do tego punktu w przestrzeni, wtedy każde połączenie ruchowe jest poruszane o zapamiętaną wartość przemieszczenia. W prostych manipulatorach "z nauczaniem i odtwarzaniem" (teach and playback), zadanie odwrotne kinematyki nigdy nie występuje, ponieważ punkty docelowe nie są nigdy zadawane we współrzędnych kartezjańskich. Podając z jaką dokładnością manipulator może wrócić do punktu nauczonego, wytwórcza określa powtarzalność manipulatora.

Każdorazowo, gdy pozycja i orientacja celu jest podana we współrzędnych kartezjańskich, zadanie odwrotne kinematyki manipulatora musi być obliczone w celu wyznaczenia wymaganych współrzędnych konfiguracyjnych. Systemy sterowania, pozwalające na opisanie układu celu we współrzędnych kartezjańskich, umożliwiają przemieszczenie manipulatora do punktów, które nie były nauczane, a leżą w jego przestrzeni roboczej i których prawdopodobnie nigdy wcześniej nie osiągał. Nazwiemy te punkty punktami obliczonymi. Taka możliwość jest konieczna dla wielu zadań manipulacyjnych. Na przykład, jeśli zastosowano komputerowy układ wizyjny do zlokalizowania części, która robot powinien chwycić, wtedy robot musi być zdolny do przemieszczenia się do punktu o współrzędnych kartezjańskich dostarczonych przez sensory wizyjne. Dokładność, z jaką obliczony punkt może być osiągnięty, nazywa się dokładnością manipulatora.

Dokładność manipulatora jest ograniczona od dołu przez powtarzalność. Oczywiście, dokładność manipulatora zależy od dokładności określenia parametrów występujących w równaniach kinematycznych robota. Błędy w znajomości parametrów Denavita-Hartenberga spowodują, że wartości współrzędnych konfiguracyjnych, obliczone z równań zadania odwrotnego kinematyki, będą obarczone błędem. Zatem, chociaż powtarzalność większości manipulatorów przemys-

słowych jest całkiem dobra, to dokładność jest zwykle znacznie gorsza i zmienia się w zależności od rodzaju manipulatora.

Specjalna technika wzorcowania pozwala na polepszenie dokładności manipulatora dzięki dokładniejszemu wyznaczeniu jego parametrów kinematycznych.

4.11. ZAGADNIENIA OBlicZENiOWE

W wielu schematach sterowania według zadanej trajektorii, które będziemy rozważać w rozdziale 7, konieczne jest obliczanie zadań odwrotnych kinematyki manipulatora z dość dużą częstotliwością, np. 30 Hz lub szybciej. Dlatego tak ważna jest efektywność obliczeń. Te wymagania prędkościowe wykluczają użycie numerycznych technik rozwiązania, które są z natury iteracyjne i z tego powodu nie były rozważane.

Większość ogólnych uwag z podrozdz. 3.10, poczynionych dla zadań prostych kinematyki, odnosi się również do zadania odwrotnego kinematyki. Przy rozwiązaniu zadań odwrotnych kinematyki często stosowany jest podręczny podprogram Atan2, w celu zwiększenia częstotliwości obliczeń.

Struktura obliczeń rozwiązań wielokrotnych jest również ważna. Na ogół bardziej efektywne jest generowanie wszystkich rozwiązań równolegle, niż jednego za drugim w układzie szeregowym. Oczywiście w pewnych zastosowaniach, gdy nie wszystkie rozwiązania są wymagane, obliczenie tylko jednego oszczędza sporo czasu.

Przy wykorzystaniu podejścia geometrycznego do rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki czasem możliwe jest obliczenie rozwiązań wielokrotnych przez proste operacje na kątach konfiguracyjnych, wyznaczonych dla pierwszego rozwiązania. Znaczy to, że pierwsze rozwiązanie jest umiarkowanie kosztowne obliczeniowo, lecz inne rozwiązania są znajdowane bardzo szybko przez dodawanie lub odejmowanie kąta π itp.

Bibliografia

- [1] B.Roth, J.Rastegar i V.Scheinmann, "On the Design of Computer Controlled Manipulators", On the Theory and Practice of Robots and Manipulators, Vol.1, First CISM-IFTOMM Symposium, September 1973, str.93-113.
- [2] B.Roth, "Performance Evaluation of Manipulators from a Kinematic Viewpoint", Performance Evaluation of Manipulators, National Bureau of Standards, special publication, 1975.
- [3] D.Pieper i B.Roth, "The Kinematics of Manipulators Under Computer Control", Proceedings of the Second International Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Vol.2, Zakopane, Poland, 1969, str.159-169.
- [4] D.Pieper, "The Kinematics of Manipulators Under Computer Control" Unpublished Ph.D. Thesis, Stanford University, 1968.

- [5] R.P. Paul, B.Shimano i G.Mayer, "Kinematic Control Equations For Simple Manipulators", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-11, No 6, 1981.
- [6] L.Tsai i A.Morgan, "Solving the Kinematics of Most General Six- and Five-degree-of-freedom Manipulators by Continuation Methods", Paper 84-DET-20, ASME Mechanisms Conference, Boston, October 7-10, 1984.
- [7] C.S.G.Lee and M.Ziegler, "Geometric Approach in solving Inverse Kinematics of PUMA Robots", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-20, No 6, November 1984.
- [8] W.Beyer, *CRC Standard Mathematical Tables*, 25th edition, CRC Press, Inc., Florida, 1980.
- [9] R.Burlington, *Handbook of Mathematical Tables and Formulas*, 5th edition, McGraw-Hill, 1973.
- [10] S.Hayati, "Robot Arm Geometric Link Parameter Estimation", *Proceedings of the 22nd IEEE Conf. on Decision and Control*, December 1983.
- [11] Y.Nakamura i H.Hanafusa, "Inverse Kinematic solutions with Singularity Robustness for Robot Manipulator Control", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.108, 1986.
- [12] D.Baker i C.Wampler, "On the Inverse Kinematics of Redundant Manipulators", *International Journal of Robotics Research*, Vol.7, No 2, 1988.

Ćwiczenia

- 4.1. [15] Naszkicuj przestrzeń roboczą chwytaka manipulatora trójczłonowego z rozdz.3, ćwiczenie 3 dla przypadku $l_1 = 15,0$, $l_2 = 10$ oraz $l_3 = 3,0$.
- 4.2. [26] Wyprowadź zadanie odwrotne kinematyki trójczłonowego manipulatora z rozdz. 3, ćwicz. 3.
- 4.3. [12] Naszkicuj przestrzeń roboczą chwytaka manipulatora o trzech stopniach swobody z rozdz. 3, przykład 3.4.
- 4.4. [24] Wyprowadź zadanie odwrotne kinematyki manipulatora o trzech stopniach swobody z rozdz. 3, przykład 3.4.
- 4.5. [38] Napisz w języku Pascal podprogram, który oblicza wszystkie możliwe rozwiązania dla manipulatora PUMA 560, leżące wewnątrz następujących ograniczeń kątów obrotu w parach obrotowych:

$$\begin{aligned} -170,0 < \theta_1 < 170,0 , \\ -225,0 < \theta_2 < 45,0 , \\ -250,0 < \theta_3 < 75,0 , \\ -135,0 < \theta_4 < 135,0 , \\ -100,0 < \theta_5 < 100,0 , \\ -180,0 < \theta_6 < 180,0 ; \end{aligned}$$

Zastosuj równania wyprowadzone w podrozdz. 4.7 dla wartości liczbowych w (m):

$$a_2 = 0,4250$$

$$a_3 = 0,0200$$

$$d_3 = 0,1225$$

$$d_4 = 0,4250$$

4.6. [16] Opisz prosty algorytm wyszukiwania najbliższego rozwiązania ze zbioru możliwych rozwiązań.

4.7. [10] Sporządź listę współczynników, które mogą wpływać na powtarzalność manipulatora. Sporządź drugą listę dodatkowych współczynników, które wpływają na dokładność manipulatora.

4.8. [12] Dla danego pożądanego położenia i orientacji końcówki wykonawczej trójczłonowego płaskiego manipulatora z parami obrotowymi są dwa możliwe rozwiązania. Jeśli dodamy jedną więcej parę obrotową (w taki sposób, aby ramię pozostało płaskie), ile rozwiązań uzyskamy?

4.9. [26] Na rys. 4.13 pokazano dwuczłonowe płaskie ramię z parami obrotowymi. Drugi człon tego ramienia jest o dwa razy krótszy od pierwszego, tj. $l_1 = 2l_2$. Ograniczenia zakresów ruchu w przegubach w radianach wynoszą:

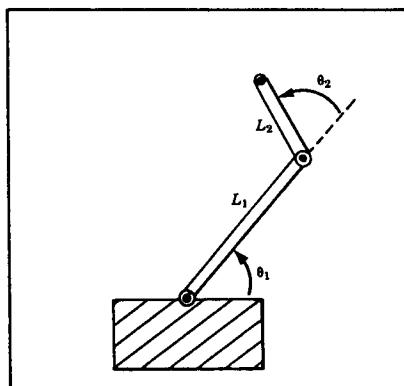
$$0 < \theta_1 < \pi,$$

$$-\pi/2 < \theta_2 < \pi.$$

Naszkicuj przybliżona przestrzeń roboczą osiągalną (obszar) końca członu 2.

4.10. [23] Podaj wyrażenie dla podprzestrzeni manipulatora z rozdz. 3, przykładu 3.4.

4.11. [24] Stół pozycjonujący o 2 stopniach swobody zastosowano do orientowania części przy spawaniu łukowym. Zadanie proste kinematyki, które lokalizuje powierzchnię stołu (człon 2) względem podstawy (człon 0), jest zadane w postaci



Rys. 4.13. Dwuczłonowy płaski manipulator

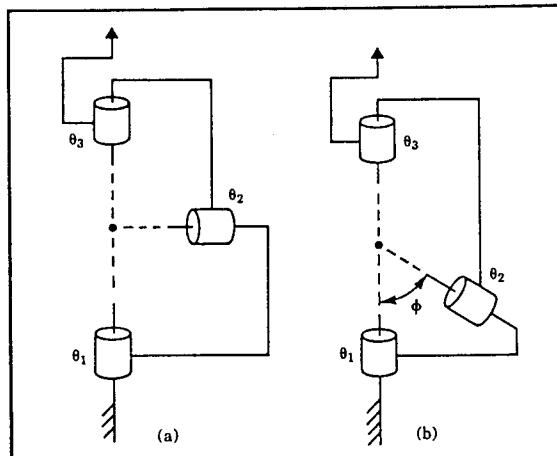
$${}^0_2 T = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 & l_2 s_1 + l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -s_1 c_2 & s_1 s_2 & c_1 & l_2 c_1 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla dowolnego wersora kierunkowego ustalonego w układzie stołu (członu 2) ${}^2\hat{v}$ podaj rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki dla θ_1 i θ_2 , tak aby ten wektor pokrywał się z ${}^0\hat{Z}$ (tj. był skierowany pionowo do góry). Czy jest tutaj wiele rozwiązań? Czy występuje tutaj warunek osobliwości, przy którym jedno rozwiązanie nie może być otrzymane?

- 4.12.** [22] Na rys. 4.14 przedstawiono dwa manipulatory typu 3R, u których kolejne trzy osie przecinają się w jednym punkcie (zauważ, że dla dowolnej konfiguracji punkt ten pozostaje stały w przestrzeni). Manipulator przedstawiony na rys. 4.14a ma kąty skręcenia członów (α_1) równe $\pi/2$ rad, a manipulator z rys. 4.14b ma jeden kąt skręcenia ϕ , drugi zaś $\pi/2 - \phi$. Manipulator z rys. 4.14a może być rozpatrywany jako odpowiadający kątom Eulera Z-Y-Z i dlatego wiemy, że to wystarcza do orientowania członu 3 (na rysunku ze strzałką) dowolnie względem ustalonego członu 0, ponieważ kąt ϕ nie jest równy $\pi/2$ rad. Natomiast drugi manipulator nie może dowolnie orientować członu 3.

Opisz zbiór orientacji, które są nieosiagalne przez drugi manipulator. Zauważ, że przyjmujemy dla wszystkich par obrotowych możliwość obrotu o 2π rad (tzn. bez ograniczeń) oraz to, że wszystkie człony mogą "przejść" przez inne, jeśli jest to konieczne (tzn. przestrzeń robocza nie jest ograniczona przez kolizje).

- 4.13.** [13] Podaj dwie przyczyny, dlaczego jawną postać rozwiązania zadania kinematyki jest preferowana przed rozwiązaniami iteracyjnymi.



Rys. 4.14. Dwa manipulatory typu 3R (ćwiczenie 4.12)

4.14. [14] Istnieją roboty o 6 stopniach swobody, dla których odwrotne zadania kinematyki nie mają rozwiązań w postaci jawnej. Czy istnieje robot o 3 stopniach swobody, dla którego odwrotne zadanie kinematyki można rozwiązać w postaci jawnej?

4.15. [38] Napisz podprogram, który rozwiązuje równania czwartego stopnia w postaci jawnej (patrz [8, 9]).

4.16. [25] Manipulator typu 4R pokazano schematycznie na rys. 4.15. Niezerowe parametry członów wynoszą: $a_1 = 1$, $\alpha_2 = \pi/4$, $d_3 = \sqrt{2}$ oraz $a_3 = \sqrt{2}$, a mechanizm jest narysowany w konfiguracji odpowiadającej

$$\Theta = [0, \pi/2, -\pi/2, 0]^T.$$

Dla każdej pary obrotowej wprowadzono ograniczenia ruchu do przedziału $\pm \pi$. Znajdź wszystkie wartości θ_3 , takie że

$${}^0P_{4ORG} = [1,1 \ 1,5 \ 1,707]^T.$$

4.17. [25] Manipulator typu 4R pokazano schematycznie na rys. 4.16. Niezerowe parametry członów wynoszą: $\alpha_1 = -\pi/2$, $d_2 = 1$, $\alpha_2 = \pi/4$ oraz $a_3 = 1$, a manipulator narysowano w konfiguracji odpowiadającej

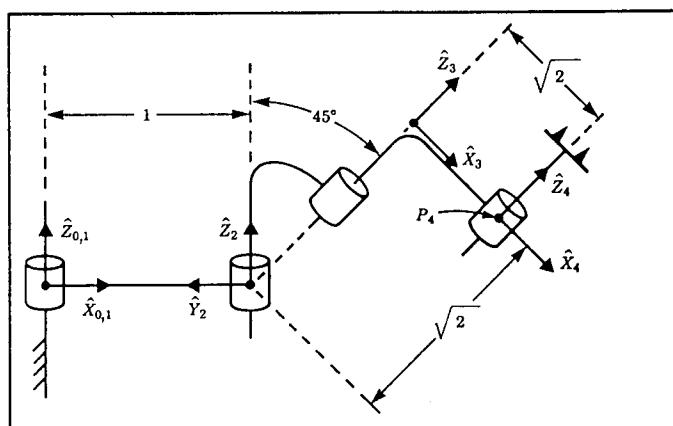
$$\Theta = [0, 0, \pi/2, 0]^T.$$

Każda para obrotowa ma ograniczenia ruchu $\pm \pi$.

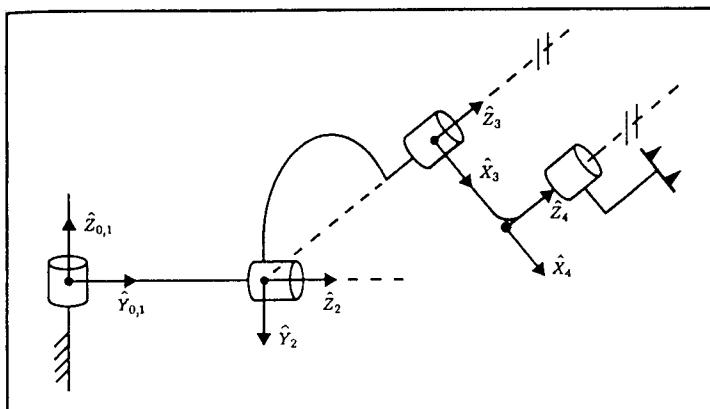
Znajdź wszystkie wartości θ_3 , takie że

$${}^0P_{4ORG} = [0,0 \ 1,0 \ 1,414]^T.$$

4.18. [15] Rozważ manipulator typu RRP pokazany na rys. 3.37. Ile w tym przypadku jest rozwiązań równań kinematyki (położenia)?



Rys. 4.15. Manipulator typu 4R pokazany w pozycji $\Theta = [0, \pi/2, \pi/2, 0]^T$ (ćwiczenie 4.16)



Rys. 4.16. Manipulator typu 4R pokazany w pozycji $\Theta = [0, \pi/2, -\pi/2, 0]^T$ (ćwiczenie 4.17)

- 4.19. [15] Rozważ manipulator typu RRR pokazany na rys. 3.38. Ile w tym przypadku jest rozwiązań równań kinematyki (położenia)?
- 4.20. [15] Rozważ manipulator typu RPP pokazany na rys. 3.39. Ile mamy tutaj rozwiązań równań kinematyki (położenia)?
- 4.21. [15] Rozważ manipulator typu PRR pokazany na rys. 3.40. Ile mamy tutaj rozwiązań równań kinematyki (położenia)?
- 4.22. [15] Rozważ manipulator typu PPP pokazany na rys. 3.41. Ile mamy tutaj rozwiązań równań kinematyki (położenia)?
- 4.23. [38] Pewne zadanie jest opisane następującymi równaniami kinematyki:

$$\sin\xi = a \sin\theta + b,$$

$$\sin\phi = c \cos\theta + d,$$

$$\psi = \xi + \phi.$$

Dla danych a, b, c, d i ψ pokaż, że w ogólnym przypadku są tutaj cztery rozwiązania na θ . Podaj specjalne warunki, przy których są tylko dwa rozwiązania na θ .

- 4.24. [20] Dla danego opisu układu odniesienia $\{i\}$ w zależności od układu odniesienia $\{i-1\}$ znajdź cztery parametry Denavita-Hartenberga jako funkcje elementów macierzy ${}_{i-1}^i T$.

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 4)

1. Napisz podprogram do obliczania zadania odwrotnego kinematyki dla trójczłonowego manipulatora (patrz podrozdz. 4.4). Podprogram powinien przesyłać argumenty jak pokazano poniżej:

```
Procedure INVKIN(VAR wrelb: frame; VAR current,near,far: vec3;
VAR sol:boolean);
```

gdzie "wrelb", wejście, jest układem odniesienia kości opisanym względem układu odniesienia bazowego; "current", wejście, jest bieżącą pozycją robota (dana jako wektor współrzędnych konfiguracyjnych); "near" oznacza najbliższe rozwiązanie; "far" - drugie rozwiązanie; "sol"- wskaźnik, czy rozwiązanie zostało znalezione, czy nie (jeśli rozwiązania nie zostały znalezione, to wprowadza się wskaźnik "sol=FALSE").

Długości członów w (m) wynoszą:

$$l_1 = l_2 = 0,5$$

Zakresy ruchu w parach obrotowych są następujące:

$$-170^\circ \leq \theta_i \leq 170^\circ$$

Sprawdź twój program przez przywołanie tam i z powrotem "KIN" dla kontroli, czy są rzeczywiście odwracalne względem siebie.

2. Narzędzie jest związane z członem 3 manipulatora. Jest ono opisane za pomocą macierzy $\frac{W}{T}$ układu odniesienia narzędzia względem kości. Ponadto użytkownik opisał przestrzeń roboczą i układ odniesienia stanowiska względem podstawy robota w postaci macierzy $\frac{B}{S}$. Napisz podprogram:

```
Procedure SOLVE(VAR trels: frame; VAR current,near,far: vec3;
VAR sol:boolean);
```

gdzie "trels" oznacza układ $\{T\}$ opisany względem układu $\{S\}$. Inne parametry są dokładnie takie same jak w podprogramie INVKIN. Układy $\{T\}$ i $\{S\}$ powinny być opisane względem układu globalnego za pomocą zmiennych lub stałych. Funkcja SOLVE powinna przywoływać procedury TMULT, TINVERT i INVKIN.

3. Napisz główny program, który przyjmuje układ odniesienia celu podany w zależności od x , y , ϕ . Układ celu zadano, podając położenie układu $\{T\}$ względem układu $\{S\}$, co jest dogodne dla użytkownika.

Robot używa tego samego narzędzia w tej samej przestrzeni roboczej jak w ćwiczeniu programowania (część 2). Zatem $\{T\}$ i $\{S\}$ są zdefiniowane jako

$$\frac{W}{T} = [x \ y \ \theta] = [0,1 \ 0,2 \ 30,0],$$

$$\frac{B}{S} = [x \ y \ \theta] = [-0,1 \ 0,3 \ 0,0].$$

Oblicz kąty konfiguracyjne dla każdego z trzech układów odniesienia celu podanych poniżej. Przyjmij, że robot będzie startował z wszystkimi kątami równymi 0 i poruszał się kolejno do tych trzech celów. Program powinien znaleźć najbliższe rozwiązanie względem poprzedniego punktu docelowego.

$$[x_1 \quad y_1 \quad \phi_1] = [0,0 \quad 0,0 \quad -90,0]$$

$$[x_2 \quad y_2 \quad \phi_2] = [0,6 \quad -0,3 \quad 45,0]$$

$$[x_3 \quad y_3 \quad \phi_3] = [-0,4 \quad 0,3 \quad 120,0]$$

$$[x_4 \quad y_4 \quad \phi_4] = [0,8 \quad 1,4 \quad 30,0]$$

Powinieneś przywołać SOLVE i WHERE kolejno, aby upewnić się, że są one rzeczywiście funkcjami odwrotnymi.

5

JAKOBIANY: PRĘDKOŚCI I SIŁY STATYCZNE

5.1. WPROWADZENIE

W tym rozdziale rozszerzamy nasze rozważania dotyczące manipulatorów robotów poza zadania statycznego pozycjonowania. Przypominamy zapisy liniowej i kątowej prędkości ciała sztywnego i wykorzystujemy je do analizy ruchu manipulatora. Będziemy również rozpatrywać siły działające na ciało sztywne, a wprowadzone pojęcia zastosujemy w analizie sił statycznych przyłożonych do manipulatorów.

Okazuje się, że analiza zarówno prędkości, jak i sił statycznych prowadzi do macierzy zwanej **jakobianem**¹⁾ manipulatora, która będzie wprowadzona w tym rozdziale.

Zagadnienia kinematyki mechanizmów nie są tutaj traktowane dogłębnie. W większości prezentacja jest ograniczona do tych pojęć, które są podstawowe w szczególnych zadaniach robotyki. Zainteresowanego czytelnika zachęcamy do dalszego studiowania jednego z wielu podręczników z mechaniki [1-3].

¹⁾ Matematycy nazywają ją "macierzą jakobianową", lecz robotycy zwykle używają określenia "jakobian".

5.2. OZNACZENIE ZMIENNYCH W CZASIE POZYCJI I ORIENTACJI

Przed rozpatrzeniem opisu ruchu ciała sztywnego krótko rozważymy pewne zagadnienia podstawowe: różniczkowanie wektorów, przedstawienie prędkości kątowej i oznaczenia.

Różniczkowanie wektorów pozycji

W naszych rozważaniach dotyczących prędkości (oraz przyspieszeń omawianych w rozdziale 6) zastosujemy następujące oznaczenia dla pochodnej wektora

$${}^B \dot{v}_Q = \frac{d}{dt} {}^B v_Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B v_Q(t + \Delta t) - {}^B v_Q(t)}{\Delta t} \quad (5.1)$$

Prędkość pozycjonowania może być rozumiana jako liniowa prędkość punktu w przestrzeni, określonego przez wektor pozycji. Z (5.1) wynika, że obliczamy pochodną Q względem układu $\{B\}$. Na przykład, jeśli Q nie zmienia się w czasie względem $\{B\}$, to obliczona prędkość jest równa zeru, nawet jeśli istnieje pewien inny układ, względem którego Q jest zmienne. Ważne jest wskazanie układu odniesienia, w którym wektor jest różniczkowany.

Tak jak dowolny wektor, również wektor prędkości może być opisany względem dowolnego układu, a ten układ odniesienia jest oznaczany przez poprzedzający wskaźnik u góry. Zatem wektor prędkości wyznaczamy wg wzoru (5.1), a gdy wyrażamy go względem układu $\{A\}$, wtedy będzie

$${}^A ({}^B \dot{v}_Q) = \frac{d}{dt} {}^A v_Q \quad (5.2)$$

Stąd wynika, że w ogólnym przypadku wektor prędkości jest związany z punktem w przestrzeni, lecz wartość liczbową opisującą prędkość tego punktu zależy od dwóch układów: jednego, względem którego pochodna była obliczona i drugiego, w którym wynikowy wektor prędkości jest wyrażony.

We wzorze (5.1) obliczana prędkość jest określona w układzie odniesienia, względem którego dokonano różniczkowania, tak że wynik mógłby być wskazany przez poprzedzający wskaźnik u góry B , lecz dla uproszczenia, ponieważ oba wskaźniki u góry są te same, nie potrzebujemy wskazywać zewnętrznego, tzn. piszemy

$${}^B ({}^B \dot{v}_Q) = {}^B \dot{v}_Q \quad (5.3)$$

Ostatecznie możemy zawsze usunąć zewnętrzny, poprzedzający wskaźnik przez wyraźne włączenie macierzy obrotu, która towarzyszy zmianie układu odniesienia (patrz podrozdział 2.10), tzn. piszemy

$$A_{(B_V)_Q} = \frac{A_R}{B} B_{V_Q} \quad (5.4)$$

Zwykle będziemy pisać wyrażenia o postaci prawej strony (5.4), tak że symbole przedstawiające prędkości będą zawsze oznaczać prędkość w układzie, w którym dokonujemy różniczkowania i nie będą miały zewnętrznego, poprzedzającego wskaźnika.

Zamiast rozważać ogólną prędkość punktu względem dowolnego układu odniesienia, będziemy często rozważać prędkość początku układu odniesienia względem pewnego, globalnego układu odniesienia. W takim specjalnym przypadku skracamy zapis

$$v_C = \frac{U}{C} v_{CORG} \quad (5.5)$$

gdzie punkt wspomniany jest początkiem układu $\{C\}$, a układem odniesienia jest $\{U\}$. Np. możemy użyć oznaczenia v_C do opisania prędkości początku układu $\{C\}$, natomiast $\frac{U}{C} v_{CORG}$ jest prędkością początku układu $\{C\}$, opisana w układzie $\{A\}$ (chociaż różniczkowanie było dokonane względem układu $\{U\}$).

PRZYKŁAD 5.1

Na rys. 5.1 przedstawiono pewien układ uniwersalny $\{U\}$, związany z pociągiem jadącym z prędkością 180 km/h i układ $\{C\}$ związany z samochodem jadącym z prędkością 50 km/h. Oba pojazdy są skierowane w kierunku \hat{X} układu $\{U\}$. Macierze obrotów $\frac{U}{T} R$ i $\frac{U}{C} R$ są znane i stałe.

Co oznacza $\frac{U_d}{dt} U_P_{CORG}$?

$$\frac{U_d}{dt} U_P_{CORG} = \frac{U}{P} v_{CORG} = v_C = 30\hat{X}$$

Co oznacza $C_U v_{TORG}$?

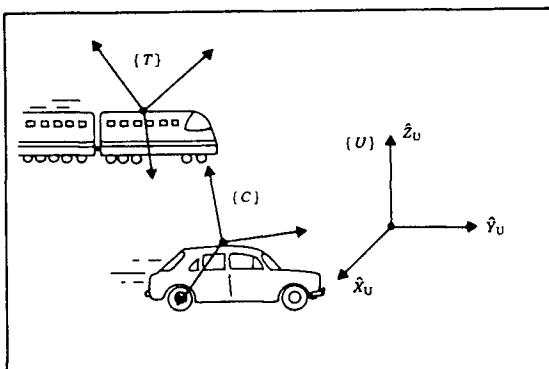
$$C_U v_{TORG} = C_{V_T} = \frac{C_R}{U} v_T = \frac{C_R}{U} (180\hat{X}) = \frac{U_R^{-1}}{C} 180\hat{X}$$

Co oznacza $C_T v_{CORG}$?

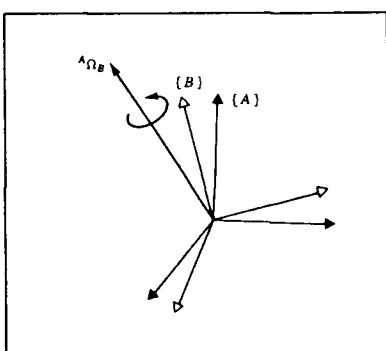
$$C_T v_{CORG} = \frac{C_R}{T} T v_{CORG} = -\frac{U_R^{-1}}{C} \frac{U}{T} 130\hat{X} \quad ■$$

Wektor prędkości kątowej

Teraz wprowadzimy pojęcie wektora prędkości kątowej, stosując oznaczenie Ω . Podczas gdy prędkość liniowa opisuje własność punktu, prędkość kątowa opisuje własność ciała. Ponieważ z reguły układy odniesienia wiążemy z rozpatrywanymi ciałami, zatem możemy również pomyśleć o prędkości kątowej jako opisującej ruch obrotowy układu odniesienia.



Rys. 5.1. Przykład pewnych układów odniesienia w ruchu liniowym

Rys. 5.2. Układ $\{B\}$ obraca się z prędkością kątową ${}^A\Omega_B$ względem układu $\{A\}$

Pokazany na rys. 5.2 wektor ${}^A\Omega_B$ opisuje obrót układu $\{B\}$ względem $\{A\}$. W każdej chwili kierunek wektora ${}^A\Omega_B$ wskazuje chwilową oś obrotu układu $\{B\}$ względem $\{A\}$, a wartość wektora ${}^A\Omega_B$ określa prędkość kątową. Wektor prędkości kątowej, jako wektor swobodny, może być wyrażony w dowolnym układzie współrzędnych; tak więc można dodać jeszcze jeden poprzedzający wskaźnik; np. ${}^C({}^A\Omega_B)$ jest prędkością kątową układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ wyrażoną względem układu $\{C\}$.

Ponownie wprowadzamy uproszczenia oznaczeń dla ważnych przypadków szczególnych. Jest to proste w przypadku, w którym przyjęty układ odniesienia jest oczywisty, tak że nie ma potrzeby wspominania o tym w oznaczeniu. Na przykład

$$\omega_C = \dot{\Omega}_C^U \quad (5.6)$$

gdzie ω_C jest prędkością kątową układu $\{C\}$ względem pewnego przyjętego układu odniesienia $\{U\}$. Np. ${}^A\omega_C$ jest prędkością kątową układu $\{C\}$ opisaną w zależności od $\{A\}$ (chociaż prędkość kątową określono względem układu $\{U\}$).

5.3. PRĘDKOŚĆ LINIOWA I KĄTOWA CIAŁA SZTYWNEGO

W tym podrozdziale przedstawimy opis ruchu ciała sztywnego w zakresie prędkości, rozszerzając go o ruchy pozycjonowania i orientacji opisane w rozdziale 2 jako zmienne w czasie. W rozdziale 6 rozszerzymy nasze rozważania o przyspieszenia.

Tak jak w rozdziale 2, z dowolnym ciałem, którego ruch chcemy opisać, związuje się układ współrzędnych. Zatem ruch ciała sztywnego można rozpatrywać jako ruch względny ich układów odniesienia.

Prędkość liniowa

Rozważmy układ $\{B\}$ związany z ciałem sztywnym. Chcemy opisać ruch wektora B_Q względem układu $\{A\}$ tak, jak to przedstawiono na rys. 5.3. Układ $\{A\}$ możemy rozpatrywać jako ustalony.

Położenie układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ jest opisane przez wektor pozycji ${}^A_P_{BORG}$ i macierz obrotu ${}^A_B R$. Chwilowo założymy, że orientacja ${}^A_B R$ nie zmienia się w czasie, co oznacza, że ruch punktu Q względem układu $\{A\}$ jest spowodowany zmianą w czasie wektora ${}^A_P_{BORG}$ i (lub) B_Q .

Rozwiązanie dla prędkości liniowej punktu Q względem układu $\{A\}$ jest całkiem proste. Należy wyrazić obie składowe prędkości w zależności od $\{A\}$ i dodać do siebie

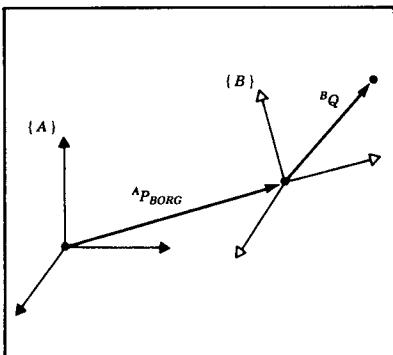
$${}^A v_Q = {}^A v_{BORG} + {}^A_B R {}^B v_Q \quad (5.7)$$

Równanie (5.7) obowiązuje tylko dla przypadku, w którym orientacja względem układów $\{B\}$ i $\{A\}$ pozostaje stała.

Prędkość kątowa

Rozważmy dwa układy ze stale pokrywającymi się początkami i zerową prędkością liniową. Jeden układ lub oba układy mogą być związane z ciałami sztywnymi, lecz dla przejrzystości rysunku ciała te nie są pokazane na rys. 5.4.

Orientacja układu $\{B\}$ względem układu $\{A\}$ zmienia się w czasie. Jak pokazano na rys. 5.4, prędkość kątowa obrotu układu $\{B\}$ względem $\{A\}$ jest opisana przez wektor nazwany ${}^A \Omega_B$. Wskazaliśmy także wektor ${}^B Q$, który pozyjonuje punkt ustalony w układzie $\{B\}$. Teraz stawiamy ważne pytanie: jak



Rys. 5.3. Układ odniesienia $\{B\}$ przesuwa się z prędkością ${}^A v_{BORG}$ względem układu odniesienia $\{A\}$

zmienia się w czasie wektor widziany z $\{A\}$, gdy jest ustalony w $\{B\}$, a układy obracają się względem siebie?

Załóżmy, że wektor Q widziany z układu $\{B\}$ jest stały, to jest

$${}^B v_Q = 0 \quad (5.8)$$

Chociaż jest on stały względem $\{B\}$, to jest jasne, że punkt Q widziany z $\{A\}$ będzie miał prędkość wynikającą z prędkości kątowej ${}^A \Omega_B$. Aby określić prędkość punktu Q , użyjemy intuicyjnego podejścia. Na rys. 5.5 pokazano wektor Q w dwóch chwilach czasu przy obrocie wokół ${}^A \Omega_B$, jako wynik obserwacji obserwatora ulokowanego w układzie $\{A\}$.

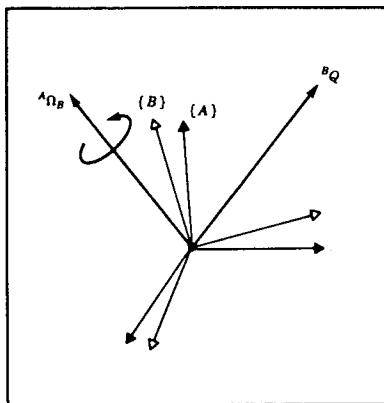
Analizując rys. 5.5 możemy określić zarówno kierunek, jak i wartość wektora przyrostu widzianego z $\{A\}$. Po pierwsze jest oczywiste, że wektor przyrostu wektora ${}^A Q$ musi być prostopadły zarówno do ${}^A \Omega_B$, jak i do ${}^A Q$. Po drugie, z rys. 5.5 wynika, że wartość wektora przyrostu wynosi

$$|\Delta Q| = (|{}^A Q| \sin \theta) (|{}^A \Omega_B| \Delta t) \quad (5.9)$$

Warunki nałożone na wartość i kierunek wektora przyrostu sugerują, że jest to iloczyn wektorowy. Rzeczywiście, nasze wnioski odnośnie do kierunku i wartości są spełnione w postaci

$${}^A v_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q \quad (5.10)$$

W ogólnym przypadku wektor Q może również zmieniać się względem układu $\{B\}$, tak więc dodając ten składnik otrzymujemy



Rys. 5.4. Wektor B_Q , ustalony w układzie $\{B\}$, obraca się względem układu $\{A\}$ z prędkością kątową ${}^A\Omega_B$

$${}^A_V_Q = {}^A({}^B_V_Q) + {}^A\Omega_B \times {}^A_Q \quad (5.11)$$

Wykorzystując macierz obrotu można zredukować podwójny wskaźnik, a ponieważ wektor A_Q w każdej chwili jest opisany jako ${}^A_R {}^B_Q$, otrzymujemy

$${}^A_V_Q = {}^A_R {}^B_V_Q + {}^A\Omega_B \times {}^A_R {}^B_Q \quad (5.12)$$

Równoczesne występowanie prędkości liniowej i kątowej

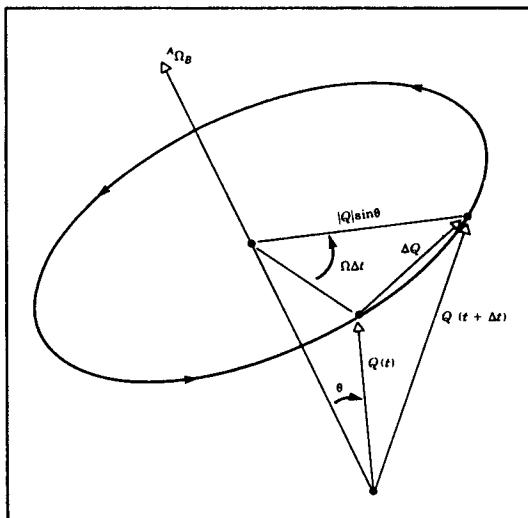
Wzór (5.12) możemy w prosty sposób rozszerzyć na przypadek, w którym początki układów nie pokrywają się, dodając do (5.12) liniową prędkość punktu początku układu. Ogólny wzór na prędkość wektora ustalonego w układzie $\{B\}$ i widzianego z układu $\{A\}$ jest następujący

$${}^A_V_Q = {}^A_V_{BORG} + {}^A_R {}^B_V_Q + {}^A\Omega_B \times {}^A_R {}^B_Q \quad (5.13)$$

Równanie (5.13) jest ostatecznym wzorem na pochodną wektora zmennego w układzie ruchomym, widzianego z układu nieruchomego.

5.4. WIĘCEJ O PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ

W tym podrozdziale rozważymy głębiej zagadnienie prędkości kątowej, a w szczególności wyprowadzenie wzoru (5.10). Podczas gdy w poprzednim podrozdziale przy wyprowadzaniu wzoru (5.10) zastosowano podejście geometryczne, tutaj wykorzystamy podejście analityczne. Podrozdział ten może być pominięty przy pierwszym czytaniu podręcznika.



Rys. 5.5. Prędkość punktu wywołana prędkością kątową

Własność pochodnej macierzy ortonormalnej

Możemy wyprowadzić interesującą zależność między pochodną macierzy ortonormalnej i pewną macierzą skośnosymetryczną w następujący sposób. Dla dowolnej macierzy ortonormalnej $n \times n$, oznaczonej przez R , mamy

$$\dot{R} R^T = I_n \quad (5.14)$$

gdzie I_n oznacza macierz jednostkową. Nasze zainteresowanie ograniczymy do przypadku $n = 3$, przy czym R jest właściwą macierzą ortonormalną lub macierzą obrotu. Różniczkując (5.14) otrzymuje się

$$\dot{R} R^T + R \dot{R}^T = 0_n \quad (5.15)$$

gdzie 0_n jest macierzą zerową $n \times n$. Równanie (5.15) może być również zapisane w postaci

$$\dot{R} R^T + (\dot{R} R^T)^T = 0_n \quad (5.16)$$

Definiując

$$S = \dot{R} R^T \quad (5.17)$$

z równania (5.16) otrzymujemy

$$S + S^T = 0_n \quad (5.18)$$

stąd wynika, że S jest macierzą skośnosymetryczną. Zatem istnieje własność wiążąca pochodne macierzy ortonormalnych z macierzami skośnosymetrycznymi, która może być opisana zależnością

$$S = \dot{R} R^{-1} \quad (5.19)$$

Prędkość punktu wywołana ruchem obrotowym układu odniesienia

Rozważmy wektor \dot{B}_P niezmienny względem układu $\{B\}$. Jego opis w innym układzie $\{A\}$ jest dany jako

$$\dot{A}_P = \dot{A}_R \dot{B}_P \quad (5.20)$$

Jeśli układ $\{B\}$ obraca się (t.j. pochodna \dot{B}_R jest niezerowa), to wektor \dot{A}_P będzie zmieniać się nawet wtedy, gdy wektor \dot{B}_P jest stały; to znaczy

$$\dot{A}_P = \dot{A}_R \dot{B}_P \quad (5.21)$$

lub stosując nasze oznaczenia wektorów prędkości

$$\dot{A}_{V_P} = \dot{A}_R \dot{B}_P \quad (5.22)$$

Teraz przekształćmy (5.22), wprowadzając podstawienie za \dot{B}_P , aby otrzymać

$$\dot{A}_{V_P} = \dot{A}_R \frac{\dot{A}_R^{-1}}{B} \dot{A}_P \quad (5.23)$$

Uwzględniając wzór (5.19) dotyczący macierzy ortonormalnych, mamy

$$\dot{A}_{V_P} = \dot{A}_S \dot{A}_P \quad (5.24)$$

gdzie macierz S oznaczyliśmy wskaźnikami u góry i u dołu, aby pokazać, że jest to macierz skośnosymetryczna, związana z konkretną macierzą obrotu \dot{A}_R . Z powodu jej pojawienia się w (5.24) i z innych powodów, które wkrótce będą wyjaśnione, wprowadzona macierz skośnosymetryczna jest nazywana **macierzą prędkości kątowej**.

Macierze skośnosymetryczne i iloczyn wektorowy

Jeśli określmy elementy macierzy skośnosymetrycznej S jak poniżej

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

i zdefiniujemy wektor kolumnowy 3×1

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

to łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}, \quad (5.27)$$

gdzie \mathbf{P} jest dowolnym wektorem, a \times oznacza iloczyn wektorowy.

Wektor 3×1 , $\boldsymbol{\Omega}$, który odpowiada macierzy 3×3 prędkości kątowej ciała, nazywa się wektorem prędkości kątowej i był wprowadzony w podrozdz. 5.2.

Zatem nasza zależność (5.24) może być zapisana w postaci

$$\mathbf{A}_{V_P} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\Omega}_B} \times \mathbf{A}_{\mathbf{P}} \quad (5.28)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie dla $\boldsymbol{\Omega}$, które wskazuje, że jest to wektor prędkości kątowej, określający ruch układu $\{B\}$ względem układu $\{A\}$.

Fizyczna interpretacja wektora prędkości kątowej

Po wykazaniu, że istnieje pewien wektor $\boldsymbol{\Omega}$, taki że (5.28) jest prawdziwe, podamy jego interpretację fizyczną. Wyprowadźmy $\boldsymbol{\Omega}$ przez proste różniczkowanie macierzy obrotu

$$\dot{\mathbf{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \quad (5.29)$$

Teraz zapiszmy $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ jako złożenie dwóch macierzy

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}_K(\Delta\theta) \mathbf{R}(t) \quad (5.30)$$

gdzie w odstępie czasu Δt wystąpił obrót $\Delta\theta$ wokół osi $\hat{\mathbf{k}}$. Wykorzystując (5.30) zapiszmy (5.29) jako

$$\dot{\mathbf{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{R}_K(\Delta\theta) - \mathbf{I}_3}{\Delta t} \mathbf{R}(t) \right) \quad (5.31)$$

lub

$$\dot{\mathbf{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{R}_K(\Delta\theta) - \mathbf{I}_3}{\Delta t} \right) \mathbf{R}(t) \quad (5.32)$$

Podstawiając do (2.80) przyrosty małych kątów, otrzymujemy

$$\mathbf{R}_K(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & -k_z \Delta\theta & k_y \Delta\theta \\ k_z \Delta\theta & 1 & -k_x \Delta\theta \\ -k_y \Delta\theta & k_x \Delta\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Stąd (5.32) może być zapisane w postaci

$$\dot{\mathbf{R}} = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} 0 & -k_z \Delta \theta & k_y \Delta \theta \\ k_z \Delta \theta & 0 & -k_x \Delta \theta \\ -k_y \Delta \theta & k_x \Delta \theta & 0 \end{bmatrix}}{\Delta t} \right) \mathbf{R}(t) \quad (5.34)$$

Ostatecznie dzieląc macierz przez Δt i obliczając granice otrzymujemy

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z \dot{\theta} & k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} & 0 & -k_x \dot{\theta} \\ -k_y \dot{\theta} & k_x \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}(t) \quad (5.35)$$

Zatem widzimy, że

$$\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

gdzie

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \dot{\theta} \\ k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{k}} \quad (5.37)$$

Fizyczne znaczenie wektora prędkości kątowej Ω jest takie, że w każdej chwili zmiana orientacji obracającego się układu może być rozumiana jako obrót wokół pewnej osi $\hat{\mathbf{k}}$. Ta chwilowa osь obrotu jest opisana przez wersor, który przemnożony przez prędkość obrotu wokół tej osi ($\dot{\theta}$) daje w wyniku wektor prędkości kątowej.

Inne przedstawienia prędkości kątowej

Możliwe są inne przedstawienia prędkości kątowej, np. przyjmuje się, że prędkość kątowa ciała obracającego się może być opisana w postaci zbioru pochodnych kątów Eulera Z-Y-Z.

$$\dot{\theta}_{Z'Y'Z'} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Mając dany opis tego rodzaju lub inny, wykorzystujący jeden z dwudziestu czterech zbiorów kątów Eulera, wyprowadzimy równoważny wektor prędkości kątowej.

Wykazaliśmy, że

$$\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Z tego równania macierzowego można wydzielić trzy niezależne równania

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{r}_{31}r_{21} + \dot{r}_{32}r_{22} + \dot{r}_{33}r_{23} \\ \Omega_y &= \dot{r}_{11}r_{31} + \dot{r}_{12}r_{32} + \dot{r}_{13}r_{33} \\ \Omega_z &= \dot{r}_{21}r_{11} + \dot{r}_{22}r_{12} + \dot{r}_{23}r_{13} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Z (5.40) i symbolicznego zapisu \mathbf{R} jako funkcji zbioru kątów można wyprowadzić zależności, które wiążą pochodne zbioru kątów z równoważnym wektorem prędkości kątowej. Wynikowe wyrażenia mogą być przedstawione w postaci macierzowej, np. dla kątów Eulera Z-Y-Z

$$\Omega = \mathbf{E}_{Z'Y'Z'}(\theta_{Z'Y'Z'})\dot{\theta}_{Z'Y'Z'} \quad (5.41)$$

Zatem $\mathbf{E}(\cdot)$ jest jakobianem odnoszącym się do wektora pochodnych zbioru kątów i wektora prędkości kątowej oraz jest funkcją chwilowych wartości zbioru kątów. Postać $\mathbf{E}(\cdot)$ zależy od szczególnego zbioru kątów, dla którego jest podana, co oznaczono dodanym wskaźnikiem u dołu.

PRZYKŁAD 5.2

Wyznaczyć macierz \mathbf{E} , która wiąże kąty Eulera Z-Y-Z z wektorem prędkości kątowej. Należy znaleźć $\mathbf{E}_{Z'Y'Z'}$ w (5.41).

Korzystając z (2.72) i (5.40) oraz dokonując wymaganych różniczkowań symbolicznie otrzymujemy

$$\mathbf{E}_{Z'Y'Z'} = \begin{bmatrix} 0 & -s\alpha & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & s\alpha s\beta \\ 1 & 0 & c\beta \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

5.5. RUCHY CZŁONÓW ROBOTA

Rozpatrując ruch członów robota będziemy zawsze używać układu odniesienia członu $\{0\}$ jako naszego układu odniesienia. Zatem v_i jest prędkością liniową początku układu $\{i\}$, a w_i jest prędkością kątową układu członu $\{i\}$.

W każdej chwili dowolny człon robota w ruchu ma pewną prędkość liniową i kątową. Na rys.5.6 przedstawiono te wektory dla członu i . W tym przypadku zaznaczono, że są one zapisane w układzie $\{i\}$.

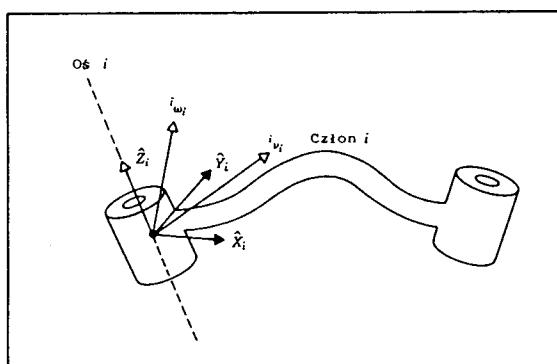
5.6. "PRZENOSZENIE" PRĘDKOŚCI OD CZŁONU DO CZŁONU

Rozważmy problem obliczenia prędkości liniowej i kątowej członu robota. Manipulator jest łańcuchem ciał, z których każde ma możliwość ruchu względem jego sąsiadów. Dzięki takiej strukturze możemy obliczyć prędkości każdego członu kolejno, zaczynając od podstawy. Prędkość członu $i+1$ będzie równa sumie prędkości członu i oraz pewnych nowych składników prędkości pochodzących od połączenia ruchowego $i+1$.²⁾

Potraktujmy każdy człon mechanizmu jako ciało sztywne z wektorami prędkości liniowej i kątowej opisującymi jego ruch, jak pokazano na rys. 5.6. Wyrazimy te prędkości raczej względem własnego układu członu niż względem bazowego układu współrzędnych. Na rys. 5.7 pokazano człony i oraz $i+1$ wraz z ich wektorami prędkości, zdefiniowanymi w układach odniesienia członów.

Prędkości kątowe mogą być dodane, gdy oba wektory ω są zapisane względem tego samego układu. Zatem prędkość kątowa członu $i+1$ jest równa sumie prędkości członu i oraz nowego składnika, wywołanego przez prędkość kątową pary obrotowej $i+1$. Można to zapisać względem układu $\{i\}$ jako

$${}^i \omega_{i+1} = {}^i \omega_i + {}^i_{i+1} R \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{z}_{i+1} \quad (5.43)$$



Rys. 5.6. Prędkość członu i jest dana przez wektory v_i i ω_i , które mogą być zapisane w dowolnym układzie, również w układzie $\{i\}$

²⁾ Pamiętaj, że prędkość liniowa jest związana z punktem, a prędkość kątowa jest związana z ciałem. Dlatego termin "prędkość członu" oznacza tutaj prędkość liniową początku układu odniesienia członu i i prędkość kątową członu.

Zauważmy, że

$$\dot{\theta}_{i+1} \overset{i+1}{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Wykorzystaliśmy tutaj macierz obrotu odnoszącą się do układów $\{i\}$ oraz $\{i+1\}$ w celu opisania w układzie $\{i\}$ składnika obrotu wynikającego z ruchu w parze obrotowej. Macierz obrotu przekształca opis osi pary obrotowej $i+1$ do układu $\{i\}$ tak, że te dwa składniki prędkości kątowej mogą być dodane.

Mnożąc obie strony (5.43) przez $\overset{i+1}{R}_i$ możemy znaleźć zapis prędkości kątowej członu $i+1$ względem układu $\{i+1\}$

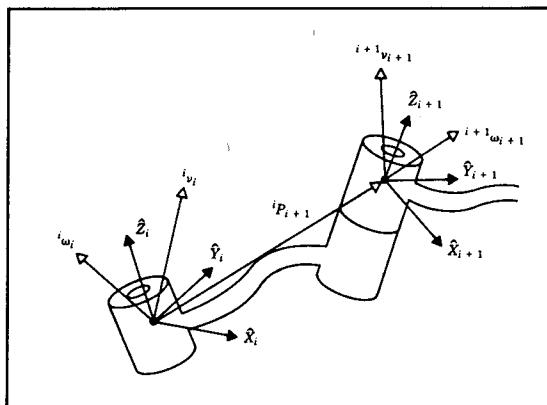
$$\overset{i+1}{\omega}_{i+1} = \overset{i+1}{R}_i \overset{i}{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \overset{i+1}{z}_{i+1} \quad (5.45)$$

Prędkość liniowa początku układu $\{i+1\}$ jest równa sumie prędkości początku układu $\{i\}$ oraz nowego składnika wywołanego przez prędkość kątową członu i . Jest to dokładnie sytuacja opisana przez (5.13), przy czym jeden z wyrazów jest równy零, ponieważ $\overset{i}{P}_{i+1}$ jest stały w układzie $\{i\}$. Zatem mamy

$$\overset{i}{v}_{i+1} = \overset{i}{v}_i + \overset{i}{\omega}_i \times \overset{i}{P}_{i+1} \quad (5.46)$$

Mnożąc obie strony przez $\overset{i+1}{R}_i$, obliczamy

$$\overset{i+1}{v}_{i+1} = \overset{i+1}{R}_i (\overset{i}{v}_i + \overset{i}{\omega}_i \times \overset{i}{P}_{i+1}) \quad (5.47)$$



Rys. 5.7. Wektory prędkości sąsiednich członów

Równania (5.45) i (5.47) są być może najważniejszym wynikiem tego rozdziału. Równoważne zależności dla przypadku, gdy połączenie $i+1$ jest parą przesuwną, są następujące

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i_R {}^i\omega_i$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^i_R ({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i p_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1} \hat{z}_{i+1} \quad (5.48)$$

Stosując te równania kolejno dla każdego członu, możemy obliczyć ${}^N \omega_N$ i ${}^N v_N$ (prędkości kątową i liniową ostatniego członu). Zauważmy, że wynikowe prędkości są wyrażone w układzie $\{N\}$. Jak zobaczymy później, takie przedstawienie będzie użyteczne. Jeśli chcemy wyrazić prędkości w bazowym układzie współrzędnych, to można je przekształcić do współrzędnych bazowych mnożąc je przez macierz ${}^0_N R$.

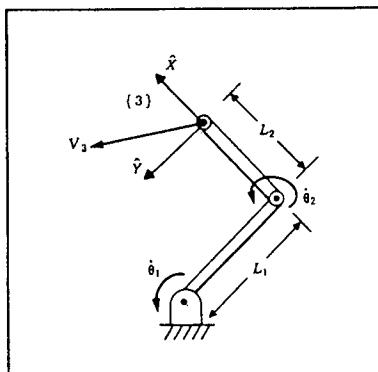
PRZYKŁAD 5.3

Dla dwuczłonowego manipulatora z parami obrotowymi, pokazanego na rys. 5.8, należy obliczyć prędkość końca ramienia w funkcji prędkości kątowych w parach obrotowych. Podać odpowiedź w dwóch postaciach: względem układu $\{3\}$ oraz względem układu $\{0\}$.

Układ $\{3\}$ jest związany z końcówką manipulatora, jak pokazano na rys. 5.9, a chcemy znaleźć prędkość początku tego układu, wyrażoną w układzie $\{3\}$. Jako drugą część zadania wyrazimy te prędkości również w układzie $\{0\}$. Zaczniemy od związania układów z członami, tak jak zrobiliśmy to poprzednio (patrz rys. 5.9).

Wykorzystamy równania (5.45) i (5.47) do obliczenia prędkości początku każdego układu, zaczynając od układu bazowego $\{0\}$, który ma prędkość równą zero. Ponieważ w (5.45) i (5.47) występują macierze przekształceń członów, przedstawimy je jako

$$\begin{aligned} {}^0_T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^1_T &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^2_T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.49)$$



Rys. 5.8. Manipulator dwuczlonowy

Zauważmy, że odpowiadają one manipulatorowi z przykładu 3.3, przy czym parę obrotową 3 trwale ustalono przy kącie konfiguracyjnym równym zero. Końcowe przekształcenie między układami {2} i {3} nie musi być przedstawione jako standardowe przekształcenie członu (chociaż może to być pomocne). Następnie stosując (5.45) i (5.47), w kolejności od członu do członu, obliczamy

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

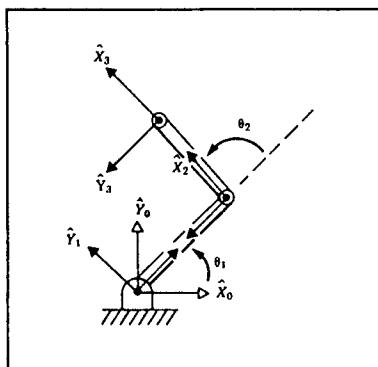
$${}^1v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$${}^2v_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$${}^3\omega_3 = {}^2\omega_2 \quad (5.54)$$

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$



Rys. 5.9. Przyjęcie układów odniesień członów dla manipulatora 2-członowego

Równanie (5.55) jest tutaj odpowiedzią na postawione zadanie. Ponadto określono prędkość kątową układu {3} w postaci równania (5.54).

Aby znaleźć te prędkości względem nieruchomego układu bazowego, obracamy je zgodnie z macierzą obrotu ${}^0_3 R$, która jest następująca

$${}^0_3 R = {}^0_1 R {}^1_2 R {}^2_3 R = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Taki obrót daje

$${}^3 v_3 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Ważne jest wskazanie dwóch odmiennych zastosowań równań (5.45) i (5.47). Po pierwsze, mogą być wykorzystane jako sposoby wyprowadzenia analitycznych wyrażeń, jak w przykładzie 5.2. Tutaj przekształcamy równania symboliczne, aż dochodzimy do postaci (5.55), która w pewnych zastosowaniach będzie obliczona przez komputer. Po drugie, można je wykorzystać wprost do obliczenia wartości wyrażeń (5.45) i (5.47) w takiej formie, w jakiej są zapisane. Wyrażenia te można łatwo zapisać w postaci podprogramu, który następnie jest stosowany w sposób iteracyjny do obliczenia prędkości członów. Wyrażenia w takiej postaci mogłyby być wykorzystane do dowolnego manipulatora bez konieczności wyprowadzania równań dla szczególnego przypadku. Jednakże obliczenia dają wynik liczbowy w postaci równań niejawnych, a często jesteśmy zainteresowani analityczną postacią wyniku, tak jak (5.55). Ponadto, jeśli podejmujemy się wykonania tej czynności (tj. obliczeń wektorów od

(5.50) do (5.57)), to na ogół stwierdzamy, że w końcowym etapie mało obliczeń pozostanie do wykonania przez komputer.

5.7. JAKOBIANY

Jakobian jest wielowymiarową postacią pochodnej. Przypuśćmy np. że mamy sześć funkcji, z których każda jest funkcją sześciu niezależnych zmiennych

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_6) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_6) \\ &\dots \\ y_6 &= f_6(x_1, x_2, \dots, x_6) \end{aligned} \tag{5.58}$$

Moglibyśmy także użyć zapisu wektorowego, aby przedstawić te równania jako

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \tag{5.59}$$

Teraz, jeśli chcemy obliczyć różniczki y_i jako funkcje różniczek x_j , to wprost obliczamy różniczki zupełne, co daje nam

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \delta x_6 \\ \delta y_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \delta x_6 \\ &\dots \\ \delta y_6 &= \frac{\partial f_6}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \delta x_6 \end{aligned} \tag{5.60}$$

i co można zapisać prościej przy użyciu zapisu wektorowego jako

$$\delta \mathbf{Y} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \delta \mathbf{X} \tag{5.61}$$

Macierz 6×6 pochodnych cząstkowych w (5.61) nazywamy jakobianem \mathbf{J}_i . Zauważmy, że jeśli funkcje $f_1(\mathbf{X})$ do $f_6(\mathbf{X})$ są nielinowe, to pochodne cząstkowe są funkcjami x_j . Dlatego używamy oznaczenia

$$\delta \mathbf{Y} = \mathbf{J}(\mathbf{X}) \delta \mathbf{X} \tag{5.62}$$

Dzieląc obydwie strony przez różniczkę czasu, możemy potraktować jakobian jako odwzorowanie prędkości w \mathbf{X} przez prędkości w \mathbf{Y}

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{X}} \tag{5.63}$$

W każdej chwili \mathbf{X} ma pewną wartość, a $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ wyraża przekształcenie liniowe. W każdej chwili \mathbf{X} zmienia się i odpowiada mu nowe przekształcenie liniowe. Jakobiany są więc zmiennymi w czasie przekształceniemi liniowymi.

W dziedzinie robotyki mówimy na ogół o jakobianach, które wiążą prędkości ruchów w przegubach z prędkościami kartezjańskimi członu roboczego.

Na przykład

$${}^0V = {}^0J(\Theta) \dot{\Theta} \quad (5.64)$$

gdzie Θ jest wektorem przemieszczeń w połączeniach ruchowych manipulatora, a V jest wektorem prędkości kartezjańskich. W (5.64) dodaliśmy poprzedzający wkaźnik do naszego oznaczenia jakobianu, aby pokazać w jakim układzie wynikowe prędkości kartezjańskie będą wyrażone. Czasem ten wskaźnik u góry jest opuszczany, gdy układ ten jest oczywisty lub gdy jest nieistotny przy rozwinięciu. Zauważmy, że dla dowolnej konfiguracji manipulatora prędkości w połączeniach ruchowych są związane z prędkością członu roboczego w sposób liniowy. Jest to tylko chwilowa zależność, ponieważ w następnej chwili jakobian zmieni się trochę. Dla ogólnego przypadku robota sześcioczłonowego jakobian J jest rzędu 6×6 , a $\dot{\Theta}$ i 0V są wektorami 6×1 . Taki wektor prędkości kartezjańskiej 6×1 tworzą złożone wektory prędkości członu roboczego: liniowej 3×1 i kątowej 3×1

$${}^0V = \begin{bmatrix} {}^0v \\ {}^0\omega \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Można zdefiniować jakobiany o dowolnym wymiarze (włączając niekwadratowe). W rozważanej przestrzeni kartezjańskiej liczba wierszy jest równa liczbie stopni swobody. Liczba kolumn jakobianu jest równa liczbie połączeń ruchowych manipulatora. W przypadku np. płaskiego ramienia nie ma powodu, aby jakobian miał więcej niż trzy wiersze, chociaż dla redundantnego manipulatora płaskiego może być dowolnie wiele kolumn (po jednej dla każdego połączenia).

W przypadku dwuczlonowego ramienia możemy zapisać jakobian 2×2 , który wiąże prędkości kątowe w parach obrotowych z prędkością członu roboczego. Z przykładu 5.2 możemy łatwo wyznaczyć jakobian tego dwuczlonowego ramienia. Jakobian zapisany w układzie $\{3\}$ na podstawie (5.55) jest następujący

$${}^3J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

a jakobian zapisany w układzie $\{0\}$ na podstawie (5.57) ma postać

$${}^0J(\Theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Zauważmy, że w obu przypadkach wybraliśmy macierz kwadratową, która wiąże prędkości kątowe w parach obrotowych z prędkością członu roboczego. Moglibyśmy również rozważyć jakobian 3×2 odnoszący się tylko do prędkości kątowej członu roboczego.

Rozpatrując równania (5.58)+(5.62), które definiują jakobian, widzimy, że jakobian mógłby być również wyznaczony wprost przez różniczkowanie równań kinematyki mechanizmu. Jest to proste dla prędkości liniowej, natomiast nie istnieje wektor orientacji 3×1 , którego pochodną byłby wektor prędkości kątowej ω . Dlatego zaproponowaliśmy metodę wyprowadzania jakobianu z użyciem wzorów kolejno (5.45) i (5.47). Można zastosować kilka innych metod (patrz np. [4]), z których jedna będzie wprowadzona w podrozdz. 5.8. Jedną z przyczyn wyprowadzenia jakobianu za pomocą przedstawionej tutaj metody jest fakt, że pomaga nam to w przygotowaniu materiału do rozdziału 6, w którym opisano podobne techniki zastosowane do rozwiązywania równań dynamiki manipulatora.

Zmiana układu odniesienia jakobianu

Dany jest jakobian zapisany w układzie $\{B\}$, czyli

$$\begin{bmatrix} B_v \\ B_\omega \end{bmatrix} = B_V = B_{J(\Theta)} \dot{\Theta} \quad (5.68)$$

a interesuje nas wyrażenie jakobianu w innym układzie $\{A\}$. Zauważmy, że wektor 6×1 prędkości kartezjańskiej, dany w układzie $\{B\}$, jest opisany względem $\{A\}$ przez przekształcenie

$$\begin{bmatrix} A_v \\ A_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R & 0 \\ B & \cdots \\ 0 & A_R \\ B & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_v \\ B_\omega \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

skąd

$$\begin{bmatrix} A_v \\ A_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R & 0 \\ B & \cdots \\ 0 & A_R \\ B & \cdots \end{bmatrix} B_{J(\Theta)} \dot{\Theta} \quad (5.70)$$

Zatem widać, że zmiana układu odniesienia jakobianu była wykonywana wg wzoru

$$A_{J(\Theta)} = \begin{bmatrix} A_R & 0 \\ B & \cdots \\ 0 & A_R \\ B & \cdots \end{bmatrix} B_{J(\Theta)} \quad (5.71)$$

5.8. OSOBLIWOŚCI

Przymajemy, że mamy określone przekształcenie liniowe wiążące prędkości w połączeniach ruchowych z prędkościami kartezjańskimi członu roboczego, a stawiamy następujące pytanie: Czy ta macierz jest odwracalna? To znaczy,

czy nie jest osobliwa? Jeśli macierz nie jest osobliwa, to możemy ją odwrócić, aby obliczyć prędkości w połączeniach ruchowych dla danych prędkości kartezańskich

$$\dot{\theta} = J^{-1}(\theta) \nu \quad (5.72)$$

Jest to ważna zależność. Np. chcemy, aby chwytak robota poruszał się z pewną prędkością w przestrzeni kartezańskiej. Stosując (5.72) moglibyśmy obliczyć konieczne prędkości w połączeniach ruchowych w każdej chwili ruchu wzdłuż trajektorii. Istotnym pytaniem jest: Czy jakobian jest odwracalny dla wszystkich wartości θ ? Jeśli nie, to dla jakich jest nieodwracalny?

Dla większości manipulatorów występują takie wartości θ , przy których jakobian staje się osobliwy. Takie przypadki są określane jako **osobliwości manipulatora** lub po prostu **osobliwości**. Wszystkie manipulatory mają osobliwości przy granicy ich przestrzeni roboczej, a większość ma miejsca osobliwości wewnętrz ich przestrzeni roboczej. Głębsze zbadanie klasyfikacji osobliwości wykracza poza zakres tej książki, a więcej informacji można znaleźć w [5]. Dla naszych celów, bez podawania ścisłych definicji, będziemy dzielić osobliwości na dwie kategorie:

1. **Osobliwości graniczne przestrzeni roboczej**-są to osobliwości, które występują gdy manipulator jest w pełni wyprostowany lub złożony tak, że końcówka wykonawcza znajduje się w pobliżu granicy przestrzeni roboczej.
2. **Osobliwości wewnętrza przestrzeni roboczej**-są to takie osobliwości, które występują z dala od granicy przestrzeni roboczej i na ogół są wywołane przez usytuowanie w jednej linii dwóch lub więcej osi par obrotowych.

Gdy manipulator znajduje się w konfiguracji osobliwej, oznacza to, że utracił jeden lub więcej stopni swobody określonych w przestrzeni kartezańskiej. Znaczy to, że istnieje pewien kierunek (lub podprzestrzeń) w przestrzeni kartezańskiej, wzdłuż którego nie jest możliwe poruszanie się chwytaka robota bez względu na wartości prędkości kątowych obrotów w przegubach. Jest oczywiste, że zdarza się to na granicy przestrzeni roboczej robota.

PRZYKŁAD 5.4

Gdzie znajdują się osobliwości prostego dwuczlonowego ramienia z przykładu 5.2? Jakie jest fizyczne wyjaśnienie osobliwości? Czy są one osobliwościami granicznymi przestrzeni roboczej lub czy są one osobliwościami wewnętrza przestrzeni roboczej?

Aby znaleźć położenia osobliwe mechanizmu, trzeba sprawdzić wyznacznik jego jacobianu. Jeśli wyznacznik jest równy zeru, to oznacza, że jacobian utracił pełny rzad i jest osobliwy.

$$\text{DET}|\mathbf{J}(\Theta)| = \begin{vmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{vmatrix} = l_1 l_2 s_2 = 0 \quad (5.73)$$

Oczywiście osobliwość mechanizmu istnieje, gdy θ_2 jest równe 0 lub π rad. Fizycznie, gdy $\theta_2 = 0$, ramię jest wyprowadzone na zewnątrz. W tej konfiguracji ruch członu roboczego jest możliwy tylko wzdłuż jednego z kierunków układu kartezjańskiego (prostopadle do ramienia), dlatego mechanizm utracił jeden stopień swobody. Również, gdy $\theta_2 = \pi$ rad, ramię jest złożone całkowicie do środka i ruch chwytaka jest znów możliwy tylko w jednym kierunku zamiast w dwóch. Będziemy klasyfikować te osobliwości jako osobliwości graniczne przestrzeni roboczej. Zauważmy, że jacobian zapisany względem układu $\{0\}$ lub innego układu mógłby dać ten sam wynik. ■

Niebezpieczeństwo wykorzystania zależności (5.72) w systemie sterowania robota występuje w punkcie osobliwym, w pobliżu którego odwrotność jacobianu szybko powiększa się! To powoduje, że wartości prędkości kątowych w parach obrotowych zmierzają do nieskończoności przy zbliżaniu się do osobliwości.

PRZYKŁAD 5.5

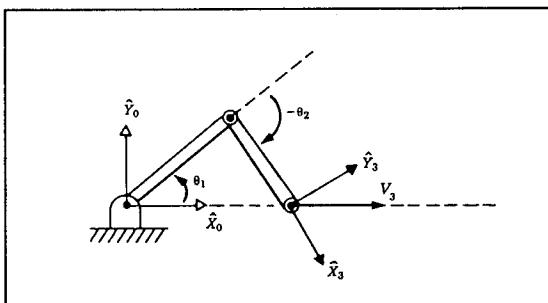
Rozważmy dwuczłonowy robot z przykładu 5.2, którego końcówka wykonawcza przemieszcza się wzdłuż osi \hat{X} z prędkością 1,0 m/s, jak na rys. 5.10. Wykaż, że prędkości kątowe w parach obrotowych mają rozsądne wartości, gdy jesteśmy daleko od osobliwości, lecz przy zbliżaniu się do osobliwości przy $\theta_2 = 0$ wartości tych prędkości zmierzają do nieskończoności.

Zaczynamy od obliczenia odwrotności jacobianu zapisanego w układzie $\{0\}$

$${}^3\dot{\mathbf{J}}(\Theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Następnie stosując (5.74) dla prędkości 1 m/s w kierunku osi \hat{X} możemy obliczyć prędkości kątowe w parach obrotowych jako funkcje konfiguracji manipulatora

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{c_{12}}{l_1 s_2} \\ \dot{\theta}_2 &= -\frac{c_1}{l_2 s_2} - \frac{c_{12}}{l_1 s_2} \end{aligned} \quad (5.75)$$



Rys. 5.10. Manipulator dwuczłonowy, którego końcówka przemieszcza się ze stałą prędkością liniową

Jest oczywiste, że gdy ramię prostuje się na zewnątrz w stronę $\theta_2 = 0$, wartości prędkości kątowych w obu parach obrotowych zmierzają do nieskończoności. ■

PRZYKŁAD 5.6

Dla manipulatora PUMA 560 należy podać dwa przykłady osobliwości, które mogą wystąpić.

Osobliwość występuje, gdy θ_3 ma wartość w pobliżu $-\pi/2$ rad. Obliczenie dokładnej wartości θ_3 pozostawiono jako ćwiczenie (patrz ćwiczenie 5.14). W tej sytuacji człony 2 i 3 są "wyprostowane", podobnie jak w przypadku osobliwego położenia dwuczłonowego manipulatora z przykładu 5.3. Określa się to jako osobliwość graniczna przestrzeni roboczej.

W przypadku gdy $\theta_5 = 0$, manipulator jest w konfiguracji osobliwej. W tej konfiguracji osie par obrotowych 4 i 6 są skierowane do góry, a złożenie ich ruchów daje w wyniku ten sam ruch członu roboczego, co wygląda tak, jakby manipulator utracił jeden stopień swobody. Ponieważ przypadek taki może wystąpić wewnętrzna przestrzeni roboczej, to będziemy go traktować jako osobliwość wewnętrzna przestrzeni roboczej. ■

5.9. SIŁY STATYCZNE W MANIPULATORACH

Łańcuchowa postać manipulatora w sposób naturalny prowadzi nas do określenia sposobu "przenoszenia" sił i momentów z jednego członu na drugi. Zazwyczaj nakierowuje się swobodny (roboczy) człon robota na pewien obiekt w jego otoczeniu lub podtrzymuje pewną masę w chwytaku. Należy wyznaczyć siły i momenty napędowe, jakie trzeba przyłożyć w połączeniach ruchowych, aby

utrzymać układ w równowadze statycznej. Rozważając kwestię statycznego obciążenia manipulatora, najpierw ustalamy wszystkie połączenia ruchowe manipulatora, tak aby stał się kratownicą. Następnie rozpatrujemy oddzielnie każdy człon tej kratownicy i piszemy równania równowagi sił i momentów sił w układach odniesienia członów. W końcu obliczamy siłę lub moment statyczny, który trzeba przyłożyć do połączenia ruchowego, aby manipulator był w stanie równowagi statycznej. W ten sposób wyznaczamy zbiór wartości sił i momentów napędowych w połączeniach ruchowych, potrzebnych do zrównoważenia statycznego obciążenia członu roboczego.

Zdefiniujemy specjalne oznaczenia sił i momentów sił oddziaływanego sąsiednich członów:

f_i – siła wywierana na człon i przez człon $i-1$,

n_i – moment siły wywierany na człon i przez człon $i-1$.

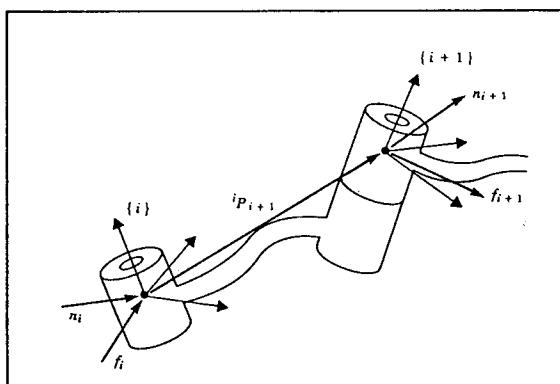
Będziemy wykorzystywać nasze zwykłe konwencje dotyczące związywania układów odniesienia z członami. Na rys. 5.11 przedstawiono siły i momenty sił statycznych działające na człony. Dodając siły i przyrównując ich sumę do zera, otrzymujemy

$${}^i f_i - {}^i f_{i+1} = 0 \quad (5.76)$$

Dodając momenty sił, określone względem początku układu $\{i\}$, mamy

$${}^i n_i - {}^i n_{i+1} - {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} = 0 \quad (5.77)$$

Jeśli zaczniemy od określenia sił i momentów sił działających na chwytek, to możemy obliczyć siły i momenty sił wywierane na każdy kolejny człon, zaczynając od członu ostatniego, a kończąc na członie bazowym 0. Formułujemy w ten sposób iteracyjne wyrażenia "siła-moment siły" (5.76) i (5.77), począwszy od członów z najwyższym numerem, a kończąc na członach z numerem najniższym. Wynik można zapisać w postaci



Rys. 5.11. Równowaga statyczna sił i momentów sił dla pojedynczego członu

$${}^i f_i = {}^i f_{i+1} \quad (5.78)$$

$${}^i n_i = {}^i n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} \quad (5.79)$$

W celu zapisania tych równań dotyczących tylko sił i momentów sił zdefiniowanych w układach odniesienia członów, przekształcamy je za pomocą macierzy obrotu, opisującej układ $\{i+1\}$ względem układu $\{i\}$. To prowadzi nas do najważniejszego wniosku odnośnie do sposobu "przenoszenia" obciążen statycznych od członu do członu

$${}^i f_i = {}^i_{i+1} R \ {}^{i+1} f_{i+1} \quad (5.80)$$

$${}^i n_i = {}^i_{i+1} R \ {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i \quad (5.81)$$

Na zakończenie pojawia się ważne pytanie: Jakie siły i momenty napędowe trzeba przyłożyć w połączeniach ruchowych, aby zrównoważyć siły i momenty sił obciążające człony? Wszystkie składowe wektorów sił i momentów sił są przenoszone przez strukturę samego mechanizmu z wyjątkiem momentu sił względem osi pary obrotowej i siły o kierunku osi pary przesuwnej. Dlatego, aby znaleźć moment napędowy w parze obrotowej, potrzebny do utrzymania równowagi statycznej, oblicza się iloczyn skalarny wektora osi pary i wektora momentu sił działających na człon

$$\tau_i = {}^i n_i^T \cdot {}^i \hat{Z}_i \quad (5.82)$$

W przypadku, gdy połączenie jest parą przesuwną, to obliczamy siłę napędową

$$\tau_i = {}^i f_i^T \cdot {}^i \hat{Z}_i \quad (5.83)$$

Zauważmy, że symbolu τ używamy również do oznaczania siły w parze przesuwnej.

Odnośnie do konwencji znaków, to na ogół definiujemy dodatni zwrot momentu napędowego jako zwrot, przy którym moment napędowy zmieniałyby kąt konfiguracyjny w stronę zwiększenia jego wartości.

Równania (5.80)+(5.83) służą do obliczenia sił i momentów napędowych potrzebnych do zrównoważenia dowolnej siły lub momentu sił przyłożonych do członu roboczego manipulatora w przypadku statycznym.

PRZYKŁAD 5.7

Do końcówki wykonawczej dwuczlonowego manipulatora z przykładu 5.3 przyłożono wektor siły ${}^3 F$ (która rozpatruje się jako działająca w początku układu $\{3\}$). Znaleźć wymagane momenty napędowe w parach obrotowych jako funkcje konfiguracji manipulatora i przyłożonej siły. Patrz rys. 5.12.

Stosujemy równania (5.80)+(5.82), zaczynając od ostatniego członu i zmierzając do podstawy robota:

$${}^2\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

$${}^2n_2 = l_2 \hat{\mathbf{x}}_2 \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

$${}^1\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + l_1 \hat{\mathbf{x}}_1 \times {}^1\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

Stąd

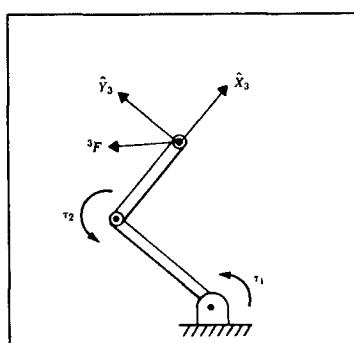
$$\tau_1 = l_1 s_2 f_x + (l_2 + l_1 c_2) f_y \quad (5.88)$$

$$\tau_2 = l_2 f_y \quad (5.89)$$

Tę zależność można zapisać w postaci z operatorem macierzowym

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_2 + l_1 c_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

Nie jest zbiegiem okoliczności, że wspomniana macierz jest macierzą transponowaną jakobianu, który wyznaczyliśmy w (5.66).



Rys. 5.12. Manipulator dwuczłonowy z siłą przyłożoną do członu roboczego

5.10. JAKOBIANY W DZIEDZINIE SIŁY

Wyznaczyliśmy siły i momenty napędowe, które będą dokładnie równoważyć siły działające na chwytkę w przypadku statycznym. Mówimy o pracy sił działających na mechanizm (w sensie technicznym), jeśli mechanizm przemieszcza się. Pracę definiuje się jako wynik działania siły na pewnej drodze i jest ona skalarem o wymiarze energii. Zasada prac przygotowanych pozwala nam poczynić pewne stwierdzenia dla przypadku statycznego, przez przyjęcie wartości tego przemieszczenia jako zmierzającej do nieskończoności malej. Ponieważ praca ma wymiar energii, to musi mieć taką samą wartość w dowolnym układzie uogólnionych współrzędnych. W szczególności można przyrównać pracę wykonaną w przestrzeni kartezjańskiej do pracy wykonanej w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych. W przypadku wielowymiarowym praca jest iloczynem skalarnym wektora siły i wektora przemieszczenia. Zatem mamy

$$\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{x} = \tau \cdot \delta \theta \quad (5.91)$$

gdzie \mathbf{f} jest wektorem 6×1 "siła-moment siły", działającym na człon roboczy, $\delta \mathbf{x}$ jest nieskończonościem małym przemieszczeniem kartezjańskim 6×1 , τ jest wektorem 6×1 sił i momentów napędowych, a $\delta \theta$ jest wektorem 6×1 nieskończoności małych przemieszczeń w połączeniach ruchowych. Równanie (5.91) może być również zapisane jako

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{x} = \tau^T \delta \theta \quad (5.92)$$

Definicja jakobianu jest następująca

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \delta \theta \quad (5.93)$$

Zatem możemy napisać równanie

$$\mathbf{f}^T \mathbf{J} \delta \theta = \tau^T \delta \theta \quad (5.94)$$

które musi obowiązywać dla wszystkich $\delta \theta$, skąd

$$\mathbf{f}^T \mathbf{J} = \tau^T \quad (5.95)$$

Transponując obie strony równania (5.95) otrzymujemy wynik

$$\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (5.96)$$

Równanie (5.96) na ogół sprawdza się, co widzimy w przypadku szczególnym manipulatora dwuczłonowego z przykładu 5.6. Jakobian przekształca rozkład sił kartezjańskich działających na chwytkę w równoważne momenty napędowe. Jeśli jakobian jest wyrażony względem układu $\{0\}$, to mogą być przekształcone wektory sił określone w układzie $\{0\}$, co wyjaśniono przez oznaczenie

$$\tau = \mathbf{0}_J^T \mathbf{0}_{\mathcal{F}} \quad (5.97)$$

Jeśli jakobian utraci pełny rząd, to w pewnych kierunkach końcówka wykonawcza nie może wywierać sił statycznych. Wg (5.97) oznacza to, że jeśli jakobian jest osobliwy, to wartość \mathcal{F} mogłaby rosnąć lub maleć w pewnych kierunkach (określających przestrzeń zerową jakobianu [6]) bez wpływu na obliczoną wartość τ . Oznacza to również, że w pobliżu konfiguracji osobliwych przełożenie mechaniczne zmierza do nieskończoności, tak że przy małych momentach napędowych mogą być generowane duże siły na członie roboczym³⁾. Stąd osobliwości ujawniają się zarówno w dziedzinie siły, jak i w dziedzinie położenia.

Zauważmy, że (5.97) jest bardzo interesująca zależnością, gdyż pozwala nam przekształcić wielkość wyrażoną we współrzędnych kartezjańskich w wielkość wyrażoną we współrzędnych konfiguracyjnych bez obliczania jakichkolwiek odwrotnych funkcji kinematycznych. Wykorzystamy to w następnych rozdziałach, przy rozważaniu zadania sterowania.

5.11. PRZEKSZTAŁCENIE KARTEZJAŃSKIE PRĘDKOŚCI I SIŁ STATYCZNYCH

Możemy wyrazić ogólną prędkość ciała w postaci wektora 6×1

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

Możemy również rozpatrywać wektor 6×1 uogólnionego obciążenia

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

gdzie F jest wektorem 3×1 siły, a N jest wektorem 3×1 momentu siły. Można zatem pomyśleć o przekształceniach 6×6 , które odwzorowują te wielkości z jednego układu do innego. Jest to dokładnie to, co właśnie zrobiliśmy przy rozpatrywaniu przenoszenia prędkości i sił od członu do członu. Tutaj zapisaliśmy (5.45) i (5.47) w postaci operatora macierzowego do przekształcenia ogólnych wektorów prędkości z układu $\{A\}$ do ich opisu w układzie $\{B\}$. Ponieważ te dwa układy rozpatrywane tutaj są sztywno połączone, $\dot{\theta}_{i+1}$ występujące w (5.45) jest przyjmowane jako zero w wyprowadzeniu

³⁾Rozważmy dwuczlonowy manipulator prawie wyprostowany z końcówką wykonawczą stykającą się z powierzchnią obiektu. W tej konfiguracji dowolnie duża siła mogłaby być wywierana przy "małych" momentach napędowych.

$$\begin{bmatrix} B_{V_B} \\ B_{\omega_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_R & -A_R \\ A_R & A_P_{BORG} \times \\ 0 & B_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{V_A} \\ A_{\omega_A} \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

gdzie iloczyn wektorowy jest rozumiany jako operator macierzowy

$$P \times = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

Ponieważ (5.100) wiąże prędkości w jednym układzie z takimi samymi w drugim, operator 6×6 nazwiemy przekształceniem prędkości i będziemy stosować oznaczenie T_V . W tym przypadku jest to przekształcenie prędkości, które odwzorowuje prędkości opisane w układzie $\{A\}$ na prędkości opisane w $\{B\}$, dla tego użyjemy następujących oznaczeń do zwartego zapisu (5.100)

$$B_{V_B} = A_{T_V} A_{V_A} \quad (5.102)$$

Mogemy odwrócić (5.100) w celu obliczenia prędkości w układzie $\{A\}$, gdy dane są wielkości w $\{B\}$

$$\begin{bmatrix} A_{V_A} \\ A_{\omega_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R & A_P_{BORG} \times A_R \\ 0 & A_R \\ B_R & B_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{V_B} \\ B_{\omega_B} \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

lub

$$A_{V_A} = A_{T_V} B_{V_B} \quad (5.104)$$

Mogna zauważyć, że te odwzorowania prędkości z układu do układu zależą od macierzy A_{T_B} (lub jej odwrotności) i dlatego muszą być interpretowane jako wyniki chwilowe, chyba że zależność między dwoma układami jest statyczna. Podobnie do (5.80) i (5.81) zapiszemy macierz 6×6 , która przekształca wektor uogólnionego obciążenia, określony w układzie $\{B\}$, do jego opisu w układzie $\{A\}$

$$\begin{bmatrix} A_{F_A} \\ A_{N_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R & 0 \\ A_P_{BORG} \times A_R & A_R \\ B_R & B_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{F_B} \\ B_{N_B} \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

macierz ta może być zapisana w sposób zwarty jako

$$A_{\mathcal{F}_A} = A_{T_f} B_{\mathcal{F}_B} \quad (5.106)$$

gdzie macierz T_f uzyto do oznaczenia przekształcenia siła-moment siły.

Przekształcenia prędkości i siły są podobne do jakobianów w tym, że wiążą ze sobą prędkości i siły w różnych układach współrzędnych. Podobnie jak w przypadku jakobianów mamy

$$\frac{A_T}{B_f} = \frac{A_T}{B_V} \quad (5.107)$$

co może być sprawdzone przez zbadanie zależności (5.105) i (5.103).

PRZYKŁAD 5.8

Na rys. 5.13 przedstawiono chwytkę trzymającą narzędzie. W miejscu połączenia chwytki z manipulatorem znajduje się kciuk z sensorem siły. Jest tam urządzenie, które może mierzyć siły i momenty sił przyłożone do chwytki.

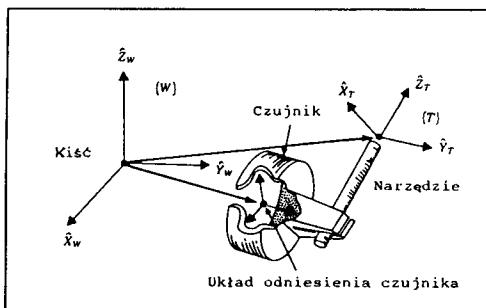
Załóżmy, że wyjście tego sensora jest wektorem 6×1 , S_g , złożonym z trzech składowych siły i trzech składowych momentu siły wyrażonych w układzie sensora $\{S\}$. Naszym zadaniem jest wyznaczenie sił i momentów sił przyłożonych do końca narzędzia T_g . Należy znaleźć przekształcenie 6×6 , które przekształca wektor siła-moment siły z układu $\{S\}$ do układu narzędziwa $\{T\}$. Przekształcenie T_g wiążące $\{T\}$ z $\{S\}$ jest znane. (Zauważmy, że $\{S\}$ jest tutaj układem sensora, a nie układem stanowiskowym jak zazwyczaj).

Mamy tu proste zastosowanie zależności (5.106). Wpierw dla macierzy T_g obliczamy jej odwrotność T_g^{-1} , która składa się z T_g^R i T_{PSORG} . Następnie wykorzystujemy (5.106) i otrzymujemy

$$T_g^{-1} T_g = T_g^{-1} S_g \quad (5.108)$$

gdzie

$$T_g^{-1} S_g = \begin{bmatrix} T_g^R & 0 \\ T_{PSORG} \times T_g^R & T_g^R \end{bmatrix} \quad (5.109)$$



Rys. 5.13. Układy związane z sensorem siły

Bibliografia

- [1] K.Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, 1978.
- [2] K.R.Symon, *Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley, 1971.
- [3] I.Shames, *Engineering Mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, 1967.
- [4] D.Orin i W.Schrader, "Efficient Jacobian Determination for Robot Manipulators" in *Robotics Research: The First International Symposium*, M.Brady i R.P.Paul, Editors, MIT Press, 1984.
- [5] B.Gorla i M.Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.
- [6] B.Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1969.
- [7] J.K.Salisbury i J.Craig, *Articulated Hands: Kinematic and Force Control Issues*, *International Journal of Robotics Research*, Vol.1, No.1, Spring 1982.

Ćwiczenia

- 5.1. [10] Powtórz przykład 5.3 używając jakobianu zapisanego w układzie $\{0\}$. Czy wyniki są takie same jak te z przykładu 5.3?
- 5.2. [25] Znajdź jakobian manipulatora o trzech stopniach swobody z ćwiczenia 3 z rozdz.3. Napisz go w zależności od układu $\{4\}$ umieszczonego w końcu chwytaka z tą samą orientacją jak układ $\{3\}$.
- 5.3. [35] Znajdź jakobian manipulatora o trzech stopniach swobody z ćwiczenia 3 z rozdz.3. Napisz go w zależności od układu $\{4\}$ umieszczonego w końcu chwytaka z tą samą orientacją jak układ $\{3\}$. Wyprowadź jakobian trzema różnymi sposobami: poprzez przenoszenie prędkości od podstawy do końca chwytaka, poprzez przenoszenie sił statycznych od końca do podstawy oraz przez bezpośrednie różniczkowanie równań kinematyki.
- 5.4. [8] Udowodnij, że osobliwości w dziedzinie siły istnieją przy tych samych konfiguracjach jak osobliwości w dziedzinie pozycji.
- 5.5. [39] Oblicz jakobian robota PUMA 560 w układzie $\{6\}$.
- 5.6. [47] Czy prawda jest, że dowolny manipulator o trzech parach obrotowych i niezerowych długościach członów musi mieć punkty osobliwe wewnętrz jego przestrzeni roboczej?
- 5.7. [7] Naszkicuj schemat manipulatora o trzech stopniach swobody, którego jakobian prędkości liniowej jest macierzą jednostkową 3×3 , obejmującą wszystkie konfiguracje manipulatora. Opisz kinematykę w jednym lub dwóch zdaniach.

- 5.8. [18] Dowolne manipulatory mogą mieć pewne konfiguracje zwane "punktami izotropowymi", dla których kolumny jacobiana stają się ortogonalnymi o równej wartości [7]. Określ, czy istnieją punkty izotropowe dla dwuczłonowego manipulatora z przykładu 5.2. Wskazówka: Czy występują tutaj warunki dotyczące l_1 i l_2 ?
- 5.9. [50] Znajdź warunki konieczne istnienia punktów izotropowych dla ogólnego manipulatora o sześciu stopniach swobody (patrz ćwiczenie 5.8).
- 5.10. [7] Dla dwuczłonowego manipulatora z przykładu 5.2 podaj przekształcenie, które odwzorowywałyby momenty napędowe w postaci wektora 2×1 siły 3F przy chwytaku.
- 5.11. [14] Dana jest macierz

$${}^B_T = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 10,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 0,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 5,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli wektor prędkości w początku $\{A\}$ jest następujący

$${}^A_V = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 2,0 \\ -3,0 \\ 1,414 \\ 1,414 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

to znajdź wektor 6×1 prędkości z punktem odniesienia w początku układu $\{B\}$.

- 5.12. [15] Dla trójczłonowego manipulatora z ćwiczenia 3.3 podaj zbiór kątów konfiguracyjnych, dla których manipulator osiąga konfigurację osobliwą wewnętrz przestrzeni roboczej, oraz zbiór kątów, dla których manipulator osiąga konfigurację osobliwą na granicy przestrzeni roboczej.
- 5.13. [9] Pewien dwuczłonowy manipulator ma następujący jacobian

$${}^0_J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 & l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Pomijając wpływ grawitacji, oblicz równoważące momenty napędowe, gdy do manipulatora przykładowy jest wektor siły statycznej ${}^0F = 10\hat{x}_0$.

- 5.14. [18] Gdyby parametr członu a_3 manipulatora PUMA 560 był równy zeru, to osobliwość graniczna przestrzeni roboczej mogłaby wystąpić przy $\theta_3 = -\pi/2$ rad. Podaj wyrażenie na wartości θ_3 , przy których występują osobliwości i pokaż, że gdyby $a_3 = 0$, to wynikłoby, że $\theta_3 = -\pi/2$ rad.

Wskazówka: W tej konfiguracji jedna prosta przecina osie 2, 3 oraz przechodzi przez punkt przecięcia osi 4, 5 i 6.

5.15. [24] Podaj w układzie $\{0\}$ jakobian 3×3 , który służy do obliczenia prędkości liniowej końca narzędzia manipulatora z przykładu 3.4 w rozdz. 3.

5.16. [20] Manipulator typu 3R ma własności kinematyczne, odpowiadające dokładnie zbiorowi kątów Eulera Z-Y-Z (tj. zadanie proste kinematyki dane przez (2.72) przy $\alpha = \theta_1$, $\beta = \theta_2$ i $\gamma = \theta_3$). Podaj jakobian wiążący prędkości kątowe w parach obrotowych z prędkością kątową członu końcowego.

5.17. [31] Wyobraźmy sobie, że przy ogólnej postaci robota o sześciu stopniach swobody znamy ${}^0\dot{Z}_i$ i ${}^0P_{iorg}$ dla wszystkich i , czyli znamy początek oraz wersor Z każdego układu odniesienia związanego z członem w zależności od układu bazowego. Przypuśćmy, że jesteśmy zainteresowani prędkością punktu narzędzia (ustalonego względem członu n) i znamy również ${}^0P_{tool}$. Prędkość punktu końca narzędzia wynikająca z obrotu w parze obrotowej z określona prędkością jest dana przez

$${}^0v_i = \dot{\theta}_i {}^0\dot{Z}_i \times ({}^0P_{tool} - {}^0P_{iorg}) \quad (5.110)$$

a prędkość kątowa członu n wywołana prędkością i -tej pary obrotowej jest dana przez

$${}^0\omega_i = \dot{\theta}_i {}^0\dot{Z}_i \quad (5.111)$$

Całkowita prędkość liniowa i kątowa narzędzia jest dana odpowiednio przez sumy 0v_i i ${}^0\omega_i$. Podaj równania analogiczne do (5.110) i (5.111) dla przypadku pary przesuwnej i oraz napisz macierz jakobianową 6×6 dowolnego manipulatora o sześciu stopniach swobody w zależności od \dot{Z}_i , P_{iorg} i P_{tool} .

5.18. [18] Kinematykę robota 3R opisano za pomocą macierzy

$${}^3T = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znajdź jakobian ${}^0J(\Theta)$, który pomnożony przez wektor prędkości kątowych w parach obrotowych da prędkość liniową początku układu $\{3\}$ względem układu $\{0\}$.

5.19. [15] Pozycja początku układu członu 2 manipulatora typu RP jest dana przez

$${}^0P_{2ORG} = \begin{bmatrix} a_1c_1 - d_2s_1 \\ a_1s_1 + d_2c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podaj jakobian 2x2, który wiąże dwie prędkości w parach kinematycznych z liniową prędkością początku układu {2}. Podaj wartość θ , przy której urządzenie znajduje się w położeniu osobliwym.

- 5.20. [20] Wyjaśnij, co mogłoby znaczyć zdanie: "Manipulator o n stopniach swobody w położeniu osobliwym może być traktowany jako manipulator redundantny w przestrzeni o $n-1$ wymiarach".

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 5)

1. Dwa układy {A} i {B} nie poruszają się jeden względem drugiego, czyli macierz A_T_B jest stała. W przypadku ruchu płaskiego definiujemy prędkość układu {A} jako

$${}^A_V_A = \begin{bmatrix} {}^A_x \\ {}^A_y \\ {}^A_\theta \end{bmatrix}$$

Napisz program, który dla danych A_T_B i A_V_A oblicza B_V_B . Wskazówka: Jest to płaski analog (5.100). Zastosuj procedurę wiodącą podobną do:

Procedure Veltrans(VAR brela: frame; VAR vrela, vrelb: vec3);

gdzie "vrela" jest prędkością względem układu {A} (lub A_V_B), a "vrelb" jest wyjściem procedury (prędkość względem układu {B} lub B_V_B).

2. Określ jakobian 3x3 trójczłonowego płaskiego manipulatora (z przykład. 3.3). W celu wyprowadzenia jakobianu powinieneś zastosować analizę przenoszenia prędkości (jak w przykład. 5.2) lub analizę sił statycznych (jak w przykład. 5.6). Oddaj pracę pokazując jak wyprowadziłeś jakobian.

Napisz program do obliczania jakobianu w układzie {3}, tzn. ${}^3J(\theta)$, jako funkcję kątów obrotów w parach obrotowych. Zauważ, że układ {3} jest standardowym układem członu z początkiem na osi przegubu 3. Zastosuj procedurę podobną do:

Procedure Jacobian(VAR theta: vec3; Var Jac: mat33);

Dane manipulatora: $l_1 = l_2 = 0,5$ m.

3. Układy odniesienia narzędzia i stanowiska są określone przez użytkownika jak poniżej (jednostki: metry i stopnie):

$${}^W_T = [x \ y \ \theta] = [0,1 \ 0,2 \ 30,0],$$

$${}^S_T = [x \ y \ \theta] = [0,0 \ 0,0 \ 0,0].$$

W pewnej chwili wierzchołek narzędzia jest w pozycji

$$\begin{matrix} S \\ T \end{matrix} = [x \ y \ \theta] = [0,6 \ -0,3 \ 45,0].$$

W tej samej chwili zmierzone prędkości kątowe (w stopniach/s) wynoszą

$$\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3] = [20,0 \ -10,0 \ 12,0].$$

Oblicz prędkość liniową i kątową wierzchołka narzędzia względem jego własnego układu, tzn. $\begin{matrix} T \\ V_T \end{matrix}$. Jeśli jest więcej niż jedno możliwe rozwiązanie, wyznacz wszystkie możliwe rozwiązania.

6

DYNAMIKA MANIPULATORA

6.1. WPROWADZENIE

Jak dotąd, nasze badania manipulatorów koncentrowały się tylko na zagadnieniach kinematycznych. Rozpatrywaliśmy położenia i siły statyczne oraz prędkości; jednak nigdy nie rozważaliśmy sił potrzebnych do wywołania ruchu. W tym rozdziale rozpatrujemy równania ruchu manipulatora - sposób, w jaki ruch manipulatora jest związany z siłami i momentami napędowymi lub siłami zewnętrznymi przyłożonymi do manipulatora.

Dynamika mechanizmów jest dziedziną, o której napisano wiele książek, a przy ich studiowaniu można spędzić wiele lat. Oczywiście nie możemy objąć tutaj całości materiału, jednak pewne sformułowania zadań dynamiki wydają się szczególnie przydatne w zastosowaniu do manipulatorów. W szczególności tematami naszych badań będą metody, w których wykorzystuje się szeregową strukturę łańcucha manipulatora.

Są tutaj dwa zadania związane z dynamiką manipulatora, które chcielibyśmy rozwiązać. W pierwszym zadaniu mamy dany punkt trajektorii (θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$), a szukamy wektora wymaganych sił i momentów napędowych τ . Tak sformułowane

zadanie dynamiki jest użyteczne dla celów sterowania manipulatora (rozdz. 10). Drugie zadanie polega na określeniu ruchu manipulatora pod działaniem wektora sił i momentów napędowych. Znaczy to, że dla danego wektora τ należy obliczyć wynikowy ruch manipulatora θ , $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$. Jest to przydatne dla celów symulacji ruchu manipulatora.

6.2. PRZYŚPIESZENIE CIAŁA SZTYWNEGO

Analiza ruchu ciała sztywnego wymaga znajomości przyśpieszeń. Przyjmiemy, że w każdej chwili wektory prędkości liniowej i kątowej mają pochodne, które są nazywane odpowiednio przyśpieszeniami liniowymi i kątowymi. Oznacza to, że

$$\overset{B}{\ddot{v}}_Q = \frac{d}{dt} \overset{B}{v}_Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overset{B}{v}_Q(t + \Delta t) - \overset{B}{v}_Q(t)}{\Delta t} \quad (6.1)$$

oraz

$$\overset{A}{\ddot{\Omega}}_B = \frac{d}{dt} \overset{A}{\Omega}_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overset{A}{\Omega}_B(t + \Delta t) - \overset{A}{\Omega}_B(t)}{\Delta t} \quad (6.2)$$

Tak jak w przypadku prędkości, kiedy układ odniesienia dla różniczkowania był rozumiany jako pewien uniwersalny układ odniesienia $\{U\}$, będziemy używać oznaczeń

$$\dot{v}_A = \overset{U}{\ddot{v}}_{AORG} \quad (6.3)$$

oraz

$$\dot{\omega}_A = \overset{U}{\ddot{\Omega}}_{AORG} \quad (6.4)$$

Przyśpieszenie liniowe

Podamy inne sformułowanie ważnego wyniku z rozdz. 5 (5.12), gdy początki układów pokrywają się

$$\overset{A}{v}_Q = \overset{A}{R} \overset{B}{v}_Q + \overset{A}{\Omega}_B \times \overset{A}{R} \overset{B}{Q} \quad (6.5)$$

Lewa strona tego równania opisuje, jak wektor $\overset{A}{Q}$ zmienia się w czasie. Ponieważ początki układów pokrywają się, równanie (6.5) możemy zapisać jako

$$\frac{d}{dt} (\overset{A}{R} \overset{B}{Q}) = \overset{A}{R} \overset{B}{v}_Q + \overset{A}{\Omega}_B \times \overset{A}{R} \overset{B}{Q} \quad (6.6)$$

Ta postać równania będzie użyteczna przy wyprowadzaniu odpowiedniego równania przyśpieszenia.

Przez różniczkowanie (6.5) możemy wyprowadzić wyrażenia dla przyśpieszenia punktu $\overset{B}{Q}$ obserwowanego z układu $\{A\}$, gdy początki układów $\{A\}$ i $\{B\}$ pokrywają się

$${}^A\ddot{v}_Q = \frac{d}{dt} \left({}^B_R {}^B v_Q \right) + {}^A_{\Omega_B} \times {}^B_R {}^B Q + {}^A_{\dot{\Omega}_B} \times \frac{d}{dt} \left({}^B_R {}^B Q \right) \quad (6.7)$$

Teraz zastosujemy wzór (6.6) dwukrotnie - raz do pierwszego wyrazu i drugi - do ostatniego wyrazu. Prawa strona równania (6.7) daje wynik

$$\begin{aligned} & {}^B_R {}^B \ddot{v}_Q + {}^A_{\Omega_B} \times {}^B_R {}^B v_Q + {}^A_{\dot{\Omega}_B} \times {}^B_R {}^B Q + \\ & + {}^A_{\Omega_B} \times \left({}^B_R {}^B v_Q + {}^A_{\Omega_B} \times {}^B_R {}^B Q \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Łącząc te dwa wyrazy, otrzymujemy

$${}^B_R {}^B \ddot{v}_Q + 2 {}^A_{\Omega_B} \times {}^B_R {}^B v_Q + {}^A_{\dot{\Omega}_B} \times {}^B_R {}^B Q + {}^A_{\Omega_B} \times \left({}^A_{\Omega_B} \times {}^B_R {}^B Q \right) \quad (6.9)$$

Ostatecznie w celu uogólnienia wzoru do przypadku, w którym początki nie pokrywają się, dodajemy jeden wyraz uwzględniający przyśpieszenie liniowe początku układu $\{B\}$, otrzymując wzór ogólny

$$\begin{aligned} & {}^A\ddot{v}_{BORG} + {}^B_R {}^B \ddot{v}_Q + 2 {}^A_{\Omega_B} \times {}^B_R {}^B v_Q + {}^A_{\dot{\Omega}_B} \times {}^B_R {}^B Q + \\ & + {}^A_{\Omega_B} \times \left({}^A_{\Omega_B} \times {}^B_R {}^B Q \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

W szczególnym przypadku, który wartość jest zaznaczenia, wektor ${}^B_R {}^B Q$ jest stały, czyli

$${}^B_R {}^B v_Q = {}^B_R {}^B \dot{v}_Q = 0 \quad (6.11)$$

W tym przypadku (6.10) upraszcza się do postaci

$${}^A\ddot{v}_Q = {}^A\ddot{v}_{BORG} + {}^A_{\Omega_B} \times \left({}^A_{\Omega_B} \times {}^B_R {}^B Q \right) + {}^A_{\dot{\Omega}_B} \times {}^B_R {}^B Q \quad (6.12)$$

Wykorzystamy ten wynik do obliczenia przyśpieszenia liniowego członów manipulatora z parami obrotowymi. W przypadku występowania par przesuwnych wykorzystana będzie bardziej ogólna postać (6.10).

Przyśpieszenie kątowe

Rozważmy przypadek układu $\{B\}$ obracającego się względem $\{A\}$ z prędkością kątową ${}^A_{\Omega_B}$ oraz układu $\{C\}$ obracającego się względem $\{B\}$ z prędkością kątową ${}^B_{\Omega_C}$. Aby obliczyć ${}^A_{\Omega_C}$, dodajemy wektory w układzie $\{A\}$

$${}^A_{\Omega_C} = {}^A_{\Omega_B} + {}^B_R {}^B \Omega_C \quad (6.13)$$

Przez różniczkowanie otrzymujemy

$${}^A_{\dot{\Omega}_C} = {}^A_{\dot{\Omega}_B} + \frac{d}{dt} \left({}^B_R {}^B \Omega_C \right) \quad (6.14)$$

Stosując (6.6) do ostatniego wyrazu (6.14), otrzymujemy

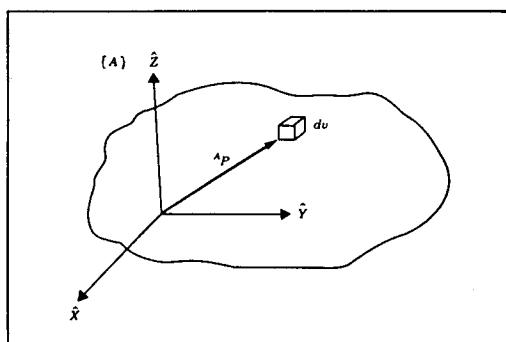
$$A_{\dot{\Omega}_C} = A_{\dot{\Omega}_B} + \frac{A_R}{B} B_{\dot{\Omega}_C} + A_{\Omega_B} \times \frac{A_R}{B} B_{\Omega_C} \quad (6.15)$$

Wykorzystamy ten wynik do obliczenia przyśpieszenia kątowego członów manipulatora.

6.3. ROZKŁAD MASY

W układach o jednym stopniu swobody często mówimy o masie ciała sztywnego. W przypadku ruchu obrotowego wokół pewnej osi jest znane pojęcie *masowego momentu bezwładności*. Dla ciała sztywnego, które może poruszać się swobodnie w przestrzeni, występuje nieskończona wielka liczba możliwych osi obrotu. W przypadku obrotu wokół dowolnej osi potrzebna jest znajomość pełnego rozkładu masy ciała sztywnego. Wprowadzamy tutaj **tensor bezwładności**, który dla naszych celów może być rozumiany jako uogólnienie skalarowego momentu bezwładności obiektu.

Zdefiniujemy teraz zbiór wielkości, które dają informację o rozkładzie masy ciała sztywnego względem układu odniesienia. Na rys. 6.1 pokazano ciało sztywne ze związanym z nim układem. Podczas gdy tensor bezwładności określa się względem dowolnego układu, tutaj będziemy zawsze rozważać przypadek tensora bezwładności określonego w układzie związanym z ciałem sztywnym. Tam gdzie to jest ważne będziemy wskazywać układ odniesienia danego tensora bezwładności przez poprzedzający wskaźnik u góry. Tensor bezwładności względem układu $\{A\}$ jest wyrażony w postaci macierzy 3×3



Rys. 6.1. Tensor bezwładności obiektu opisuje rozkład masy obiektu. Wektor A_P lokalizuje element objętości dv

$$\mathbf{A_I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

gdzie elementy skalarne są dane przez

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int \int \int_V (y^2 + z^2) \rho dv \\ I_{yy} &= \int \int \int_V (x^2 + z^2) \rho dv \\ I_{zz} &= \int \int \int_V (x^2 + y^2) \rho dv \\ I_{xy} &= \int \int \int_V xy \rho dv \\ I_{xz} &= \int \int \int_V xz \rho dv \\ I_{yz} &= \int \int \int_V yz \rho dv \end{aligned} \quad (6.17)$$

jeśli ciało sztywne jest złożone z różniczkowych elementów objętości dv , z materiału o gęstości ρ . Położenie każdego elementu jest określone przez wektor $\mathbf{A_p} = [x \ y \ z]^T$, jak pokazano na rys. 6.1.

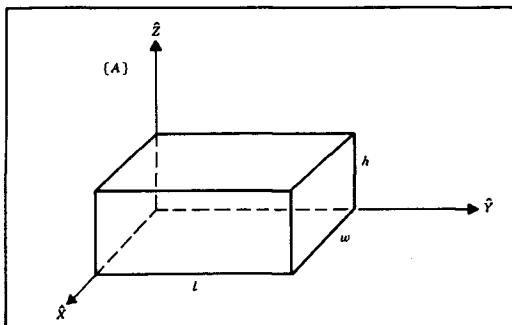
Elementy I_{xx} , I_{yy} i I_{zz} nazywamy **masowymi momentami bezwładności**. Zauważmy, że w każdym przypadku całkujemy elementy masy ρdv pomnożone przez kwadraty ich odległości od odpowiedniej osi. Ten zbiór sześciu niezależnych wielkości będzie dla danego ciała zależny od pozycji i orientacji układu, w którym są one określone. Jeśli mamy swobodę wyboru orientacji układu odniesienia, to możemy spowodować, aby momenty dewiacji były równe zero. Tak skierowane osie układu odniesienia są nazywane **osiами głównymi**, a odpowiednie momenty masowe – **głównymi momentami bezwładności**.

PRZYKŁAD 6.1

Znaleźć tensor bezwładności dla prostokątnego ciała o jednorodnej gęstości ρ względem odpowiedniego układu pokazanego na rys. 6.2.

Najpierw obliczamy I_{xx} . Wykorzystując element o objętości $dv = dx dy dz$,trzymujemy

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \\ &= \int_0^h \int_0^l (y^2 + z^2) w \rho dy dz = \int_0^h \left(\frac{l^3}{3} + z^2 l \right) w \rho dz = \\ &= \left(\frac{hl^3 w}{3} + \frac{h^3 lw}{3} \right) \rho = \frac{m}{3} (l^2 + h^2) \end{aligned} \quad (6.18)$$



Rys. 6.2. Ciało o jednakowej gęstości

gdzie m jest całkowitą masą ciała. Dokonując permutacji wyrazów możemy otrzymać I_{yy} i I_{zz}

$$I_{yy} = \frac{m}{3} (w^2 + h^2) \quad (6.19)$$

$$I_{zz} = \frac{m}{3} (l^2 + w^2) \quad (6.20)$$

Następnie obliczamy I_{xy}

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy\rho dx dy dz = \\ &= \int_0^h \int_0^l \frac{w^2}{2} y\rho dy dz = \\ &= \int_0^h \frac{w^2 l^2}{4} \rho dz = \\ &= \frac{m}{4} wl \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dokonując permutacji wyrazów otrzymujemy

$$I_{xz} = \frac{m}{4} hw \quad (6.22)$$

$$I_{yz} = \frac{m}{4} hl \quad (6.23)$$

Zatem tensor bezwładności dla tego obiektu jest następujący

$$A_I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3} (l^2 + h^2) & -\frac{m}{4} wl & -\frac{m}{4} hw \\ -\frac{m}{4} wl & \frac{m}{3} (w^2 + h^2) & -\frac{m}{4} hl \\ -\frac{m}{4} hw & -\frac{m}{4} hl & \frac{m}{3} (l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Jak zauważyliśmy, tensor bezwładności jest funkcją położenia i orientacji układu odniesienia. Dobrze znane twierdzenie o osiach równoległych jest podstawą jednego ze sposobów obliczenia zmiany tensora bezwładności przy przesunięciach układu współrzędnych odniesienia. Twierdzenie o osiach równoległych wiąże tensor bezwładności ciała, określony względem układu z początkiem ulokowanym w środku masy, z tensorem bezwładności względem innego układu odniesienia. Jeśli układ $\{C\}$ jest umieszczony w środku masy ciała, a układ $\{A\}$ jest dowolnie przesunięty, wtedy twierdzenie to może być wyrażone jako [1]

$$\begin{aligned} A_{I_{zz}} &= C_{I_{zz}} + m(x_c^2 + y_c^2) \\ A_{I_{xy}} &= C_{I_{xy}} - mx_c y_c \end{aligned} \quad (6.25)$$

gdzie $P_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ określa położenie środka masy względem $\{A\}$. Pozostałe momenty bezwładności i dewiacji są obliczane przez poddanie permutacjom indeksów x , y i z występujących w (6.25). Twierdzenie to może być wyrażone w postaci wektorowo-macierzowej, jako

$$A_I = C_I + m [P_c^T P_c I_3 - P_c P_c^T] \quad (6.26)$$

gdzie I_3 oznacza macierz jednostkową 3×3 .

PRZYKŁAD 6.2

Znaleźć tensor bezwładności dla tego samego ciała sztywnego, jaki opisano w przykładzie 6.1, gdy tensor jest opisany w układzie współrzędnych o początku w środku masy ciała.

Mögemy zastosować twierdzenie o osiach równoległych (6.25), gdzie

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w \\ l \\ h \end{bmatrix}$$

następnie znajdujemy

$$\begin{aligned} C_{I_{zz}} &= \frac{m}{12} (w^2 + l^2) \\ C_{I_{xy}} &= 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Inne elementy są wyznaczane z warunku symetrii. Wynikowy tensor bezwładności zapisany w układzie środka masy jest następujący

$$C_I = \begin{bmatrix} \frac{m}{12} (h^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} (w^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} (l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Ponieważ wynikowa macierz jest diagonalna, osie układu $\{C\}$ muszą być głównymi osiami bezwładności ciała. ■

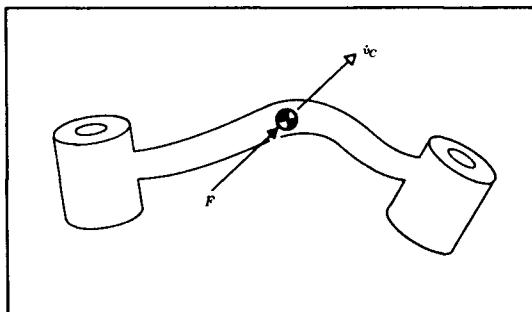
Oto pewne dodatkowe uwagi dotyczące tensorów bezwładności:

1. Jeśli dwie osie układu odniesienia tworzą płaszczyznę symetrii dla rozkładu masy ciała, to momenty dewiacji mające indeks współrzędnej, prostopadłej do płaszczyzny symetrii, będą równe zero.
2. Momenty bezwładności muszą zawsze być dodatnie. Momenty dewiacji mogą mieć dowolny znak.
3. Suma trzech momentów bezwładności jest niezmiennikiem podczas zmiany orientacji w układzie odniesienia.
4. Wartości własne tensora bezwładności są momentami głównymi ciała. Związane wektory własne pokrywają się z osiami głównymi.

Większość manipulatorów ma człony o geometrii i kompozycji raczej złożonej, tak że zastosowanie (6.17) jest trudne w praktyce. Pragmatyczną opcją obecnie nie jest obliczanie, lecz raczej mierzenie momentów bezwładności każdego członu przy użyciu przyrządów pomiarowych (np. wahadła fizycznego).

6.4. RÓWNANIA NEWTONA, RÓWNANIA EULERA

Będziemy traktować każdy człon manipulatora jako ciało sztywne. Jeśli znamy położenie środka masy i tensor bezwładności członu, to rozkład jego masy jest w pełni określony. W celu przemieszczenia członów musimy je przyśpieszać i opóźniać. Siły wymagane do wywołania takiego ruchu są funkcją pożądanego przyśpieszenia i rozkładów mas członów. Równanie Newtona wraz z jego analogiem dla ruchu obrotowego - równaniem Eulera, opisuje związek między siłami bezwładności i przyśpieszeniem.



Rys. 6.3. Siła F , działająca w środku masy ciała, wywołuje jego przyśpieszenie v_C

Równanie Newtona

Na rys. 6.3 pokazano ciało sztywne, którego środek masy jest przyśpieszany z przyśpieszeniem \dot{v}_C . W takiej sytuacji siła F , działająca w środku masy, wywołująca to przyśpieszenie, jest dana przez równanie Newtona

$$\mathbf{F} = \dot{m}\mathbf{v}_C \quad (6.29)$$

gdzie m jest całkowitą masą ciała.

Równanie Eulera

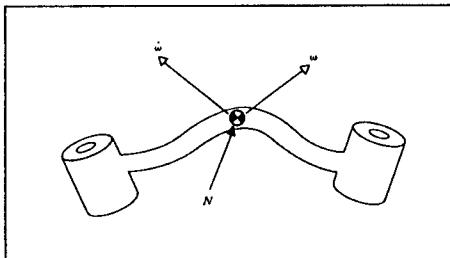
Na rys. 6.4 pokazano ciało sztywne obracające się z prędkością kątową ω oraz przyśpieszeniem kątowym $\dot{\omega}$. W takiej sytuacji moment N , który musi oddziaływać na ciało, aby wywołać ruch, jest dany przez równanie Eulera

$$\mathbf{N} = C_I \dot{\omega} + \omega \times C_I \omega \quad (6.30)$$

gdzie C_I oznacza tensor bezwładności ciała, zapisany w układzie $\{C\}$, którego początek jest umieszczony w środku masy.

6.5. ITERACYJNE SFORMUŁOWANIA DYNAMIKI NEWTONA-EULERA

Rozważamy teraz zadanie obliczania momentów, które odpowiadają zadanej trajektorii manipulatora. Przyjmujemy, że znamy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia kątowe w parach obrotowych (θ , $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$). Te informacje dotyczące kinematyki oraz informacja o rozkładzie mas robota pozwalają na obliczenie sił i momentów napędowych wymaganych do wywołania tego ruchu. Algorytm przedstawiony tutaj jest oparty na metodzie Luh, Walkera i Paula opublikowanej w [2].



Rys. 6.4. Moment N oddziaływanego na ciało powoduje, że obraca się ono z prędkością w i przyspieszeniem ω

Obliczanie prędkości i przyspieszeń za pomocą iteracji zewnętrznych

W celu obliczenia sił bezwładności działających na człony konieczne jest obliczenie prędkości kątowej i liniowej oraz przyspieszenia kątowego i liniowego środka masy dowolnego członu manipulatora w każdej zadanej chwili.

Obliczenia te będą wykonywane w sposób iteracyjny, zaczynając od członu 1, a następnie kolejno od członu do członu w kierunku na zewnątrz członu 1.

"Przenoszenie" prędkości kątowej od członu do członu było już rozpatrywane w rozdz. 5 i dane jest (dla pary obrotowej $i+1$) przez wyrażenie

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = \frac{{}^{i+1}R}{i} {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (6.31)$$

Z równania (6.15) otrzymujemy równanie opisujące przekształcenie przyspieszenia kątowego przy przejściu do następnego członu

$${}^{i+1}\ddot{\omega}_{i+1} = \frac{{}^{i+1}R}{i} {}^i\ddot{\omega}_i + \frac{{}^{i+1}R}{i} {}^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (6.32)$$

Jeśli para kinematyczna $i+1$ jest przesuwna, to wzór (6.32) upraszcza się do postaci

$${}^{i+1}\ddot{\omega}_{i+1} = \frac{{}^{i+1}R}{i} {}^i\ddot{\omega}_i \quad (6.33)$$

Liniowe przyspieszenie początku układu odniesienia dla każdego członu jest otrzymywane przez zastosowanie wzoru (6.12)

$${}^{i+1}\ddot{v}_{i+1} = \frac{{}^{i+1}R}{i} [{}^i\ddot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\ddot{v}_i] \quad (6.34)$$

który dla pary przesuwnej $i+1$ przyjmuje postać wg wzoru (6.10)

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} &= {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i + \\ &+ 2{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\dot{z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} {}^{i+1}\dot{z}_{i+1} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Wymagana jest również znajomość przyśpieszenia liniowego środka masy każdego członu, które może być również znalezione przez zastosowanie (6.12)

$${}^i\dot{v}_{Ci} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{Ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{Ci}) + {}^i\dot{v}_i \quad (6.36)$$

gdzie układ $\{C_i\}$ jest związany z dowolnym członem, ma początek umieszczony w środku masy członu oraz taką samą orientację jak układ członu $\{i\}$. W równaniu (6.36) nie jest ważny charakter pary kinematycznej i dlatego obowiązuje ono dla pary $i+1$ obrotowej lub przesuwnej.

Zauważmy, że zastosowanie równań do członu 1 jest szczególnie proste, ponieważ ${}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0$.

Sila i moment siły działające na człon

Mając obliczone przyśpieszenia liniowe i kątowe środka masy każdego członu, możemy zastosować równania Newtona-Eulera (podrozdz. 6.4) do obliczenia siły bezwładności i momentu siły względem środka masy każdego członu. Zatem mamy

$$\begin{aligned} F_i &= m\dot{v}_{Ci} \\ N_i &= C_i I \omega_i + \omega_i \times C_i I \omega_i \end{aligned} \quad (6.37)$$

przy czym układ $\{C_i\}$ ma swój początek w środku masy członu i ma taką samą orientację jak układ członu $\{i\}$.

Obliczanie sił i momentów za pomocą iteracji wewnętrznych

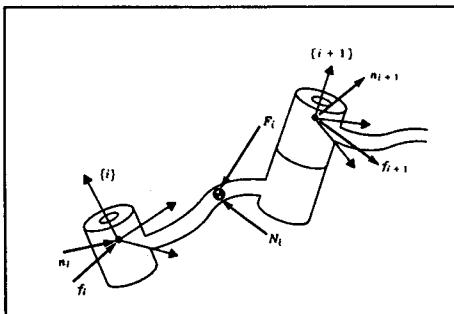
Mając obliczone siły i momenty sił działające na każdy człon, należy teraz obliczyć siły i momenty napędowe, które je zrównoważą.

Możemy to uczynić zapisując równania równowagi sił i momentów sił, traktując typowy człon jako ciało swobodne (patrz rys. 6.5). Na każdy człon działają siły i momenty sił wywierane na niego przez człony sąsiednie oraz dodatkowo siły i momenty sił bezwładności. W rozdziale 5 podaliśmy specjalne symbole dla siły i momentu wywieranego przez sąsiadni człon, które tutaj powtarzamy:

f_i - siła wywierana na człon i przez człon $i-1$,

n_i - moment wywierany na człon i przez człon $i-1$.

Dodając siły działające na człon i dochodzimy do wzoru na siłę równoważąca



Rys. 6.5. Równowaga sił działających na pojedynczy człon manipulatora, przy uwzględnieniu sił bezwładności

$${}^i \mathbf{F}_i = {}^i f_i - {}^i_{i+1} \mathbf{R} {}^{i+1} f_{i+1} \quad (6.38)$$

Dodając momenty sił względem środka masy i przyrównując je do zera, dochodzimy do równania równowagi momentu sił

$${}^i \mathbf{N}_i = {}^i n_i - {}^i n_{i+1} + (-{}^i \mathbf{P}_{Ci}) \times {}^i f_i - ({}^i \mathbf{P}_{i+1} - {}^i \mathbf{P}_{Ci}) \times {}^i f_{i+1} \quad (6.39)$$

Korzystając z zależności na siłę równoważąca (6.38) i dodając odpowiednie macierze obrotów, możemy napisać (6.39) jako

$${}^i \mathbf{N}_i = {}^i n_i - {}^i_{i+1} \mathbf{R} {}^{i+1} n_{i+1} - {}^i \mathbf{P}_{Ci} \times {}^i \mathbf{F}_i - {}^i \mathbf{P}_{i+1} \times {}^i_{i+1} \mathbf{R} {}^{i+1} f_{i+1} \quad (6.40)$$

Ostatecznie możemy przekształcić równania sił i momentów sił tak, że przyjmują one postać iteracyjnych zależności pomiędzy sąsiednimi członami

$${}^i f_i = {}^i_{i+1} \mathbf{R} {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i \mathbf{F}_i \quad (6.41)$$

$${}^i n_i = {}^i \mathbf{N}_i + {}^i_{i+1} \mathbf{R} {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i \mathbf{P}_{Ci} \times {}^i \mathbf{F}_i + {}^i \mathbf{P}_{i+1} \times {}^i_{i+1} \mathbf{R} {}^{i+1} f_{i+1} \quad (6.42)$$

Równania te są obliczane od członu do członu, zaczynając od członu n i wracając w kierunku podstawy robota. Te iteracje sił wewnętrznych są analogiczne do iteracji sił statycznych, wprowadzonych w rozdziale 5, z wyjątkiem sił bezwładności i momentów sił, które są teraz rozważane dla każdego członu.

Tak jak w przypadku statycznym, wymagane momenty napędowe są wyznaczane jako składowa \hat{Z} momentu sił oddziaływanego dowolnego członu na sąsiedni

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i \quad (6.43)$$

Dla pary przesuwnej $i+1$ mamy

$$\tau_i = {}^i f_i^T \hat{z}_i \quad (6.44)$$

gdzie użyliśmy symbolu τ dla oznaczenia siły silownika liniowego.

Zauważmy, że dla robota poruszającego się w wolnej przestrzeni ${}^{N+1}f_{N+1}$ i ${}^{N+1}n_{N+1}$ są równe zero i dlatego pierwsze zastosowanie równań dla członu n jest bardzo proste. Jeśli robot styka się z otoczeniem, to siły i momenty sił właściwe temu stykowi mogą być uwzględnione w sile równoważącej przez przyjęcie niezerowych wartości ${}^{N+1}f_{N+1}$ i ${}^{N+1}n_{N+1}$.

Iteracyjny algorytm dynamiki Newtona-Eulera

Pełny algorytm obliczeń sił i momentów napędowych dla zadanego ruchu w połączeniach ruchowych jest złożony z dwóch części. W pierwszej, prędkości i przyspieszenia członów są obliczane iteracyjnie od członu 1 aż do członu n , przy czym do każdego członu są stosowane równania Newtona-Eulera. W drugiej części, siły i momenty oddziaływań członów oraz siły i momenty napędowe w połączeniach ruchowych są obliczane rekurencyjnie od członu n do członu 1. Równania te podano poniżej dla manipulatora o wszystkich parach obrotowych.

Zewnętrzne iteracje: $i: 0 \rightarrow 5$

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i\dot{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{z}_{i+1} \quad (6.45)$$

$${}^{i+1}\ddot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot {}^i\ddot{\omega}_i + {}^{i+1}R \cdot {}^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{z}_{i+1} \quad (6.46)$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot ({}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i) \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{v}_{Ci+1} &= {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{Ci+1} + \\ &+ {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{Ci+1}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \end{aligned} \quad (6.48)$$

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}\dot{v}_{Ci+1} \quad (6.49)$$

$${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{Ci+1}I_{i+1} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{Ci+1}I_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1} \quad (6.50)$$

Wewnętrzne iteracje: $i: 6 \rightarrow 1$

$${}^i f_i = {}^i_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1} + {}^i F_i \quad (6.51)$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^i_{i+1}R \cdot {}^{i+1}n_{i+1} + {}^i P_{Ci} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1} \quad (6.52)$$

$$\tau_i = {}^i n_i^T \hat{z}_i \quad (6.53)$$

Włączenie sił grawitacji do algorytmu dynamiki

Efekt obciążenia grawitacyjnego członów może być uwzględniony bardzo prosto przez podstawienie $\dot{v}_0^0 = G$, gdzie G jest wektorem przyśpieszenia ziemskiego. Jest to równoważne stwierdzeniu, że podstawa robota jest przyśpieszana w górę z przyśpieszeniem $1G$. To fikcyjne przyśpieszenie skierowane w górę powoduje dokładnie taki sam skutek jaki mogłaby wywołać grawitacja. Zatem bez dodatkowych manipulacji obliczeniowych efekt grawitacji jest uwzględniony.

6.6. PROCEDURA ITERACYJNA A ROZWIĄZANIE W POSTACI JAWNEJ

Równania (6.45)+(6.53) podają schemat obliczeniowy sił i momentów napędowych w połączeniach ruchowych, wymaganych dla danych położen, prędkości i przyśpieszeń członów. Podobnie jak przy wyprowadzeniu równań służących do obliczenia jacobiana w rozdz.5, zależności te mogą być użyte na dwa sposoby: jako algorytm obliczeń numerycznych lub jako algorytm do symbolicznego wyprowadzenia równań analitycznych.

Wykorzystanie powyższych równań do sformułowania algorytmu obliczeń numerycznych jest zachęcające, ponieważ równania te stosuje się do każdego robota. Z uwagi na to, że tensorze bezwładności, masy członów, wektory P_{Ci} oraz macierze $\overset{i+1}{R}$ są wyspecyfikowane dla konkretnego manipulatora, zatem równania te mogą być stosowane wprost do obliczenia momentów napędowych odpowiadających dowolnemu ruchowi.

Jednakże często jesteśmy zainteresowani możliwością wglądu do struktury równań. Na przykład interesuje nas, jaka jest postać wyrazów opisujących wpływ grawitacji? Jak porównać ilościowo skutki wywołane siłą grawitacji ze skutkami wywołanymi siłami bezwładności? Aby zbadać te i inne zagadnienia, często korzystne jest napisanie równań dynamiki w jawnej (zamkniętej) postaci. Takie równania mogą być wyprowadzone przy wykorzystaniu rekurencyjnych równań Newtona-Eulera, przedstawionych symbolicznie za pomocą θ , $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$. Występuje przy tym analogia do tego, co omówiliśmy w rozdz.5 przy wyprowadzeniu jacobiana w postaci symbolicznej.

6.7. PRZYKŁAD RÓWNAŃ DYNAMIKI PODANYCH W JAWNEJ POSTACI

Tutaj wyprowadzamy równania dynamiki w jawnej postaci dla dwuczlonowego manipulatora płaskiego, pokazanego na rys.6.6. Dla uproszczenia przyjmujemy bardzo prosty rozkład mas: Wszystkie masy występują jako masy punktowe, skupione na końcu każdego członu. Masy te oznaczono: m_1 i m_2 .

Najpierw wyznaczamy wartości tych wielkości, które będą pojawiać się w iteracyjnych równaniach Newtona-Eulera. Wektory określające położenia środków mas obu członów są następujące

$${}^1\mathbf{P}_{C1} = l_1 \hat{\mathbf{x}}_1$$

$${}^2\mathbf{P}_{C2} = l_2 \hat{\mathbf{x}}_2$$

Ponieważ przyjęto masy punktowe, zatem tensor bezwładności każdego członu, zapisany względem jego środka masy, określono macierzą zerową

$$C_1 I_1 = 0$$

$$C_2 I_2 = 0$$

Nie występują siły działające na końcówkę wykonawczą, dlatego

$$\mathbf{f}_3 = 0$$

$$\mathbf{n}_3 = 0$$

Podstawa robota nie obraca się, zatem

$$\omega_0 = 0$$

$$\dot{\omega}_0 = 0$$

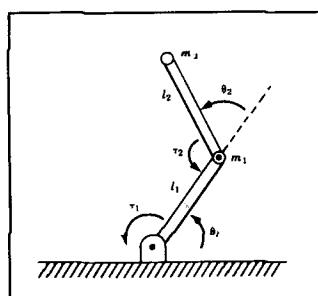
Wprowadzając siły ciężkości będziemy stosowali oznaczenia

$${}^0\mathbf{v}_0 = g \hat{\mathbf{y}}_0$$

Obrót między kolejnymi układami odniesienia członów jest dany przez

$${}^i_{i+1}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0,0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

$${}^i_i\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0,0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$



Rys. 6.6. Dwuczłonowy manipulator z masami punktowymi, skupionymi na końcach członów.

Teraz zastosujemy równania od (6.45) do (6.53).

Zewnętrzne iteracje dla członu 1 są następujące:

$${}^1\omega_1 = \dot{\theta}_1 \ {}^1\hat{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\ddot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 \ {}^1\hat{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_{C1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1F_1 = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 gs_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(6.54a-f)

Zewnętrzne iteracje dla członu 2 są następujące:

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_{C2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{F}_2 &= \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^2\mathbf{N}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.55a-f)$$

Wewnętrzne iteracje dla członu 2 są następujące:

$${}^2\mathbf{f}_2 = {}^2\mathbf{F}_2$$

$${}^2\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (6.56a-b)$$

Wewnętrzne iteracje dla członu 1 są następujące:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{f}_1 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 s_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^1\mathbf{n}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g c_1 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 g s_2 s_{12} + \\ + m_2 l_1 l_2 c_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 g c_2 c_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.57a-b)$$

Wydzielając składniki \hat{Z} z wyrażenia ${}^1\mathbf{n}_i$ znajdujemy momenty napędowe w postaci

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - \\ &- 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ \tau_2 &= m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\end{aligned}\quad (6.58a-b)$$

Równanie (6.58) daje wyrażenia dla momentów napędowych w funkcji przemieszczeń, prędkości i przyśpieszeń w parach obrotowych. Zauważmy, że te dość złożone funkcje powstały dla jednego z najprostszych manipulatorów jakiego można sobie wyobrazić. Oczywiście jawną postać równań dla manipulatora o sześciu stopniach swobody jest znacznie bardziej złożona.

6.8. STRUKTURA RÓWNAŃ DYNAMIKI MANIPULATORA

Często dogodne jest przedstawianie równań dynamiki manipulatora w postaci jednego równania, które nie zawiera szczegółów, lecz pokazuje określoną strukturę tych równań.

Równania stanu przestrzennego

Gdy dla dowolnego manipulatora zostaną wyrowadzone równania Newtona-Eulera w postaci symbolicznej, wtedy otrzymuje się

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad (6.59)$$

gdzie $M(\theta)$ oznacza macierz $n \times n$ mas manipulatora, $V(\theta, \dot{\theta})$ – wektor $n \times 1$ wyrazów zawierających siły odśrodkowe i Coriolisa, a $G(\theta)$ – wektor $n \times 1$ wyrazów zawierających siły grawitacji. Używamy określenia **równanie stanu przestrzennego**, ponieważ wyraz $V(\theta, \dot{\theta})$, pojawiający się w (6.59), zależy zarówno od położenia, jak i prędkości.

Każdy wyraz $M(\theta)$ i $G(\theta)$ jest funkcją złożoną, która zależy od θ – wektora przemieszczeń we wszystkich połączeniach ruchowych manipulatora. Każdy wyraz $V(\theta, \dot{\theta})$ jest złożoną funkcją zarówno θ , jak i $\dot{\theta}$.

Możemy oddzielić różne rodzaje wyrazów pojawiających się w równaniach dynamiki i określić macierz mas manipulatora, wektor sił odśrodkowych i Coriolisa oraz wektor sił grawitacyjnych.

PRZYKŁAD 6.3

Podać $M(\theta)$, $V(\theta, \dot{\theta})$ i $G(\theta)$ dla manipulatora omówionego w podrozdziale 6.7. Równanie (6.59) definiuje macierz mas manipulatora $M(\theta)$: jest ona złożona z tych wszystkich wyrazów, które mnożą się przez $\dot{\theta}$ i które są funkcją θ . Dlatego mamy

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 c_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Macierz mas dowolnego manipulatora jest symetryczna i dodatnio określona, a zatem jest zawsze odwracalna.

Człon prędkościowy $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ zawiera wszystkie wyrazy, które mają jakąkolwiek zależność od prędkości kątowych w parach obrotowych. Dlatego mamy

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

Wyrażenie: $-m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$ dla składowej momentu siły odśrodkowej jest rozpoznawane jako zależne od kwadratu prędkości w parze obrotowej. Wyrażenie: $-2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$ dla składowej momentu siły Coriolisa będzie zawsze zawierać iloczyn dwóch różnych prędkości kątowych w parach obrotowych.

Człon grawitacyjny $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$ zawiera wszystkie te wyrazy, w których występuje stała grawitacji. Dlatego mamy

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Zauważmy, że człon grawitacyjny zależy tylko od wektora $\boldsymbol{\theta}$ zmiennych konfiguracyjnych, a nie zależy od jego pochodnych. ■

Równanie konfiguracji przestrzennej

Zapisując wyraz zależny od prędkości $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ w innej postaci możemy otrzymać równania dynamiki jako

$$\tau = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})[\dot{\boldsymbol{\theta}}\dot{\boldsymbol{\theta}}] + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})[\dot{\boldsymbol{\theta}}^2] + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \quad (6.63)$$

gdzie $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ oznacza macierz o wymiarach $n \times n(n-1)/2$ współczynników sił Coriolisa, $[\dot{\boldsymbol{\theta}}\dot{\boldsymbol{\theta}}]$ - wektor $n(n-1)/2 \times 1$ iloczynów prędkości kątowych par obrotowych, danych przez

$$[\dot{\boldsymbol{\theta}}\dot{\boldsymbol{\theta}}] = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \dots \dot{\theta}_{n-1} \dot{\theta}_n]^T \quad (6.64)$$

$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$ oznacza macierz $n \times n$ współczynników sił odśrodkowych, a $[\dot{\boldsymbol{\theta}}^2]$ - wektor $n \times 1$, dany przez

$$[\dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2^2 \dots \dot{\theta}_n^2]^T \quad (6.65)$$

Równanie (6.63) będziemy nazywać równaniem przestrzeni konfiguracyjnej, ponieważ macierze są funkcjami tylko położenia manipulatora [3].

Złożoność obliczeniowa równań dynamiki w tej postaci jest widoczna przy obliczeniach różnych parametrów, które są funkcją tylko położenia manipulatora Θ . Jest to ważne z punktu widzenia zastosowań (takich jak komputerowe sterowanie manipulatora), w których równania dynamiki muszą być dostosowane do tego jak manipulator porusza się. (Równanie (6.63) ma postać, w której parametry są funkcjami tylko przemieszczeń w połączeniach ruchowych i mogą być uaktualnione tak szybko, jak szybko manipulator zmienia swoją konfigurację). Będziemy rozważać tę postać ponownie przy rozpatrywaniu zadania sterowania manipulatora w rozdz. 10.

PRZYKŁAD 6.4

Dane są macierze $B(\Theta)$ i $C(\Theta)$, wzięte z równania (6.63) i wyznaczone dla manipulatora opisanego w podrozdziale 6.7. Dla tego prostego dwuczłonowego manipulatora mamy

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] \\ \dot{\Theta}^2 &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.66)$$

Stąd widzimy, że

$$B(\Theta) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

$$C(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

6.9. FORMALIZM LAGRANGE'A W ZAGADNIENIACH DYNAMIKI MANIPULATORA

Podejście Newtona-Eulera jest oparte na elementarnych równaniach dynamiki (6.29) i (6.30) oraz na analizie sił i momentów sił oddziaływań między członami. Jako metodę alternatywną do metody Newtona-Eulera, w tym podrozdziale omówimy zwięzle formalizm Lagrange'a. Podczas gdy formalizm Newtona-Eulera mógłby być określony jako "równowaga sił" w zastosowaniu do dynamiki, to formalizm Lagrange'a jest podejściem "opartym na energii". Oczywiście dla tego samego manipulatora oba podejścia będą dawały te same równania ruchu. Nasze omówienie dynamiki w ujęciu Lagrange'a będzie zwięzle i raczej wyspecjalizowane dla przypadku szeregowego łańcucha kinematycznego manipulatora o członach sztywnych. W przypadkach bardziej kompletnych i ogólnych patrz [4].

Zaczynamy od podania wyrażenia na energię kinetyczną manipulatora. Energia kinetyczna k_i członu i -tego może być wyrażona jako

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_i^T C_i I_i \dot{\omega}_i \quad (6.69)$$

gdzie pierwszy wyraz opisuje energię kinetyczną zależną od prędkości liniowej środka masy członu, a drugi wyraz - energię kinetyczną zależną od prędkości katowej członu. Całkowita energia kinetyczna manipulatora jest sumą energii kinetycznej poszczególnych członów, tzn.

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \quad (6.70)$$

Ponieważ v_{Ci} i $\dot{\omega}_i$ w (6.69) są funkcjami Θ i $\dot{\Theta}$, widzimy, że energia kinetyczna manipulatora może być opisana przez wzór skalarny jako funkcja przemieszczeń i prędkości w połączeniach ruchowych $k(\Theta, \dot{\Theta})$. W rzeczywistości energia kinetyczna manipulatora jest dana przez

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T M(\Theta) \dot{\Theta} \quad (6.71)$$

gdzie $M(\Theta)$ oznacza macierz $n \times n$ mas manipulatora, wprowadzoną w podrozdz. 6.8. Wyrażenie w postaci (6.71) jest znane jako **forma kwadratowa** [5], ponieważ po rozwinięciu wynikowego równania skalarowego jest złożone jedynie z wyrazów, które zależą od $\dot{\Theta}_i$ w kwadracie. Ponadto, ponieważ całkowita energia kinetyczna musi zawsze być dodatnia, macierz mas manipulatora musi być macierzą dodatnio określona. Macierze dodatnio określone mają tę własność, że ich postać kwadratowa jest zawsze skalarem dodatnim. Równanie (6.71) może być traktowane jako analogiczne do znanego wyrażenia na energię kinetyczną masy punktowej

$$k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (6.72)$$

Fakt, że macierz mas manipulatora musi być dodatnio określona, jest analogiczny do faktu, że masa musi być zawsze dodatnia.

Energia potencjalna u_i członu i -tego może być wyrażona jako

$$u_i = -m_i {}^0 g^T {}^0 P_{Ci} + u_{refi} \quad (6.73)$$

gdzie ${}^0 g$ oznacza wektor sił grawitacji, ${}^0 P_{Ci}$ - wektor położenia środka masy członu i -tego, a u_{refi} - stałą znajdująą tak, że minimalna wartość u_i wynosi zero.¹⁾ Całkowita energia potencjalna zmagazynowana w manipulatorze jest sumą energii potencjalnych poszczególnych członów, to znaczy

¹⁾ Obecnie, ponieważ w dynamice będą występować tylko pochodne cząstkowe energii potencjalnej względem Θ , ta wartość jest dowolna. Odpowiada to określaniu energii potencjalnej względem dowolnie odniesionej wysokości zerowej.

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \quad (6.74)$$

Ponieważ ${}^0P_{C_1}$ w (6.73) są funkcjami θ , widzimy, że energia potencjalna manipulatora może być opisana za pomocą wzoru skalarnego w postaci funkcji współrzędnych konfiguracyjnych $u(\theta)$.

Formalizm dynamiki Lagrange'a dostarcza sposobu wyrowadzania równań ruchu z funkcji skalarnej zwanej lagrangianem, która jest określona jako różnica między energią kinetyczną i potencjalną układu mechanicznego. W naszym zapisie lagrangianem manipulatora jest

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = k(\theta, \dot{\theta}) - u(\theta) \quad (6.75)$$

Równania ruchu dla manipulatora są dane przez

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \tau \quad (6.76)$$

gdzie τ oznacza wektor $n \times 1$ sił i momentów napędowych. W przypadku manipulatora równanie to przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = \tau \quad (6.77)$$

gdzie argumenty $k(\cdot)$ i $u(\cdot)$ były odrzucone dla zwięzości zapisu.

PRZYKŁAD 6.5

Tensory bezwładności członów manipulatora typu RP, pokazanego na rys. 6.7, są następujące

$$C_1 I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

$$C_2 I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$

a całkowite masy są równe m_1 i m_2 . Jak pokazano na rys. 6.7, środek masy członu 1 jest umieszczony w odległości l_1 od osi pary obrotowej 1, a środek masy członu 2 jest położony w zmiennej odległości d_2 od osi tej pary. Zastosuj równania dynamiki Lagrange'a do wyznaczenia równań ruchu tego manipulatora.

Stosując wyrażenie (6.69), energię kinetyczną członu 1 zapiszemy w postaci

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz1} \dot{\theta}_1^2 \quad (6.79)$$

a energię kinetyczną członu 2 jako

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 (d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{d}_2^2) + \frac{1}{2} I_{zz2} \dot{\theta}_1^2 \quad (6.80)$$

Zatem łączna energia kinetyczna jest dana wyrażeniem

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 \quad (6.81)$$

Stosując (6.73) zapiszemy energię potencjalną członu 1 jako

$$u_1 = m_1 l_1 g \sin(\theta_1) + m_1 l_1 g \quad (6.82)$$

a energię potencjalną członu 2 jako

$$u_2 = m_2 g d_2 \sin(\theta_1) + m_2 g d_{2max} \quad (6.83)$$

gdzie d_{2max} oznacza maksymalne przesunięcie w parze przesuwnej 2. Zatem łączna energia potencjalna jest dana przez

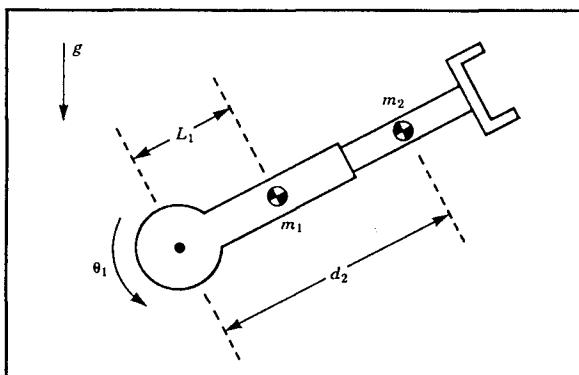
$$u(\Theta) = g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \sin(\theta_1) + m_1 l_1 g + m_2 g d_{2max} \quad (6.84)$$

Następnie obliczamy pochodne cząstkowe, tak jak wynika to z (6.77)

$$\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1 \\ m_2 \dot{d}_2 \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (6.86)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \cos(\theta_1) \\ g m_2 \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (6.87)$$



Rys. 6.7. Manipulator typu RP z przykładu 6.5

Ostatecznie podstawiając do (6.77) mamy

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\ &+ (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) \\ \tau_2 &= m_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin(\theta_1)\end{aligned}\quad (6.88)$$

Z (6.88) wynika, że

$$\begin{aligned}M(\Theta) &= \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ V(\Theta, \dot{\Theta}) &= \begin{bmatrix} 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \\ G(\Theta) &= \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) \\ m_2 g \sin(\theta_1) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6.89)$$

■

6.10. SFORMUŁOWANIE DYNAMIKI MANIPULATORA WE WSPÓŁRZĘDNYCH KARTEZJAŃSKICH

Nasze równania dynamiki były wyrowadzone w zależności od położenia i pochodnych względem czasu przemieszczeń w połączeniach ruchowych manipulatora lub w postaci ogólnej w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (6.90)$$

Rozwineliśmy to równanie w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, ponieważ mogliśmy wykorzystać szeregową postać łańcucha kinematycznego manipulatora przy wyrowadzaniu równań. W niniejszym podrozdziale rozpatrzymy sformułowania równań dynamiki odnoszące się do przyśpieszenia członu roboczego, wyrażonego w przestrzeni kartezjańskiej w zależności od sił i momentów sił działających na ten człon.

Równanie stanu wyrażone w przestrzeni kartezjańskiej

Jak wyjaśniono w rozdz. 10 i 11, może okazać się celowe wyrażenie dynamiki manipulatora względem zmiennych kartezjańskich w postaci ogólnej [6]

$$\mathcal{F} = M_x(\Theta) \ddot{x} + V_x(\Theta, \dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \quad (6.91)$$

gdzie \mathcal{F} oznacza wektor "siła-moment siły" działający na człon roboczy robota, a x – odpowiedni wektor kartezjański, przedstawiający pozycję i orientację chwytaka [7]. Analogicznie do wielkości określonych w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, $M_x(\Theta)$ jest kartezjańską macierzą masy,

$\mathbf{v}_x(\theta, \dot{\theta})$ – wektorem prędkości wyrażonym w przestrzeni kartezjańskiej, a $\mathbf{G}_x(\theta)$ – wektorem sił grawitacji wyrażonym w przestrzeni kartezjańskiej. Zauważmy, że fikcyjne siły \mathcal{F} działające na człon roboczy, mogłyby w rzeczywistości wynikać z działania sił i momentów napędowych w połączeniach ruchowych według zależności

$$\tau = J^T(\theta) \mathcal{F} \quad (6.92)$$

gdzie Jacobian $J(\theta)$ jest zapisany w tym samym układzie co \mathcal{F} i \ddot{x} , zwykle w układzie narzędziowym $\{T\}$.

Mogliśmy wyprowadzić zależność między wyrazami (6.90) i (6.91) w następujący sposób. Wpierw mnożymy (6.90) przez odwrotność Jacobianu transponowanego w celu uzyskania

$$J^{-T} \tau = J^{-T} M(\theta) \ddot{\theta} + J^{-T} V(\theta, \dot{\theta}) + J^{-T} G(\theta) \quad (6.93)$$

lub

$$\mathcal{F} = J^{-T} M(\theta) \ddot{\theta} + J^{-T} V(\theta, \dot{\theta}) + J^{-T} G(\theta) \quad (6.94)$$

Następnie wyprowadzamy zależność między współrzędnymi konfiguracyjnymi i przyśpieszeniem kartezjańskim, zaczynając od definicji Jacobianu

$$\ddot{x} = J \dot{\theta} \quad (6.95)$$

i różniczkując ją, aby otrzymać

$$\ddot{x} = J \dot{\theta} + J \ddot{\theta} \quad (6.96)$$

Rozwiązanie równania (6.96) względem przyśpieszeń w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych prowadzi do

$$\ddot{\theta} = J^{-1} \ddot{x} - J^{-1} J \dot{\theta} \quad (6.97)$$

Podstawiając (6.97) do (6.94) otrzymujemy zależność

$$\mathcal{F} = J^{-T} M(\theta) J^{-1} \ddot{x} - J^{-T} M(\theta) J^{-1} J \dot{\theta} + J^{-T} V(\theta, \dot{\theta}) + J^{-T} G(\theta) \quad (6.98)$$

z której wyprowadzamy wyrażenia dla wyrazów dynamiki kartezjańskiej jako

$$M_x(\theta) = J^{-T}(\theta) M(\theta) J^{-1}(\theta)$$

$$V_x(\theta, \dot{\theta}) = J^{-T}(\theta) (V(\theta, \dot{\theta}) - M(\theta) J^{-1}(\theta) J(\theta) \dot{\theta}) \quad (6.99)$$

$$G_x(\theta) = J^{-T}(\theta) G(\theta)$$

Jacobian występujący w równaniach (6.99) jest napisany w tym samym układzie co \mathcal{F} i \ddot{x} w równaniu (6.91), chociaż wybór układu odniesienia jest dowolny.²⁾ Zauważmy, że gdy manipulator zbliża się do położenia osobliwego, pewne wielkości wyrażone we współrzędnych kartezjańskich stają się nieskończoność duże.

²⁾ Określony wybór może ułatwić obliczenia.

PRZYKŁAD 6.6

Wyprowadź w przestrzeni kartezjańskiej równania dynamiki dla dwuczłonowego płaskiego ramienia z podrozdziału 6.7. Napisz równania dynamiki w zależności od układu związanego z końcem drugiego członu.

Dla tego manipulatora otrzymaliśmy już (w podrozdz. 6.7) równania dynamiki i Jacobian (równanie (5.66)), które tutaj powtórzymy

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (6.100)$$

Wpierw obliczamy odwrotność Jacobianu

$$J^{-1}(\theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 & 0 \\ -l_1 c_2 - l_2 & l_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (6.101)$$

oraz pochodną Jacobianu względem czasu

$$J(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} l_1 c_2 \dot{\theta}_2 & 0 \\ -l_1 s_2 \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.102)$$

Wykorzystując (6.99) i wyniki podrozdziału 6.7 otrzymujemy

$$\begin{aligned} M_x(\theta) &= \begin{bmatrix} m_2 + m_1/s_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ v_x(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} -(m_2 l_1 c_2 + m_2 l_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 - (2m_2 l_2 + m_2 l_1 c_2 + m_1 l_1 c_2/s_2^2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + l_1 m_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ G_x(\theta) &= \begin{bmatrix} m_1 g c_1/s_2 + m_2 g s_{12} \\ m_2 g c_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.103)$$

Gdy $s_2 = 0$, manipulator jest w pozycji osobliwej i pewne wyrazy równań dynamiki zmierzają do nieskończoności. Na przykład gdy $\theta_2 = 0$ (ramię jest wyprostowane), to kartezjańska wartość masy zastępczej członu roboczego manipulatora zmierza do nieskończoności w kierunku \hat{x}_2 układu odniesienia czlonu 2. Na ogół w konfiguracji osobliwej jest pewien kierunek, kierunek osobliwy, w którym ruch jest niemożliwy, natomiast ruch w podprzestrzeni "ortogonalnej" do tego kierunku jest możliwy [8]. ■

Równanie siły i momentu napędowego we współrzędnych konfiguracyjnych

Łącząc równania (6.91) i (6.92), możemy napisać wyrażenia na równoważne siły i momenty napędowe, wyrażone we współrzędnych kartezjańskich

$$\tau = J^T(\theta) \left(M_x(\theta) \ddot{x} + v_x(\theta, \dot{\theta}) + C_x(\theta) \right) \quad (6.104)$$

Jest to przydatne przy zapisaniu powyższego równania w postaci

$$\tau = J^T(\theta) M_x(\theta) \ddot{x} + B_x(\theta) [\dot{\theta}] + C_x(\theta) [\dot{\theta}^2] + G(\theta) \quad (6.105)$$

gdzie $B_x(\theta)$ oznacza macierz o wymiarach $n \times n(n-1)/2$ współczynników sił Coriolisa, $[\dot{\theta}]$ - wektor $n(n-1)/2 \times 1$ iloczynów prędkości kątowych w parach obrotowych, dany przez

$$[\dot{\theta}] = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \dots \dot{\theta}_{n-1} \dot{\theta}_n]^T \quad (6.106)$$

$C_x(\theta)$ oznacza macierz $n \times n$ współczynników sił odśrodkowych, a $[\dot{\theta}^2]$ - wektor $n \times 1$, dany przez

$$[\dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2^2 \dots \dot{\theta}_n^2] \quad (6.107)$$

Zauważmy, że wyrażenie na $G(\theta)$ w (6.105) jest takie samo jak w równaniu dynamiki we współrzędnych konfiguracyjnych, lecz na ogół $B_x(\theta) \neq B(\theta)$ i $C_x(\theta) \neq C(\theta)$.

PRZYKŁAD 6.7

Wyznaczyć $B_x(\theta)$ i $C_x(\theta)$ (z (6.105)) dla manipulatora z podrozdziału 6.7.

Jeśli utworzymy iloczyn $J^T(\theta) v_x(\theta, \dot{\theta})$, to znajdziemy, że

$$B_x(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 c_2 / s_2 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & \end{bmatrix} \quad (6.108)$$

oraz

$$C_x(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.109)$$

6.11. UWZGLĘDNIENIE WPŁYWU INNYCH CZYNNIKÓW FIZYCZNYCH

Należy zdawać sobie sprawę, że wyprowadzone równania dynamiki nie uwzględniają wszystkich czynników oddziałujących na manipulator. W równaniach tych uwzględniono tylko siły wynikające z praw mechaniki ciała sztywnego. Nie uwzględniono w tym postępowaniu wpływu sił tarcia. We współczesnych manipu-

pulatorach o typowych układach napędowych siły wynikające z tarcia mogą być duże, np. rzędu 25% wartości momentu napędowego manipulatora pracującego w typowych sytuacjach.

W celu uwzględnienia rzeczywistych czynników w równaniach dynamiki należy zamodelować (przynajmniej w przybliżeniu) siły tarcia. Bardzo prostym modelem sił tarcia jest **tarcie wiskotyczne**, w którym moment sił wywołanych przez tarcie w parze obrotowej jest proporcjonalny do jej prędkości kątowej. Zatem mamy

$$\tau_{\text{tarcie}} = v \dot{\theta} \quad (6.110)$$

gdzie v oznacza stałą tarcia wiskotycznego. Innym prostym modelem sił tarcia, który jest czasem używany, jest model tarcia Coulomba. Moment sił tarcia Coulomba jest stały z wyjątkiem znaku zależnego od prędkości kątowej w parze obrotowej

$$\tau_{\text{tarcie}} = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \quad (6.111)$$

gdzie c oznacza stałą tarcia Coulomba. Przyjmowane są dwie wartości tej stałej: wartość współczynnika statycznego przy $\dot{\theta} = 0$ lub – mniejsza wartość współczynnika dynamicznego przy $\dot{\theta} \neq 0$. To czy para obrotowa konkretnego manipulatora wykazuje występowanie tarcia wiskotycznego czy też Coulomba, jest skomplikowanym zagadnieniem wynikającym ze smarowania i innych czynników. Rozsądny model uwzględnia oba rodzaje tarcia, ponieważ oba są równie prawdopodobne

$$\tau_{\text{tarcie}} = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + v \dot{\theta} \quad (6.112)$$

Okazuje się, że w wielu połączeniach ruchowych manipulatora tarcie zależy również od przemieszczenia w połączeniu. Główną przyczyną tego efektu mogą być koła zębata, które nie są idealnie okrągłe, a ich mimośrodowość może powodować tarcie zmieniające się zgodnie z przemieszczeniem w połączeniu. Dlatego pełniejszy model tarcia może mieć postać

$$\tau_{\text{tarcie}} = f(\theta, \dot{\theta}) \quad (6.113)$$

Te modele tarcia są dodawane do innych wyrazów równania dynamiki, wyprowadzanych dla modelu ciała sztywnego, dając pełniejszy opis w postaci

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (6.114)$$

Występuje również wpływ innych czynników, pominiętych w tym modelu. Na przykład przyjęcie idealnej sztywności członów oznacza, że w równaniach ruchu pominięto efekty zginania (powodujące powstawanie rezonansów). Jednak te efekty są szczególnie trudne do modelowania i wychodzą poza zakres tej książki [9, 10].

6.12. SYMULACJA DYNAMIKI

W celu symulacji ruchu manipulatora wykorzystamy podany wyżej model dynamiki. Przy danych równaniach dynamiki, zapisanych w postaci jawnej, jak w (6.59), przeprowadzenie symulacji dynamiki manipulatora wymaga rozwiązania tych równań względem przyśpieszenia

$$\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta)[\tau - V(\theta, \dot{\theta}) - G(\theta) - F(\theta, \dot{\theta})] \quad (6.115)$$

Możemy tutaj zastosować jedną z wielu znanych technik całkowania numerycznego przyśpieszenia, w celu obliczenia wartości kolejnych położen i prędkości.

Mając dane warunki początkowe ruchu manipulatora, zazwyczaj w postaci

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.116)$$

całkujemy numerycznie (6.115) przy kroku Δt . Jest wiele metod całkowania numerycznego [11]. Tutaj wprowadzimy najprostszy schemat całkowania, zwany całkowaniem Eulera, który jest następujący. Zaczynając od $t = 0$ obliczmy iteracyjnie

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t+\Delta t) &= \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)\Delta t \\ \theta(t+\Delta t) &= \theta(t) + \dot{\theta}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}(t)\Delta t^2 \end{aligned} \quad (6.117)$$

gdzie wartość $\ddot{\theta}$ jest obliczana dla każdej iteracji wg (6.115). W ten sposób położenie, prędkość i przyśpieszenie manipulatora wywołane działaniem momentu wejściowego mogą być obliczone numerycznie.

Chociaż całkowanie Eulera jest prostym pomysłem, to jednak dla dokładnej i efektywnej symulacji są zalecane inne, bardziej wyrafinowane techniki całkowania [11]. Dobór kroku Δt jest często przedmiotem dyskusji. Powinien być dostatecznie mały, tak aby podzielił czasu na odpowiednio małe przyrosty dawały rozsądne przybliżenie. Z drugiej strony krok Δt powinien być wystarczająco duży, tak aby nie zwiększać czasu obliczeń symulacyjnych.

6.13. ROZWAŻANIA OBLCZENIOWE

Z uwagi na to, że równania dynamiki ruchu dla typowych manipulatorów są dość złożone, istotne jest rozważenie kwestii obliczeniowych. W tym podrozdziale ograniczymy naszą uwagę do dynamiki manipulatora we współrzędnych konfiguracyjnych. Pewne kwestie efektywności obliczeń dynamiki we współrzędnych kartezjańskich są rozpatrzone w [7, 8].

Uwaga historyczna dotycząca efektywności

Określając liczbę działań mnożenia i dodawania dla równań (6.45)+(6.53) zawartych pomiędzy pierwszym działaniem dla iteracji zewnętrznych, a ostatnim działaniem dla iteracji wewnętrznych, otrzymujemy

$$126n - 99' \text{ mnożeń}$$

$$106n - 92 \text{ dodawania}$$

gdzie n jest liczbą członów (tutaj co najmniej dwa). Zatem takie sformułowanie dynamiki manipulatora, choć wciąż złożone, jest bardziej efektywne od innych, wcześniej sugerowanych sformułowań. Pierwsze sformułowania dynamiki manipulatora [12, 13] wykonano za pomocą dość prostego opisu Lagrange'a, w którym wymagana liczba działań obliczeniowych wynosiła w przybliżeniu [14]:

$$32n^4 + 86n^3 + 171n^2 + 53n - 128 \text{ mnożeń},$$

$$25n^4 + 66n^3 + 129n^2 + 42n - 96 \text{ dodawań.}$$

Dla typowego przypadku, gdy $n = 6$, schemat iteracyjny Newtona-Eulera jest około 100 razy bardziej efektywny! Te dwa podejścia muszą oczywiście prowadzić do równoważnych równań, a obliczenia numeryczne powinny dać dokładnie te same wyniki, pomimo że struktura równań jest całkiem inną. Stąd nie można wnioskować, że podejście Lagrange'a jest nieprzydatne do wyprowadzania efektywnych równań. Porównanie to wskazuje raczej na fakt, że przy formułowaniu schematu obliczeniowego dla tego zadania trzeba zadbać o jego efektywność. Względna efektywność metod, które zaprezentowaliśmy, wynika z przyjęcia obliczeń jako iteracyjnych od członu do członu, a w szczególności zależy od tego, jak różnią się między sobą [15].

Renaud [16], Liegois i inni [17] przedstawili propozycje formułowania opisów rozkładu masy członów. Przy studialnym modelowaniu dynamiki kończyn człowieka Stepanenko i Vukobratovic [18] wykorzystali podejście "Newtona-Eulera" zamiast tradycyjnego podejścia Lagrange'a. Orin i inni [19] sprawdzili efektywność tej metody w zastosowaniu do nóg maszyn kroczących. Poprawili efektywność obliczeń przez zapisanie sił i momentów sił w lokalnych układach odniesienia członów zamiast w układzie inercjalnym. Zaznaczyli również sekwencyjny charakter obliczeń przy przechodzeniu od jednego członu do następnego i rozważyli istnienie efektywnego zapisu rekurencyjnego. Armstrong [20], a także Luh, Walker i Paul [2] szczególną uwagę zwróciли na efektywność obliczeniową i opublikowali algorytm, w którym $O(n)$ jest obliczane w całości. Uzyskali to w wyniku przyjęcia iteracyjnego (lub rekurencyjnego) sposobu obliczeń oraz wyrażenia prędkości i przyśpieszeń członów w ich lokalnych układach odniesienia. Hollerbach [14] i Silver [15] poszuki-

wali innych algorytmów obliczeniowych. Hollerbach i Sahar [21] pokazali, że przy pewnych szczególnych właściwościach geometrycznych manipulatora ten złożony algorytm obliczeniowy mógłby być jeszcze uproszczony.

Efektywność zamkniętej postaci rozwiązania w porównaniu do zapisu iteracyjnego

Chociaż postępowanie iteracyjne, omówione w tym rozdziale, daje wystarczająco skuteczny algorytm ogólnych obliczeń dynamicznych dla dowolnego manipulatora, to dla poszczególnych manipulatorów wyprowadzenie równań dynamiki w postaci zamkniętej (jawnej) zazwyczaj daje algorytmy bardziej efektywne. Rozpatrzmy dwuczłonowy płaski manipulator z podrozdziału 6.7. Podstawiając $n = 2$ do wzorów podanych w podrozdziale 6.13 znajdujemy, że obliczenia dynamiki dowolnego manipulatora dwuczłonowego wg algorytmu iteracyjnego wymagałyby 153 mnożeń i 120 dodawań. Algorytm okazał się dość prosty, ponieważ nasze ramię dwuczłonowe jest płaskie, a masy potraktowano jako punktowe. Zatem, jeśli rozpatrujemy równania dynamiki w postaci zamkniętej, wyprowadzonej w podrozdziale 6.7, to stwierdzamy, że obliczenia równań w tej postaci wymagają około 30 mnożeń i 13 dodawań. Jest to przypadek ekstremalny, ponieważ dotyczy manipulatora bardzo prostego, ale ilustruje fakt, że równania dynamiki sformułowane symbolicznie w postaci zamkniętej są prawdopodobnie najbardziej efektywne. Wielu autorów opublikowało artykuły wykazujące, że dla dowolnego manipulatora równania dynamiki, podane w postaci zamkniętej, dają bardziej efektywne schematy obliczeniowe niż nawet najlepsze schematy ogólne [22-27].

Zatem, jeśli manipulatory są zaprojektowane jako proste z punktu widzenia kinematyki i dynamiki, to mają proste równania dynamiki. Można zdefiniować manipulator jako prosty kinematycznie, jeśli niektóre (lub wszystkie) kąty skręcenia członów są równe 0 , $\pi/2$ rad lub $-\pi/2$ rad, a odsunięcia niektórych członów są równe zero. Moglibyśmy zdefiniować manipulator jako prosty dynamicznie, jeśli tensory bezwładności każdego członu są diagonalne w układzie odniesienia $\{C_i\}$.

Przeszkodą w sformułowaniu równań dynamiki w postaci jawnej jest to, że wymagają one dużego wysiłku człowieka. Jednakże zostały opracowane programy operacji symbolicznych, za pomocą których można wyprowadzić równania ruchu w zamkniętej postaci i automatycznie wydzielić wspólne wyrazy oraz wykonać podstawienia trygonometryczne [25, 28-30].

Efektywne równania dynamiki manipulatora do celów symulacji

W celu przeprowadzenia numerycznej symulacji manipulatora wykonywane są obliczenia równań dynamiki, przy czym jesteśmy zainteresowani wyznaczeniem

przyśpieszeń w połączeniach ruchowych w kolejnych położeniach manipulatora dla danych wartości prędkości i momentów napędowych. Efektywny schemat obliczeniowy powinien zawierać obliczenie równań dynamiki, rozważanych w tym rozdziale, jak również efektywne schematy rozwiązywania równań (dla przyśpieszeń w połączeniach ruchowych) i sposób wykonania całkowań numerycznych. Wiele efektywnych metod dynamicznej symulacji manipulatorów przedstawiono w [31].

Schematy pamięci

W dowolnym schemacie obliczeniowym można ustalić pewien stan równowagi między obliczeniami i wykorzystaniem pamięci komputera. W zadaniu obliczeniowym, dotyczącym równania dynamiki manipulatora (6.59), milcząco przyjęliśmy, że potrzebna wartość τ jest obliczana tak szybko jak to możliwe, aby otrzymać θ , $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$ w czasie rzeczywistym. W razie potrzeby możemy zrównoważyć ten "ciężar" obliczeniowy kosztem znacznego zwiększenia pamięci, wykonując przeliczenia zależności (6.59) dla wszystkich możliwych wartości θ , $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$ (odpowiednio skwantowanych). Zatem, gdy jakaś informacja dotycząca dynamiki manipulatora jest potrzebna, to jest znajdowana w wyniku przeszukiwania tablic.

Rozmiar wymaganej pamięci jest duży. Przyjmijmy, że każdy zakres przemieszczenia w połączeniu ruchowym jest podzielony na dziesięć wartości dyskretnych; podobnie przyjmijmy, że prędkości i przyśpieszenia są podzielone na dziesięć przedziałów każde. Dla sześcioczłonowego manipulatora liczba komórek w skwantowanej przestrzeni (θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$) wynosi $(10 \times 10 \times 10)^6$. W każdej z tych komórek znajduje się sześć wartości sił i momentów sił. Przyjmując, że każda wartość siły i momentu siły wymaga jednego wyrazu komputerowego, rozmiar tej pamięci wynosi 6×10^8 wyrazów! Zauważmy, że tablica musi być ponownie przeliczona przy zmianie wartości obciążenia, zatem w celu uwzględnienia wszystkich możliwych obciążen trzeba dodać jeszcze jeden wymiar.

Jest tutaj wiele rozwiązań pośrednich, które łączą pamięć i obliczenia różnymi sposobami. Na przykład jeśli macierze z równania (6.63) byłyby przeliczone, to tablica mogłaby mieć jeden wymiar (Θ) zamiast trzech. Po odszukaniu w tablicy wartości funkcji Θ pozostaje umiarkowana liczba obliczeń do wykonania (określonych przez (6.63)). Inne możliwe i bardziej szczegółowe parametryzacje tego zadania podano w [3, 6].

Bibliografia

- [1] I. Shames, *Engineering Mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, 1967.
- [2] J.Y.S. Luh, M.W. Walker and R.P. Paul, "On-Line Computational Scheme for

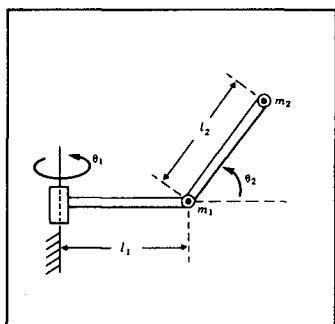
- Mechanical Manipulators", *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1980.
- [3] M.Raibert, "Mechanical Arm Control Using a State Space Memory", ASME paper MS77-750, 1977.
- [4] K.R.Symon, *Mechanics*, 3rd edition Addison-Wesley, Reading, Mass. 1971.
- [5] B.Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1969.
- [6] O.Khatib, "Commande Dynamique dans L'Espace Operationnel des Robots Manipulateurs en Presence d'Obstacles", These de Docteur-Ingenieur. Ecole Nationale Supérieure de l'Aeronautique et de L'Espace (ENSAE). Toulouse.
- [7] O.Khatib, "Dynamic Control of Manipulators in Operational Space", Sixth IFTOMM Congress on Theory of Machines and Mechanisms, New Delhi, December 15-20, 1983.
- [8] O.Khatib, "The Operational Space Formulation in Robot Manipulator Control", 15th ISIR, Tokyo, September 11-13, 1985.
- [9] E.Schmitz, "Experiments on the End-Point Position Control of a Very Flexible One-Link Manipulator", Unpublished Ph.D.Thesis, Departament of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, SUDAAR No.547, June 1985.
- [10] W.Book, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms", *International Journal of Robotics Research*, Vol.3, No.3, 1984.
- [11] S.Conte, C.DeBoor, *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1972.
- [12] J.Uicker, " On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using 4x4 Matrices", Unpublished Ph.D. dissertation, Northwestern University, Evanston, Ill., 1965.
- [13] J.Uicker, "Dynamic Behaviour of Spatial Linkages". *ASME Mechanisms*, Vol.5, No.68, str.1-15.
- [14] J.M.Hollerbach, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity", in *Robot Motion*, M.Brady et al. Editors, MIT Press, 1983.
- [15] W.Silver, "On the Equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators", *International Journal of Robotics Research*, Vol.1, No.2, str.60-70.
- [16] M.Renaud, "Contribution à l'Etude de la Modélisation et de la Commande des Systèmes Mécaniques Articulés", Thèse de Docteur Ingénieur. Université Paul Sabatier, Toulouse, December 1975.
- [17] A.Liegeois, W.Khalil, J.M.Dumas, M.Renaud, "Mathematical and Models of Interconnected Mechanical Systems", Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators, Poland 1976.

- [18] Y. Stepanenko i M. Vukobratovic, "Dynamics of Articulated Open-Chain Active Mechanisms", *Math-Biosciences* Vol. 28, 1976, str. 137-170.
- [19] D.E. Orin et al. "Kinematic and Kinetic Analysis of Open-Chain Linkages Utilizing Newton-Euler Methods", *Math-Biosciences* Vol. 43, 1979, str. 107-130.
- [20] W.W. Armstrong, "Recursive Solution to the Equations of Motion of an N-Link Manipulator", *Proceedings of the 5th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Montreal, July 1979.
- [21] J.M. Hollerbach i G. Sahar, "Wrist-Partitioned Inverse Accelerations and Manipulator Dynamics", MIT AI Memo No. 717, April 1983.
- [22] T.K. Kanade, P.K. Khosla, N. Tanaka, "Real-Time Control of the CMU Direct Drive Arm II Using Customized Inverse Dynamics", *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, Dec. 1984.
- [23] A. Izaguirre i R.P. Paul, "Computation of the Inertial and Gravitational Coefficients of the Dynamic Equations for a Robot Manipulator with a Load", *Proceedings of the 1985 International Conference on Robotics and Automation*, str. 1024-1032, St Louis, March 1985.
- [24] B. Armstrong, O. Khatib, J. Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm", *Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, April 1986, str. 510-518.
- [25] J.W. Burdick, "An Algorithm for Generation of Efficient Manipulator Dynamic Equations", *Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, April 7-11, 1986, str. 212-218.
- [26] T.R. Kane, D.A. Levinson, "The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics", *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 2, No. 3, Fall 1983, str. 3-20.
- [27] M. Renaud, "An Efficient Iterative Analytical Procedure for Obtaining a Robot Manipulator Dynamic Model", *First International Symposium of Robotics Research*, N.H., August 1983.
- [28] W. Schiehlen, "Computer Generation of Equations of Motion" in *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, E.J. Haug, Editor, Springer-Verlag, 1984.
- [29] G. Cesareo, F. Nicolo, S. Nicosia, "DYMIR: A Code for Generating Dynamic Model of Robots", in *Advanced Software in Robotics*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1984.
- [30] J. Murray, C. Neumann, "ARM: An Algebraic Robot Dynamic Modelling Program", *IEEE International Conference on Robotics*, Atlanta, March 1984.

- [31] M.Walker, D.Orin, "Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms", Trans. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 104, 1982.

Ćwiczenia

- 6.1. [12] Znaleźć tensor bewładności prostego jednorodnego walca względem układu o początku w środku masy ciała.
- 6.2. [32] Podać równania dynamiki manipulatora dwuczłonowego z podrozdziału 6.7, jeśli każdy człon jest modelowany jako prostopadłościenna bryła jednorodna. Każdy człon ma wymiary l_i , w_i i h_i oraz masę całkowitą m_i .
- 6.3. [43] Podać równania dynamiki dla trójczłonowego manipulatora z rozdziału 3, ćwicz. 3.3. Rozpatrywać każdy człon jako prostopadłościenną bryłę jednorodną o wymiarach l_i , w_i , h_i oraz całkowitej masie m_i .
- 6.4. [13] Napisać układ równań, odpowiadających równaniom (6.45)+(6.53), w przypadku mechanizmu z parami przesuwnymi.
- 6.5. [30] Podać równania dynamiczne dla dwuczłonowego przestrzennego manipulatora, pokazanego na rys. 6.8. Przyjąć, że wszystkie masy członów mogą być rozpatrywane jako masy punktowe, skupione na końcach członów. Wartości mas wynoszą m_1 i m_2 , a długości członów l_1 i l_2 . Manipulator ten jest podobny do pierwszych dwóch członów ramienia z ćwiczenia 3.3. Ponadto przyjąć, że w każdej parze obrotowej występuje tarcie wiskotyczne o współczynnikach v_1 i v_2 .
- 6.6. [32] Wyprowadzić równania dynamiki dla manipulatora dwuczłonowego płaskiego z podrozdziału 6.7, określone w przestrzeni kartezjańskiej względem układu bazowego. Wskazówka: Patrz przykład 6.5, lecz wykorzystaj Jacobian zapisany w układzie bazowym.



Rys. 6.8. Dwuczłonowy manipulator z masami punktowymi skupionymi w końcach członów

- 6.7. [18] Ile miejsca w pamięci komputera byłoby potrzeba do zapisania w postaci tablicy równań dynamiki dowolnego manipulatora trójczłonowego? Podziel zakresy ruchów w połączeniach na 16 przedziałów. Zrób wszystkie potrzebne założenia.
- 6.8. [32] Wyprowadź równania dynamiki dla dwuczłonowego manipulatora pokazanego na rys. 4.6. Tensor bezwładności członu 1 jest dany przez

$$C_1 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

Przyjąć, że cała masa członu 2 (m_2) jest skupiona w punkcie przy chwytaku. Przyjąć, że siła grawitacji jest skierowana w dół (przeciwne do osi \hat{Z}_1).

- 6.9. [37] Wyprowadzić równania dynamiki dla manipulatora trójczłonowego z jedną parą przesuwną, pokazanego na rys. 3.9. Tensor bezwładności członu 1 jest dany przez

$$C_1 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

Masa członu 2 jest skupiona w początku jego układu. Tensor bezwładności członu 3 jest dany przez

$$C_3 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix}$$

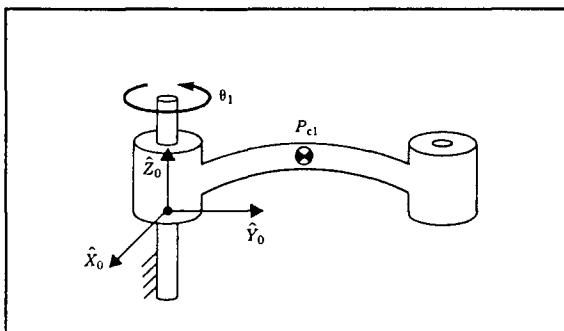
Przyjąć, że siła grawitacji jest skierowana przeciwnie do \hat{Z}_1 , a tarcie wiskotyczne o wartość v występuje w każdym połączeniu.

- 6.10. [35] Wyprowadzić równania dynamiki w przestrzeni kartezjańskiej dla manipulatora z ćwicz.6.8. Napisać równania w układzie {2}.

- 6.11. [20] Dla pewnego manipulatora jednoczłonowego przyjęto

$$C_1 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

przy czym jest to bezwładność samego członu. Jeśli wirnik silnika ma moment bezwładności I_m , a przełożenie przekładni wynosi 100, to jaki jest całkowity moment bezwładności zredukowany na wał silnika [1]?



Rys. 6.9. Jednoczłonowy manipulator z ćwiczenia 6.12

6.12. [20] Całkowita masa "manipulatora" o jednym stopniu swobody, pokazanego na rys. 6.9, wynosi $m = 1$, położenie środka masy określa wektor

$${}^1\mathbf{P}_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a tensor bezwładności

$$C_{I_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Począwszy od położenia spoczynkowego przy $t = 0$ kąt konfiguracyjny θ_1 zmienia się wg zależności funkcyjnej

$$\theta_1(t) = bt + ct^2$$

w radianach. Podać przyśpieszenie kątowe członu i liniowe przyśpieszenie środka masy w układzie $\{1\}$ jako funkcję czasu.

6.13. [40] Wyznaczyć równania dynamiki w układzie kartezjańskim dla dwuczłonowego manipulatora przestrzennego, pokazanego na rys. 6.8. Przyjąć, że wszystkie masy członów mogą być rozpatrywane jako masy punktowe skupione w końcu każdego członu. Wartości mas oznaczono m_1 i m_2 , a długości członów l_1 i l_2 . Manipulator ten jest podobny do pierwszych dwóch członów ramienia z ćwicz.3.3. Przyjąć także, że w każdym połączeniu występuje tarcie wiskotyczne o współczynnikach v_1 i v_2 . Zapisać równania dynamiki w układzie odniesienia $\{3\}$ członu końcowego manipulatora zorientowanego tak samo jak układ członu $\{2\}$.

6.14. [18] Równania, podane poniżej, były wyprowadzone dla manipulatora typu RP o dwóch stopniach swobody. Jednak pewne wyrazy oczywiście nie są poprawne. Wskaż niepoprawne wyrazy

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_1(d_1^2 + d_2^2)\ddot{\theta}_1 + m_2d_2^2\ddot{\theta}_1 + 2m_2d_2\dot{d}_2\dot{\theta}_1 + \\ &+ g\cos(\theta_1)[m_1(d_1 + d_2\dot{\theta}_1) + m_2(d_2 + \dot{d}_2)] \\ \tau_2 &= m_1\dot{d}_2\ddot{\theta}_1 + m_2\ddot{d}_2 - m_1d_1\dot{d}_2 - m_2d_2\dot{\theta}^2 + m_2(d_2 + 1)g\sin(\theta_1)\end{aligned}$$

6.15. [28] Wyprowadzić równania dynamiki manipulatora RP z przykładu 6.5 stosując procedurę Newtona-Eulera zamiast techniki Lagrange'a.

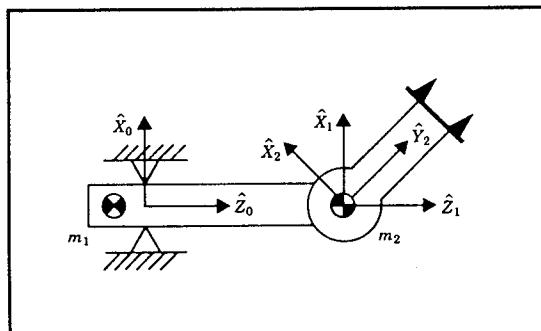
6.16. [25] Wyprowadzić równania ruchu dla manipulatora typu PR, pokazanego na rys. 6.10. Pominąć tarcie, uwzględnić siły grawitacji (tutaj \hat{x}_0 jest skierowane do góry). Tensory bezwładności członów są diagonalne z momentami I_{xx1} , I_{yy1} , I_{zz1} oraz I_{xx2} , I_{yy2} , I_{zz2} . Środki mas każdego członu są dane przez wektory

$${}^1\mathbf{P}_{C1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{P}_{C2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.17. [40] Wyrazy odnoszące się do prędkości, występujące w równaniu dynamiki manipulatora, mogą być zapisane jako iloczyn macierzowo-wektorowy, tj.

$$\mathbf{v}(\theta, \dot{\theta}) = \mathbf{v}_m(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$$



Rys. 6.10. Manipulator PR z ćwiczenia 6.16

gdzie wskaźnik m postawiono dla "postaci macierzowej". Pokazać, że istnieje zapisana poniżej interesująca zależność między pochodną macierzy mas manipulatora względem czasu i $V_m(\cdot)$

$$\dot{M}(\theta) = 2V_m(\theta, \dot{\theta}) - S$$

gdzie S oznacza pewną macierz skośnosymetryczną.

6.18. [15] Podać kilka własności, które powinien mieć sensowny model tarcia (tj. wyraz $F(\theta, \dot{\theta})$ w (6.114)).

6.19. [28] Wykonać ćwicz. 6.5 stosując równania Lagrange'a.

6.20. [28] Wyprowadzić równania dynamiki manipulatora o dwóch stopniach swobody z podrozdz. 6.7 stosując formalizm Lagrange'a.

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 6)

1. Wyprowadzić równania ruchu dla manipulatora trójczłonowego (z przykładu 3.3), czyli rozwiniąć podrozdz. 6.7 dla przypadku manipulatora trójczłonowego. Dla manipulatora podano następujące wartości liczbowe:

$$l_1 = l_2 = 0,5 \text{ m},$$

$$m_1 = 4,6 \text{ kg},$$

$$m_2 = 2,3 \text{ kg},$$

$$m_3 = 1,0 \text{ kg},$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Dla pierwszych dwóch członów przyjmujemy, że masa jest skupiona w końcu członu. Dla członu 3 przyjmujemy, że środek masy jest umieszczony w początku układu {3}, tj. ulokowany w końcu członu. Tensor bezwładności członu 3 jest równy

$$C_{I_1} = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Wektory, określające położenie środka masy każdego członu względem odpowiedniego układu odniesienia członu, są następujące

$${}^1P_{C1} = l_1 \hat{x}_1$$

$${}^2P_{C2} = l_2 \hat{x}_2$$

$${}^3P_{C3} = 0$$

2. Napisać program symulacyjny dla trójczłonowego manipulatora. Prosta procedura całkowania Eulera jest wystarczająca do wykonania całkowania numerycznego (patrz podrozdz. 6.12). Dla zachowania modułowej struktury twojego programu pomocne może być zdefiniowanie procedury:

```
Procedure UPDATE(VAR tau: vec3; VAR period: real; VAR theta,
thetadot: vec3);
```

gdzie "tau" jest wektorem sterujących momentów przegubowych do manipulatora (zawsze zero w tym przykładzie), "period" jest przyrostem czasu symulacji (w sek.), "theta" i "thetadot" opisują stan manipulatora. Theta i thetadot są aktualniane o "period" każdorazowo, przy wywołaniu procedury UPDATE. Zauważ, że "period" jest zwykle dłuższy od kroku całkowania Δt , użytego w całkowaniu numerycznym. Na przykład, mimo że krok numerycznego całkowania wynosi 0,001, to możesz drukować pozycję i prędkość manipulatora tylko co 0,1 s.

Aby sprawdzić twój program symulacyjny, przyjmij sterujące momenty napędowe równe zeru (przez cały czas) i wykonaj następujące testy:

a) Przyjmij początkową pozycję manipulatora

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [-90 \ 0 \ 0]$$

Wykonaj symulację w czasie kilku sekund. Czy ruch manipulatora jest taki, jakiego oczekujesz?

b) Przyjmij początkową pozycję manipulatora

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [30 \ 30 \ 10]$$

Wykonaj symulację w czasie kilku sekund. Czy ruch manipulatora jest taki, jakiego oczekujesz?

c) Wprowadź pewne tarcie wiskotyczne do każdego połączenia symulowanego manipulatora przez dodanie wyrazu do opisu dynamiki ruchu w tym połączeniu w postaci $\tau_f = v\dot{\theta}$, gdzie $v = 5,0 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ dla każdego połączenia. Powtórz test (b). Czy ruch jest taki, jakiego oczekujesz?

GENEROWANIE TRAJEKTORII

7.1. WPROWADZENIE

W tym rozdziale skoncentrujemy się na metodach obliczeń trajektorii w przestrzeni wielowymiarowej dla opisanego, pożądanego ruchu manipulatora. **Trajektoria** dotyczy przebiegów czasowych przemieszczeń, prędkości i przyśpieszeń ruchu dla każdego stopnia swobody.

Ten problem zawiera również zagadnienie udziału operatora w zadawaniu trajektorii lub toru w przestrzeni. Aby ułatwić użytkownikowi robota przygotowanie opisu ruchu manipulatora dla określonego zadania, nie należy zmuszać go do wpisywania skomplikowanych funkcji przestrzeni i czasu. Należy raczej ograniczyć specyfikację trajektorii do prostych opisów pożądanego ruchu, a ich szczegóły pozostawić systemowi. Na przykład użytkownik może określić pożądane położenie celu i orientację członu roboczego, a system sam decyduje o dokładnym kształcie toru, okresie ruchu, profilu prędkości i innych szczegółach.

Ponadto jesteśmy zainteresowani tym, jak trajektorie po ich zaplanowaniu są zapisywane w pamięci komputera. Rozważymy też zadanie bieżącego obliczania trajektorii na podstawie jej opisu, tzw. *generowanie trajektorii*.

Generowanie odbywa się w czasie rzeczywistym i w najbardziej ogólnym przypadku obliczane są pozycja, prędkość i przyśpieszenie. Ponieważ trajektorie te są obliczane za pomocą komputera, punkty trajektorii są obliczane z pewną prędkością zwaną częstotliwością zadawania trajektorii. W typowych układach manipulatorów częstość ta leży w przedziale od 20 do 200 Hz.

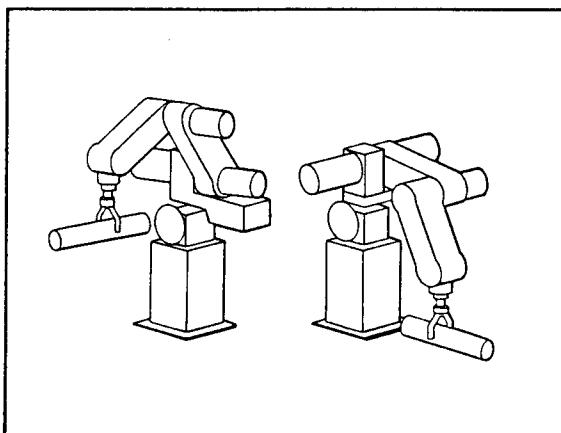
7.2. OGÓLNE ROZWAŻANIA DOTYCZĄCE OPISU I GENEROWANIA TRAJEKTORII

Będziemy tutaj rozważać przede wszystkim ruchy manipulatora jako ruchy układu narzędzia $\{T\}$ względem układu stanowiska $\{S\}$. Jest to taki sam sposób, w jaki postępowałby ewentualny użytkownik układu. Projektowanie opisu toru i układu generującego zgodnie z tym postępowaniem jest korzystne.

Gdy zadajemy tory jako ruchy układu narzędzia względem układu stanowiska, oddzielamy opis ruchu od konkretnego robota, jego członu roboczego lub części obrabianych. Wynika to z pewnej modułowości i pozwala na wykorzystanie tego samego opisu toru w różnych manipulatorach lub w tym samym manipulatorze, lecz z narzędziem o innej wielkości. Ponadto możemy wyspecyfikować i zaplanować ruchy względem ruchomego stanowiska roboczego (może to być przenośnik taśmowy), planując ruchy względem układu stanowiska i powodując, że opis układu $\{S\}$ będzie zmieniać się w czasie rzeczywistym.

Jak pokazano na rys. 7.1, podstawowe zadanie polega na przemieszczeniu manipulatora z jego położenia początkowego do pewnego pożdanego położenia końcowego. Oznacza to, że chcemy przemieścić układ odniesienia narzędzia z położenia początkowego $\{T_{pocz}\}$ do pożdanego położenia końcowego $\{T_{konc}\}$. Można zauważyc, że ruch ten na ogół wprowadza zmiany zarówno w orientacji, jak również w pozycji narzędzia względem stanowiska.

Czasem konieczny jest bardziej szczegółowy opis ruchu, niż tylko proste określenie pożądanej konfiguracji końcowej. Jeden z możliwych sposobów uwzględnienia bardziej szczegółowego opisu toru polega na podaniu sekwencji pożądanych położen chwytaka lub tzw. punktów pośrednich między położeniami początkowym i końcowym. Zatem przy składaniu ruchów układ odniesienia narzędzia powinien przemieszczać się poprzez szereg kolejnych położen opisanych przez punkty pośrednie. Każdy z tych punktów pośrednich jest w rzeczywistości układem współrzędnych, określających zarówno pozycję, jak i orientację narzędzia względem stanowiska. Nazwa punkty toru zawiera wszystkie punkty pośrednie plus punkty początkowy i końcowy. Należy pamiętać, że chociaż na ogół używamy pojęcia "punktu", to faktycznie jest to opis układu, zarówno co do pozycji, jak i orientacji. Wraz z przestrzennymi ograniczeniami ruchu użytkownik może również określić czasowe własności ruchu. Np. w opisie trajektorii może być zadany okres czasu między punktami pośrednimi.



Rys. 7.1. Przy realizacji trajektorii manipulator wykonuje płynny ruch z danej pozycji początkowej do pożądanej pozycji docelowej

Zazwyczaj pożadany jest płynny ruch manipulatora. Nierównomierne lub gwałtowne ruchy powodują przedwczesne zużycie mechanizmu oraz drgania części i zespołów manipulatora. Dla naszych celów zdefiniujemy gładką funkcję przemieszczeń jako funkcję ciągłą, której pierwsza pochodna jest również ciągła. Czasem również pożadana jest ciągłość drugiej pochodnej. W celu uzyskania gładkich trajektorii nakłada się pewne ograniczenia dotyczące właściwości przestrzennych i czasowych trajektorii między punktami pośrednimi.

Możemy tutaj dokonać wyboru jednego z wielu różnorodnych sposobów zadawania i planowania trajektorii. W celu zadania trajektorii o określonym kształcie można wykorzystać dowolne gładkie funkcje przemieszczeń, przechodzące przez punkty pośrednie. W tym rozdziale rozpatrzymy kilka prostych przykładów takich funkcji. Inne podejścia można znaleźć w [1, 2, 13-19].

7.3. SCHEMATY PLANOWANIA TRAJEKTORII W PRZESTRZENI WSPÓŁRZĘDNYCH KONFIGURACYJNYCH

W tym podrozdziale rozważymy pewne metody generowania trajektorii, za pomocą których kształty trajektorii (w przestrzeni i czasie) są opisane w postaci funkcji współrzędnych konfiguracyjnych.

Każdy punkt trajektorii jest zwykle zadany w postaci funkcji pożądanych pozycji i orientacji układu narzędzia $\{T\}$ względem układu stanowiska $\{S\}$. Każdy z tych punktów pośrednich jest "przetwarzany" w zbiór pożądanych współrzędnych konfiguracyjnych poprzez wykorzystanie rozwiązania zadania

odwrotnego kinematyki. Następnie dla każdego z n połączeń ruchowych wyznacza się gładką funkcję przemieszczeń, przechodzącą przez punkty pośrednie i zawierającą punkt docelowy. Okres ruchu, odpowiadający pewnemu odcinkowi trajektorii, jest taki sam dla wszystkich połączeń ruchowych, zatem wszystkie pary kinematyczne osiągną punkty pośrednie w tym samym czasie, co zapewnia osiąganie pożądanej pozycji kartezjańskiej $\{T\}$ dla każdego punktu pośredniego. Gdy nie zadajemy tego samego okresu dla każdego połączenia ruchowego, wyznaczenie pożądanej funkcji współrzędnych konfiguracyjnych dla poszczególnego połączenia ruchowego nie zależy od funkcji dla innych połączeń ruchowych.

Zatem schematy planowania trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych zawierają wymaganie osiągania pożądanej pozycji i orientacji w punktach pośrednich. Między punktami pośrednimi kształt trajektorii może być dość prosty w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, natomiast staje się złożony w opisie we współrzędnych kartezjańskich. Schematy planowania w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych są zwykle łatwe do obliczenia, a ponieważ nie tworzymy ciąglej zależności między przestrzeniami współrzędnych konfiguracyjnych i kartezjańskich, nie napotykamy trudności związanych z osobliwościami mechanizmu.

Wielomiany trzeciego stopnia

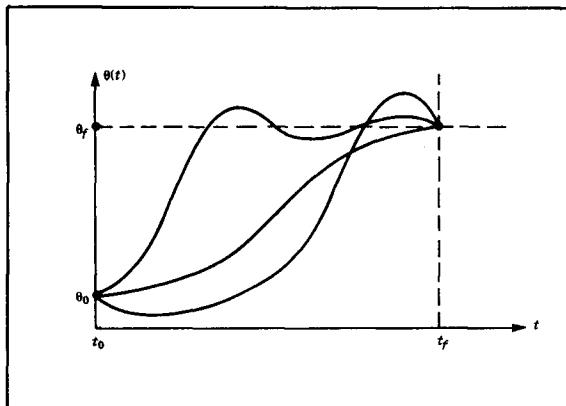
Rozważmy zadanie przemieszczania narzędzia z jego pozycji początkowej do docelowej w pewnym przedziale czasu. Rozwiązujeć zadanie odwrotne kinematyki można obliczyć zbiór współrzędnych konfiguracyjnych, które odpowiadają pozycji i orientacji układu celowego. Początkowa pozycja manipulatora jest także znana w postaci zbioru współrzędnych konfiguracyjnych. Wymagane jest znalezienie funkcji dla każdego połączenia ruchowego, której wartość odpowiadająca t_0 opisuje początkową wartość przemieszczenia w połączeniu ruchowym, a wartość odpowiadająca t_k – pożdaną wartość docelową. Jak pokazano na rys. 7.2, istnieje wiele gładkich funkcji $\theta(t)$, które można wykorzystać do interpolacji wartości przemieszczeń w połączeniach ruchowych.

Przy planowaniu pojedynczego fragmentu płynnego ruchu wystąpią co najmniej cztery ograniczenia na $\theta(t)$, które są oczywiste. Dwa ograniczenia na wartości funkcji pochodzą z doboru wartości początkowej i końcowej

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta(t_f) = \theta_f \quad (7.1)$$

Dodatkowe dwa ograniczenia dotyczą ciągłości pochodnej funkcji, co w tym przypadku znaczy, że prędkości początkowa i końcowa są równe zeru

$$\dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\theta}(t_f) = 0 \quad (7.2)$$



Rys. 7.2. Kilka możliwych kształtów trajektorii dla pojedynczego połączenia ruchowego

Te cztery ograniczenia mogą być spełnione przez wielomian co najmniej trzeciego stopnia. Ponieważ wielomian trzeciego stopnia ma cztery współczynniki, zatem może spełniać cztery ograniczenia podane przez (7.1) i (7.2). Wyznaczają one wielomian o postaci

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (7.3)$$

a zatem prędkość i przyśpieszenie kątowe w parach obrotowych wzduż toru są następujące

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \quad (7.4)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

Łącząc (7.3) i (7.4) z czterema pożądanymi ograniczeniami otrzymuje się cztery równania o czterech niewiadomych

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Rozwiązuje te równania względem a_i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \theta_0 \\
 a_1 &= 0 \\
 a_2 &= \frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0) \\
 a_3 &= -\frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0)
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Wykorzystując (7.6) możemy znaleźć wielomian trzeciego stopnia, który wiąże dowolną początkową wartość kąta obrotu w parze obrotowej z dowolną pożądaną wartością końcową. Rozwiążanie to jest ważne dla przypadku, gdy ruch w parze obrotowej rozpoczyna i kończy się z prędkością równą zeru.

PRZYKŁAD 7.1

Jednaczłonowy robot z jedną parą obrotową znajduje się w spoczynku przy $\theta = \pi/12$ rad. Należy przemieścić człon w płynny sposób do położenia $\theta = 5\pi/12$ rad w ciągu 3 s. Znaleźć współczynniki wielomianu trzeciego stopnia, który opisuje ten ruch, przyjmując że manipulator zatrzymuje się po osiągnięciu celu. Wykreślić przemieszczenie, prędkość i przyśpieszenie kątowe w parze obrotowej jako funkcje czasu.

Podstawiając do (7.6) znajdujemy

$$a_0 = 15,0, \quad a_1 = 0,0, \quad a_2 = 20,0, \quad a_3 = -4,44 \tag{7.7}$$

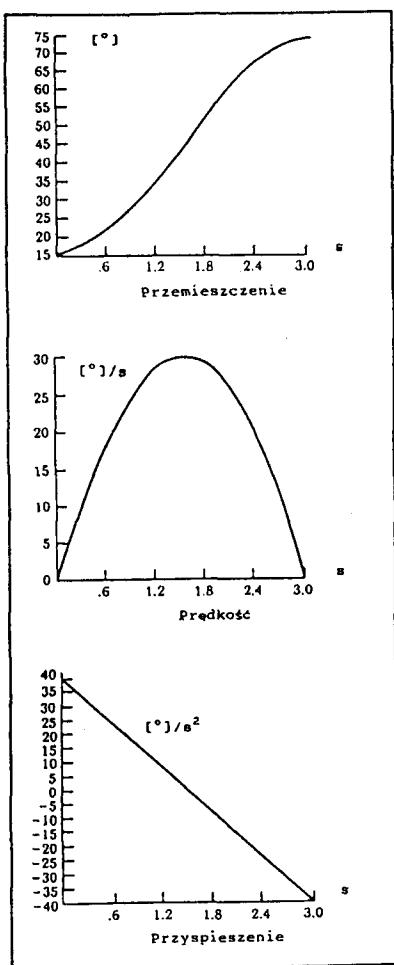
Stosując (7.3) i (7.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \theta(t) &= 15,0 + 20,0t^2 - 4,44t^3 \\
 \dot{\theta}(t) &= 40,0t - 13,33t^2 \\
 \ddot{\theta}(t) &= 40,0 - 26,66t
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Na rys. 7.3 przedstawiono przykładowe funkcje przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia kątowego dla tego ruchu o częstotliwości 40 Hz. Zauważmy, że wykres prędkości dla każdej funkcji trzeciego stopnia jest parabolą, a wykres przyśpieszenia jest liniowy. ■

Wielomiany trzeciego stopnia dla trajektorii z punktami pośrednimi

Dotąd rozważaliśmy ruchy opisane przez pożadany czas trwania i punkt docelowy. Na ogół dopusczamy przypadek zadawania trajektorii z uwzględnieniem pośrednich punktów przejściowych. Jeśli manipulator zatrzymuje się w każdym punkcie pośrednim, wtedy możemy zastosować rozwiązanie trzeciego stopnia z podrozdziału 7.3. Zazwyczaj jednak chcemy mieć możliwość przejścia przez punkt pośredni bez zatrzymania i dlatego chcemy uogólnić ten sposób planowania za pomocą wielomianu trzeciego stopnia na przypadek ograniczonej trajektorii.



Rys. 7.3. Wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia dla fragmentu wielomianu trzeciego stopnia, opisującego ruch między dwoma położeniami

Tak jak w przypadku pojedynczego punktu docelowego, każdy punkt pośredni jest zazwyczaj zadany w zależności od pożąданej pozycji i orientacji układu narzędzia względem układu stanowiska. Każdy z tych punktów pośrednich jest "przekształcony" w zbiór pożądanych współrzędnych konfiguracyjnych poprzez rozwiązań zadania odwrotnego kinematyki. Możemy zatem rozważyć zadanie obliczenia wielomianu trzeciego stopnia, który w sposób gładki łączy punkty pośrednie dla wszystkich połączeń ruchowych.

Jeśli pożądane prędkości w połączeniu ruchowym w punktach pośrednich są znane, to możemy wyznaczyć wielomiany trzeciego stopnia tak jak poprzednio, lecz teraz ograniczenia prędkości w końcach przedziałów nie są równe zeru, lecz są określone pewną znaną prędkością. Ograniczenia (7.3) przyjmują postać

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f \quad (7.9)$$

Ogólny wielomian trzeciego stopnia opisują następujące cztery równania

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ \dot{\theta}_0 &= a_1 \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Rozwiązujeć te równania względem a_i otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f} \dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f} \dot{\theta}_f \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2} (\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Stosując równania (7.11) możemy obliczyć wielomian trzeciego stopnia, który łączy zadane pozycje początkową i końcową z ustaloną prędkością początkową i końcową.

Jeśli znamy pożądane prędkości ruchu w połączeniach ruchowych w każdym punkcie pośrednim, to możemy wprost zastosować (7.11) do każdego przedziału, aby znaleźć wymagane wielomiany. Znanych jest kilka sposobów określenia pożądanych prędkości w punktach pośrednich.

- Użytkownik zadaje pożądane prędkości w każdym punkcie pośrednim w zależności od chwilowej prędkości liniowej i kątowej układu narzędziowego odniesienia do układu kartezjańskiego.
- System automatycznie wybiera prędkości w punktach pośrednich przez wykorzystanie odpowiedniej heurystyki zarówno w przestrzeni współrzędnych kartezjańskich, jak i konfiguracyjnych.
- System automatycznie wybiera prędkości w punktach pośrednich w taki sposób, aby zapewnić ciągłość przyśpieszeń w tych punktach.

W pierwszym przypadku pożądane prędkości kartezjańskie w punktach pośrednich są przekształcane w pożądane prędkości w połączeniach ruchowych za pomocą odwróconego jacobianu manipulatora wyznaczonego dla tych punktów.

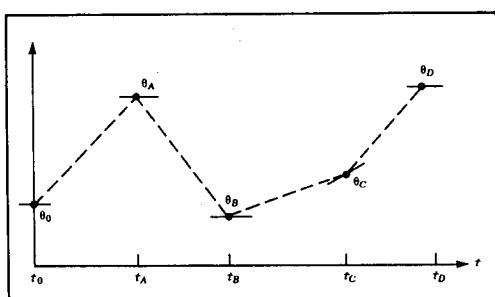
Jeśli manipulator osiąga punkt osobliwy w szczególnym punkcie pośrednim, wtedy użytkownik nie ma swobody przyjęcia dowolnej prędkości w tym punkcie. Chociaż osiąganie zadanej przez użytkownika prędkości jest użyteczną właściwością schematu generowania trajektorii, to wymóg każdorazowego dokonywania takiej specyfikacji prędkości może być zbytnio kłopotliwy dla użytkownika. Dlatego wygodny system powinien uwzględniać opcję 2 albo 3 (lub obie).

W opcji 2 system automatycznie wybiera rozsądne prędkości w punktach pośrednich stosując pewien rodzaj heurystyki. Rozważmy trajektorię zadaną przez punkty pośrednie wskazane dla pewnej pary obrotowej, której kąt konfiguracyjny oznaczono przez θ (rys. 7.4).

Na rys. 7.4 przedstawiono wybrane prędkości kątowe w parach obrotowych dla punktów pośrednich, co zaznaczono krótkimi odcinkami linii stycznych do krzywej w każdym punkcie pośrednim. Ten wybór wynika z zastosowanej heurystyki, prostej koncepcyjnie i obliczeniowo. Wyobraźmy sobie, że punkty pośrednie są połączone odcinkami prostymi. Jeśli współczynnik kierunkowy podanej linii zmienia znak w punkcie pośrednim, to przyjmuje się prędkość równą zeru; jeśli współczynnik kierunkowy takiej linii nie zmienia znaku, to przyjmuje się tangens średniej kątów nachylenia linii po obu stronach punktu jako prędkość w punkcie pośrednim. W ten sposób, wykorzystując tylko specyfikację pożądanych punktów pośrednich, system może znaleźć prędkości w każdym punkcie pośrednim.

W opcji 3 system znajduje prędkości tak, aby przyśpieszenie było ciągłe w punkcie pośrednim. W celu dokonania tego potrzebne jest nowe rozwijanie sklejające, w którym zastępujemy (dwa) ograniczenia prędkościowe dotyczące połączenia dwóch wielomianów trzeciego stopnia przez (dwa) ograniczenia dotyczące:

- ciągłości prędkości,
- ciągłości przyśpieszenia.



Rys. 7.4. Punkty pośrednie z pożądanymi prędkościami reprezentowanymi przez styczne w tych punktach

PRZYKŁAD 7.2

Wyznaczyć współczynniki dwóch wielomianów trzeciego stopnia, które są połączone w dwuczęściową funkcję sklejana z ciągim przyśpieszeniem w punkcie pośrednim. Kąt początkowy oznaczony jest przez θ_0 , punkt pośredni przez θ_v , a punkt docelowy przez θ_g .

Pierwszy wielomian jest następujący

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \quad (7.12)$$

a drugi

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \quad (7.13)$$

Dziedziną każdego wielomianu będzie przedział od $t = 0$ do $t = t_{f1}$, gdzie $i = 1$ lub $i = 2$. Ograniczenia, które chcemy uwzględnić, są następujące

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_{10} \\ \theta_v &= a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 \\ \theta_v &= a_{20} \\ \theta_g &= a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 \\ 0 &= a_{11} \\ 0 &= a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2 \\ a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 &= a_{21} \\ 2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} &= 2a_{22} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Ograniczenia te tworzą układy równań liniowych z ośmioma niewiadomymi. Rozwiążując ten układ dla przypadku $t_f = t_{f1} = t_{f2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{10} &= \theta_0 \\ a_{11} &= 0 \\ a_{12} &= \frac{12\theta_v - 3\theta_g - 9\theta_0}{4t_f^2} \\ a_{13} &= \frac{-8\theta_v + 3\theta_g + 5\theta_0}{4t_f^3} \\ a_{20} &= \theta_v \\ a_{21} &= \frac{3\theta_g - 3\theta_0}{4t_f} \\ a_{22} &= \frac{-12\theta_v + 6\theta_g + 6\theta_0}{4t_f^2} \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$a_{23} = \frac{8\theta_v - 5\theta_g - 3\theta_0}{4t_f^3}$$

Dla ogólnego przypadku n części wielomianów trzeciego stopnia układ równań, który wynika z ciągłości przyśpieszenia w punktach pośrednich, może być ujęty w postaci macierzowej, która następnie wykorzystuje się do obliczenia prędkości w punktach pośrednich. Macierz odwraca się tak, aby była trójdiamondalna i łatwo rozwiązalna [4]. ■

Wielomiany wyższych rzędów

Wielomiany wyższych rzędów są czasem używane do opisu fragmentów trajektorii. Na przykład jeśli chcemy mieć możliwość zadania pozycji, prędkości i przyśpieszenia na początku i końcu fragmentu trajektorii, potrzebny jest wielomian piątego stopnia

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (7.16)$$

gdzie ograniczenia są dane jako

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ \dot{\theta}_0 &= a_1 \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ \ddot{\theta}_0 &= 2a_2 \\ \ddot{\theta}_f &= 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Ograniczenia te tworzą układ równań liniowych o sześciu niewiadomych, którego rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \\ a_3 &= \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_4 &= \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4} \\ a_5 &= \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5} \end{aligned} \quad (7.18)$$

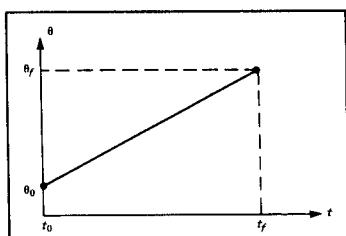
Do wyznaczenia gładkich funkcji (wielomianowych lub innych), które przechodzą przez szereg danych punktów, można zastosować również inne algorytmy [3, 4]. Pełny ich przegląd wykracza poza zakres tej książki.

Funkcja liniowa z parabolicznymi odcinkami krzywoliniowymi

Inny rodzaj kształtu trajektorii reprezentuje prosta. Oznacza to, że przemieszczenie kątowe w parze obrotowej z bieżącą pozycją do pozycji końcowej opisujemy za pomocą prostej interpolacji liniowej, jak na rys. 7.5. Trzeba pamiętać, że chociaż ruch w każdym połączeniu ruchowym jest w tym schemacie opisany funkcją liniową, to końówka wykonawcza na ogół nie porusza się po linii prostej w przestrzeni.

Jednakże czysta interpolacja liniowa mogłaby spowodować nieciągłość prędkości w początku i końcu ruchu. Aby utworzyć gładką krzywą przemieszczeń i ciągłą krzywą prędkości, zaczynamy od funkcji liniowej, lecz dodajemy fragment paraboli w dowolnym punkcie krzywej. W przedziale czasu odpowiadającym zakrzywionej części trajektorii stosuje się stałe przyśpieszenie, zapewniające gładką zmianę prędkości. Funkcja liniowa i dwie funkcje paraboliczne skleja się razem tak, aby uzyskać ciągłe krzywe przemieszczeń i prędkości.

W celu skonstruowania takiego pojedynczego odcinka przyjmujemy równe okresy odpowiadające obu parabolicznym zakrzywieniom i wynikające stąd równe wartości bezwzględne stałego przyśpieszenia (różniące się znakiem) dla obu zakrzywień. Jak pokazano na rys. 7.7, istnieje wiele rozwiązań tego zadania, lecz zauważmy, że odpowiedź jest zawsze symetryczna względem środka przedziału czasu t_h oraz względem środka przedziału przemieszczenia θ_h . Prędkość na końcu przedziału zakrzywienia musi równać się prędkości w części liniowej i dlatego mamy



Rys. 7.5. Liniowa interpolacja przy nieskończonym wielkiej wartości przyśpieszenia

$$\ddot{\theta} t_b = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} \quad (7.19)$$

gdzie θ_b oznacza wartość θ w końcu przedziału zakrzywienia, a $\ddot{\theta}$ – przyśpieszenie występujące w przedziale zakrzywienia. Wartość θ_b jest dana przez

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2 \quad (7.20)$$

Łącząc (7.19) i (7.20) oraz podstawiając $t = 2t_b$ otrzymujemy

$$\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0 \quad (7.21)$$

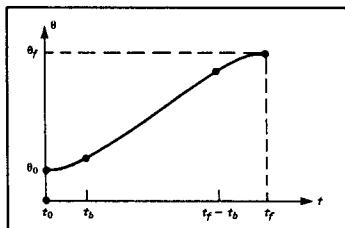
gdzie t oznacza pożądany okres trwania ruchu. Dla danych θ_f , θ_0 i t możemy wybrać dowolną krzywą, określona przez wybrane wartości $\ddot{\theta}$ i t_b , spełniające (7.21). Zwykle przyjmuje się przyśpieszenie $\ddot{\theta}$, a następnie rozwiązuje równanie (7.21) względem t_b . Przyjęte przyśpieszenie musi być dostatecznie duże, w przeciwnym razie może nie być rozwiązania. Rozwiązuając (7.21) względem t_b w zależności od przyśpieszenia i innych znanych parametrów otrzymujemy

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}} \quad (7.22)$$

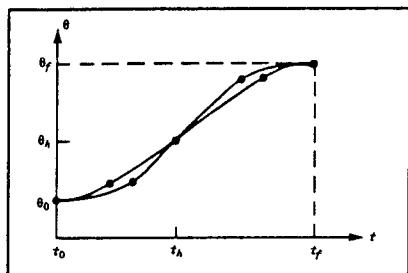
Ograniczenie na przyśpieszenie dla części zakrzywionej jest następujące

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2} \quad (7.23)$$

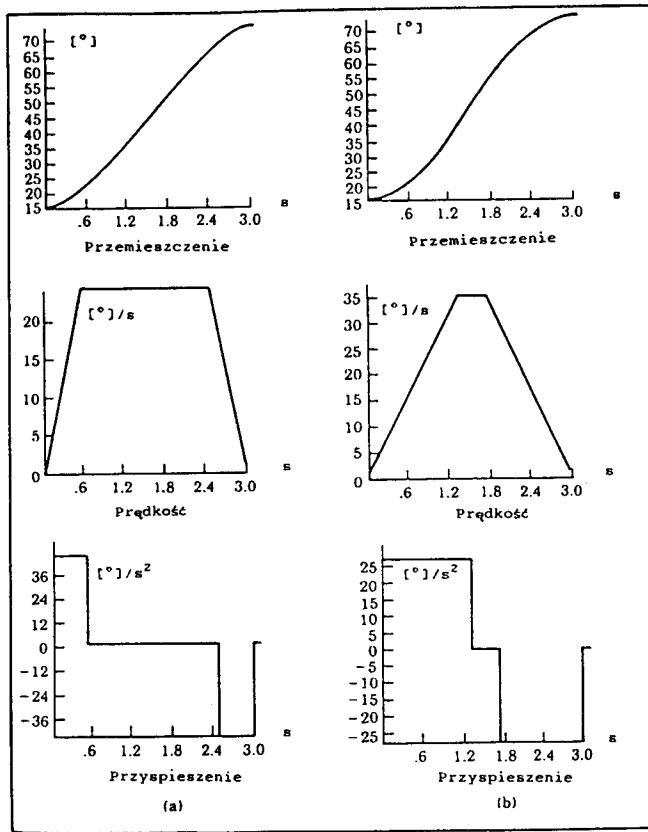
Gdy w (7.23) wystąpi równość, wtedy długość części liniowej zmalała do zera i otrzymamy trajektorię składającą się z dwóch części zakrzywionych o takim samym nachyleniu w punkcie połączenia. W miarę wzrostu wartości zastosowanego przyśpieszenia długość przedziału zakrzywienia staje się coraz krótsza. W granicy dla przyśpieszenia o nieskończonym dużej wartości wracamy do prostego przypadku interpolacji liniowej.



Rys. 7.6. Liniowy odcinek z parabolicznymi odcinkami krzywoliniowymi



Rys. 7.7. Liniowy odcinek z parabolicznymi odcinkami krzywoliniowymi



Rys. 7.8. Wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia dla interpolacji liniowej z parabolicznymi zakrzywieniami. Zbiór krzywych pokazanych po lewej stronie jest oparty na wyższych wartościach przyśpieszeń występujących w przedziałach zakrzywienia, niż wykresy pokazane po prawej stronie

PRZYKŁAD 7.3

Dla tego samego pojedynczego odcinka trajektorii, jak w przykładzie 7.1, znaleźć dwa przykłady funkcji liniowej z parabolicznymi odcinkami krzywoliniowymi.

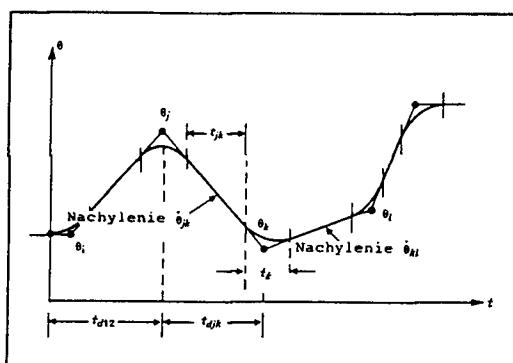
Na rys. 7.8a przedstawiono jedno z możliwych rozwiązań, w którym przyjęto dość dużą wartość $\ddot{\theta}$. W tym przypadku szybko przyśpieszamy, następnie utrzymujemy stałą prędkość i w końcu opóźniamy. Na rys. 7.8b pokazano trajektorię, dla której przyjmujemy tak małą wartość przyśpieszenia, że liniowa część prawie znika. ■

Liniowa funkcja z parabolicznymi odcinkami krzywoliniowymi dla trajektorii z punktami pośrednimi

Teraz rozważamy przypadek interpolacji funkcją liniową z parabolicznymi odcinkami krzywoliniowymi dla przypadku, w którym zadano dowolną liczbę punktów pośrednich. Na rys. 7.9 pokazano szereg punktów pośrednich w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych dla przemieszczenia w dowolnym połączeniu ruchowym, opisanego jako zmienność θ .

Funkcje liniowe łączą punkty pośrednie, a przedziały parabolicznych zagięć są dodane wokół każdego punktu pośredniego.

Zastosujemy następujący zapis. Rozważmy trzy sąsiednie punkty, które nazywamy punktami j , k , l . Okres odpowiadający przedziałowi zagięcia w punkcie k krzywej jest równy t_{jk} . Okres odpowiadający części liniowej między punktami j oraz k wynosi t_{jk} . Całkowity czas odpowiadający odcinkowi łączącemu punkty j oraz k jest równy t_{djk} . Prędkość dla części liniowej wynosi $\dot{\theta}_{jk}$, a przyśpieszenie w przedziale zakrzywienia przy punkcie j jest równe $\ddot{\theta}_j$ (patrz rys. 7.9).



Rys. 7.9. Wielosegmentowy tor liniowy z zakrzywieniami

Podobnie jak w przypadku pojedynczego odcinka jest tutaj wiele możliwych rozwiązań zależnie od wartości przyśpieszenia występującego przy każdym odcinku krzywoliniowym. Dla danych wszystkich punktów krzywej θ_k , poza danego okresu t_{djk} oraz danych wartości przyśpieszenia w każdym punkcie krzywej $|\ddot{\theta}_k|$ możemy obliczyć okres dla odpowiedniego przedziału odcinka krzywoliniowego t_k . Dla punktów wewnętrznych krzywej wynika to wprost z równań

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{jk} &= \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \\ \ddot{\theta}_k &= SGN(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) |\ddot{\theta}_k| \\ t_k &= \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\ t_{jk} &= t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k\end{aligned}\tag{7.24}$$

Dla pierwszego i ostatniego odcinka rozwiązanie wygląda trochę inaczej, ponieważ cały przedział zakrzywienia w końcowej części rozpatrywanego odcinka trajektorii musi być wliczony w odpowiadający mu całkowity czas ruchu.

Dla pierwszego odcinka wyznaczamy t_1 przyrównując dwa wyrażenia opisujące prędkość w czasie odpowiadającym liniowemu odcinkowi trajektorii

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} = \ddot{\theta}_1 t_1\tag{7.25}$$

Równanie to można rozwiązać względem t_1 , czasu odpowiadającego odcinkowi krzywoliniowemu w punkcie początkowym, a następnie można łatwo obliczyć $\dot{\theta}_{12}$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= SGN(\theta_2 - \theta_1) |\ddot{\theta}_1| \\ t_1 &= t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}} \\ \dot{\theta}_{12} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1}\end{aligned}\tag{7.26}$$

$$t_{12} = t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2}t_2$$

Podobnie dla ostatniego odcinka (łączącego punkty $n-1$ i n) mamy

$$\frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} = \ddot{\theta}_n t_n\tag{7.27}$$

co prowadzi do rozwiązania

$$\ddot{\theta}_n = \text{SGN}(\theta_{n-1} - \theta_n) |\ddot{\theta}_n|$$

$$t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 - \frac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}}$$

$$\dot{\theta}_{(n-1)n} = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} \quad (7.28)$$

$$t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2}t_{n-1}$$

Stosując (7.24) + (7.28) możemy wyznaczyć czasy odpowiadające odcinkom krzywoliniowym i prędkości dla funkcji wieloodcinkowej. Zazwyczaj użytkownik zadaje tylko punkty pośrednie i pożądane okresy odpowiadające poszczególnym odcinkom. W takim przypadku system sam dobiera wartości przyśpieszeń w każdym połączeniu ruchowym. Czasami, dla dalszego uproszczenia, system oblicza okresy na podstawie dobranych przez siebie prędkości. Dla wszystkich zakrzywień powinny być wybrane dostatecznie duże przyśpieszenia, aby pomiędzy przedziałami zakrzywień wystąpił odcinek prostoliniowy.

PRZYKŁAD 7.4

Trajektorię dla pewnej pary obrotowej zadano w następujący sposób: Punkty krzywej podano w stopniach: 10, 35, 25, 10. Okresy, odpowiadające tym trzem odcinkom, powinny wynosić odpowiednio 2, 1, 3 sekundy. Moduł przyśpieszenia użytego w przedziałach zakrzywień wynosi 50 stopni/s². Obliczyć prędkości we wszystkich odcinkach oraz okresy odpowiadające odcinkom krzywoliniowym i odcinkom prostoliniowym.

Dla pierwszego odcinka stosujemy (7.26a), aby znaleźć

$$\ddot{\theta}_1 = 50,0 \quad (7.29)$$

Stosując (7.26b) do obliczenia czasu odpowiadającego zakrzywieniu w punkcie początkowym, otrzymujemy

$$t_1 = 2 - \sqrt{4 - \frac{2(35 - 10)}{50,0}} = 0,27 \quad (7.30)$$

Prędkość $\dot{\theta}_{12}$ jest obliczana z (7.26c) jako

$$\dot{\theta}_{12} = \frac{35 - 10}{2 - 0,5(0,27)} = 13,50 \quad (7.31)$$

Prędkość $\dot{\theta}_{23}$ oblicza się wg (7.24a) jako

$$\dot{\theta}_{23} = \frac{25 - 35}{1} = -10,0 \quad (7.32)$$

Z kolei stosujemy (7.24b), aby znaleźć

$$\ddot{\theta}_2 = -50,0 \quad (7.33)$$

Następnie t_2 jest obliczane z (7.24c) i otrzymujemy

$$t_2 = \frac{-10,0 - 13,50}{-50,0} = 0,47 \quad (7.34)$$

Długość liniowej części odcinka 1 jest obliczana z (7.26d)

$$t_{12} = 2 - 0,27 - \frac{1}{2}(0,47) = 1,50 \quad (7.35)$$

Następnie z (7.28a) mamy

$$\ddot{\theta}_4 = 50,0 \quad (7.36)$$

Dla ostatniego odcinka obliczamy t_4 wg (7.28b)

$$t_4 = 3 - \sqrt{9 + \frac{2(10 - 25)}{50,0}} = 0,102 \quad (7.37)$$

Prędkość $\dot{\theta}_{34}$ oblicza się wg (7.28c) jako

$$\dot{\theta}_{34} = \frac{10 - 25}{3 - 0,050} = -5,10 \quad (7.38)$$

Następnie z (7.24b) otrzymujemy

$$\ddot{\theta}_3 = 50,0 \quad (7.39)$$

Według (7.24c) obliczane jest t_3

$$t_3 = \frac{-5,10 - (-10,0)}{50,0} = 0,098 \quad (7.40)$$

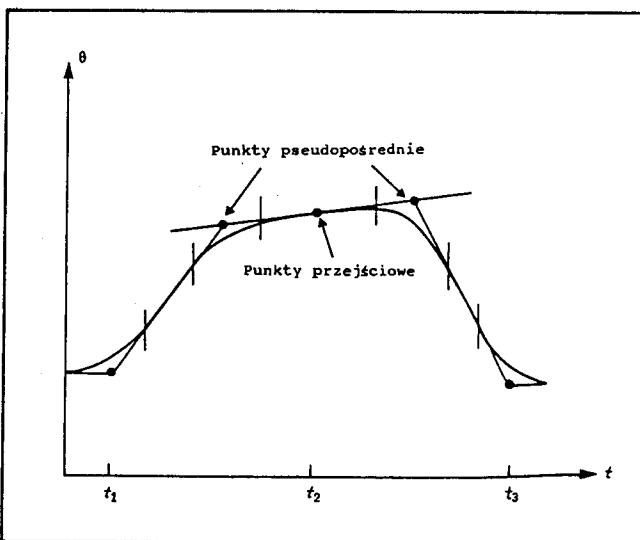
W końcu wg (7.24d) obliczamy

$$t_{23} = 1 - \frac{1}{2}(0,47) - \frac{1}{2}(0,098) = 0,716 \quad (7.41)$$

$$t_{34} = 3 - \frac{1}{2}(0,098) - 0,102 = 2,849 \quad (7.42)$$

Wyniki tych obliczeń stanowią "projekt" trajektorii. Podczas jej realizacji wyniki te mogą być wykorzystane w generatorze trajektorii do obliczania wartości θ , $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$ z częstością zadawania trajektorii. ■

Zauważmy, że w opisanych funkcjach sklejanych, liniowo-parabolicznych, punkty pośrednie nie są faktycznie osiągane, pomijając przypadek zatrzymania manipulatora. Często, gdy istnieje możliwość osiągania odpowiednio wysokich przyśpieszeń, krzywe zbliżają się do punktów pośrednich. Jeśli chcemy mieć punkt trajektorii, określający zatrzymanie manipulatora, to punkt pośredni jest powtarzany w specyfikacji krzywej.



Rys. 7.10. Zastosowanie punktów pseudopośrednich do tworzenia punktów przejściowych

Jeśli użytkownik chce spowodować, aby manipulator przeszedł dokładnie przez punkty pośrednie, bez zatrzymania, to może to uzyskać przystosowując tę specyfikację przez dodanie następującego warunku: system automatycznie zastępuje punkty pośrednie, przez które manipulator miał przejść, dwoma punktami pseudopośrednimi położonymi po obu stronach punktu pośredniego (patrz rys. 7.10). Następnie generowanie trajektorii odbywa się jak poprzednio. Oryginalny punkt pośredni będzie teraz leżał w liniowym przedziale krzywej łączącej dwa punkty pośrednie. Dodatkowo użytkownik może także zażądać, aby manipulator przeszedł przez punkt pośredni z certainą prędkością. Jeśli użytkownik nie określi tej prędkości, system przyjmie ją na podstawie odpowiedniej heurystyki. Do określenia punktu trajektorii, przez który manipulator musi przejść dokładnie, możemy użyć sformułowania punkt przejściowy (zamiast punkt pośredni).

7.4. SCHEMATY GENEROWANIA TRAJEKTORII W PRZESTRZENI KARTEZJAŃSKIEJ

Jak wspomniano w podrozdz. 7.3, obliczanie trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych może zapewnić osiąganie punktów przejściowych, nawet w przypadku, gdy punkty te były zadane w układach kartezjańskich.

Jednak przestrzenny tor końcówki wykonawczej nie jest linią prostą w przestrzeni, lecz ma pewien skomplikowany kształt, który zależy od kinematyki stosowanego manipulatora. W tym podrozdziale rozważamy metody generowania trajektorii, których kształt jest opisany przez funkcje pozycji i orientacji w układzie kartezjańskim, jako funkcji czasu. W ten sposób możemy również opisać przestrzenny kształt toru między danymi punktami. Najczęściej stosowanym kształtem toru jest linia prosta; lecz można zastosować kształt kołowy, sinusoidalny lub inne.

Dowolny tor jest zwykle zadawany w postaci pożądanej pozycji i orientacji układu odniesienia narzędzia względem układu stanowiska. W schematach generowania trajektorii w układzie kartezjańskim wykorzystuje się funkcje sklejane jako funkcje czasu i zmiennych kartezjańskich. Trajektorie te mogą być planowane wprost w oparciu o punkty podane przez użytkownika, a opisujące układ odniesienia $\{T\}$ względem $\{S\}$ bez rozwijywania zadania odwrotnego kinematyki. Jednak schematy planowania trajektorii kartezjańskich są bardziej pracochłonne obliczeniowo w czasie rzeczywistym, ponieważ zadanie odwrotne kinematyki musi być rozwijane z częstością zadawania trajektorii. Po wygenerowaniu trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej, w ostatnim kroku obliczane jest zadanie odwrotne kinematyki w celu wyznaczenia pożądanych współrzędnych konfiguracyjnych.

Wiele innych schematów generowania trajektorii kartezjańskich można znaleźć w piśmiennictwie z zakresu robotyki przemysłowej [1,2]. W kolejnym podrozdziale wprowadzimy przykładowo jeden z tych schematów, w którym będziemy wykorzystywać tę samą funkcję sklejana, liniowo-paraboliczną, opisaną przy planowaniu trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych.

Ruch prostoliniowy w układzie kartezjańskim

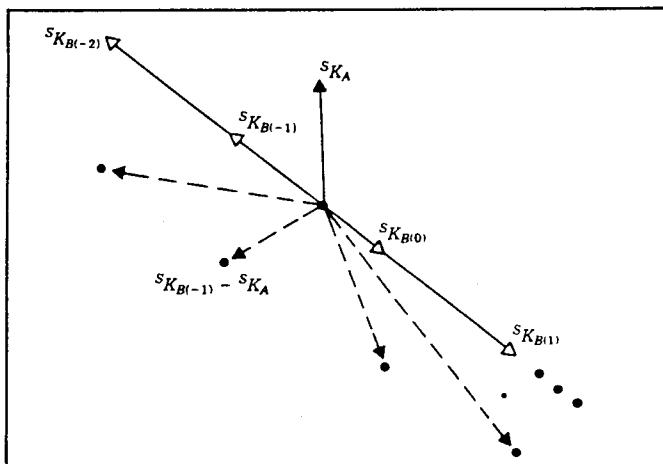
Nie jednokrotnie chcemy w łatwy sposób zadawać tor w przestrzeni, zapewniający prostoliniowy ruch końca narzędzia. Oczywiście, jeśli zadamy wiele punktów pośrednich leżących blisko siebie na prostej, wtedy wierzchołek narzędzia będzie poruszał się w przybliżeniu po prostej bez względu na wybór funkcji gładkich, łączących punkty pośrednie. Najdogodniejszym sposobem ruchu narzędzia jest ruch po torze prostoliniowym nawet między oddalonymi od siebie punktami pośrednimi. Ten sposób zadawania i realizacji toru jest nazywany **prostoliniowym ruchem kartezjańskim**.

Definiowanie ruchów wzduż linii prostych jest częścią bardziej ogólnej właściwości ruchu kartezjańskiego, dzięki której dowolne funkcje zmiennych kartezjańskich mogą być wykorzystane do zadawania toru w postaci funkcji czasu. W systemie, umożliwiającym dowolny ruch kartezjański, mogą być realizowane różne kształty toru, np. elipsoidalne lub sinusoidalne.

W planowaniu i generowaniu kartezjańskiego toru prostoliniowego wykorzystywane są sklejane funkcje liniowe z parabolicznymi zakrzywieniami. W liniowej części każdego odcinka trajektorii końcówka wykonawcza będzie poruszać się wzdłuż prostoliniowego toru w przestrzeni, ponieważ wszystkie trzy składowe ruchy pozycjonowania zmieniają się liniowo. Natomiast, jeśli orientacja jest dana w postaci macierzy obrotu w każdym punkcie pośrednim, wtedy nie możemy interpolować liniowo jej elementów, ponieważ nie dałoby to w wyniku macierzy obrotu w dowolnej chwili czasu. Macierz obrotu musi być złożona z kolumn ortonormalnych i warunek ten mógłby nie być spełniony, jeśli macierz ta byłaby zbudowana z elementów otrzymanych w wyniku liniowej interpolacji elementów dwóch macierzy zadanych. Zamiast tego zastosujemy inną reprezentację orientacji.

Jak stwierdzano w rozdz. 2, reprezentację orientacji w postaci "kąt-oś" można zastosować w opisie orientacji chwytaka przez trzy liczby. Jeśli połączymy taką reprezentację orientacji z wektorem 3×1 pozycji kartezjańskiej, to otrzymamy reprezentację 6×1 pozycji i orientacji kartezjańskiej. Rozważany punkt pośredni zadaje się względem układu stanowiska w postaci macierzy S_T^A . Układ $\{A\}$ określa się jako punkt przejściowy w postaci pozycji końcówki wykonawczej, danej przez wektor $S_{P_{AORG}}$, i orientacji chwytaka, danej przez macierz S_R^A . Tę macierz obrotu można przekształcić w reprezentację kąt-oś $ROT(S_{K_A}, \theta_{SA})$ lub prościej S_{K_A} . Wtedy używamy symbolu χ do przedstawienia pozycji i orientacji kartezjańskiej w postaci wektora 6×1

$$S_{\chi_A} = \begin{bmatrix} S_{P_{AORG}} \\ S_{K_A} \end{bmatrix} \quad (7.43)$$



Rys. 7.11. Wybór reprezentacji kąt-oś dla minimalizacji obrotu

gdzie S_{K_A} jest utworzone jako iloczyn wersora \hat{S}_{K_A} i wartością kąta obrotu θ_{SA} . Jeśli każdy punkt toru jest zadany w ten sposób, wtedy należy opisać funkcje sklejane, które w płynny sposób zmieniają wartości tych sześciu wielkości (przy przemieszczaniu między punktami toru), jako funkcje czasu. Przy stosowaniu sklejanych funkcji liniowych z parabolicznymi zakrzywieniami otrzymuje się tor prostoliniowy między punktami pośrednimi, a w punktach tych płynnie zmieniają się prędkości kątowa i liniowa członu roboczego.

Zauważmy, że w odróżnieniu od innych proponowanych schematów prostoliniowego ruchu kartezjańskiego, metoda niniejsza nie zapewnia obrotów wokół pojedynczej "równoważnej osi" przy przemieszczaniu się z punktu do punktu. Nasz schemat jest raczej prosty, zapewnia płynne zmiany orientacji i pozwala na użycie tego samego aparatu matematycznego, który opracowaliśmy do planowania trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych.

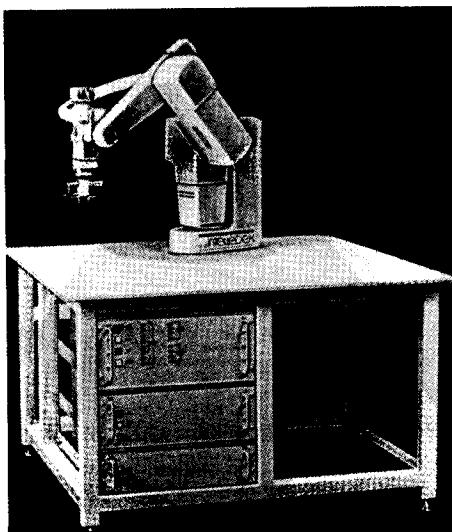
Jedyna komplikacja wynika z faktu, że reprezentacja kąt-oś dla orientacji nie jest jednoznaczna

$$(S_{\hat{K}_A}, \theta_{SA}) = (S_{\hat{K}_A}, \theta_{SA} + n \cdot 360^\circ) \quad (7.44)$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Przy przejściu z punktu pośredniego $\{A\}$ do punktu pośredniego $\{B\}$ wielkość obrotu wypadkowego powinna być minimalizowana. Przyjmując, że nasza reprezentacja orientacji $\{A\}$ jest dana jako S_{K_A} , musimy znaleźć taki wektor S_{K_B} , aby wartość $|S_{K_B} - S_{K_A}|$ była minimalna. Na przykład na rys. 7.11 pokazano cztery różne możliwe wektory S_{K_B} i ich relację do danego S_{K_A} . Wektory różnic (linie przerywane) są porównywane, aby wyznaczyć S_{K_B} , odpowiadający minimalnemu obrotowi. W rozpatrywanym przypadku jest to wektor $S_{K_B(-1)}$.

Przy doborze sześciu wartości X dla każdego punktu pośredniego możemy zastosować ten sam aparat matematyczny, jaki właśnie opracowaliśmy do generowania funkcji sklejanych, składających się z odcinków liniowych i parabolicznych. Zapewni to uzyskanie prostoliniowego ruchu w przestrzeni, będącego wynikiem jednoczesnych ruchów we wszystkich parach kinematycznych. Jako skutek założenia, że okresy odpowiadające wszystkim zakrzywieniom są takie same, otrzymuje się różne wartości przyśpieszeń w przedziałach zakrzywień dla każdego stopnia swobody. Dlatego najpierw zadajemy okres, odpowiadający odcinkowi krzywoliniowemu, a następnie wg wzoru (7.24c) obliczamy wymaganą wartość przyśpieszenia (zamiast w odwrotnej kolejności). Okres odpowiadający odcinkowi krzywoliniowemu może być dobierany tak, aby określony kres górnny wartości przyśpieszenia nie był przekroczony.

Można zastosować wiele różnych schematów reprezentacji i interpolacji elementów macierzy orientacji przy planowania trajektorii kartezjańskiej.



Rys. 7.12. Robot Intelledex 605T, sześciioosiowy, zapewniający powtarzalność $\pm 0,025$ mm i dokładność $\pm 0,050$ mm

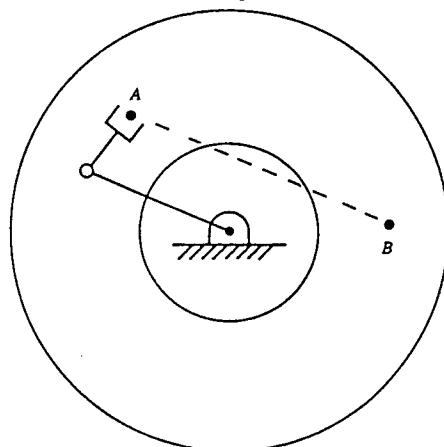
Miedzy innymi również reprezentację orientacji w postaci wektora 3×1 , wprowadzonego w podrozdz. 2.8. Na przykład manipulator Intelledex 605T (rys. 7.12) porusza się wzduł prostoliniowego toru kartezjańskiego, przy czym interpolacja orientacji jest dokonywana za pomocą reprezentacji podobnej do kątów Eulera Z-Y-Z.

7.5. PROBLEMY GEOMETRYCZNE ZWIĄZANE Z TORAMI KARTEZJAŃSKIMI

Ponieważ istnieje ciągła zależność między kształtem toru, opisany w przestrzeni kartezjańskiej, i współrzędnymi konfiguracyjnymi, dlatego planowanie trajektorii we współrzędnych kartezjańskich może być źródłem problemów związanych z przestrzenią roboczą i osobliwościami.

Problem pierwszego rodzaju: nieosiągalne punkty pośrednie

Chociaż punkt trajektorii, odpowiadający początkowemu położeniu manipulatora i punkt docelowy znajdują się w przestrzeni roboczej, to może się zdawać, że nie wszystkie punkty odcinka prostej między tymi punktami znajdują się w przestrzeni roboczej. Jako przykład rozważmy płaski manipulator 2-członowy, pokazany na rys. 7.13 wraz z jego przestrzenią roboczą. Ponieważ w tym przypadku człon 2 jest krótszy od członu 1, to przestrzeń robocza jest pierścieniem o promieniu wewnętrznym równym różnicy długości członów.



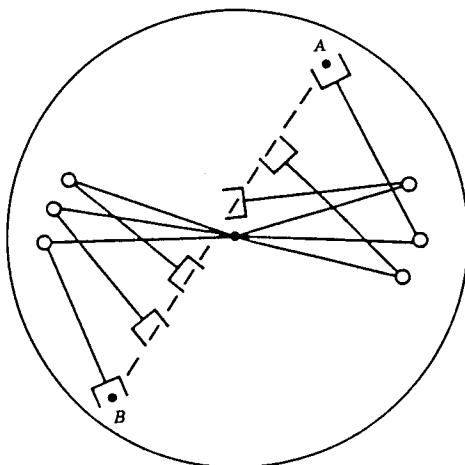
Rys. 7.13. Problem pierwszego rodzaju dla toru kartezjańskiego

W przestrzeni roboczej manipulatora zaznaczono punkty: początkowy – A i docelowy – B. Przemieszczanie chwytaka z pozycji A do B nie spowoduje trudności w planowaniu trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, natomiast w przypadku planowania prostoliniowego ruchu we współrzędnych kartezjańskich punkty pośrednie, leżące wzdłuż toru, mogą być nieosiągalne. Jest to przykład sytuacji, w której planowanie w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych może być łatwo zrealizowane, natomiast nie może być zrealizowany prostoliniowy tor kartezjański¹⁾.

Problem drugiego rodzaju: duże wartości prędkości kątowych w parach obrotowych w pobliżu osobliwości

Jak zauważyliśmy w rozdziale 5, w pewnych punktach przestrzeni roboczej manipulatora nie jest możliwe znalezienie skończonej wartości prędkości kątowej w każdej parze obrotowej, odpowiadającej pożądanej prędkości członu roboczego, określonej we współrzędnych kartezjańskich. Nie powinno to być niespodzianką, ponieważ istnieją pewne trajektorie (opisane we współrzędnych kartezjańskich), których manipulator nie może zrealizować. Jeśli np. punkt chwytaka manipulatora porusza się wzdłuż prostoliniowego toru kartezjańskiego, a manipulator zbliża się do osobliwej konfiguracji mechanizmu, wtedy wartości jednej lub większej liczby prędkości kątowych w parach obrotowych mogą rosnąć do wartości nieskończoności wielkich. Jeśli prędkości mechanizmu są większe od dopuszczalnych, to zwykle występuje odchylenie ruchu chwytaka manipulatora od pożdanego toru.

¹⁾ Pewne systemy robotowe powiadamiają użytkownika o problemie przed rozpoczęciem ruchu manipulatora, natomiast inne rozpoczynają ruch wzdłuż toru, aż do osiągnięcia ograniczeń w niektórych połączeniach ruchowych, co powoduje chwilowe zatrzymanie manipulatora.

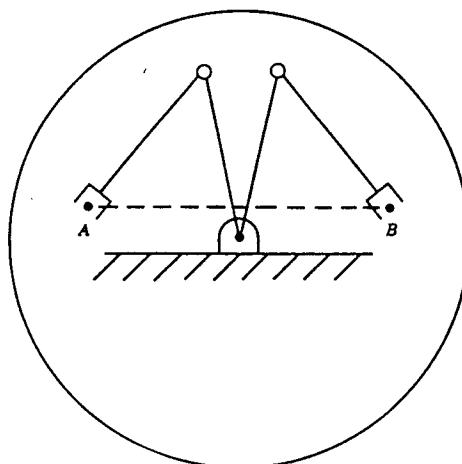


Rys. 7.14. Problem drugiego rodzaju dla toru kartezjańskiego

Przykładowo, na rys. 7.14 pokazano płaski łańcuch dwuczłonowy (z członami o równej długości) z chwytkiem poruszającym się wzdłuż toru od punktu A do B. Pożądana trajektoria odpowiada przemieszczeniu punktu chwytnika ze stałą prędkością liniową wzdłuż toru prostoliniowego. W celu wizualizacji ruchu manipulatora na rysunku pokazano szereg pośrednich położień. Wszystkie punkty toru są osiągalne, lecz gdy chwytak przechodzi przez środkową część toru, to prędkość kątowa w pierwszej parze obrotowej osiąga bardzo dużą wartość (im bliżej do osi pierwszej pary obrotowej, tym wartość prędkości jest większa). Jedno z możliwych rozwiązań problemu polega na proporcjonalnym zmniejszeniu prędkości wzdłuż całego toru tak, aby prędkości we wszystkich parach obrotowych pozostawały zgodne z ich właściwościami. W ten sposób, chociaż utraci się pożądane charakterystyki czasowe toru, to przy najmniej zachowa się przestrzenne aspekty określonej trajektorii.

Problem trzeciego rodzaju: osiągnięcie położenia początkowego i docelowego w różnych konfiguracjach

Trzeci rodzaj zagadnienia, jakie może wystąpić, przedstawiono na rys. 7.15. Dany jest płaski łańcuch kinematyczny z dwoma członami równej długości. Nałożono ograniczenia na ruchy w parach obrotowych, co zmniejsza liczbę możliwych konfiguracji łańcucha, osiągającego zadany punkt w przestrzeni. W szczególności problem ten wystąpi, jeśli punkt docelowy nie może być osiągnięty przy tej samej konfiguracji łańcucha jak w punkcie startowym. Na rys. 7.15 pokazano manipulator, który może osiągnąć wszystkie punkty toru przy



Rys. 7.15. Problem trzeciego rodzaju dla toru kartezjańskiego

pewnej, lecz nie tej samej konfiguracji. Zatem punkt docelowy nie może być osiągnięty przy tej samej konfiguracji, jaką manipulator miał w punkcie startowym. Manipulator z rys. 7.15 może osiągnąć wszystkie punkty toru tylko przy jednej konfiguracji, lecz nie przy tej samej. W takim przypadku system planowania trajektorii manipulatora powinien wykryć opisany problem bez próby przemieszczenia chwytaka wzdłuż zadanego toru i zasygnalizować błąd użytkownikowi.

Problemy związane z planowaniem trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej spowodowały, że większość manipulatorów przemysłowych jest wyposażona w systemy sterowania ze zdolnością generowania trajektorii zarówno w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, jak i kartezjańskich. Użytkownik szybko uczy się, że z powodu opisanych trudności związanych z planowaniem trajektorii we współrzędnych kartezjańskich powinien stosować planowanie trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, a trajektorie kartezjańskie stosować tylko w razie rzeczywistej konieczności.

7.6. GENEROWANIE TRAJEKTORII W CZASIE RZECZYWISTYM

Program generowania trajektorii w czasie rzeczywistym planuje ją zwykle jako funkcje zmiennych θ , $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$ i wprowadza tę informację do systemu sterowania manipulatora. Generator trajektorii oblicza punkty z częstotliwością ich zadaniami.

Generowanie trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych

Planując trajektorię za pomocą funkcji sklejanych, opisanych w podrozdz. 7.3, otrzymuje się w wyniku zbiór danych dla każdego segmentu trajektorii.

Dane te są wykorzystywane przez generator do obliczenia wartości zmiennych θ , $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$ w czasie rzeczywistym.

W przypadku funkcji sklejanych w postaci wielomianów trzeciego stopnia generator trajektorii oblicza wprost wartości wielomianu wg (7.3) w miarę upływu czasu t . Po osiągnięciu końca jednego segmentu przywołuje nowy zbiór współczynników wielomianu, przyjmuje t równe zeru i dalej prowadzi generowanie trajektorii.

W przypadku funkcji sklejanych, liniowych z parabolicznymi zakrzywieniami, z biegiem czasu t sprawdza się w każdej chwili aktualne współrzędne trajektorii, aby określić czy jesteśmy w części liniowej, czy w parabolicznej. W części liniowej trajektorii współrzędna dla każdego połączenia ruchowego oblicza się w następujący sposób

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_j + \dot{\theta}_{jk} t \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{jk} \\ \ddot{\theta} &= 0\end{aligned}\tag{7.45}$$

gdzie t oznacza okres od momentu obliczenia j -tego punktu pośredniego i $\dot{\theta}_{jk}$ wg (7.24a) przy planowania trajektorii. W pobliżu zakrzywienia trajektorii dla każdego przegubu oblicza się

$$\begin{aligned}t_{inb} &= t - \left(\frac{1}{2} t_j + t_{jk} \right) \\ \theta &= \theta_j + \dot{\theta}_{jk} \left(t - t_{inb} \right) + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_k t_{inb}^2 \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{jk} + \ddot{\theta}_k t_{inb} \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\theta}_k\end{aligned}\tag{7.46}$$

gdzie wartości $\dot{\theta}_{jk}$, $\ddot{\theta}_k$, t_j , t_{jk} są obliczone przy planowania trajektorii wg równań (7.24)+(7.28). Obliczenia kontynuujemy, ustalając wartość t równą $\frac{1}{2}t_j$ przy wejściu do następnego odcinka liniowego, dotąd aż dokonamy obliczeń wszystkich zbiorów danych opisujących część trajektorii.

Generowanie trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej

W schemacie planowania trajektorii kartezjańskiej, przedstawionym w podrozdz. 7.4, wykorzystano generator trajektorii do obliczeń funkcji sklejanych, liniowych z parabolicznymi zakrzywieniami. Jednak obliczone w ten sposób współrzędne przedstawiają pozycję i orientację kartezjańską, a nie wartości zmiennych konfiguracyjnych. Zatem przepisujemy zależności (7.45) i (7.46) z oznaczeniem przez x składowych wektora pozycji i orientacji kartezjańskiej. W liniowej części trajektorii dla każdego stopnia swobody w X obliczamy

$$\begin{aligned} x &= x_j + \dot{x}_{jk} t \\ \dot{x} &= \dot{x}_{jk} \\ \ddot{x} &= 0 \end{aligned} \tag{7.47}$$

gdzie t oznacza upływ czasu od chwili określenia j -tego punktu przejściowego, a \dot{x}_{ij} obliczono przy planowaniu toru za pomocą równań analogicznych do (7.24a). W pobliżu zakrzywienia oblicza się trajektorię dla każdego stopnia swobody jako

$$\begin{aligned} t_{inb} &= t - \left(\frac{1}{2} t_j + t_{jk} \right) \\ x &= x_j + \dot{x}_{jk} \left(t - t_{inb} \right) + \frac{1}{2} \ddot{x}_k t_{inb}^2 \\ \dot{x} &= \dot{x}_{jk} + \ddot{x}_k t_{inb} \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_k \end{aligned} \tag{7.48}$$

gdzie wartości \dot{x}_{jk} , \ddot{x}_k , t_j , t_{jk} obliczono przy planowaniu trajektorii tak, jak w przypadku planowania w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych.

Ostatecznie trajektoria kartezjańska (X , \dot{X} i \ddot{X}) musi być przekształcona w równoważne wielkości przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych. Kompletne rozwiązanie tego zadania może zawierać rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki do obliczenia współrzędnych konfiguracyjnych, odwrotności jakobianu dla prędkości oraz odwrotności jakobianu dla przyśpieszeń [3]. Prostszy sposób, często stosowany w praktyce, jest następujący: z częstotliwością zadanego trajektorii przekształcamy X w jego równoważną reprezentację, w postaci macierzy $\begin{pmatrix} S \\ G \end{pmatrix}^T$. Następnie wykorzystujemy program SOLVE (patrz podrozdz. 4.8) do obliczenia wymaganego wektora współrzędnych konfiguracyjnych, Θ . Następnie stosujemy różniczkowanie numeryczne do obliczenia wartości $\dot{\Theta}$ i $\ddot{\Theta}$ ²⁾. Zatem algorytm obliczeń jest następujący

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \begin{pmatrix} S \\ G \end{pmatrix}^T \\ \Theta(t) &= \text{SOLVE} \left(\begin{pmatrix} S \\ G \end{pmatrix}^T \right) \\ \dot{\Theta}(t) &= \frac{\Theta(t) - \Theta(t - \delta t)}{\delta t} \\ \ddot{\Theta}(t) &= \frac{\dot{\Theta}(t) - \dot{\Theta}(t - \delta t)}{\delta t} \end{aligned} \tag{7.49}$$

Następnie Θ , $\dot{\Theta}$ i $\ddot{\Theta}$ są wprowadzane do systemu sterowania manipulatora.

²⁾ Różniczkowanie to może być wykonane bez powołania się na uprzednio zaplanowaną trajektorię, dając lepsze wartości $\dot{\Theta}$ i $\ddot{\Theta}$. Ponadto w wielu systemach sterowania nie jest wymagane $\ddot{\Theta}$ na wejściu i dlatego może ono nie być obliczane.

7.7. OPIS TRAJEKTORII W JĘZYKU PROGRAMOWANIA ROBOTA

W rozdziale 10 będziemy rozpatrywać bardziej szczegółowo języki programowania robota. Tutaj pokażemy, jak różne typy trajektorii, rozpatrywane w tym rozdziale, mogą być zadanego w języku robota. W tych przykładach zastosujemy język programowania robota, syntax AL, rozwinięty w Uniwersytecie Stanforda [6].

W poniższych przykładach symbolami A, B, C i D oznaczono zmienne typu "układ". Układy te określają punkty trajektorii, które przyjmiemy jako nauczone lub wpisane tekstowo do systemu. Założymy, że manipulator rozpoczyna ruch w pozycji A. Aby przemieścić go dalej w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych wzdłuż trajektorii liniowych z parabolicznymi zakrzywieniami, można podać

```
move ARM to C with duration = 3*seconds;
```

Aby przemieścić manipulator do tej samej pozycji i orientacji wzdłuż linii prostej, moglibyśmy podać

```
move ARM to C linearly with duration = 3*seconds;
```

gdzie klauzula "linearly" oznacza zastosowanie prostoliniowego ruchu kartezańskiego. Jeśli długość okresu nie jest ważna, to użytkownik może go pominać w specyfikacji i system sam dobierze prędkość, tzn.

```
move ARM to C;
```

Mожет być też dodany punkt pośredni, co zapisujemy

```
move ARM to C via B;
```

Mogą też zadać cały szereg punktów pośrednich

```
move ARM to C via B,A,D;
```

Zauważmy, że w zapisie

```
move ARM to C via B with duration = 6*seconds;
```

okres jest dany dla całego ruchu. System sam zdecyduje, jak podzielić ten okres między dwa segmenty. W języku AL można zadać okres pojedynczego segmentu przez

```
move ARM to C via B with duration = 3*seconds;
```

Pierwszy odcinek, od A do B, będzie miał okres 3 sekundy.

7.8. PLANOWANIE TRAJEKTORII PRZY WYKORZYSTANIU MODELU DYNAMICZNEGO

Zazwyczaj przy planowaniu trajektorii stosujemy maksymalną wartość przyśpieszenia, lub wybór wartości przyśpieszenia dla każdego przedziału zakrzy-

wienia pozostawiamy układowi. W rzeczywistości przyśpieszenie, jakie manipulator jest zdolny rozwinąć w dowolnej chwili, jest funkcją dynamiki ramienia i charakterystyk napędów. Większość napędów nie jest charakteryzowana przez ustalony maksymalny moment obrotowy lub przyśpieszenie, lecz raczej przez wykres funkcji "prędkość-moment obrotowy".

Jeśli planujemy trajektorię, przyjmując maksymalne wartości przyśpieszenia w każdym połączeniu ruchowym lub dla każdego stopnia swobody, to dokonujemy dużego uproszczenia. Aby nie nastąpiło przekroczenie rzeczywistych możliwości urządzenia, maksymalne wartości przyśpieszeń powinny być dobrane w sposób zachowawczy. Dlatego przy planowaniu trajektorii za pomocą metod wprowadzonych w tym rozdziale nie będziemy wykorzystywać w pełni prędkościowych możliwości manipulatora.

Moglibyśmy postawić następujące zadanie: dla danego, pożdanego toru przestrzennego końcówki wykonawczej należy znaleźć dane czasowe (które zamieniają opis toru przestrzennego w trajektorię), tak aby manipulator osiągał punkt docelowy w minimalnym czasie. Takie zadania były rozwiązywane numerycznie [7,8]. W rozwiązaniu brano pod uwagę dynamikę ciała sztywnego, jak również wykresy funkcji "prędkość-moment obrotowy" podane dla napędów.

7.9. PLANOWANIE TRAJEKTORII BEZKOLIZYJNEJ

Najdogodniejszym rozwiązaniem dla użytkownika byłoby zadanie układowi robota pożdanego punktu docelowego ruchu manipulatora i pozostawienie układowi określenie liczby i położenia punktów pośrednich potrzebnych do osiągnięcia celu bez uderzenia manipulatora o przeszkodę. W celu dokonania tego układ musi dysponować modelem manipulatora, jego przestrzenią roboczą i położeniem potencjalnych przeszkód w tej przestrzeni, a każdy człon powinien być rozpatrywany jako ruchoma przeszkoda dla drugiego.

Układ planowania bezkolizyjnych trajektorii nie jest dostępny komercyjnie. Badania w tym obszarze doprowadziły do dwóch porównywalnych technik oraz wielu ich wariantów i kombinacji. Za pomocą pewnej klasy metod rozwiązuje się zadanie przez tworzenie reprezentacji połączonych grafów wolnej przestrzeni, a następnie poszukuje grafu dla toru bezkolizyjnego [9,11]. Niestety techniki te wykazują wykładowiczy wzrost złożoności w miarę wzrostu liczby połączeń ruchowych urządzenia. Drugie podejście jest oparte na tworzeniu sztucznych pól potencjalnych wokół przeszkód, które powodują, że manipulator(y) omija(ją) przeszkody w swym ruchu w kierunku sztucznego biegu na przyciągania, ulokowanego w punkcie docelowym [12]. Niestety, metody te mają na ogół tylko lokalny wgląd w otoczenie i wykazują skłonność do "ugrzęźnięcia" manipulatora w lokalnych minimach tego sztucznego pola.

Bibliografia

- [1] R.P.Paul, H.Zong, "Robot Motion Trajectory Specification and Generation", 2nd International Symposium On Robotics Research, Kyoto, Japan, August 1984.
- [2] R.Taylor, "Planning and Execution of Straight Line Manipulator Trajectories", in *Robot Motion*, Brady et al., Editors MIT Press, 1983.
- [3] C.DeBoor, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, N.York, 1978.
- [4] D.Rogers, J.A.Adams, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill, 1976.
- [5] B.Gorla, M.Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.
- [6] R.Goldman, *Design of an Interactive Manipulator Programming Environment*, UMI Research Press, Ann Arbor, Mich., 1985.
- [7] J.Bobrow, S.Dubowsky, J.Gibson, "On the Optimal Control of Robotic Manipulators with Actuator Constraints", *Proceedings of the American Control Conference*, June 1983.
- [8] K.Shin, N.McKay, "Minimum-Time Control of Robotic Manipulators with Geometric Path Constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1985.
- [9] T.Lozano-Perez, "Spatial Planning: A Configuration Space Approach", AI Memo 605, MIT Artificial Intelligence Laboratory, Cambridge, Mass., 1980.
- [10] T.Lozano-Perez, "A Simple Motion Planning Algorithm for General Robot Manipulators", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol.RA-3, No.3, June 1987.
- [11] R.Brooks, "Solving the Find-Path Problem by Good Representation of Free Space", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, MC-13: 190-197, 1983.
- [12] O.Khatib, "Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots", *The International Journal of Robotics Research*, Vol.5, No.1, Spring 1986.
- [13] R.P.Paul, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control", MIT Press, Cambridge, Mass., 1981.
- [14] R.Castain, R.P.Paul, "An Online Dynamic Trajectory Generator", *The International Journal of Robotics Research*, Vol.3, 1984.
- [15] C.S.Lin, P.R.Chang, "Joint Trajectory of Mechanical Manipulators for Cartesian Path Approximation", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-13, 1983.
- [16] S.Chand, K.Doty, "Online Polynomial Trajectories for Robot Manipulators", *The International Journal of Robotics Research*, Vol.4, 1985.

- [17] S.Thompson, R.Patel, "Formulation of Joint Trajectories for Industrial Robots Using B-Splines", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. IE-34, 1987.
- [18] C.S.Lin, P.R.Chang, J.Y.S.Luh, "Formulation and Optimization of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.AC-28, 1983.
- [19] M.Vukobratovic, N.Kircanski, "Method for Optimal Synthesis of Manipulation Robot Trajectories", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, Vol.104, 1982.

Ćwiczenia

- 7.1. [8] Ile pojedynczych wielomianów trzeciego stopnia należy obliczyć w przypadku, gdy sześcioczłonowy robot porusza się wzdłuż toru opisanego funkcją sklejaną w postaci wielomianu przechodzącego przez dwa punkty przejściowe i zatrzymuje się w punkcie docelowym? Ile współczynników zapamiętuje się przy opisywaniu tych wielomianów?
- 7.2. [13] Robot o jednym członie i jednym połączeniu obrotowym pozostaje nieruchomy przy $\theta = -5^\circ$. Pożądane jest płynne wykonanie przemieszczenia kątowego w parze obrotowej do $\theta = 80^\circ$ w czasie 4 s. Znaleźć współczynniki wielomianu trzeciego stopnia, opisującego ten ruch i przyjąć, że ramię zatrzymuje się w położeniu docelowym. Wykonać wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia kątowego w parze obrotowej jako funkcji czasu.
- 7.3. [14] Robot o jednym członie i jednej parze obrotowej pozostaje nieruchomy przy $\theta = -5^\circ$. Pożądane jest płynne przemieszczenie w parze obrotowej do $\theta = 80^\circ$ w czasie 4 s, a następnie płynne zatrzymanie. Obliczyć odpowiednie parametry liniowej trajektorii z parabolicznymi zakrzywieniami. Narysować wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia kątowego w parze obrotowej jako funkcji czasu.
- 7.4. [30] Napisać procedurę planowania trajektorii, która uwzględnia (7.25) do (7.30) w sposób ogólny dla trajektorii opisanych za pomocą dowolnej liczby punktów pośrednich. Program ten może być wykorzystany do rozwiązania przykładu 7.4.
- 7.5. [18] Naszkicować wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia dla dwuczęściowej funkcji sklejanej z ciągłą funkcją przyśpieszenia, podaną w przykładzie 7.2. Naszkicować je dla pary obrotowej, gdy $\theta_0 = 5^\circ$, $\theta_v = 15^\circ$, $\theta_g = 40^\circ$, a każdej części odpowiada okres 1 s.
- 7.6. [18] Naszkicować wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia dla dwuczęściowej funkcji sklejanej, której każda część jest wielomia-

nem trzeciego stopnia, stosując współczynniki dane przez (7.11). Naszkicować je dla pary obrotowej, gdy $\theta_0 = 5^\circ$ dla punktu początkowego, $\theta_v = 15^\circ$ jest punktem pośrednim, a $\theta_g = 40^\circ$ jest punktem docelowym. Przyjąć, że dla każdej części okres wynosi 1 s, a prędkość w punkcie przejściowym jest równa 17,5 stopni/s.

- 7.7. [20] Obliczyć $\dot{\theta}_{12}$, $\dot{\theta}_{23}$, t_1 , t_2 i t_3 dla dwuczęściowej funkcji sklejanej, liniowej z parabolicznymi zakrzywieniami (zastosuj wzory (7.24) + (7.28)). Dla rozpatrywanej pary obrotowej $\theta_1 = 5^\circ$, $\theta_2 = 15^\circ$, $\theta_3 = 40^\circ$. Przyjąć $t_{d12} = t_{d23} = 1$ s. Wartość przyśpieszenia, jaką należy zastosować w przedziale zakrzywienia, wynosi 80 stopni/s^2 . Naszkicuj wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia.
- 7.8. [18] Naszkicować wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia dla dwuczęściowej funkcji sklejanej, przy czym ciągłą funkcję przyśpieszenia podano w przykładzie 7.2. Naszkicować takie wykresy dla pary obrotowej, gdy $\theta_0 = 5^\circ$, $\theta_v = 15^\circ$, $\theta_g = -10^\circ$, a okres dla każdej części wynosi 2 s.
- 7.9. [18] Naszkicować wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia dla dwuczęściowej funkcji sklejanej, przy czym każda część jest wielomianem trzeciego stopnia, o współczynnikach wg zależności (7.11). Naszkicować je dla pary obrotowej, jeśli $\theta_0 = 5^\circ$ dla punktu początkowego, $\theta_v = 15^\circ$ dla punktu przejściowego, a $\theta_g = -10^\circ$ dla punktu docelowego. Przyjąć, że okres dla każdej części wynosi 2 s, a prędkość w punkcie pośrednim wynosi 0 stopni/s.
- 7.10. [20] Obliczyć $\dot{\theta}_{12}$, $\dot{\theta}_{23}$, t_1 , t_2 i t_3 dla dwuczęściowej funkcji sklejanej, liniowej z parabolicznym zakrzywieniem (zastosuj wzory (7.24)+ (7.28)). Dla rozpatrywanego przegubu $\theta_1 = 5^\circ$, $\theta_2 = 15^\circ$, $\theta_3 = -10^\circ$. Przyjąć $t_{d12} = t_{d23} = 2$ s, a przyśpieszenie, które należy zastosować w przedziale zakrzywienia, wynosi 60 stopni/s^2 . Naszkicować wykresy przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia.
- 7.11. [6] Podać wektor 6×1 reprezentacji pozycji i orientacji, S_X_G , równoważny macierzy S_G^T , gdzie $S_G^R = ROT(\hat{Z}, \pi/6)$, a $S_P_{GORG} = [10 \ 20 \ 30]^T$.
- 7.12. [6] Podać macierz S_G^T , równoważną wektorowi 6×1 reprezentacji pozycji i orientacji $S_X_G = [5 \ -20 \ 10 \ 45 \ 0 \ 0]^T$.
- 7.13. [30] Napisać program, wykorzystując równania dynamiki z podrozdz. 6.7, (dla dwuczłonowego płaskiego manipulatora) do obliczenia czasowego przebiegu momentu napędowego, potrzebnego do poruszenia ramienia wg trajektorii z ćwiczenia 7.8. Jakkie są wymagane wartości maksymalne momentów napędowych i w jakim miejscu trajektorii wystąpią?
- 7.14. [32] Napisać program, wykorzystując równania dynamiki z podrozdz. 6.7 (dla dwuczłonowego płaskiego manipulatora), do obliczenia czasowego przebiegu momentu napędowego potrzebnego do poruszenia ramienia wg

przebiegu momentu napędowego potrzebnego do poruszenia ramienia wg trajektorii z ćwiczenia 7.8. Wykonać oddzielne wykresy dla momentów napędowych, wymaganych ze względu na siły bezwładności, siły zależne od prędkości i siłę grawitacji.

7.15. [22] Wykonać przykład 7.2, gdy $t_{f1} \neq t_{f2}$.

7.16. [25] Chcemy obrócić pojedynczy człon z θ_0 do θ_f (zaczynając od zatrzymania i kończąc na zatrzymaniu) w czasie t_f . Wartości θ_0 i θ_f są dane, lecz chcemy obliczyć t_f tak, że $\|\dot{\theta}(t)\| < \dot{\theta}_{max}$ i $\|\ddot{\theta}(t)\| < \ddot{\theta}_{max}$ dla wszystkich t , gdzie $\dot{\theta}_{max}$ i $\ddot{\theta}_{max}$ są dane jako stałe dodatnie. Użyć pojedynczego odcinka wielomianu trzeciego stopnia i podać wyrażenie na t_f i na współczynniki wielomianu.

7.17. [10] Pojedyncza trajektoria wielomianowa 3 stopnia jest dana przez

$$\theta(t) = 10 + 90t^2 - 60t^3$$

i obowiązuje w całym przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 1$. Jakie są początkowe i końcowe wartości przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia?

7.18. [12] Pojedyncza trajektoria wielomianowa 3 stopnia jest dana przez

$$\theta(t) = 10 + 90t^2 - 60t^3$$

i obowiązuje w całym przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 2$. Jakie są początkowe i końcowe wartości przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia?

7.19. [13] Pojedyncza trajektoria wielomianowa 3 stopnia jest dana przez

$$\theta(t) = 10 + 5t + 70t^2 - 45t^3$$

i obowiązuje w całym przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 1$. Jakie są początkowe i końcowe wartości przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia?

7.20. [15] Pojedyncza trajektoria wielomianowa 3 stopnia jest dana przez

$$\theta(t) = 10 + 5t + 70t^2 - 45t^3$$

i obowiązuje w całym przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 2$. Jakie są początkowe i końcowe wartości przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia?

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 7)

- Opracować system planowania trajektorii w postaci funkcji sklejanych z wielomianów trzeciego stopnia w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych. Twój system powinien zawierać procedurę

```
Procedure CUBCOEF(VAR th0, thf, thdot0, thdotf: real; VAR cc; vec4);
```

gdzie: th0 - początkowa pozycja θ w początku odcinka,
 thf - końcowa pozycja θ w końcu odcinka,
 thdot0 - początkowa prędkość dla odcinka,
 thdotf - końcowa prędkość dla odcinka.

Są to cztery wielkości wejściowe, a "cc", tablica czterech współczynników wielomianu, jest wielkością wyjściową.

Twój program powinien umożliwiać zadanie co najmniej pięciu punktów pośrednich poprzez określenie położenia układu narzędziwa $\{T\}$ względem układu stanowiska $\{S\}$ w postaci (x, y, ϕ) . Dla ułatwienia, wszystkie odcinki trajektorii będą mieć ten sam okres. Twój program powinien wyznaczać współczynniki wielomianu trzeciego stopnia stosując pewną rozsądna heurystykę przy przyjmowaniu prędkości w połączeniach ruchowych w punktach pośrednich.

Wskazówka: Patrz opcja 2 w podrozdz. 7.3.

2. Opracować system generowania trajektorii, który oblicza trajektorię w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, oparty na zbiorach współczynników wielomianu trzeciego stopnia dla każdego odcinka. System ten powinien być zdolny do generowania wieloczęściowej trajektorii, planowanej w zadaniu 1. Okresy poszczególnych odcinków powinny być zadawane przez użytkownika. Powinien on podawać informację o przemieszczeniu, prędkości i przyśpieszeniu z częstością zadawania trajektorii, która będzie również określona przez użytkownika.
3. Manipulator jest jak poprzednio trójczłonowy. Definicje układów $\{T\}$ i $\{S\}$ są takie same jak poprzednio

$$\begin{matrix} W \\ T \end{matrix} = [x \ y \ \theta] = [0,1 \ 0,2 \ 30,0]$$

$$\begin{matrix} B \\ S \end{matrix} = [x \ y \ \theta] = [0,0 \ 0,0 \ 0,0]$$

Przyjmując okres 3 s na odcinek zaplanować i zrealizować trajektorię, która zaczyna się w chwili, gdy pozycja manipulatora opisana jest przez

$$[x_1 \ y_1 \ \phi_1] = [0,758 \ 0,173 \ 0,0]$$

przechodzi przez punkty pośrednie

$$[x_2 \ y_2 \ \phi_2] = [0,6 \ -0,3 \ 45,0]$$

$$[x_3 \ y_3 \ \phi_3] = [-0,4 \ 0,3 \ 120,0]$$

i kończy się w punkcie docelowym (w tym przypadku taki sam jak punkt początkowy)

$$[x_4 \ y_4 \ \phi_4] = [0,758 \ 0,173 \ 0,0]$$

Należy przyjąć częstość zadawania trajektorii 40 Hz, lecz drukować wyniki tylko co 0,2 s. Pozycję należy drukować we współrzędnych kartezjańskich. Nie drukować prędkości i przyśpieszeń, chociaż mogłyby to być również interesujące.

PROJEKTOWANIE MECHANIZMÓW MANIPULATORA

8.1. WPROWADZENIE

W poprzednich rozdziałach sformułowano wniosek, że struktura manipulatora ma wpływ na jego analizę kinematyczną i dynamiczną. Na przykład dla pewnych konfiguracji kinematycznych można łatwo uzyskać rozwiązania, podczas gdy dla innych nie ma jawnego rozwiązania kinematycznego. Podobnie stopień złożoności równań dynamiki może znacznie zmieniać się wraz ze zmianami konfiguracji kinematycznej i rozkładem mas członów. W następnych rozdziałach wykażemy, że sterowanie manipulatora zależy nie tylko od dynamiki ciała sztywnego, lecz również od tarcia i podatności w układach napędowych.

Zadania, które manipulator może wykonywać, w znacznym stopniu zależą od jego schematu konstrukcyjnego. Pomimo że na ogół mamy do czynienia z manipulatorem jako z pełną wyodrębnioną całością, to jego możliwości działania są ograniczone warunkami, określonymi przez dopuszczalne obciążenie, prędkość, wielkość przestrzeni roboczej, dokładność i powtarzalność. W przypadku niektórych zastosowań znaczącymi czynnikami będą: gabarytowe rozmiary manipulatora, jego masa, pobór mocy i koszt.

W niniejszym rozdziale będą rozpatrzone pewne zagadnienia związane z projektowaniem manipulatora. Na ogół metody projektowania, a nawet ocena projektu końcowego, zależą od podejścia subiektywnego. Trudno jest również pogodzić swobodę w zakresie możliwości wyboru w procesie projektowania z wieloma trudnymi wymaganiami.

System zrobotyzowany można podzielić na cztery kategorie:

- 1) manipulator, wraz z **wewnętrzny**mi układami sensorycznymi,
- 2) chwytak lub człon roboczy wraz z narzędziem,
- 3) zewnętrzne sensory i układy wykonawcze, takie jak sensory wizyjne, podajniki części itp.,
- 4) sterownik.

Przy uwzględnieniu szerokiego zakresu dyscyplin inżynierskich ograniczymy naszą uwagę tylko do projektowania samego manipulatora.

Projekt manipulatora zaczynamy od sprawdzenia tych czynników, które mogą mieć największy wpływ na cały projekt, a następnie rozważamy zagadnienia bardziej szczegółowe. Stąd projektowanie manipulatora traktujemy jak proces iteracyjny. Najczęściej spotykane zadania, pojawiające się przy rozwiązywaniu szczegółów projektowych, powodują ponowne przemyślenie decyzji podjętych na wyższym poziomie.

8.2. OPARCIE PROJEKTU NA WYMAGANIACH STAWIANYCH PRZEZ ZADANIE

Chociaż przyjęto, że roboty są "dowolnie programowalnymi" maszynami przenaczonymi do wykonywania bardzo różnorodnych zadań, to czynniki ekonomiczne i praktyczne powodują, że niektóre manipulatory są projektowane do konkretnych typów zadań. Na przykład duże roboty zdolne do manipulacji ciężarami o masie setek kilogramów nie nadają się do montażu elektronicznego. Jak zobaczymy dalej, nie tylko wymiar, lecz również liczba i usytuowanie połączeń, rodzaje napędów, czujniki i sterowanie będą zmieniać się znacznie wraz ze zmianą rodzaju wykonywanych zadań.

Liczba stopni swobody

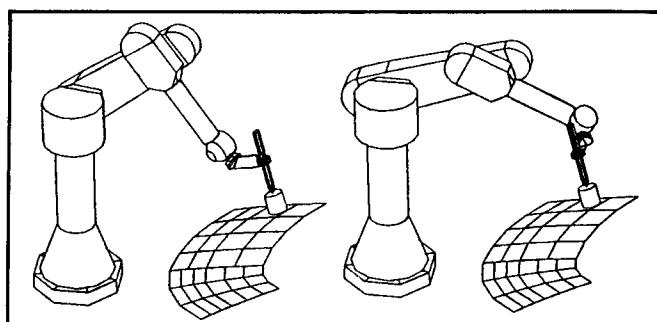
Liczba stopni swobody manipulatora powinna odpowiadać wymaganiom stawianym przez dane zadanie. Nie wszystkie zadania wymagają sześciu stopni swobody.

Ma to miejsce w przypadku członu roboczego z osią symetrii. Na rys. 8.1 pokazano manipulator przemieszczający narzędzie szlifierskie dwoma różnymi sposobami. W rozpatrywanym przypadku orientacja narzędzia względem osi \hat{z}_T układu odniesienia narzędzia nie jest istotna, ponieważ tarcza szlifierska obraca się z prędkością wielu setek obr/min. Przy wykonywaniu takiego zada-

nia robot o sześciu stopniach swobody może przemieszczać człon roboczy na nieskończenie wiele sposobów (obrót wokół osi \hat{z}_T jest zmienna o dowolnej wartości). Mówimy, że robot jest redundantny do tego zadania. Spawanie łukowe, zgrzewanie punktowe, szlifowanie, gładzenie i polerowanie dostarczają przykładów zadań, często wymagających zastosowania członu roboczego z osią symetrii.

W analizie przemieszczeń symetrycznego narzędzia czasami pomocne będzie wyobrażenie sobie fikcyjnego połączenia obrotowego o osi leżącej wzduż osi symetrii narzędzia. W celu umieszczenia pewnej końcówki wykonawczej w dowolnie zadanej pozycji wymagane jest sześć stopni swobody. Ponieważ jeden z nich występuje w naszym fikcyjnym połączeniu obrotowym, to w rzeczywistości wystarczy, aby manipulator miał tylko pięć stopni swobody. Jeśli w zadaniu pokazanym na rys. 8.1 byłby zastosowany robot o pięciu stopniach swobody, to wróilibyśmy do przypadku, w którym tylko skończona liczba różnych rozwiązań może być wykorzystana w pozycjonowaniu narzędzia. Dość duży procent istniejących robotów przemysłowych ma pięć stopni swobody ze względu na zastosowanie symetrycznych narzędzi.

Niektóre zadania są wykonywane w takim zakresie, że wymagają mniej niż 6 stopni swobody. Często spotykanym przykładem jest umieszczenie elementów na płytach obwodów. Płytki obwodów są na ogół płaskie i zawierają elementy o różnej wysokości. Położenie elementu na płaskiej powierzchni wymaga trzech stopni swobody (x , y , θ), a w celu wyciągnięcia i włożenia elementu jest dodawany czwarty ruch w kierunku normalnym do płaszczyzny (z). Roboty o mniejszej od sześciu liczbie stopni swobody mogą również wykonywać zadania pozycjonowania elementów za pomocą pewnego rodzaju urządzenia aktywnego pozycjonowania.



Rys. 8.1. Manipulator o sześciu stopniach swobody, operujący symetrycznym narzędziem i wykazujący zbyteczny stopień swobody

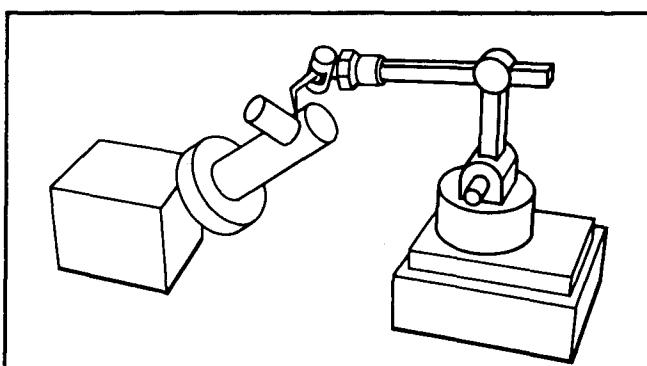
Na przykład przy spawaniu rur stosuje się platformę przechylno-obrotową (pokazaną na rys. 8.2) do pozycjonowania części spawanych. Do istniejących stopni swobody między rurami i końcówką wykonawczą platforma przechylno-obrotowa dodaje dwa. Uwzględniając fakt, że w spawaniu łukowym stosuje się symetryczne narzędzie stwierdzamy, że teoretycznie można byłoby zastosować manipulator o 3 stopniach swobody. Jednak występujące w praktyce wymagania, jak np. konieczność uniknięcia kolizji z obrabianym przedmiotem, dyktują zastosowanie robotów o większej liczbie stopni swobody.

Obiekty pracy osiowo-symetryczne również redukują wymaganą liczbę stopni swobody manipulatora. Na przykład obiekty cylindryczne w wielu przypadkach mogą być wyciągane lub wkładane do cylindrycznego otworu niezależnie od orientacji chwytyka względem osi cylindra. Zauważmy jednak, że po uchwytceniu obiektu jego orientacja względem osi symetrii nie może mieć znaczenia dla wszystkich następnych operacji, ponieważ nie jest zapewniona.

Przestrzeń robocza

Przy realizacji różnych zadań manipulator musi dosiągnąć wielu przedmiotów obrabianych lub osprzętu. W pewnych przypadkach mogą być one pozycjonowane w celu "dopasowania się" do przestrzeni roboczej manipulatora. W innych przypadkach robot może być zainstalowany w ustalonym otoczeniu przy sztywnych wymaganiach co do przestrzeni roboczej. Przestrzeń robocza jest także czasem nazywana obszarem lub otoczeniem pracy.

Pełny zakres zadań określa wymaganą przestrzeń roboczą manipulatora. W pewnych przypadkach ważnym zagadnieniem jest np. szczególny kształt przestrzeni roboczej lub występowanie osobliwości.



Rys. 8.2. Przechylno-obrotowa platforma dodająca dwa stopnie swobody do całego systemu manipulacyjnego

Ważnym czynnikiem czasami może być usytuowanie samego manipulatora w jego przestrzeni roboczej. W zależności od schematu kinematycznego manipulatora jego praca bezkolizyjna w określonym zastosowaniu może wymagać większej lub mniejszej przestrzeni wokół obiektu. Ograniczenia miejsca otoczenia pracy mogą wpływać na wybór konfiguracji kinematycznej.

Obciążalność

Obciążalność manipulatora jest zależna od wymiarów jego elementów składowych, układu przeniesienia napędu i silników. Obciążenia silników i układów napędowych są funkcjami konfiguracji robota, procentowego udziału okresu występowania obciążenia oraz obciążzeń dynamicznych związanych z przyśpieszeniem i prędkością.

Prędkość

Oczywistym celem projektowania są coraz szybsze manipulatory. Duża prędkość jest zaletą w wielu zastosowaniach, gdy proponowany system zrobotyzowany musi konkurować pod względem ekonomicznym z prestiążą automatyzacją lub robotnikiem. W pewnych zastosowaniach już sam proces ogranicza prędkość ruchu narzędzia w większym stopniu niż manipulator. Tak jest w wielu przypadkach zastosowań robotów do spawania i malowania.

Ponadto należy oddzielić maksymalną prędkość końcówki wykonawczej od okresu cyklu pracy dla poszczególnego zadania. W zastosowaniach transportowych manipulator musi przyśpieszać lub opóźniać ruch przedmiotu przy podniesieniu lub opuszczaniu oraz czynić to z określoną dokładnością pozycjonowania. Często fazy przyśpieszania i opóźniania są najdłuższe w czasie całego cyklu. W takim przypadku ważniejsza jest zdolność przyśpieszania niż prędkość maksymalna.

Powtarzalność i dokładność

Osiagnięcie wysokiej powtarzalności i dokładności, pożąanej w pewnym projekcie manipulatora, jest kosztowne. Np. byłoby absurdem projektowanie robota malarskiego o dokładności 0,025 mm, podczas gdy średnica plamki lakiernika wynosi $200 \text{ mm} \pm 50 \text{ mm}$. Na ogół dokładność określonego modelu robota przemysłowego zależy bardziej od dokładności wykonania jego części niż od samego projektu. Wysoka dokładność robota osiąga się dzięki dobrej znajomości parametrów członów (lub innych parametrów). Można to uzyskać przez dokładne pomiary parametrów wykonanego robota lub zwrócenie szczególnej uwagi na utrzymanie odpowiednich tolerancji wykonawczych.

8.3. KONFIGURACJA KINEMATYCZNA

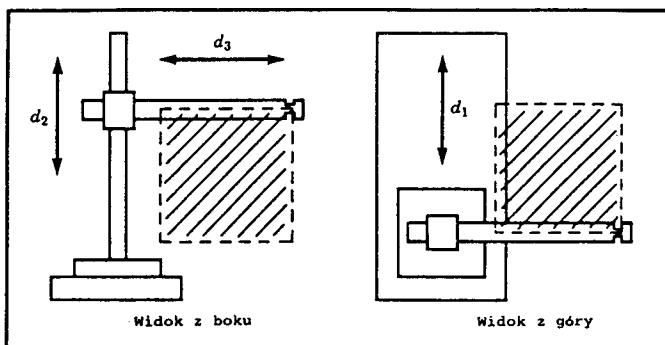
Niezależnie od omówionego już zagadnienia doboru wymaganej liczby stopni swobody w celu zrealizowania zadanego ruchu, musi być wybrana określona konfiguracja łańcucha kinematycznego. W przypadku szeregowego łańcucha kinematycznego liczba połączeń ruchowych równa się liczbie wymaganych stopni swobody. Większość manipulatorów jest zaprojektowana w taki sposób, że ostatnie $n-3$ połączenia obrotowe służą do orientacji członu roboczego, a ich osie przecinają się w **środku kości**, natomiast pierwsze trzy połączenia ruchowe służą do pozycjonowania środka kości. Tak zaprojektowane manipulatory składają się ze **struktury pozycjonowania i struktury orientowania** tzw. **kiści**. Jak stwierdziliśmy poprzednio w rozdz. 4, dla takich manipulatorów zazwyczaj można uzyskać rozwiązania zadań kinematyki w jawnej postaci. Mimo że istnieją również inne konfiguracje, dla których można otrzymać rozwiązania kinematyki w postaci jawnej, to prawie w każdym manipulatorze można wyodrębnić mechanizm **kiści**. Ponadto w procesie projektowania struktury pozycjonowania należy starać się o przyjęcie możliwie prostego rozwiązania pod względem kinematycznym, tzn. zachować wartości kątów członów równe 0 lub $\pi/2$ rad oraz wiele długości członów lub ich odsunięć wzdłuż osi połączeń przyjąć równe zeru. Powszechnie przyjęta klasyfikacja manipulatorów o wydzielonej kości wykorzystuje możliwe układy trzech pierwszych połączeń (tzn. struktury pozycjonowania). W następnych podrozdziałach będą opisane często występujące przypadki.

Manipulator pracujący w układzie współrzędnych kartezjańskich (kartezjański)

Manipulator kartezjański ma stosunkowo najprostszą konfigurację. Jak pokazano na rys. 8.3, połączenia ruchowe 1+3 są parami przesuwnymi, o osiach wzajemnie prostopadłych i odpowiadających kierunkom osi układu kartezjańskiego \hat{X} , \hat{Y} , \hat{Z} . Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki dla tej konfiguracji jest trywialne. Robot o takiej konfiguracji ma konstrukcję bardzo sztywną, umożliwiającą zbudowanie robotów bardzo ciężkich, podobnych do suwnic bramowych, które są często nazywane **robotami portalowymi**. Roboty portalowe manipulują nawet całymi samochodami lub dokonują inspekcji małych samolotów.

Inne zalety manipulatorów kartezjańskich wynikają z faktu, że pierwsze trzy pary przesuwne są rozłączne, co upraszcza ich projektowanie i nie wywołuje żadnych związanych z nimi osobliwości kinematycznych.

Podstawową wadą takiego manipulatora jest to, że cały osprzęt związany z konkretnym zastosowaniem musi mieścić się "wewnątrz" robota, co powoduje, że gniazdo robocze z robotami kartezjańskimi jest bardzo niepraktyczne.



Rys. 8.3. Manipulator kartezjański

Rozmiary konstrukcji podtrzymującej robot ograniczają rozmiary i rozmieszczenie osprzętu i sensorów. Ograniczenia te powodują, że przystosowanie robotów kartezjańskich do istniejących gniazd roboczych jest zadaniem bardzo trudnym.

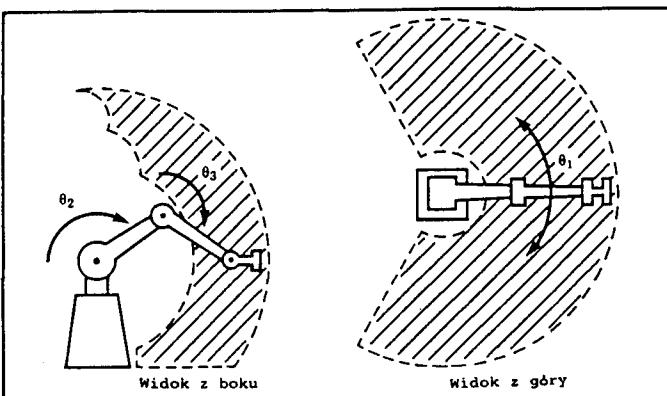
Manipulatory z parami obrotowymi (przegubowe)

Na rys. 8.4 pokazano manipulator z parami obrotowymi, nazywany czasem manipulatorem przegubowym, łokciem lub manipulatorem antropomorficznym. Zwykle w jego skład wchodzą: dwie pary obrotowe "ramienia", jedna do obrotu wokół osi pionowej, a druga do podnoszenia ramienia; trzecia para obrotowa, zwana "łokciem", o osi zwykle równolegiej do osi pary obrotowej podnoszenia ramienia; oraz ostatnie dwie lub trzy pary obrotowe tworzące kiść przy chwytaku manipulatora. Do tej klasy zalicza się zarówno robot PUMA 560, jak i Motoman L-3, które rozpatrywaliśmy w poprzednich rozdziałach.

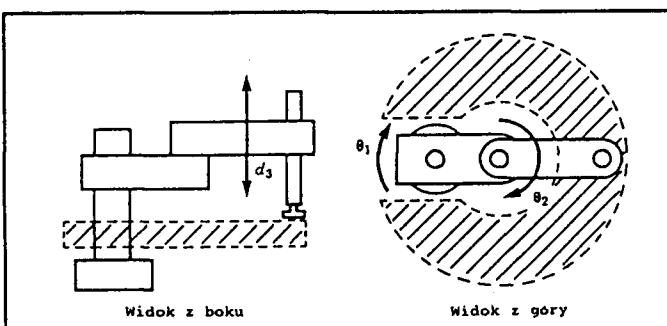
Roboty przegubowe cechuje mały wpływ struktury manipulatora na przestrzeń roboczą, co czyni je zdolnymi do manipulowania w ograniczonej przestrzeni. Odznaczają się bardziej zwartą konstrukcją niż roboty kartezjańskie, a przez to są tańsze w zastosowaniach wymagających małej przestrzeni roboczej.

Robot SCARA

W skład manipulatora robota SCARA, pokazanego na rys. 8.5, wchodzą trzy pary obrotowe o osiach równoległych, umożliwiające poruszanie i orientowanie w pewnej płaszczyźnie, oraz czwarta para przesuwna służąca do przemieszczania członu roboczego prostopadle do tej płaszczyzny.



Rys. 8.4. Manipulator o parach obrotowych (przegubowy)

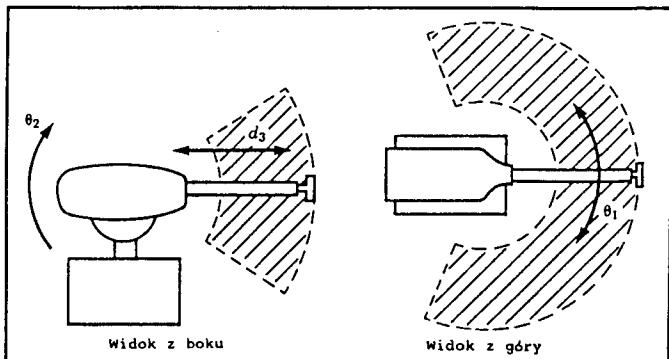


Rys. 8.5. Manipulator SCARA

Główna zaletą tego manipulatora jest to, że układy napędowe pierwszych trzech par obrotowych nie muszą podtrzymywać ciężaru samego manipulatora lub obciążenia chwytyaka. Ponadto w podstawie manipulatora można łatwo umieścić układy napędowe pierwszych dwóch par obrotowych. Zatem można zastosować większe silniki, w wyniku czego zwiększa się szybkość robota. Na przykład manipulator Adept One SCARA może poruszać się z prędkością ponad 10 m/s, około 10 razy szybciej niż większość robotów przemysłowych [1]. Manipulator ten jest najbardziej przydatny do wykonywania zadań na płaszczyźnie.

Manipulatory pracujące w układzie współrzędnych sferycznych (sferyczne)

Manipulator sferyczny, pokazany na rys. 8.6, wykazuje wiele podobieństw do manipulatora przegubowego, w którym parę obrotową (łokieć) zastąpiono parą przesuwną. To rozwiązanie w pewnych zastosowaniach jest bardziej przydatne od rozwiązania z łokciem. Człon wchodzący w parę przesuwną może wysuwać się teleskopowo lub wystawać z przeciwej strony po wycofaniu.



Rys. 8.6. Manipulator sferyczny

Manipulatory pracujące w układzie współrzędnych cylindrycznych (cylindryczne)

Manipulatory **cylindryczne** (rys. 8.7) zawierają jedną parę przesuwną, przemieszczającą ramię pionowo, drugą parę obrotową o osi pionowej i trzecią parę przesuhną o osi prostopadłej do osi pary obrotowej, za którą znajduje się kiść.

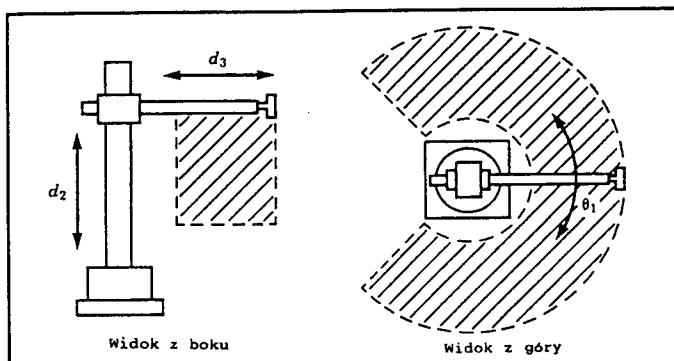
Kiście

W powszechnie stosowanych konfiguracjach kłuci występują dwie albo trzy pary obrotowe o osiach prostopadłych i przecinających się. Pierwsza z par obrotowych kłuci zwykle stanowi czwarte połączenie ruchowe manipulatora.

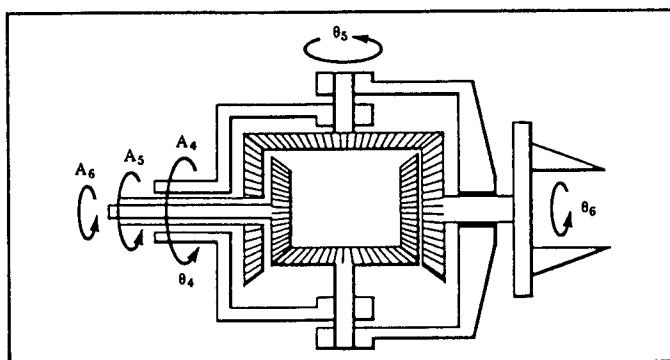
Konfiguracja trzech wzajemnie prostopadłych osi gwarantuje, że człon roboczy może osiągnąć dowolną orientację (przyjmując, że nie ma ograniczeń przemieszczeń kątowych w parach obrotowych) [2]. Jak stwierdzono w rozdz. 4, dla dowolnego manipulatora, w którym trzy kolejne pary obrotowe mają osie przecinające się, można otrzymać rozwiązanie zadania kinematycznego w jawnej postaci. Dlatego w przypadku wymogu dowolnej orientacji członu roboczego, trzy pary obrotowe o osiach wzajemnie prostopadłych powinny znajdować się w pobliżu tego członu.

Na rys. 8.8 przedstawiono schemat jednego z możliwych rozwiązań takiej kłuci, w którym skorzystano z kilku przekładni stożkowych w celu przeniesienia napędów od oddalonych silników do mechanizmu kłuci.

W praktyce trudno zbudować kłuc z trzema parami obrotowymi o wzajemnie prostopadłych osiach bez znacznych ograniczeń przemieszczeń kątowych. Interesujące rozwiązanie zastosowano w kilku robotach produkowanych przez Cincinnati Milacron (rys. 1.4). W tym rozwiązaaniu występują trzy pary obrotowe o osiach przecinających się, lecz nieortogonalnych.



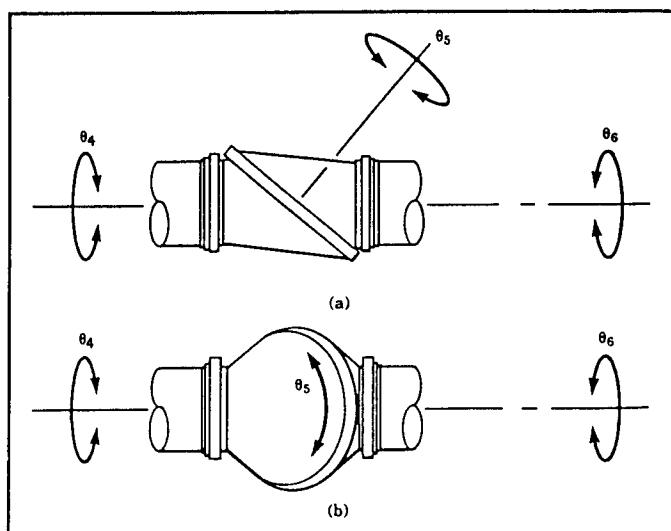
Rys. 8.7. Manipulator cylindryczny



Rys. 8.8. Kiść z parami obrotowymi, ortogonalnymi, napędzanymi przez trzy współosiowe wały silników usytuowanych w pewnej odległości

W tym rozwiążaniu (nazywanym "kiścią trójprzechyłową") nie występują ograniczenia ruchu we wszystkich trzech parach obrotowych kisci. Nieortogonalność osi powoduje występowanie wielu przypadków orientacji niemożliwych do osiągnięcia za pomocą takiej kisci. Zbiór nieosiagalnych orientacji jest opisany przez stożek, wewnątrz którego nie może leżeć trzecia oś kisci (patrz ćwiczenie 8.11). Jednak kiscia może być połączona z członem 3 manipulatora w taki sposób, aby bryła członu mieściła się w tym stożku, ponieważ przestrzeń wewnętrzniego i tak jest niedostępna. Na rys. 8.9 pokazano taką kiscia w dwóch rzutach [24].

Kisci pewnych robotów przemysłowych mają pary obrotowe tak usytuowane, że ich osie nie przecinają się, co powoduje, że nie można otrzymać rozwia-



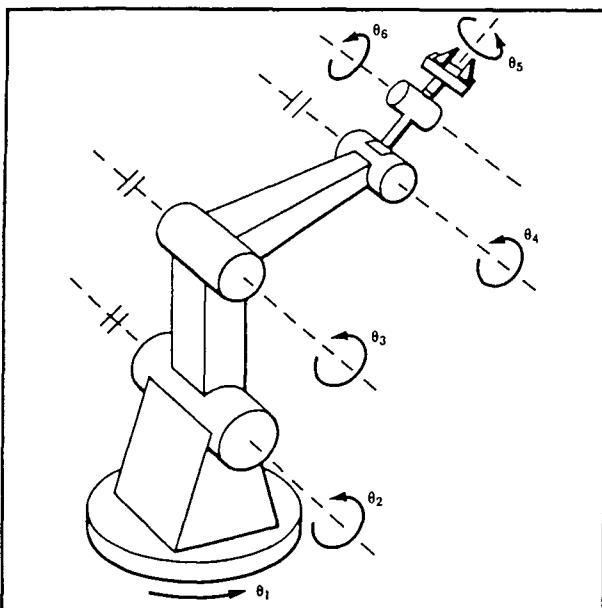
Rys. 8.9. Kiść z parami obrotowymi o osiach nieortogonalnych [24], pokazana w dwóch rzutach. Wg International Encyclopedia of Robotics, by R. Dorf and S. Noff (editors). From "Wrists" by M. Rosheim, John C. Wiley and Sons, Inc., New York, NY © 1988. Przedruk za zezwoleniem

zania zadania odwrotnego kinematyki w postaci jawnej. Jeśli jednak w manipulatorze przegubowym osie par obrotowych 2, 3, 4 są równoległe (jak pokazano na rys. 8.10), to mimo zastosowania takiej kiści istnieje jawne rozwiązanie. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku robota kartezjańskiego.

W typowych robotach spawalniczych o 5 stopniach swobody stosuje się kiście o dwóch osiach zorientowanych jak na rys. 8.11. Zauważmy, że jeśli robot operuje narzędziem symetrycznym, to występuje dodatkowa "fikcyjna para obrotowa", wynikająca z jego kinematyki. Zatem, w celu osiągnięcia dowolnej orientacji, narzędzie powinno być usytuowane w taki sposób, aby jego os symetrii była prostopadła do osi pary obrotowej 5. W najgorszym przypadku, gdy os symetrii jest równoległa do osi przegubu 5, to wtedy os "fikcyjnej" szóstej pary obrotowej jest stale w konfiguracji osobliwej.

8.4. ILOŚCIOWE MIARY WŁASNOŚCI MANIPULATORÓW

Projektanci manipulatorów zaproponowali kilka interesujących miar ilościowych własności przestrzeni roboczej.



Rys. 8.10. Manipulator z kiścią, której osie nie przecinają się. Jednak w tym przypadku istnieje jawnie rozwiążane odwrotne zadanie kinematyki

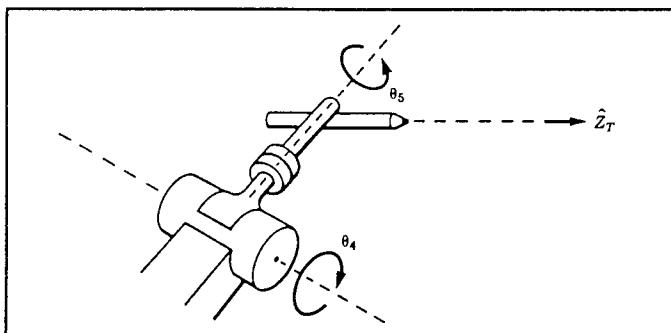
Efektywność projektu manipulatora oceniana miarą generowanej przestrzeni roboczej

Niektórzy projektanci zauważyli, że być może więcej materiału zużywa się na wykonanie manipulatora kartezjańskiego niż przegubowego o podobnej objętości przestrzeni roboczej. Aby podać ilościową ocenę tego przypadku, najpierw zdefiniujemy sumę długości manipulatora jako

$$L = \sum_{i=1}^N (a_{i-1} + d_i) \quad (8.1)$$

gdzie a_{i-1} i d_i oznaczają odpowiednio długość członu i jego odsunięcie wzdłuż osi połączenia, tak jak to zdefiniowano w rozdz. 3. Zatem suma długości manipulatora określa przybliżoną miarę "długości" całego mechanizmu. Zauważmy, że dla pary przesuwnej odsunięcie d_i powinno być interpretowane jako stała, równa długości drogi między ograniczeniami w parze.

W [3] zdefiniowano strukturalny wskaźnik długości Q_L jako stosunek sumy długości manipulatora do pierwastka sześciennego z objętości przestrzeni roboczej, tj.



Rys. 8.11. Typowy projekt kiści robota spawalniczego o 5 stopniach swobody

$$Q_L = L / \sqrt[3]{W} \quad (8.2)$$

gdzie L jest dane przez (8.1), a W oznacza objętość przestrzeni roboczej manipulatora. Zatem wskaźnik Q_L pozwala na uwzględnienie rozmiarów manipulatora (sumy długości) w jego różnych konfiguracjach, wymaganych do uzyskania określonej przestrzeni roboczej. Stąd projekt manipulatora można określić jako dobry, jeśli przy małej sumie długości L uzyskuje się dużą objętość przestrzeni roboczej. Dobre projekty cechuje niska wartość Q_L .

Analizując strukturę pozycjonowania manipulatora kartezjańskiego (w tym przestrzeń roboczą środka kiści), minimalną wartość wskaźnika Q_L uzyskuje się w przypadku, gdy wszystkie trzy pary przesuwne mają ten sam zakres przesunięcia. Ta minimalna wartość wynosi $Q_L = 3,0$. Z drugiej strony dla idealnego manipulatora przegubowego, pokazanego na rys. 8.4, wartość tego wskaźnika wynosi $Q_L = \sqrt[3]{4\pi/3} \approx 0,62$. Wynik ten potwierdza liczbowo nasze wcześniejsze stwierdzenie, że manipulatory przegubowe wykazują lepsze właściwości od innych, ponieważ zajmują minimalną część ich własnej przestrzeni roboczej. Oczywiście dla każdego rzeczywistego manipulatora wartość wskaźnika będzie cokolwiek większa od wyżej podanej ze względu na ograniczenia ruchów w połączeniach obrotowych, zmniejszające objętość przestrzeni roboczej.

PRZYKŁAD 8.1

Manipulator SCARA, podobny do pokazanego na rys. 8.5, ma człony 1 i 2 o一样的 długości $l/2$, a przedział ruchu pary przesuwnej 3 określa odsunięcie d_3 . Przyjmując dla uproszczenia, że nie ma ograniczeń ruchów w połączeniach, znaleźć Q_L . Dla jakich wartości d_3 otrzyma się minimalną wartość wskaźnika Q_L i ile ona wynosi?

Suma długości członów tego manipulatora wynosi

$$L = l/2 + l/2 + d_3 = l + d_3,$$

a przestrzeń robocza jest walcem o promieniu l i wysokości d ; zatem

$$Q_L = \frac{l + d_3}{\sqrt{\frac{3}{\pi} l^2 d_3}} \quad (8.3)$$

Minimalizując Q_L jako funkcję stosunku d_3/l , otrzymuje się: $d_3 = l/2$ jako wartość optymalną [3]. Odpowiadająca temu minimalna wartość $Q_L \approx 1,29$. ■

Projektowanie przestrzeni roboczych dobrze uwarunkowanych

W pewnych położeniach, odpowiadających punktom osobliwym przestrzeni roboczej, manipulator efektywnie traci jeden lub więcej stopni swobody. Zatem w takim położeniu manipulator nie może wykonać pewnych zadań. Istotnie, w sąsiedztwie punktów osobliwych (włączając osobliwości granicy przestrzeni roboczej) działania manipulatora nie mogą być **dobrze uwarunkowane**. W pewnym sensie im położenie manipulatora jest bardziej oddalone od punktu osobliwego, tym wykazuje on większą zdolność do jednostajnego ruchu i równomiernego rozłożenia sił we wszystkich kierunkach. Sugerowano wiele różnych miar dla ilościowej oceny tego wpływu. Zastosowanie takich miar przy projektowaniu może w wyniku dać projekt manipulatora o maksymalnej i dobrze uwarunkowanej przestrzeni roboczej.

Ponieważ położenia osobliwe są dane przez

$$\det(J(\Theta)) = 0 \quad (8.4)$$

to naturalne będzie wykorzystanie wyznacznika jacobiana przy ocenie manewrowości manipulatora. W [4] miara manewrowości w jest zdefiniowana jako

$$w = \sqrt{\det(J(\Theta)J^T(\Theta))} \quad (8.5)$$

która dla manipulatora nieredundantnego redukuje się do wyrażenia

$$w = |\det(J(\Theta))| \quad (8.6)$$

W dobrym projekcie manipulatora występuje duża przestrzeń robocza, co charakteryzuje wysoka wartość w .

Jakkolwiek analiza prędkości uzasadnia stosowanie wskaźnika (8.6), to niektórzy badacze zaproponowali inne miary oceny manewrowości, wynikające z analizy przyspieszeń lub zdolności do wywierania siły. Asada [5] zaproponował sprawdzanie wartości własnych macierzy masy manipulatora kartezjańskiego w postaci

$$M_x(\Theta) = J^{-T}(\Theta) M(\Theta) J^{-1}(\Theta) \quad (8.7)$$

jako miary zdolności manipulatora do przyśpieszania w różnych kierunkach układu współrzędnych kartezjańskich. Sugeruje on graficzne przedstawienie tej miary w postaci elipsoidy bezwładności danej równaniem n -wymiarowej elipsy

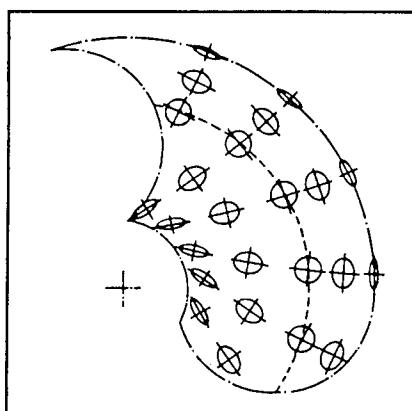
$$X^T M_x(\Theta) X = 1 \quad (8.8)$$

gdzie n jest wymiarem X . Osie elipsoidy, danej równaniem (8.8), leżą w kierunku wektorów własnych $M_x(\Theta)$, a pierwiastek kwadratowy z odpowiedniej wartości własnej daje długości osi elipsoidy. Dobrze uwarunkowane punkty w przestrzeni roboczej manipulatora są scharakteryzowane przez elipsoidy bezwładności o kształcie kulistym lub zbliżonym do kulistego.

Na rys. 8.12 pokazano w postaci wykresowej własności płaskiego manipulatora dwuczłonowego. W środku przestrzeni roboczej manipulator jest dobrze uwarunkowany, na co wskazują prawie okrągłe elipsy. Przy granicy przestrzeni roboczej elipsy spłaszczają się, wskazując na trudności przyśpieszenia w pewnych kierunkach. Inne miary przestrzeni roboczej uwarunkowanej były proponowane w [6+8].

8.5. STRUKTURY ŁAŃCUCHÓW REDUNDANTNYCH I ZAMKNIĘTYCH

Chociaż zakres tej książki w zasadzie ograniczono do manipulatorów w postaci szeregowych łańcuchów kinematycznych o siedmiu lub mniejszej liczbie połączeń ruchowych, to w tym podrozdziale krótko omówimy manipulatory wychodzące poza tę klasę.



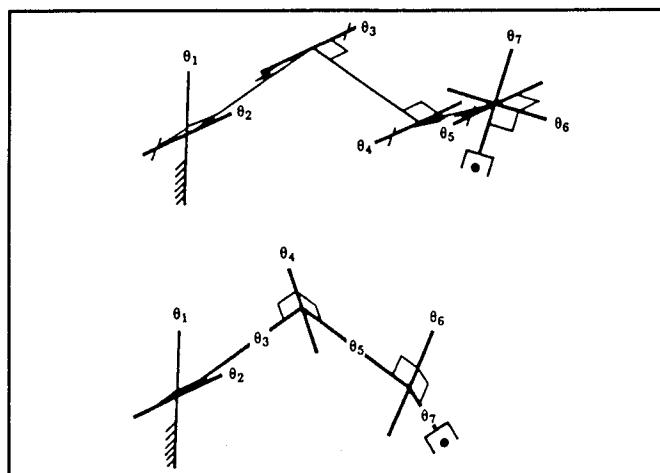
Rys. 8.12. Przestrzeń robocza płaskiego ramienia o 2 stopniach swobody scharakteryzowana przez elipsy bezwładności wg [5] (© 1984 IEEE). Linią przerywaną wskazano miejsca punktów izotropowych w przestrzeni roboczej. Przedruk za zezwoleniem

Mikromanipulatory i inne łańcuchy redundantne

Chociaż dowolne usytuowanie chwytaka w przestrzeni wymaga sześciu stopni swobody, to większa liczba połączeń ruchowych sterowanych ma również swoje zalety. Jako jeden z przykładów zastosowań takich dodatkowych stopni swobody można wymienić mikromanipulator, który właśnie znalazł pewne praktyczne zastosowania [9, 10] i wywołuje zainteresowanie badaczy. Mikromanipulator na ogół składa się z kilku szybko poruszających się i dokładnie sterowanych połączeń, ulokowanych w pobliżu członu roboczego "konwencjonalnego" manipulatora. Konwencjonalny manipulator wykonuje ruchy o dużych zakresach, a mikromanipulator, zazwyczaj o małych zakresach ruchów w połączeniach, służy do dokładnego pozycjonowania i sterowania siłą.

Dzięki dodatkowym połączeniom można uniknąć wystąpienia osobliwych położen manipulatora, jak to zasugerowano w [11, 12]. Na przykład dla dowolnej kcięci o trzech stopniach swobody występują konfiguracje osobliwe (gdy osie wszystkich trzech par obrotowych leżą w jednej płaszczyźnie), natomiast kcięci o czterech stopniach swobody może efektywnie uniknąć tych konfiguracji [13-15]. Na rys. 8.13 pokazano dwie konfiguracje, zasugerowane w [11, 12], dla manipulatorów o siedmiu stopniach swobody.

Większość potencjalnych zastosowań robotów redundantnych wynika z wymagań pracy bezkolizyjnej przy operowaniu w "zatłoczonym" środowisku pracy. Jak wykazaliśmy, manipulator o sześciu stopniach swobody może osiągnąć daną pozycję i orientację tylko na skończoną liczbę sposobów. Dodatkowe siódme połączenie zwiększa liczbę sposobów do nieskończoności, a przy wyborze konfiguracji można kierować się wymogiem ominięcia przeszkód.



Rys. 8.13. Dwa proponowane projekty manipulatorów o 7 stopniach swobody

Manipulatory o zamkniętych łańcuchach kinematycznych

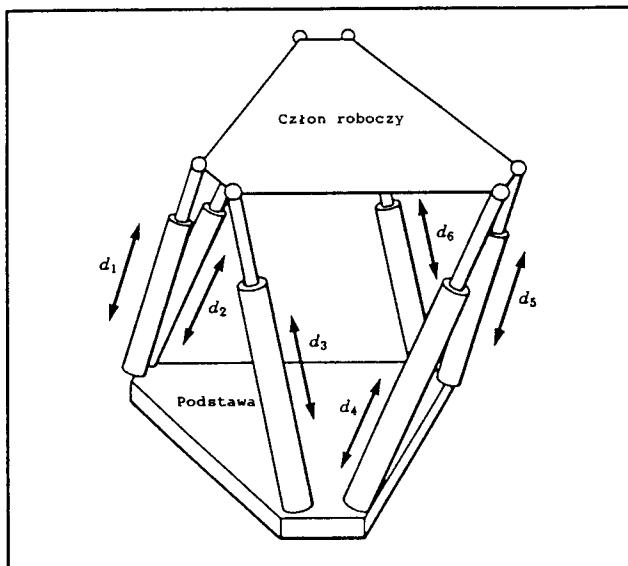
W dotychczasowej analizie rozważaliśmy tylko manipulatory o szeregowych (otwartych) łańcuchach kinematycznych. Jednak w niektórych manipulatorach występują łańcuchy zamknięte. Na przykład w robocie Motoman L-3, opisany w rozdziałach 3 i 4, występują zamknięte łańcuchy kinematyczne w mechanizmie napędowym połączeń 2 i 3. Zaletą takich struktur jest zwiększoną sztywnością mechanizmu [16]. Z drugiej strony zazwyczaj w zamkniętym łańcuchu kinematycznym osiągalne zakresy ruchów w połączeniach są ograniczone, co zmniejsza rozmiary przestrzeni roboczej.

Na rys. 8.14 przedstawiono mechanizm platformy Stewarta o zamkniętym łańcuchu kinematycznym, alternatywnym do szeregowego manipulatora o sześciu stopniach swobody. Pozycja i orientacja "członu roboczego" są sterowane za pomocą zmian długości sześciu silowników, łączących platformę z podstawką. Każdy z silowników jest przyłączony do podstawy za pomocą połączenia o dwóch stopniach swobody oraz połączony z platformą za pomocą przegubu kulistego o trzech stopniach swobody. Podkreśla to wspólną cechę charakterystyczną dla większości mechanizmów, zawierających zamknięte łańcuchy kinematyczne: mogą być wykonane jako bardzo sztywne, lecz ruchy członów są znacznie bardziej ograniczone niż w mechanizmach typu szeregowego. Ponadto mechanizm Stewarta jest interesującym przykładem stopni trudności rozwiązań zadania prostego i odwrotnego kinematyki: rozwiązanie zadania prostego jest bardzo złożone, a czasem niemożliwe do otrzymania w jawniej postaci (patrz ćwiczenia 8.7 i 8.12).

Na ogół liczba stopni swobody mechanizmu, zawierającego zamknięte łańcuchy kinematyczne, nie jest oczywista. Łączna liczba stopni swobody może być obliczona wg wzoru Grüblera [17]

$$F = 6(l - n - 1) + \sum_{i=1}^n f_i \quad (8.9)$$

gdzie F oznacza łączną liczbę stopni swobody mechanizmu, l - liczbę członów (uwzględniając podstawę), n - łączną liczbę połączeń ruchowych, a f_i - liczbę stopni swobody związanych z i -tym połączeniem. Odpowiednią wersję wzoru Grüblera dla mechanizmu płaskiego (gdy dowolny człon ma co najwyżej trzy stopnie swobody, jeśli nie występują ograniczenia) otrzymuje się zastępując we wzorze (8.9) liczbę 6 przez 3.



Rys. 8.14. Mechanizm platformy Stewarta traktowany jako manipulator równoległowodowy o sześciu stopniach swobody

PRZYKŁAD 8.2

Zastosować wzór Grüblera w celu sprawdzenia, czy rzeczywiście mechanizm Stewarta (rys. 8.14) ma sześć stopni swobody.

Liczba par kinematycznych wynosi 18 (6 przegubów krzyżakowych, 6 kuliści i 6 par przesuwnych w silownikach). Liczba członów wynosi 14 (po 2 części każdego silownika, platforma robocza i podstawa). Liczba stopni swobody par kinematycznych wynosi 36. Stosując wzór Grüblera sprawdzamy, że łączna liczba stopni swobody wynosi 6

$$F = 6(14 - 18 - 1) + 36 = 6 \quad (8.10)$$

■

8.6. SCHEMATY NAPĘDÓW

Po wybraniu odpowiedniej struktury kinematycznej, następnym ważnym zagadnieniem do rozważenia jest rodzaj napędów przegubów. Ponieważ silniki i układy przeniesienia napędu są związane ze sobą, muszą być projektowane równocześnie.

Umieszczenie silnika

Najlepszym rozwiązaniem byłoby umieszczenie silnika bezpośrednio przy napędzanym połączeniu lub w pobliżu. Jeśli silnik może rozwijać wystarczająco duży moment obrotowy lub siłę napędową, to jego człon wyjściowy można

przyłączyć wprost do połączenia ruchowego. Takie rozwiązanie jest znane jako układ napędu bezpośredniego [18], a jego zaletami są prostota projektu i łatwość sterowania. Wynika to z braku przekładni i elementów przeniesienia napędu między silnikiem i połączeniem ruchowym. Tak więc ruch w połączeniu może być sterowany z tą samą dokładnością co sam silnik.

Na ogół wiele odmian silników jest przystosowanych do względnie wysokich prędkości i niewielkich momentów obrotowych i dlatego wymagają układu redukcji prędkości. Ponadto silniki bywają raczej ciezarne. Jeśli mogą być one umieszczone w pewnej odległości od połączenia ruchowego i przemieszczone w stronę podstawy manipulatora, całkowita bezwładność manipulatora może być znacznie zmniejszona. To z kolei pozwala na zmniejszenie wielkości silników. Aby osiągnąć te korzyści, pomiędzy silnikiem i połączeniem ruchowym potrzebny jest układ przeniesienia napędu.

Reduktor, występujący w układzie napędowym między połączeniem ruchowym i oddalonym silnikiem, może być umieszczony przy silniku lub przy połączeniu. Pewne rozwiązania łączą funkcje przeniesienia napędu i redukcji. Oprócz zwiększenia złożoności manipulatora główną wadą układów przeniesienia i redukcji jest wprowadzenie dodatkowego tarcia i podatności do mechanizmu. Gdy reduktor jest umieszczony przy przegubie, wtedy układ przeniesienia napędu będzie pracował przy dużej prędkości i małym momencie obrotowym. Mały moment oznacza, że nie będzie wielkiego problemu z podatnością. Jednak w przypadku znacznej masy reduktora traci się część zalet silników montowanych w pewnej odległości od połączenia ruchowego.

W rozdziale 3 podano szczegółowy schemat napędu manipulatora Yasukawa Motoman L-3, jako typowy projekt, w którym silniki są montowane w pewnej odległości, a wynikowe ruchy par obrotowych są związane ze sobą. Równania (3.15) pokazują jawnie, jak ruchy silników wpływają na ruchy par obrotowych. Zauważmy, że np. ruch silnika 2 wywołuje ruchy par obrotowych 2, 3 i 4.

Optymalny rozkład przełożeń przekładni będzie zależny od podatności przekładni, masy reduktora, tarcia w układzie redukcyjnym i możliwości uwzględnienia tych czynników w projekcie manipulatora.

Układy redukcji prędkości i przeniesienia napędu

Najczęściej stosowanym elementem w reduktorach są przekładnie zębate. Mogą one zapewnić duże przełożenia przy dość zwartych konstrukcjach. Pary kół zębatych stosuje się do połączenia wałów równoległych (przekładnie walcowe), prostopadłych, przecinających się (przekładnie stożkowe), wałów skośnych (przekładnie ślimakowe lub hipoidalne) lub w innych konfiguracjach. Różne typy przekładni zębatych mają różne przełożenia, charakterystyki zużycia i własności tarciowe.

Główna wada przekładni zębatej jest występowanie luzu i tarcia. Luz, który wynika z niedoskonałego zazębienia, może być zdefiniowany jako maksymalny kąt obrotu koła wyjściowego, przy ustalonym położeniu koła wejściowego. Jeśli koła są zazębione ciasno, w celu wyeliminowania luzu, to następuje wzrost tarcia. Bardzo dokładne i precyzyjne zmontowane przekładnie minimalizują te wpływy, lecz zwiększały koszty ich wykonania.

Przełożenie przekładni zębatej η jest miarą redukcji prędkości i zwiększenia momentu w przekładni. Dla układów redukujących prędkość będziemy definiować $\eta > 1$, tak że zależności między prędkościami wejściową i wyjściową oraz momentami są następujące

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_o &= (1/\eta)\dot{\theta}_i \\ \tau_o &= \eta\tau_i\end{aligned}\tag{8.11}$$

gdzie $\dot{\theta}_o$ i $\dot{\theta}_i$ oznaczają prędkości wyjściową i wejściową, a τ_o i τ_i - momenty wyjściowy i wejściowy.

Druga obszerna klasa elementów służących do redukcji prędkości obejmuje elastyczne taśmy, paski i pasy. Ponieważ wszystkie te elementy muszą być dostatecznie elastyczne, aby opasać koła, to wykazują również skłonność do podatności w kierunku podłużnym. Podatność tych elementów jest proporcjonalna do ich długości. Ze względu na tę podatność układy takie powinny być wyposażone w pewien mechanizm wstępnie napięcia pasa, aby zapewnić jego ścisłe przyleganie. Jednak duże napięcia wstępne mogą dodatkowo wywołać odkształcenie elementu podatnego i spowodować wzrost sił tarcia.

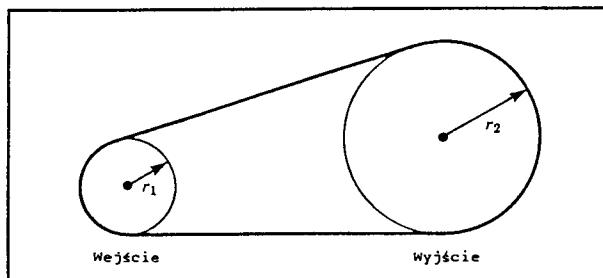
Paski lub elastyczne taśmy mogą być użyte w postaci zamkniętej pętli lub jako ciągna, wstępnie naprężone. Cięgna, napięte przez sprężynę w jednym kierunku, można byłoby wykorzystać do napędu pary obrotowej w przeciwnym kierunku. Alternatywnie, dwa opisane powyżej układy mogą przeciwdziałać jeden drugiemu. Takie rozwiązanie eliminuje problem wystąpienia nadmiernego napięcia wstępnego, lecz wymaga zastosowania większej liczby silników.

Łańcuchy rolkowe są podobne do elastycznych pasów, lecz mogą być opasane wokół względnie małych kół łańcuchowych, przy zachowaniu wysokiej ich sztywności. Ze względu na zużycie i znaczne obciążenia sworzni łączących ogniwa łańcucha, układ pasków zębatach w pewnych zastosowaniach może być bardziej zwarty niż łańcuch rolkowy.

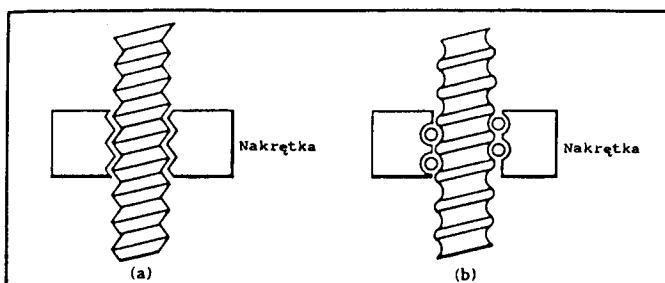
Pasy, paski, taśmy i łańcuchy napędowe wykazują zdolność łączenia przenoszenia ruchu z jego redukcją. W przekładni, pokazanej na rys. 8.15, wejściowe koło pasowe ma promień r_1 , a koło wyjściowe promień r_2 . Przełożenie tej przekładni wynosi

$$\eta = r_2/r_1\tag{8.12}$$

Przekładnie śrubowe lub śrubowe toczne stanowią inne popularne rozwiązania reduktorów o zwartej postaci (rys. 8.16). Śruby są bardzo sztywne, mogą przenosić bardzo duże obciążenia i wykazują zdolność do przekształcania ruchu obrotowego w postępowy. Śruby toczne są podobne do śrub zwykłych, natomiast w nakrętce, w miejscu współpracy ze śrubą, stosuje się powrotny obieg kulek łożyskowych, toczących się między śrubą i nakrętką. Przekładnie śrubowe kulkowe mają bardzo małe tarcie i są zwykle niesamohamowne.



Rys. 8.15. Napędy taśmowe, pasowe i łańcuchowe, wykazujące zdolność do łączenia przenoszenia napędu i redukcji



Rys. 8.16. Przekładnia śrubowa (a) i przekładnia śrubowa toczno-kulkowa (b) łączące duże przełożenie i przekształcanie ruchu obrotowego w liniowy

8.7. SZTYWNOŚĆ I ODKSZTAŁCENIA

Ważnym celem projektowania większości manipulatorów jest uzyskanie odpowiedniej sztywności struktury i układu napędowego. Sztywne układy wykazują dwie ważne zalety. Pierwszą zaletą jest dokładność, ponieważ typowe manipulatory nie są wyposażone w czujniki do bezpośredniego pomiaru położenia układu narzędzia, a położenie jest obliczane w wyniku rozwiązania zadania prostego kinematyki na podstawie odczytanych współrzędnych konfiguracyjnych. W obliczeniach tych nie uwzględnia się odkształceń członów pod wpływem ich ciężarów lub innych obciążen. Inaczej mówiąc zakładamy, że nasz opis mechanizmu wg Denavita-Hartenberga pozostaje taki sam przy różnych warunkach obciążen. Drugą zaletą jest wysoka częstotliwość drgań własnych. Podatność struktury lub układu napędowego powoduje występowanie rezonansów, które mają niepożądany wpływ na działanie manipulatora. W niniejszym podrozdziale rozważymy zagadnienia sztywności i odkształceń członów manipulatora pod wpływem obciążen. Temat rezonansów podejmujemy w rozdz. 9.

Elementy podatne w układzie równoległym i szeregowym

Można łatwo wykazać (patrz ćwicz. 8.21), że sztywność zastępcza układu dwóch podatnych członów o sztywnościach k_1 i k_2 , połączonych "równolegle", wynosi

$$k_{\text{równol}} = k_1 + k_2 \quad (8.13)$$

a przy połączeniu "szeregowym" jest opisana zależnością

$$\frac{1}{k_{\text{szereg}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (8.14)$$

W rozważanych układach napędowych często występuje przypadek szeregowego połączenia zespołów redukcyjnych lub przekładniowych, związany z zastosowaniem wzoru (8.14).

Wały

Powszechnym sposobem przenoszenia ruchu obrotowego jest przenoszenie ruchu za pomocą wałów. Sztywność skrętna wału o przekroju kołowym może być obliczona [19] jako

$$k = \frac{G \pi d^4}{32 l} \quad (8.15)$$

gdzie d oznacza średnicę wału, l - długość wału, G - moduł sztywności postaciowej (ok. $7,5 \times 10^{10}$ N/m² dla stali i około trzy razy więcej dla aluminium).

Przekładnie zębate

Koła zębate, chociaż zwykle są bardzo sztywne, wprowadzają pewną podatność do układu napędowego. Przybliżony wzór do wyznaczenia sztywności zastępczej na wyjściowym kole zębatym (przyjmując wejściowe koło zębate za ustalone) jest dany [20] jako

$$k = C_g b r^2 \quad (8.16)$$

gdzie b oznacza szerokość wieńca koła, r - promień koła wyjściowego, a $C_g = 1,34 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ dla stali.

Przełożenie zmienia zastępczą sztywność układu napędowego η^2 razy. Jeśli sztywność układu napędowego przed reduktorem (tzn. po stronie wejściowej) wynosi k_i , to wtedy

$$\tau_i = k_i \delta\theta_i \quad (8.17)$$

Jeśli sztywność układu po stronie wyjściowej reduktora wynosi k_o , to wtedy

$$\tau_o = k_o \delta\theta_o \quad (8.18)$$

Stąd wynika zależność między k_i i k_o , która przy założeniu idealnej sztywności pary kół zębachcych wynosi

$$k_o = \frac{\tau_o}{\delta\theta_o} = \frac{\eta k_i \delta\theta_i}{(1/\eta) \delta\theta_i} = \eta^2 k_i \quad (8.19)$$

Zatem zębisty reduktor ma wpływ na wzrost sztywności zastępczej η^2 razy.

PRZYKŁAD 8.3

Wał o sztywności skrętnej 500 N·m/rad jest przyłączony do wejściowego koła przekładni zębatej o przełożeniu $\eta = 10$, przy czym wyjściowe koło zębate (przy ustalonym kole wejściowym) wykazuje sztywność 5000 N·m/rad. Ile wynosi zastępcza sztywność połączonego układu napędowego?

Wykorzystując zależności (8.14) i (8.19) otrzymujemy

$$\frac{1}{k_{szereg}} = \frac{1}{5000} + \frac{1}{10^2 \cdot 500} \quad (8.20)$$

lub

$$k_{szereg} = \frac{50\ 000}{11} \approx 4545,4 \text{ N·m/rad} \quad (8.21)$$

Jeśli przekładnia o względnie dużym przełożeniu stanowi ostatni element wielosegmentowego układu napędowego, to sztywność poprzednich elementów może być na ogół pominięta. ■

Pasy

W napędzie pasowym, pokazanym na rys. 8.15, sztywność jest równa

$$k = \frac{AE}{l} \quad (8.22)$$

gdzie A oznacza powierzchnię przekroju pasa, E - moduł sprężystości pasa, a l - sumę długości swobodnego pasa między kołami i jednej trzeciej długości pasa będącego w styczności z kołami [19].

Człony

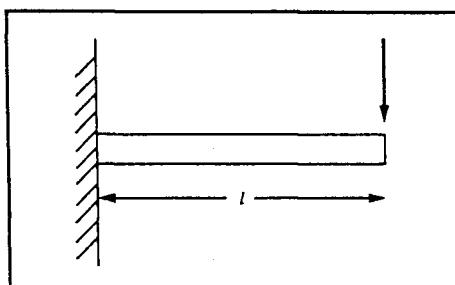
W celu wstępniego oszacowania sztywności członu można rozpatrywać pojedynczy człon jako belkę wspornikową i obliczyć jej sztywność w punkcie końcowym, jak na rys. 8.17. Dla belki wydrążonej o przekroju kołowym sztywność określa się wg wzoru

$$k = \frac{3\pi E(d_o^4 - d_i^4)}{64l^3} \quad (8.23)$$

gdzie d_i i d_o oznaczają wewnętrzną i zewnętrzną średnicę belki rurowej, l - długość, a E - moduł sprężystości (ok. $2 \cdot 10^{11}$ N/m² dla stali i około trzy razy więcej dla aluminium). Dla belki wydrążonej o przekroju kwadratowym sztywność jest dana przez

$$k = \frac{E(w_o^4 - w_i^4)}{4l^3} \quad (8.24)$$

gdzie w_i i w_o oznaczają zewnętrzną i wewnętrzną szerokość belki (tzn. grubość ścianek wynosi $(w_o - w_i)$).



Rys. 8.17. Belka wspornikowa zastosowana przy modelowaniu sztywności członu obciążonego siłą przyłożoną na jego końcu

PRZYKŁAD 8.4

Człon o przekroju kwadratowym i wymiarach $5 \times 5 \times 50$ cm oraz grubości ścianek 1 cm jest połączony z układem napędowym, zawierającym przekładnię zębatą o sztywnych kołach i przełożeniu $\eta = 10$. Wejściowe koło zębate jest napędzane poprzez wał o średnicy 0,05 m i długości 0,30 m. Jakie odkształcenie będzie wywołane przez siłę 100 N przyłożoną na końcu członu?

Stosując wzór (8.24) obliczamy sztywność członu jako

$$k_{\text{członu}} = 2 \cdot 10^{11} (0,05^4 - 0,04^4) / (4 \cdot 0,5^3) \approx 3,69 \cdot 10^5 \quad (8.25)$$

Zatem przy obciążeniu siłą 100 N występuje odkształcenie samego członu

$$\delta x = \frac{100}{k_{\text{członu}}} \approx 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad \text{lub } 0,027 \text{ cm} \quad (8.26)$$

Dodatkowo, siła o wartości 100 N przyłożona w końcu członu o długości 50 cm wywołuje moment 50 N·m działający na wyjściowe koło zębate. Koła zębate są sztywne, lecz podatność wału wejściowego

$$k_{\text{wału}} = (7,5 \cdot 10^{10}) (3,14) (5 \cdot 10^{-3})^4 / (32 \cdot 0,3) \approx 15,3 \text{ N} \cdot \text{m/rad} \quad (8.27)$$

po jej zredukowaniu na koło zębate wyjściowe wyniesie

$$k'_{\text{wału}} = (15,3) (10^2) = 1530,0 \text{ N} \cdot \text{m/rad} \quad (8.28)$$

Obciążenie momentem obrotowym 50 N·m powoduje odkształcenie kątowe

$$\delta\theta = 50,0 / 1530,0 \approx 0,0326 \text{ rad} \quad (8.29)$$

co oznacza, że całkowite liniowe odkształcenie końca członu jest równe

$$\delta x \approx 0,027 + (0,0326)(50) = 0,027 + 1,630 = 1,657 \text{ cm} \quad (8.30)$$

W naszym rozwiążaniu przyjęliśmy, że wał i człon są wykonane za stali. Ponieważ sztywności obydwu członów są zależne liniowo od E – modułu sprężystości, to w przypadku elementów aluminiowych wystarczy pomnożyć uzyskany wynik przez około 3. ■

W tym podrozdziale podaliśmy pewne proste wzory do oszacowania sztywności przekładni zębatych, wałów, pasów i członów. Dają one jedynie pewne wskazówki odnośnie wymiarowania członów i elementów przekładniowych. W praktycznych zastosowaniach wiele elementów podatnych jest bardzo trudnych do modelowania. Często układ napędowy wprowadza znacznie większą podatność od podatności samego członu. Ponadto wiele elementów podatnych układu napędowego nie było tutaj rozważanych (podatności łożysk, mocowania silnika itp.). Na ogół każda próba analitycznego oszacowania sztywności daje w wyniku wartość sztywności wyższą od rzeczywistej, ponieważ na ogół pojawia się wpływ wielu elementów podatnych.

W celu dokładniejszego wyznaczenia sztywności (jak również innych właściwości) rzeczywistych elementów układu manipulatora może być wykorzystana metoda elementów skończonych, ale jej omówienie wykracza poza zakres tej książki [21].

Silniki

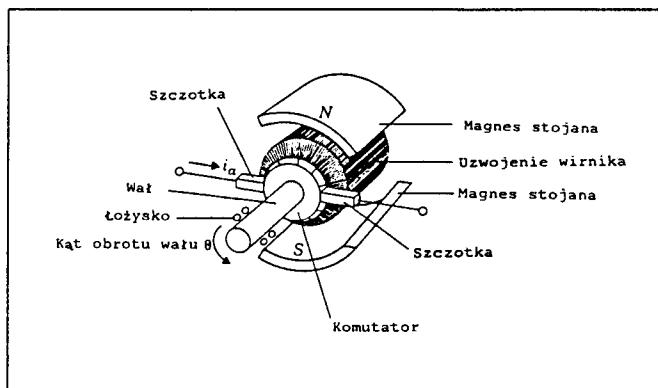
Spośród różnych rodzajów napędów manipulatora początkowo najczęściej stosowano silowniki hydrauliczne lub silniki rotacyjne. Ich konstrukcja jest dość zwarta i umożliwia wywołanie siły napędowej wystarczającej do napędu połączenia ruchowego bez reduktora. Prędkość działania układu napędowego zależy od pompy układu zasilającego, zwykle umieszczonej w pewnej odległości od manipulatora. Sterowanie położeniem układu hydraulicznego jest względnie proste. We wszystkich wcześniejszych rozwiązaniach robotów przemysłowych i w wielu współczesnych dużych robotach przemysłowych są stosowane silniki hydrauliczne.

Niestety, hydraulika wymaga dużego oprzyrządowania, takiego jak bompy, akumulatory, przewody, rozdzielacze i serwozawory. W układach hydraulicznych występują również przecieki czyniące je nieprzydatnymi w pewnych zastosowaniach. Wraz z pojawiением się bardziej zaawansowanych technik sterowania robotów, zapewniających wysoką dokładność sterowania siłą wywieraną przez silowniki, napęd hydrauliczny okazał się niekorzystny z powodu tarcia.

Silowniki pneumatyczne mają takie same zalety jak hydrauliczne, są natomiast czystsze (na zewnątrz przedostaje się powietrze zamiast płynu). Jednak dokładne sterowanie silownikami pneumatycznymi okazało się trudne z powodu ścisliwości powietrza i znacznego tarcia w uszczelnieniach.

Silniki elektryczne są najbardziej popularnym rodzajem napędu manipulatorów. Chociaż nie wykazują one takiego stosunku mocy do ciężaru jak silowniki hydrauliczne lub pneumatyczne, to łatwość ich sterowania i zasilania sprzyja zastosowaniu w manipulatorach małych i średniej wielkości.

Silniki komutatorowe prądu stałego (DC) (rys. 8.18) są najprostsze pod względem zasilania i sterowania. Prąd jest doprowadzany do obwodu wirnika przez szczotki ślizgające się po obrotowym komutatorze. Zużycie szczotek i tarcie mogą powodować pewne problemy. Nowe materiały magnetyczne umożliwiły osiąganie wysokich momentów obrotowych. Czynnikiem ograniczającym moment obrotowy tego silnika jest przegrzewanie się uzwojeń. Wysokie wartości momentu mogą być osiągnięte tylko w krótkotrwałych cyklach obciążenia, natomiast w dłuższym przedziale czasu rozwijane momenty obrotowe muszą być znacznie mniejsze.



Rys. 8.18. Silniki komutatorowe prądu stałego, zaliczane do najczęściej spotykanych silników w napędach manipulatora. Franklin, Powell, Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, © 1988, Addison-Wesley, Reading, MA. Przedruk za zezwoleniem

Silniki bezszczotkowe rozwiązują problemy zużycia i tarcia szczotek. Tutaj uzwojenie pozostaje nieruchome, a wiruje pole magnetyczne. Czujnik umieszczony na wirniku służy do odczytu kąta obrotu wału, który jest następnie wykorzystywany przez zewnętrzny układ elektroniczny do wytworzenia zmiennego pola. Inną zaletą silników bezszczotkowych jest to, że posiadają one uzwojenie zewnętrzne, związane z obudową silnika, co zapewnia znacznie lepsze chłodzenie. Osiągane wartości momentu obrotowego są nieco wyższe niż w silnikach szczotkowych o podobnych wymiarach.

Silniki prądu zmiennego (AC) i silniki krokowe nie są często stosowane w robotach przemysłowych. Trudności w sterowaniu tych pierwszych i niewielkie momenty obrotowe tych drugich ograniczają ich zastosowanie.

8.8. CZUJNIKI POŁOŻENIA

Prawie wszystkie manipulatory są napędzane przez serwonapędy. Oznacza to, że sygnał sterujący siłą lub momentem siły rozwijanym przez silnik jest obliczany na podstawie znajomości wartości błędu między odczytaną i pożądaną współrzędną. Wymaga to stosowania czujnika pozycji w każdym połączeniu ruchowym.

W większości rozwiązań czujnik pozycji jest umieszczany wprost na wale silnika. Jeśli układ napędowy jest dość sztywny i nie występują luzy, to rzeczywiste kąty obrotów w połączeniach mogą być obliczane na podstawie pozycji wału silnika. Takie umieszczenie czujnika i silnika jest łatwiejsze do sterowania.

Najbardziej popularnym urządzeniem do pomiaru położenia w pętli sprzężenia zwrotnego jest przyrostowy optyczny przetwornik położenia (tzw. enkoder optyczny). Gdy wał przetwornika obraca się, to przyrząd ten wytwarza dwa prostokątne impulsy przesunięte w fazie o $\pi/2$ rad. Kąt obrotu wału jest określany przez zliczanie liczby impulsów, a kierunek obrotu - przez przesunięcie fazowe tych dwóch fal prostokątnych. Typowe przetworniki impulsowe zawierają od 16 do 10 000 linii na 1 obrót. Każda linia daje cztery impulsowe sygnały, co przy zliczaniu elektronicznym umożliwia osiągnięcie dokładności 0,01 stopnia. Nowe techniki optyczne i interpolacyjne powodują ciągłą poprawę rozdzielczości tych przetworników.

Resolwery są przyrządami, generującymi na wyjściu dwa sygnały analogowe: jeden o wartości sinusa kąta obrotu wału, a drugi - kosinusa. Kąt obrotu wału jest wyznaczany na podstawie różnicy amplitud tych dwóch sygnałów. Wynik pomiaru jest funkcją jakości resolwera i wielkości zakłóceń wprowadzanych do układu elektronicznego i przewodów. Resolwery są bardziej niezawodne niż enkodery optyczne, lecz ich rozdzielczość jest mniejsza. Typowe resolwery nie mogą być umieszczane wprost w połączeniu ruchowym bez zastosowania dodatkowej przekładni w celu zwiększenia rozdzielczości.

Potencjometry są najprostszymi czujnikami pozycji. Połączone w konfiguracji mostka wytwarzają napięcie proporcjonalne do pozycji wału. Trudności w osiągnięciu dobrej rozdzielczości i liniowości oraz występowanie zakłóceń znacznie ograniczają ich zastosowanie.

Tachometry są czasem stosowane w celu dostarczenia sygnału analogowego, proporcjonalnego do prędkości wału. Sprzężenie zwrotne prędkości uzyskuje się również przez różniczkowanie względem czasu funkcji położen, otrzymanej w wyniku pomiarów. Jednak numeryczne różniczkowanie może wprowadzać zakłócenia, jak również opóźnienie czasowe. Mimo tych potencjalnych trudności większość manipulatorów nie jest wyposażona w układy bezpośredniego pomiaru prędkości.

8.9. CZUJNIKI SIŁY

W celu pomiaru siły, wywieranej przez człon roboczy na otoczenie w miejscu styku, zaprojektowano wiele różnych przetworników. W większości tych czujników stosuje się tensometry, wykonane na bazie półprzewodników lub folii metalowych. Tensometry nakleja się na metalowe elementy manipulatora, a wytwarzany wyjściowy sygnał jest proporcjonalny do odkształcenia elementu. Przy projektowaniu tego typu czujnika siły projektant powinien uwzględnić następujące zagadnienia:

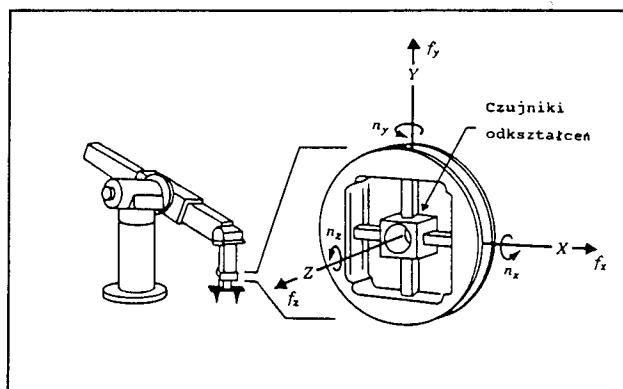
1. Ile czujników jest potrzebnych do uzyskania pożądanej informacji?

2. Jak czujniki są usytuowane względem siebie?
3. Jaka struktura zapewnia dobrą czułość przy zachowaniu odpowiedniej sztywności?
4. Jakie zabezpieczenie przed mechanicznym przeciążeniem może być wbudowane w przyrządzie?

Zwykle czujniki pomiarowe umieszcza się w wielu miejscach manipulatora:

1. Przy silniku napędowym połączenia ruchowego. Umieszczony tam czujnik mierzy siłę lub moment napędowy na wale wyjściowym silnika lub reduktora. Dostarcza on informacji użytecznej dla pewnych układów sterowania, lecz zazwyczaj nie zapewnia dobrego sterowania siłą w miejscu styku końcówki wykonawczej z otoczeniem.
2. Między członem roboczym i ostatnim połączeniem ruchowym manipulatora. Taki czujnik zwykle nazywa się czujnikiem kości. Stanowi on układ mechaniczny wyposażony w tensometry, które mogą mierzyć siłę i moment siły działające na końcówkę roboczą. Zwykle czujniki te mogą mierzyć od trzech do sześciu składników wektora siła/moment siły obciążenia członu roboczego.
3. W "palcach" chwytaka. W specjalnie wykonane palce pomiarowe wbudowane są czujniki tensometryczne służące do pomiaru od jednego do czterech składowych obciążenia działającego na każdy palec.

Jako przykład, na rys. 8.19 pokazano szczegół konstrukcyjny popularnego czujnika siły kości, zaprojektowanego przez Scheinmana [22]. Do krzyżowego układu beleczek przyrządu przymocowanych jest osiem par półprzewodnikowych czujników odkształceń. Każda para czujników jestłączona w dzielnik napięcia. Przy wykonywaniu pomiaru siły osiem analogowych sygnałów napięciowych jest przekształcanych na sygnały cyfrowe i wczytywanych do komputera. Za pomocą określonej wcześniej macierzy wzorcującej 6×8 sygnały od osmiu



Rys. 8.19. Szczegół konstrukcyjny typowej kości z czujnikiem siły

pomiarów odkształceń są przekształcane w wektor \vec{F} siła/moment siły, opisujący obciążenie działające na człon roboczy. Otrzymany wektor siła/moment siły może być przeniesiony do interesującego nas układu odniesienia, jak to pokazano w przykładzie 5.8.

Zagadnienia projektowania czujnika siły

Wykorzystanie czujnika tensometrycznego do pomiaru siły polega na pomiarze odkształcenia elementu podatnego. Dlatego jednym z pierwszych problemów wymagających rozwiązania przy projektowaniu jest dobór proporcji między sztywnością i czułością czujnika. Sztywniejszy czujnik ma odpowiednio mniejszą czułość.

Sztywność czujnika wpływa również na konstrukcję zabezpieczenia przeciążeniowego. Tensometry mogą zostać uszkodzone pod działaniem obciążenia udarowego i dlatego muszą być zabezpieczone przed takim przeciążeniem. Uszkodzeniu czujnika można zapobiec stosując ograniczniki, chroniące element pomiarowy przed przekroczeniem dopuszczalnego odkształcenia. Jednakże, bardzo sztywny czujnik może odkształcić się tylko o kilka dziesięciotysięcznych milimetra. Wykonanie ograniczników dla tak małego zakresu odkształceń jest bardzo trudne. Stąd w wielu typach czujników występuje dodatkowa podatność, wbudowana w celu osiągnięcia efektu działania ograniczników odkształcenia.

Wyeliminowanie histerezy jest jednym z trudniejszych problemów projektowania czujnika. Większość metali stosowanych do wykonania elementów podatnych, jeśli nie jest zbytnio odkształcana, wykazuje bardzo małą histerezę. Jednak połączenia nitowane, wciskane lub spawane, wykonane w pobliżu elementu pomiarowego, wprowadzają histerezę. Idealnie byłoby, gdyby sam element podatny i części w jego pobliżu były wykonane jako jedna całość.

Ponadto, przez zastosowanie pomiarów różnicowych można uzyskać poprawienie liniowości wskazań czujników momentu i wyeliminowanie wpływu zakłóceń. Natomiast stosując różne konfiguracje tensometrów można wyeliminować niekorzystne efekty związane z wpływem temperatury lub nieosiwości sił.

Czujniki foliowe są względnie trwałe, lecz powodują bardzo małą zmianę rezystancji przy pełnym wydłużeniu. Wyeliminowanie zakłóceń w przewodach czujników i wzmacniaczach elektronicznych jest niezwykle ważne dla uzyskania odpowiedniego zakresu dynamicznego.

Półprzewodnikowe czujniki wydłużenia są znacznie bardziej wrażliwe na uszkodzenie przy ich przeciążeniu. Ich zaletą jest to, że wywołują zmiany rezystancji około 70 razy większe od foliowych przy danym wydłużeniu. Dzięki tej zalecione znacznie upraszcza się zadanie przetwarzania sygnału w danym zakresie zmian wielkości dynamicznej.

Bibliografia

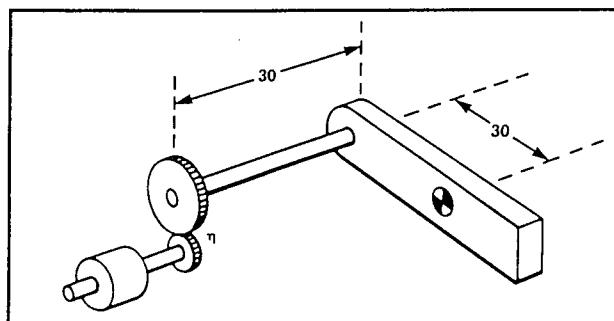
- [1] W. Rowe, Editor, *Robotics Technical Directory 1986*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, N.C., 1986.
- [2] R. Vijaykumar, K. Waldron, "Geometric Optimization of Manipulator Structures for Working Volume and Dexterity", *International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 2, 1986.
- [3] K. Waldron, "Design of Arms", in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, 1988.
- [4] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms", *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 4, No. 2, MIT Press 1985.
- [5] H. Asada, "Dynamic Analysis and Design of Robot Manipulators Using Inertia Ellipsoids", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics*, Atlanta, March 1984.
- [6] J. K. Salisbury, J. Craig, "Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues", *The Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 1, 1982.
- [7] O. Khatib, J. Burdick, "Optimization of Dynamics in Manipulator Design: The Operational Space Formulation", *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 2, No. 2, IASTED, 1987.
- [8] T. Yoshikawa, "Dynamic Manipulability of Robot Manipulators", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, St. Louis, March 1985.
- [9] J. Trevelyan, P. Kovesi, M. Ong, "Motion Control for a Sheep Shearing Robot", *The 1st Int. Symposium of Robotics Research*, MIT Press, 1984.
- [10] P. Marchal, J. Cornu, J. Detriche, "Self Adaptive Arc Welding Operation by Means of an Automatic Joint Following System", *Proceedings of the 4th Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Zaborów, Poland, September 1981.
- [11] J. M. Hollerbach, "Optimum Kinematic Design for a Seven Degree of Freedom Manipulator", *Proceedings of the 2nd International Symposium of Robotics Research*, Kyoto, Japan, August 1984.
- [12] K. Waldron, J. Reidy, "A Study of Kinematically Redundant Manipulator Structure", *Proceedings of the IEEE Robotics and Automation Conference*, San Francisco, April 1986.
- [13] V. Milenkovic, "New Nonsingular Robot Wrist Design", *Proceedings of the Robots 11/17th ISIR Conference*, SME, 1987.
- [14] E. Riven, *Mechanical Design of Robots*, McGraw-Hill, 1988.
- [15] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms", *Proceedings of the 2nd International Symposium of Robotics Research*, Kyoto, Japan 1984.

- [16] M. Leu, V. Dukowski, K. Wang, "An Analytical and Experimental Study of the Stiffness of Robot Manipulators with Parallel Mechanisms", in *Robotics and Manufacturing Automation*, M. Donath and M. Leu, editors, ASME, New York, 1985.
- [17] K. Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [18] H. Asada, K. Youcef-Toumi, *Design of Direct Drive Manipulators*, MIT Press 1987.
- [19] J. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1977.
- [20] D. Welbourne, "Fundamental Knowledge of Gear Noise-A Survey", *Proceedings of the Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions*, Institute of Mechanical Engineers, Cranfield, UK, 1979.
- [21] O. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd edition, Mc Graw-Hill, 1977.
- [22] V. Scheinman, "Design of a Computer Controlled Manipulator", M.S.Thesis, Mechanical Engineering Department, Stanford University, 1969.
- [23] K. Law, N. Dagalakis, D. Myers, "Testing", in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, 1988.
- [24] M. Roshiem, "Wrists", in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, 1988.

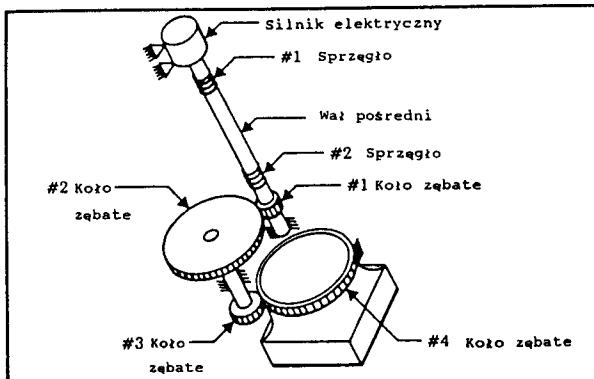
Ćwiczenia

- 8.1. [15] W urządzeniu do cięcia laserowego chcemy zastosować robota pozycjonującego. Laser wytwarza punktową nierozbieżną wiązkę promieniowania. Ile stopni swobody powinien mieć robot pozycjonujący w przypadku dowolnych zadań cięcia? Sprawdź swoją odpowiedź.
- 8.2. [15] Naszkicować możliwą konfigurację łańcucha kinematycznego robota pozycjonowania lasera z ćw. 8.1, przyjmując, że będzie on stosowany do cięcia pod różnymi katami płyt o grubości 25 mm i wymiarach 250 x 250 mm.
- 8.3. [17] Dany jest robot sferyczny, podobny do robota z rys. 8.6. Założyć, że w parach obrotowych 1 i 2 nie występują ograniczenia, a w parze 3 występuje dolne ograniczenie równe l i górne - równe u. Znaleźć strukturalny wskaźnik długości Q_L dla środka kuli tego robota.
- 8.4. [25] Wał stalowy o długości 0,30 m i średnicy 0,002 m napędza wejściowe koło zębata reduktora o przełożeniu $\eta = 8$. Wyjściowe koło zębata napędza wał stalowy o długości 0,30 m i średnicy 0,003 m. Jeśli przekładnia zębata nie wprowadza podatności własnej, jaka jest zastępca sztywność układu przeniesienia napędu?

- 8.5. [20] Na rys. 8.20 przedstawiono człon napędzany przez wał umieszczony za reduktorem. W modelu układu przyjąć ten człon jako ciało sztywne, o masie 10 kg, skupionej w punkcie odległym o 0,30 m od osi wału. Przyjąć, że koła zębate są sztywne, przełożenie przekładni wynosi η . Wał o długości 0,30 m jest wykonany ze stali. Jeśli założenia projektowe określają przyśpieszenie środka masy członu jako równe 2 g, to jaka powinna być średnica wału, aby ograniczyć odkształcenia kątowe w parze obrotowej do 0,1 rad?
- 8.6. [15] Jeśli wyjściowe koło zębate wykazuje sztywność 1000 N·m/rad przy ustalonym kole wejściowym, a wał ma sztywność 300 N·m/rad, to jaka jest łączna sztywność układu napędowego z rys. 8.20?
- 8.7. [43] Według kryterium Piepera dla otwartego łańcucha kinematycznego manipulatora można otrzymać w postaci jawniej rozwiązań zadania odwrotnego kinematyki, jeśli osie trzech kolejnych par obrotowych przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe. Wynika to z twierdzenia, że zadanie odwrotne kinematyki może być podzielone na dwa zadania przez rozpatrzenie pozycji środka kości niezależnie od orientacji układu kości. Zaproponować takie podejście dla mechanizmu Stewarta z rys. 8.14, które pozwalałoby na podobne podzielenie rozwiązania zadania prostego kinematyki.
- 8.8. [20] Jaka będzie liczba stopni swobody mechanizmu Stewarta z rys. 8.14, jeśli przegub krzyżakowy o 2 stopniach swobody zastąpi się przegubem kulowym o 3 stopniach swobody? Zastosować wzór Grüblera.
- 8.9. [22] Na rys. 8.21 pokazano uproszczony schemat układu napędowego pary obrotowej robota PUMA 560 [23]. Sztywność skrętna połączeń wynosi 100 N·m/rad, wału 400 N·m/rad, a dla każdej pary kół zębatych w wyniku pomiarów określono sztywność 2000 N·m/rad przy ustalonych kołach wej-



Rys. 8.20. Człon napędzany przez wał umieszczony za przekładnią zębatą

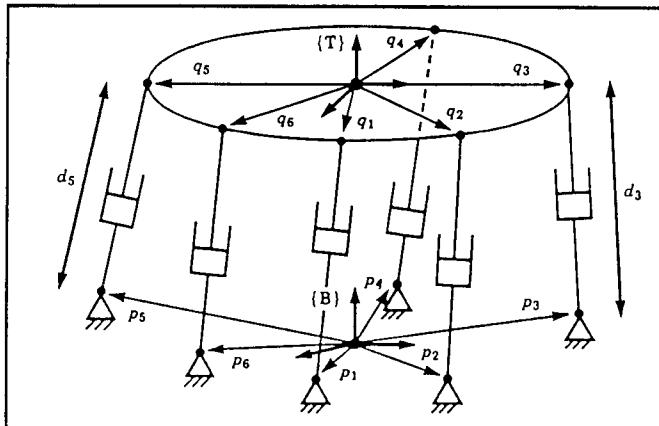


Rys. 8.21. Uproszczona wersja łańcucha napędowego przegubu 4 manipulatora PUMA 560 (wg [23]). Wg *The International Encyclopedia of Robotics*, R.Dorf and S.Nof, (editors). Rozdz. "Testing". Autorzy: K.Law, N.Dagalakis, D.Myers

ściowych. Przełożenie pierwszego i drugiego reduktora wynosi $\eta = 6^{1)}$. Przyjmując, że człony i łożyskowanie są idealnie sztywne, jaka jest sztywność zastępcza układu napędowego (tzn. gdy wał silnika jest ustalony) ?

- 8.10. [25] Jaki błąd popełnia się w przybliżonym rozwiązaniu ćwicz.8.9, jeśli uwzględnii się jedynie sztywność ostatniego stopnia reduktora ?
- 8.11. [20] Na rys. 4.14 pokazano kiść z osiami ortogonalnymi i nieortogonalnymi. Kąty zawarte między osiami par obrotowych kisci ortogonalnej są równe $\pi/2$ rad, natomiast dla kisci nieortogonalnej wynoszą odpowiednio ϕ i $\pi-\phi$. Opisać zbiór orientacji, które są *nieosiagalne* dla nieortogonalnego mechanizmu kisci. Przyjąć, że zakresy przemieszczeń kątowych we wszystkich parach obrotowych wynoszą 2π rad i że człony mogą "przejść" przez siebie, jeśli jest to konieczne (tzn. ewentualne kolizje członów nie ograniczają przestrzeni roboczej manipulatora).
- 8.12. [18] Napisać ogólne rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki dla mechanizmu Stewarta, pokazanego na rys.8.22. Dla danego położenia układu odniesienia platformy $\{T\}$ względem układu podstawy $\{B\}$, wyznaczyć zmienne długości siłowników, oznaczone przez d_1 do d_6 . Wektory p_i^B (3×1) oznaczają wektory położenia punktów przyłączenia siłowników do podstawy, określone względem układu $\{B\}$, ${}^T q_i$ - wektory położenia punktów przyłączenia siłowników do platformy, opisane względem układu $\{T\}$.
- 8.13. [20] Wyznacznik jakobianu płaskiego łańcucha dwuczlonowego z przykładu 5.3 jest dany przez

¹⁾Zadna z danych liczbowych w tym przykładzie nie odpowiada rzeczywistości.

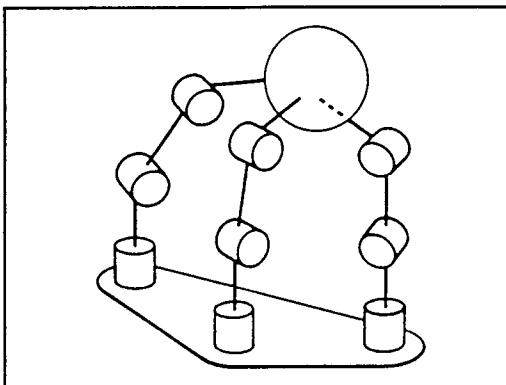


Rys. 8.22. Mechanizm Stewarta z ćwiczenia 8.12

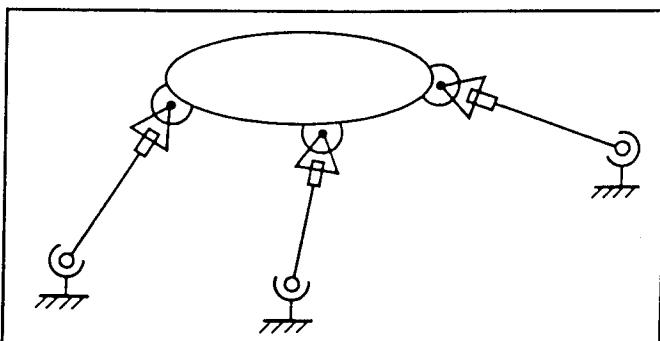
$$\det(J(\Theta)) = l_1 l_2 s_2 \quad (8.31)$$

Jeśli suma długości dwóch członów $l_1 + l_2$ jest stała, to dla jakiej wartości stosunku tych długości manewrowość manipulatora, zdefiniowana przez (8.6), będzie maksymalna?

- 8.14. [28] Dla robota SCARA przyjęto, że suma długości członów 1 i 2 musi być stała. Jaki będzie optymalny dobór względnej długości oparty na wskaźniku manewrowości danym przez (8.6)? Wcześniejszes rozwiązanie ćwiczenia 8.13 może być pomocne.
- 8.15. [35] Pokazać, że miara manewrowości określona przez 8.6 jest również równa iloczynowi wartości własnych $J(\Theta)$.
- 8.16. [15] Jaka jest sztywność skrętna łącznika aluminiowego o promieniu 0,1 cm i długości 40 cm?
- 8.17. [5] Jakie jest efektywne przełożenie η przekładni pasowej z kołem wejściowym o promieniu 2,0 cm i wyjściowym o promieniu 12,0 cm?
- 8.18. [10] Ile stopni swobody powinien wykazywać manipulator zastosowany do umieszczenia części o kształcie cylindrycznym na płaszczyźnie? Części cylindryczne są idealnie symetryczne względem ich osi głównych.
- 8.19. [25] Na rys. 8.23 pokazano chwytkę trójpalcową chwytającą obiekt. Każdy palec ma trzy pary obrotowe o jednym stopniu swobody. Punkty styku



Rys. 8.23. Trójpalczowy chwytki z palcami o trzech stopniach swobody każdy, chwytający obiekt poprzez "styki punktowe"



Rys. 8.24. Zamknięty łańcuch mechanizmu z ćwiczenia 8.20

między palcami i obiektem są modelowane jako "styk punktowy", tzn. pozycja jest ustalona, lecz względna orientacja jest dowolna we wszystkich trzech stopniach swobody. Tak więc dla celów analizy punkty styku mogą być zastąpione przez przeguby kulowe o 3 stopniach swobody. Zastosować wzór Grüblera do obliczenia liczby stopni swobody całego układu.

- 8.20. [23]** Na rys. 8.24 pokazano obiekt połączony z podstawą za pomocą trzech łączników. Każdy łącznik jest połączony z obiektem przegubem krzyżakowym o 2 stopniach swobody, a z podstawą - przegubem kulistym o 3 stopniach swobody. Ile stopni swobody ma ten układ?

8.21. [18] Sprawdź, czy jeśli dwa układy przeniesienia napędu są połączone szeregowo, to wtedy zastępca sztywność całego układu jest dana przez (8.14). Rozpatrzyć układ szeregowego połączenia dwóch sprężyn liniowych o współczynnikach sztywności k_1 i k_2 i wynikowych równaniach

$$\begin{aligned} f &= k_1 \delta x_1 \\ f &= k_2 \delta x_2 \\ f &= k_{sum} (\delta x_1 + \delta x_2) \end{aligned} \quad (8.32)$$

8.22. [20] Wyprowadzić wzór na sztywność układu przekładni pasowej w zależności od promieni kół pasowych (r_1 i r_2) i odległości środków kół pasowych d_c . Skorzystać wpierw z (8.22).

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 8)

1. Napisać program do obliczania wyznacznika macierzy 3x3.
2. Napisać program do symulacji ruchu trójczłonowego robota w dwudziestu krokach po linii prostej i ustalonej orientacji między położeniami

$${}^0_T = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0_T = \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

z przyrostem 0,05 m. W każdym położeniu obliczyć miarę manewrowości dla robota w takiej konfiguracji (tzn. wyznacznik jacobianu). Wydrukować lub sporządzić wykres wartości wyznacznika jako funkcji pozycji wzdłuż osi \hat{x}_0 .

Rozwiązać zadanie dla dwóch przypadków:

- 1) $l_1 = l_2 = 0,05$ m
- 2) $l_1 = 0,625$ m, $l_2 = 0,375$ m.

Który projekt manipulatora twoim zdaniem jest lepszy? Uzasadnij swoją odpowiedź.

LINIOWE UKŁADY STEROWANIA MANIPULATORÓW

9.1. WPROWADZENIE

Opierając się na materiale z poprzednich rozdziałów, możemy teraz wykonać obliczenia współrzędnych konfiguracyjnych jako funkcji czasu, odpowiadających pożdanym ruchom członu roboczego w przestrzeni. Ten rozdział poświęcimy rozważaniom dotyczącym możliwości zrealizowania przez manipulator takich ruchów.

Układy sterowania, które będziemy rozważać w tym rozdziale, zalicza się do klasy układów sterowania liniowego. Mówiąc ściśle, zastosowanie liniowych technik sterowania jest tylko wtedy słuszne, gdy rozpatrywany układ może być opisany za pomocą liniowych równań różniczkowych. W przypadku sterowania manipulatora takie metody są metodami przybliżonymi, ponieważ, jak przekonaliśmy się w rozdz. 6, dynamika manipulatora jest opisana za pomocą nieliniowych równań różniczkowych. Jak zobaczymy, dokonywanie takich przybliżeń jest często uzasadnione i to także jest powodem, że metody liniowe są najczęściej wykorzystywane w praktyce przemysłowej.

Ostatecznie opis liniowy będzie służył jako podstawa rozpatrywania bardziej złożonych nieliniowych układów sterowania w rozdz. 10. Chociaż traktujemy sterowanie liniowe jako przybliżoną metodę sterowania manipulatora, to uzasadnienie stosowania liniowych układów sterowania opiera się nie tylko na doświadczeniu. W rozdz. 10 wykażemy, że pewien liniowy układ sterowania spełnia swoją rolę nawet bez uciekania się do liniowej aproksymacji dynamiki manipulatora. Czytelnicy zaznajomieni z układami sterowania liniowego mogą opuścić pierwsze cztery podrozdziały.

9.2. SPRZĘŻENIE ZWROTNE I ZAMKNIĘTY UKŁAD STEROWANIA

Będziemy modelować manipulator jako mechanizm, wyposażony w każdym połączeniu ruchowym w czujnik do pomiaru położenia oraz w układ napędowy, wywierający siłę lub moment napędowy na sąsiadni człon o wyższym numerze¹⁾. Znaczna większość robotów jest wyposażona w czujniki do pomiaru położenia umieszczone bezpośrednio w każdym połączeniu ruchowym, chociaż czasem stosowane jest inne rozmieszczenie tych czujników. Również czasami stosowane są czujniki do pomiaru prędkości (tachometry). Mimo że w robotach przemysłowych występują różne układy napędowe, to wiele z nich może być modelowanych w opisany powyżej sposób.

Zazwyczaj planujemy ruch w połączeniach ruchowych manipulatora według zadanych trajektorii, a wielkością, którą możemy sterować, jest moment napędowy silnika. W tym celu należy zastosować układ sterowania generujący sygnały sterujące silnikiem i zapewniający realizację pożdanego ruchu. Prawie zawsze moment napędowy, rozwijany przez silnik, jest obliczany na podstawie wyniku pomiaru współrzędnej konfiguracyjnej przy wykorzystaniu sprzężenia zwrotnego w układzie.

Na rys. 9.1 pokazano zależności między generatorem trajektorii i rzeczywistym robotem. Wektor sił i momentów napędowych τ jest przekazywany z układu sterowania do robota. Czujniki manipulatora służą sterownikowi do odczytu wektorów: Θ - przemieszczeń i $\dot{\Theta}$ - prędkości w połączeniach ruchowych. Wszystkie połączenia, pokazane na rys. 9.1, oznaczają przesyłanie sygnałów w postaci wektorów $N \times 1$ (gdzie N jest liczbą połączeń ruchowych manipulatora).

Rozważmy, jaki algorytm może być uwzględniony w bloku oznaczonym na rys. 9.1 jako "układ sterujący". Jeden z możliwych algorytmów jest oparty na wykorzystaniu równania dynamiki robota (omówionego w rozdz. 6) do obliczenia momentów napędowych, wymaganych przy realizacji określonej trajek-

¹⁾Pamiętaj, że wszystkie uwagi dotyczące par obrotowych są analogiczne dla par przesuwnych i na odwrót.

torii. Ponieważ znamy wektory Θ_d , $\dot{\Theta}_d$ i $\ddot{\Theta}_d$, dane przez generator trajektorii, to możemy wykorzystać równanie (6.59) do obliczenia

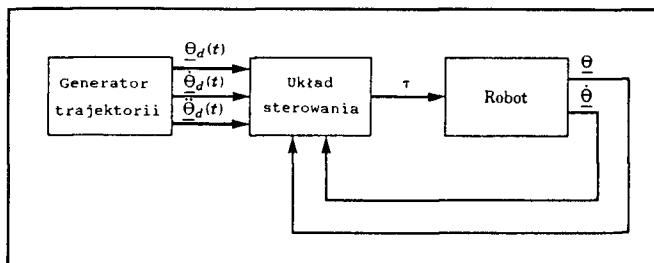
$$\tau = M(\Theta_d)\ddot{\Theta}_d + V(\Theta_d, \dot{\Theta}_d) + G(\Theta_d) \quad (9.1)$$

W ten sposób można obliczyć momenty napędowe, które są wymagane do realizacji pożądanej trajektorii. Jeśli zastosowany model jest kompletny i dokładny, a zakłócenia nie występują, to wykorzystanie równania (9.1) może doprowadzić do realizacji zadanej trajektorii. Niestety, z powodu niedoskonałości modelu dynamicznego oraz nieuniknionego występowania zakłóceń, omówiony schemat nie jest przydatny w realnych warunkach pracy. Taki układ sterowania jest określany jako układ otwarty, ponieważ nie wykorzystuje się w nim sprzężenia zwrotnego od czujników położenia (tzn. (9.1) jest tylko funkcją wektora zmiennych Θ_d i ich pochodnych określonych dla pożądanej trajektorii, a nie jest funkcją wektora Θ dla aktualnej trajektorii).

Na ogół jedynym sposobem zbudowania układu sterowania o wysokiej jakości jest wykorzystanie sprzężenia zwrotnego od czujników położenia, jak pokazano na rys. 9.1. Zazwyczaj to sprzężenie zwrotne jest wykorzystywane do obliczenia uchybu przez znalezienie różnicy między pożądanym i aktualnym przemieszczeniem oraz, podobnie, między pożądaną i aktualną prędkością

$$\begin{aligned} E &= \Theta_d - \Theta \\ \dot{E} &= \dot{\Theta}_d - \dot{\Theta} \end{aligned} \quad (9.2)$$

W układzie sterowania obliczana jest wartość wymaganego momentu napędowego, rozwijanego przez silnik, w funkcji uchybu. Oczywiście, podstawowym celem jest obliczenie sił/momentów napędowych, zmniejszających uchyby. Układ sterowania, wykorzystujący sprzężenie zwrotne, jest nazywany układem zamkniętym. Taki zamknięty układ sterowania manipulatora jest widoczny na rys. 9.1.



Rys. 9.1. Schemat blokowy układu sterowania robota

Celem projektowania układu sterowania jest zapewnienie, aby układ zamknięty speniał główne warunki poprawnej pracy. Podstawowym kryterium jest tutaj **stabilność** układu. Dla naszych celów będziemy definiować układ jako stabilny, jeśli błędy pozostają "małe" przy realizowaniu różnych pożądanych trajektorii, nawet przy występowaniu pewnych "umiarkowanych" zakłóceń. Należy podkreślić, że niewłaściwie zaprojektowany układ sterowania czasem może być przyczyną niestabilnej pracy, zwiększaając uchyb, zamiast go zmniejszać. Dlatego pierwszym zadaniem przy projektowaniu układu sterowania jest sprawdzenie jego stabilności, a drugim - sprawdzenie poprawności działania układu zamkniętego. W praktyce taki "dowód" można przeprowadzić wykorzystując pewien aparat matematyczny, opierając się na określonych założeniach i modelach, jak również na drodze doświadczalnej (przez symulację lub eksperiment).

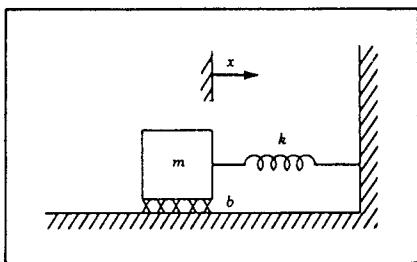
Ze schematu przedstawionego na rys. 9.1, na którym wszystkie linie przesyłania sygnałów dotyczą wektorów $N \times 1$, wynika, że układ sterowania manipulatora jest układem wielowejściowym i wielowyściowym (MIMO). W tym rozdziale przyjmiemy prosty sposób projektowania układu sterowania, traktując każdy napęd jako oddzielny obiekt sterowania. Zatem dla manipulatora o N stopniach swobody będziemy projektować N niezależnych układów sterowania, każdy z jednym wejściem i jednym wyjściem (SISO). Takie podejście jest obecnie stosowane przez większość producentów robotów przemysłowych. Zastosowanie **niezależnego sterowania napędów** jest pewnym przybliżeniem, ponieważ równania ruchu (wyprowadzone w rozdz. 6) nie są niezależne, lecz sprzężone. Ponadto w tym rozdziale będzie przedstawione uzasadnienie podejścia liniowego, szczególnie dla przypadku bardzo złożonych manipulatorów.

9.3. UKŁADY LINIOWE DRUGIEGO RZĘDU

Zanim zaczniemy rozważać problem sterowania manipulatora, rozpatrzmy prosty układ mechaniczny pokazany na rys. 9.2, złożony z ciała o masie m i sprężyny o sztywności k . W tym układzie występuje tarcie o współczynniku b . Ponadto zaznaczono położenie startowe i dodatni zwrot liniowego przemieszczenia ciała. Przyjmując siłę tarcia jako proporcjonalną do prędkości masy m , warunek równowagi sił działających na masę m prowadzi wprost do równania ruchu w postaci

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (9.3)$$

Stąd wynika, że równanie dynamiki układu otwartego o jednym stopniu swobody jest równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach [1]. Rozwiązaniem równania różniczkowego (9.3) jest funkcja $x(t)$,



Rys. 9.2. Układ sprężyna-masa z tarciem

określającą ruch masy m . Rozwiążanie będzie zależne od warunków początkowych, tj. początkowego położenia i prędkości.

Wykorzystamy ten prosty układ mechaniczny jako przykład, na którym prześledzimy pewne podstawowe pojęcia dotyczące układu sterowania. Niestety, nie jest możliwe omówienie teorii sterowania w takim krótkim ujęciu. Będziemy rozpatrywać zadanie sterowania przyjmując tylko, że student jest zaznajomiony z prostymi równaniami różniczkowymi. Zatem nie będziemy stosować wielu popularnych narzędzi teorii sterowania, np. przekształcenia Laplace'a lub innych powszechnie stosowanych metod. Dobrym podręcznikiem z tej dziedziny jest [4].

Rozpatrując układ przedstawiony na rys. 9.2, intuicyjnie można przewidywać kilka różnych charakterystycznych jego zachowań. Na przykład w przypadku bardzo słabej sprężyny (tzn. małej wartości k) i dużego tarcia (tzn. dużej wartości b) można wyobrazić sobie ciało wytrącone z położenia równowagi, które będzie wracać do tego położenia bardzo powoli. Jednak w przypadku bardzo sztywnej sprężyny i przy bardzo małym tarciu ciało może oscylować wiele razy, zanim zatrzyma się. Te różne możliwości wynikają z charakteru rozwiązania (9.3), które zależy od wartości parametrów: m , b i k .

Z analizy równań różniczkowych wiemy [1], że postać rozwiązania równania (9.3) zależy od pierwiastków jego równania charakterystycznego

$$ms^2 + bs + k = 0 \quad (9.4)$$

które są następujące

$$s_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad (9.5)$$

$$s_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Położenie pierwiastków s_1 i s_2 (czasami nazywanych biegunami układu) na płaszczyźnie liczb zespolonych dyktuje naturę ruchów układu. Jeśli s_1 i s_2 są liczbami rzeczywistymi, układ nie wykazuje oscylacji. Jeśli s_1 i s_2 są liczbami zespolonymi (tj. mają składnik urojony), to zachowanie układu jest oscylacyjne. Jeśli włączymy specjalny graniczny przypadek między tymi dwoma zachowaniami, to otrzymujemy trzy klasy odpowiedzi analizowanego układu:

1. **Pierwiastki rzeczywiste i różne.** Jest to przypadek, gdy $b^2 > 4mk$; tzn. tarcie przeważa i układ wolno powraca do położenia równowagi. Taki przypadek nazywa się **tłumieniem nadkrytycznym**.
2. **Pierwiastki zespolone.** W tym przypadku $b^2 < 4mk$; tzn. przeważa sprężystość i układ wykazuje zachowanie oscylacyjne. Taki przypadek nazywa się **tłumieniem podkrytycznym**.
3. **Pierwiastki rzeczywiste i równe.** Jest to specjalny przypadek, gdy $b^2 = 4mk$; tzn. tarcie i sprężystość są "zrównoważone", powodując możliwie najszybszą i nieoscylacyjną odpowiedź układu. Ten przypadek określa się jako **tłumienie krytyczne**.

Trzeci przypadek (krytycznego tłumienia) określa sytuację pożądaną, ponieważ układ "zeruje" niezerowe warunki początkowe i bez oscylacji powraca do położenia nominalnego tak szybko, jak to możliwe.

Pierwiastki rzeczywiste i różne

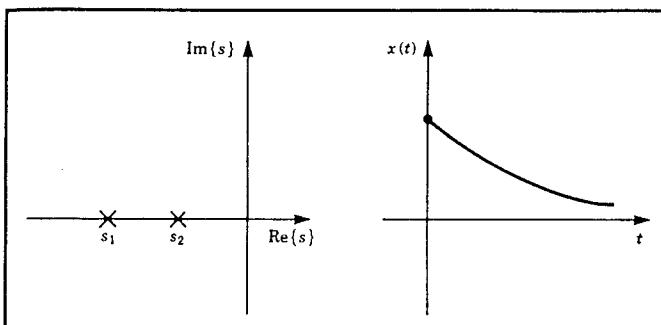
Można łatwo wykazać (przez proste podstawienie do (9.3)), że rozwiązanie $x(t)$, opisujące ruch ciała w przypadku pierwiastków rzeczywistych, różnych, ma postać

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (9.6)$$

gdzie s_1 i s_2 są dane przez (9.5). Współczynniki c_1 i c_2 są stałymi, które mogą być wyznaczone dla dowolnych warunków początkowych (tj. położenia początkowego i prędkości masy m).

Na rys. 9.3 pokazano przykładowe położenia pierwiastków i odpowiedni czas odpowiedzi przy niezerowych warunkach początkowych. Gdy pierwiastki układu drugiego rzędu są rzeczywiste i różne, to układ wykazuje ruch powolny i tłumiony.

W przypadku gdy jeden z biegunów ma wartość znacznie większą od drugiego, to biegun o większej wartości może być pominięty, jako odpowiadający wyrazowi zmierzającemu do zera szybciej od drugiego, określonego przez biegun dominujący. Taki sposób eliminacji pierwiastków można rozszerzyć na układy wyższego rzędu, np. często układ trzeciego rzędu może być badany jako układ drugiego rzędu przez rozpatrzenie tylko dwóch dominujących biegunów.



Rys. 9.3. Położenie pierwiastków i odpowiedź dla warunków początkowych, dla układu z tłumieniem nadkrytycznym

PRZYKŁAD 9.1

Określić ruch układu z rys. 9.2, jeśli wartości parametrów są równe: $m = 1$, $b = 5$ i $k = 6$, a masa (początkowo nieruchoma) startuje z pozycji $x = -1$.

Równanie charakterystyczne ma postać

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \quad (9.7)$$

Jego pierwiastki wynoszą: $s_1 = -2$ i $s_2 = -3$. Zatem rozwiązanie ma postać

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \quad (9.8)$$

Teraz wykorzystamy dane warunki początkowe: $x(0) = -1$ i $\dot{x}(0) = 0$ do wyznaczania c_1 i c_2 .

$$c_1 + c_2 = -1 \quad (9.9)$$

$$-2c_1 - 3c_2 = 0$$

Równania te są spełnione dla $c_1 = -3$ i $c_2 = 2$. Zatem ruch układu dla $t \geq 0$ jest dany przez

$$x(t) = -3e^{-2t} + 2e^{-3t} \quad (9.10)$$

■

Pierwiastki zespolone

Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego są pierwiastkami zespolonymi o postaci

$$\begin{aligned}s_1 &= \lambda + \mu i \\ s_2 &= \lambda - \mu i\end{aligned}\quad (9.11)$$

to rozwiązanie równania ma nadal postać

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (9.12)$$

Jednak rozwiązanie (9.12) jest trudne do bezpośredniego wykorzystania, jako zawierające liczby urojone. Można wykazać (patrz ćwicz. 9.1), że za pomocą wzoru Eulera

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (9.13)$$

rozwiązanie (9.12) może być przekształcone do postaci

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t) \quad (9.14)$$

Tak jak poprzednio współczynniki c_1 i c_2 są stałymi, które mogą być określone dla dowolnego zbioru warunków początkowych (tj. początkowej pozycji i prędkości masy). Jeśli zapiszemy stałe c_1 i c_2 w postaci

$$c_1 = r \cos \delta \quad (9.15)$$

$$c_2 = r \sin \delta$$

to (9.14) może być zapisane w postaci

$$x(t) = r e^{\lambda t} \cos(\mu t - \delta) \quad (9.16)$$

gdzie

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \delta &= \text{Atan2}(c_2, c_1)\end{aligned}\quad (9.17)$$

W tej postaci łatwiej jest zauważyć, że ruch wynikowy jest ruchem drgającym, którego amplituda wykładniczo maleje do zera.

Innym powszechnie stosowanym sposobem opisu drgań jest opis za pomocą współczynnika tłumienia i częstotliwości własnej. Odpowiednie zależności wyznacza się przez parametryzację równania charakterystycznego w postaci

$$s^2 + \zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (9.18)$$

gdzie ζ oznacza współczynnik tłumienia (liczbę bezwymiarową zawartą między 0 i 1), a ω_n – częstotliwość własna²⁾. Zależność między położeniami biegunków i tymi parametrami jest następująca

²⁾ Terminy współczynnik tłumienia i częstotliwość własna są również stosowane do układów z tłumieniem nadkrytycznym, w tym przypadku $\zeta > 1,0$.

$$\lambda = -\zeta \omega_n$$

$$\mu = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9.19)$$

Zgodnie z przyjętą terminologią μ oznacza urojoną współrzędną bieguna i jest czasem nazywana **częstością drgań tłumionych**. Dla układu tłumionego sprężyna-masa, przedstawionego na rys. 9.2, częstość drgań własnych i współczynnik tłumienia są dane przez

$$\zeta = \frac{b}{2 \sqrt{km}} \quad (9.20)$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

Gdy tłumienie nie występuje ($b = 0$ w naszym przykładzie), to współczynnik tłumienia staje się równy零, a gdy tłumienie jest krytyczne ($b^2 = 4km$), to współczynnik tłumienia wynosi 1.

Na rys. 9.4 pokazano przykładowe położenia biegunów i opóźnienie czasu odpowiedzi przy niezerowych warunkach początkowych. Gdy bieguni układu drugiego rzędu są zespolone, to układ wykazuje drgania lub ruch nietłumiony.

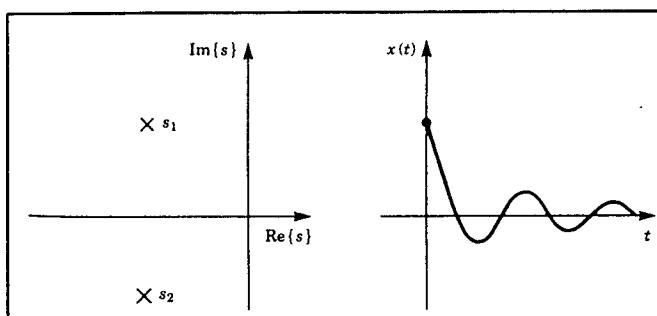
PRZYKŁAD 9.2

Określić ruch układu z rys. 9.2, jeśli wartości parametrów są równe: $m = 1$, $b = 1$ i $k = 1$, a masa (początkowo nieruchoma) startuje z położenia $x = -1$.

Równanie charakterystyczne układu ma postać

$$s^2 + s + 1 = 0 \quad (9.21)$$

a jego pierwiastki wynoszą: $s_1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ i. Zatem, odpowiedź układu można zapisać w postaci



Rys. 9.4. Położenie pierwiastków i odpowiedź na warunki początkowe dla układu z tłumieniem podkrytycznym

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \quad (9.22)$$

Teraz wykorzystamy podane warunki początkowe $x(0) = -1$ i $\dot{x}(0) = 0$ do wyznaczenia wartości c_1 i c_2

$$\begin{aligned} c_1 &= -1 \\ -\frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.23)$$

Warunki te są spełnione przez $c_1 = -1$ i $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Zatem ruch układu dla $t \geq 0$ jest dany przez

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \quad (9.24)$$

Ten wynik może być również przekształcony do postaci (9.16)

$$x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{3}{2}\pi \right) \quad (9.25)$$

■

Pierwiastki rzeczywiste i równe

Przez podstawienie do (9.3) można wykazać, że w przypadku pierwiastków rzeczywistych i równych (tzn. pierwiastka podwójnego) rozwiązanie ma postać

$$x(t) = c_1 e^{\frac{s_1 t}{2}} + c_2 t e^{\frac{s_2 t}{2}} \quad (9.26)$$

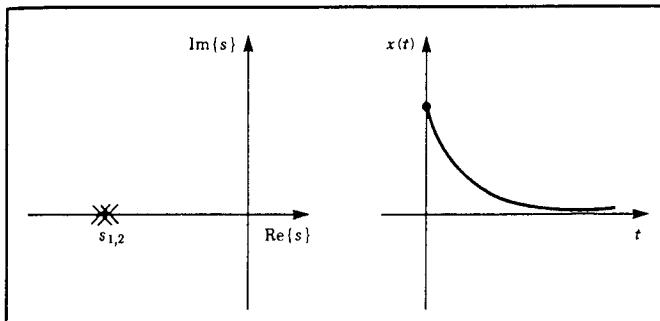
gdzie $s_1 = s_2 = -\frac{b}{2m}$, a więc (9.26) może być zapisane jako

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{b}{2m} t} \quad (9.27)$$

Poprzez zastosowanie reguły l'Hôpitala [2] można wykazać, że dla dowolnych c_1 , c_2 i a ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 + c_2 t) e^{-at} = 0 \quad (9.28)$$

Na rys. 9.5 pokazano przykładowe położenia biegunów i odpowiedź układu dla niezerowych warunków początkowych. Gdy bieguny układu drugiego rzędu są rzeczywiste i równe, to układ wykazuje ruch z tłumieniem krytycznym i szybką odpowiedzią nieoscyłacyjną.



Rys. 9.5. Położenie pierwiastka i odpowiedź dla warunków początkowych układu z tłumieniem krytycznym

PRZYKŁAD 9.3

Wyznaczyć ruch układu z rys. 9.1, jeśli wartości parametrów są równe $m = 1$, $b = 4$ i $k = 4$, a masa (początkowo nieruchoma) startuje z położenia $x = -1$.

Równanie charakterystyczne układu ma postać

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \quad (9.29)$$

a jego pierwiastki wynoszą $s_1 = s_2 = -2$. Zatem odpowiedź układu

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-2t} \quad (9.30)$$

Teraz wykorzystamy dane warunki początkowe: $x(0) = -1$ i $\dot{x}(0) = 0$ do wyznaczenia wartości c_1 i c_2

$$\begin{aligned} c_1 &= -1 \\ -2c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.31)$$

Równania te są spełnione przy $c_1 = -1$ i $c_2 = 2$. Zatem ruch układu dla $t \geq 0$ dany jest przez

$$x(t) = (-1 - 2t) e^{-2t} \quad (9.32)$$

Przedstawione w przykładach 9.1 do 9.3 układy drgające były układami stabilnymi. Taką własność wykazuje dowolny bierny układ fizyczny, podobny do układu z rys. 9.2. Podobne układy mechaniczne zazwyczaj wykazują następujące własności

$$\begin{aligned} m &> 0 \\ b &> 0 \\ k &> 0 \end{aligned} \quad (9.33)$$

W następnym podrozdziale zobaczymy, że działanie układu sterowania polega na efektywnej zmianie wartości jednego lub kilku z tych współczynników. Będzie również konieczne rozważenie, czy układ wynikowy jest stabilny, czy nie.

9.4. STEROWANIE UKŁADAMI DRUGIEGO RZĘDU

Przypuśćmy, że drgania własne naszego układu mechanicznego drugiego rzędu nie są takie, jak chcemy. Może wystąpić przypadek, że układ drgający jest tłumiony podkrytycznie, a chcielibyśmy, aby występowało tłumienie krytyczne. Na przykład jeśli całkowicie pominie się sprężystość ($k = 0$), to układ nie wraca do położenia $x = 0$ po wytrąceniu go z równowagi. Jednak dzięki odpowiedniemu wykorzystaniu czujników, silnika i układu sterowania możemy zmieniać własności układu w pożądany sposób.

Na rys. 9.6 pokazano tłumiony układ o masie m , ze sprężyną k i dodatkowym siłownikiem, który może wywierać na masę siłę f . Warunek równowagi sił działających na ciało prowadzi do równania ruchu

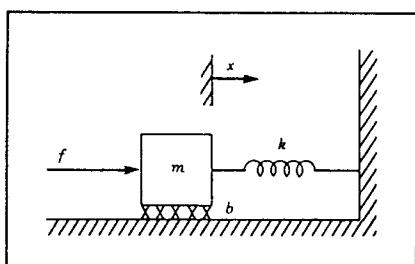
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (9.34)$$

Przyjmijmy również, że układ jest wyposażony w czujniki śledzące położenie i prędkość ciała. Zaproponujemy **prawo sterowania**, umożliwiające obliczenie siły napędowej siłownika jako funkcji sprężenia zwrotnego w postaci

$$f = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (9.35)$$

Na rys. 9.7 przedstawiono schemat blokowy układu zamkniętego, przy czym część po lewej stronie linii przerywanej jest układem sterowania (zwykle zrealizowanym komputerowo), a część po prawej stronie jest układem fizycznym. Na rysunku nie pokazano interfejsów między komputerem sterującym wyjściowymi rozkazami dla siłownika, a wejściową informacją przekazywaną z czujników.

Układ sterowania, który zaproponowaliśmy, jest układem pozycjonowania, usiłującym po prostu utrzymywać ustaloną pozycję ciała bez względu na działające siły zakłócające. W kolejnym podrozdziale zajmiemy się **nadążnym** układem sterowania, powodującym ruch ciała zgodnie z założoną trajektorią.



Rys. 9.6. Tłumiony układ złożony z masy m , sprężyny k i silownika f

Przyrównując równanie dynamiki układu otwartego (9.34) do prawa sterowania (9.35) możemy wyprowadzić równanie dynamiki układu zamkniętego

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (9.36)$$

lub

$$m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0 \quad (9.37)$$

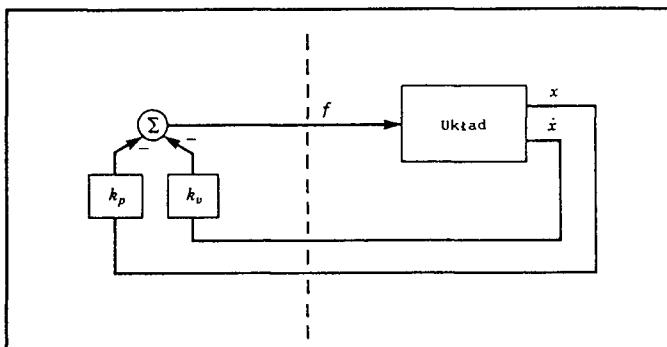
lub

$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0 \quad (9.38)$$

gdzie $b' = b + k_v$ oraz $k' = k + k_p$.

Z równań (9.37) i (9.38) wynika, że przez odpowiedni dobór współczynników wzmocnienia układu sterowania k_v i k_p możemy spowodować, aby układ zamknięty wykazywał własności dowolnego innego układu. Często wartości współczynników wzmocnienia są dobierane tak, aby uzyskać tłumienie krytyczne (tzn. $b' = 2\sqrt{mk'}$) i pewną pożądaną sztywność zamkniętej pętli daną przez k' .

Zauważmy, że wartości k_v i k_p mogą być dodatnie lub ujemne zależnie od parametrów początkowego układu. Jednak, jeśli wartości b' lub k' będą ujemne, to układ sterowania może być niestabilny. Niestabilność ta staje się oczywista, jeśli napiszemy rozwiązań równania różniczkowego drugiego stopnia (w postaci (9.6), (9.14) lub (9.26)). Również intuicyjnie można wywnioskować, że jeśli b' i k' są ujemne, to uchyb ma tendencję do powiększania się, a nie do zmniejszania.



Rys. 9.7. Układ sterowania typu zamkniętego. Komputer sterujący (na lewo od linii przerywanej) odczytuje sygnały wejściowe przekazywane z czujnika i wysyła wyjściowe rozkazy do silownika

PRZYKŁAD 9.4

Dla układu z rys. 9.6, którego parametry mają wartości: $m = 1$, $b = 1$ oraz $k = 1$, znaleźć wartości współczynników k_p i k_v dla sterowania pozycją, dające w wyniku układ z tłumieniem krytycznym, w którym sztywność zamkniętej pętli wynosi 16,0.

Jeśli chcemy, aby k' było równe 16,0, to dla tłumienia krytycznego musi zachodzić równość: $b' = 2\sqrt{mk'} = 8,0$. Ponieważ $k = 1$ i $b = 1$, to

$$\begin{aligned} k_p &= 15,0 \\ k_v &= 7,0 \end{aligned} \quad ■ \quad (9.39)$$

9.5. ROZDZIELENIE PRAWA STEROWANIA

Przygotowując się do projektowania prawa sterowania dla bardziej skomplikowanych układów, rozważmy strukturę sterownika trochę różniąca się od podanej w przykładowym zadaniu z rys. 9.6. Zgodnie z przyjętą metodą podzielimy układ sterowania na część modelową i część sprężeniową. W wyniku takiego podziału parametry układu (tj. m , b i k w tym przypadku) występują tylko w części modelowej, a część sprężeniowa jest od nich niezależna. W tym miejscu takie rozróżnienie może wydawać się nieważne, lecz stanie się bardziej istotne przy rozwiązyaniu układów nieliniowych w rozdz. 10. W całej książce będziemy przyjmować podejście odpowiadające **rozdzieleniu prawa sterowania**.

Równanie ruchu układu otwartego jest następujące

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (9.40)$$

Chcemy rozdzielić prawo sterowania tego układu na dwie części. W takim przypadku w części modelowej prawa sterowania będą wykorzystywane założone wartości m , b , k . Ta część prawa sterowania jest dobierana tak, aby **zredukować układ do masy jednostkowej**. W rozwiązaniu przykładu, zamieszczonym poniżej, sformułowanie to będzie wyjaśnione. W drugiej części prawa sterowania wykorzystuje się sprężenie zwrotne do modyfikowania własności układu. Ponieważ część modelowa prawa sterowania dotyczy układu z masą jednostkową, to projekt części sprężeniowej jest bardzo prosty - współczynniki wzmacnienia są dobierane jak przy sterowaniu układu z pojedynczą masą jednostkową (tzn. bez tarcia i bez sztywności).

Modelowa część prawa sterowania przyjmuje postać

$$f = \alpha f' + \beta \quad (9.41)$$

gdzie α i β oznaczają funkcje lub stałe, dobierane tak, żeby f' pełniło rolę nowego wejścia do układu, którym okazuje się masa jednostkowa. Dla

układu o takiej strukturze prawa sterowania otrzymuje się równanie (jako wynik połączenia równań (9.40) i (9.41)) w postaci

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta \quad (9.42)$$

Oczywiście, aby układ modelował ruch masy jednostkowej przy wymuszeniu f' , to dla takiego szczególnego układu musimy dobrać α i β jako

$$\alpha = m \quad (9.43)$$

$$\beta = b\dot{x} + kx$$

Podstawiając te zależności do równania (9.42) otrzymujemy równanie układu

$$\ddot{x} = f' \quad (9.44)$$

Jest to równanie ruchu dla masy jednostkowej. Dalej postępujemy tak, jakby równanie (9.44) było równaniem dynamiki otwartego układu sterowania. Przyjmujemy prawo sterowania w celu obliczenia f' właśnie tak, jak zrobiliśmy to poprzednio

$$f' = -k_v \dot{x} - k_p x \quad (9.45)$$

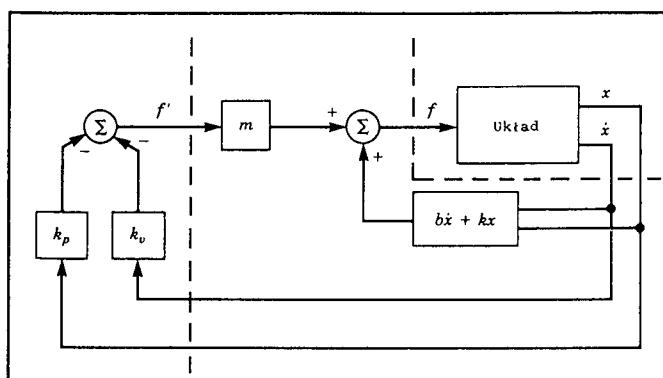
Połączenie tego prawa sterowania z równaniem (9.44) daje

$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0 \quad (9.46)$$

Przy wykorzystaniu tej metody, ustalenie współczynników wzmacniania układu sterowania jest proste i niezależne od parametrów układu. Dla tłumienia krytycznego otrzymuje się zależność

$$k_v = 2\sqrt{k_p} \quad (9.47)$$

Na rys. 9.8 pokazano schemat blokowy układu sterowania, w którym wykorzystano metodę rozdzielenia prawa sterowania i który dotyczy układu pokazanego na rys. 9.6.



Rys. 9.8. Zamknięty układ sterowania wykorzystujący metodę rozdzielonego prawa sterowania

PRZYKŁAD 9.5

Dla układu z rys. 9.6 o wartościach parametrów: $m = 1$, $b = 1$ i $k = 1$, znaleźć wartości α , β i współczynniki wzmocnienia k_p i k_v dla prawa sterowania pozycją, tak aby w wyniku otrzymać zamknięty układ z tłumieniem krytycznym o sztywności 16,0.

Przyjmujemy:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= \dot{x} + x \end{aligned} \quad (9.48)$$

tak aby układ modelował ruch masy jednostkowej o fikcyjnym wymuszeniu f' . Następnie podstawiamy wzmocnienie k_p do wzoru na pożądaną sztywność układu zamkniętego i obliczamy $k_v = 2\sqrt{k_p}$ dla tłumienia krytycznego. Stąd

$$\begin{aligned} k_p &= 16,0 \\ k_v &= 8,0 \end{aligned} \quad (9.49)$$

9.6. STEROWANIE NADAŻNE

Zamiast dążyć do utrzymywania ciała w pożdanym położeniu, ulepszmy nasz sterownik tak, aby można było zmusić ciało do ruchu zgodnie zadaną trajektorią. Trajektorię podaje się zwykle w postaci funkcji czasu $x_d(t)$, określającej pożdaną pozycję ciała. Przyjmujemy, że trajektoria jest gładka (co oznacza, że istnieją pierwsze dwie pochodne) i że nasz generator trajektorii dostarcza x_d , \dot{x}_d i \ddot{x}_d w każdej chwili czasu t . Definiujemy uchyb między pożdaną i aktualną trajektorią jako $e = x_d - x$. Prawo sterowania, zapewniające ruch zgodny zadaną trajektorią, jest następujące

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (9.50)$$

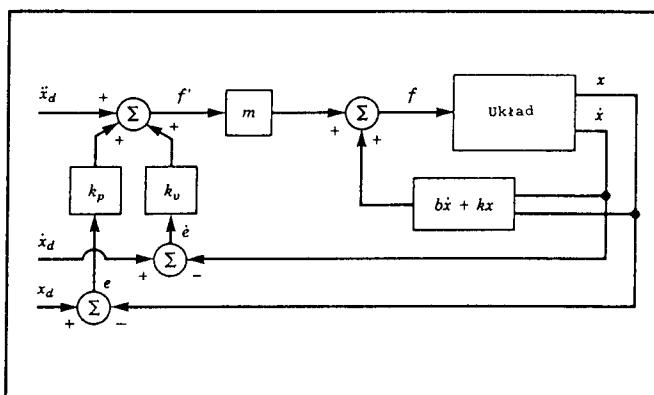
Połączenie (9.50) z równaniem ruchu masy jednostkowej (9.44) prowadzi do

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (9.51)$$

lub

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0 \quad (9.52)$$

Dla takiego równania różniczkowego drugiego rzędu możemy tak dobrąć współczynniki, aby uzyskać określoną odpowiedź układu (często z tłumieniem



Rys. 9.9. Sterownik nadążnego układu z rys. 9.6 dla zadanej trajektorii

krytycznym). Takie równanie nazywa się czasem równaniem stanu w przestrzeni uchybu, ponieważ opisuje zmiany uchybu względem pożąданej trajektorii. Na rys. 9.9 pokazano schemat blokowy naszego nadążnego układu sterowania.

Jeśli nasz model jest dokładny (tzn. znamy dokładne wartości m , b i k) oraz nie występują zakłócenia i nie ma uchybu początkowego, to ruch ciała będzie dokładnie zgodny z pożądaną trajektorią. Jeśli wystąpi uchyb początkowy, to zostanie wyzerowany zgodnie z równaniem (9.52) i układ nadążny będzie dokładnie realizował zadaną trajektorię.

9.7. ELIMINOWANIE ZAKŁÓCEŃ

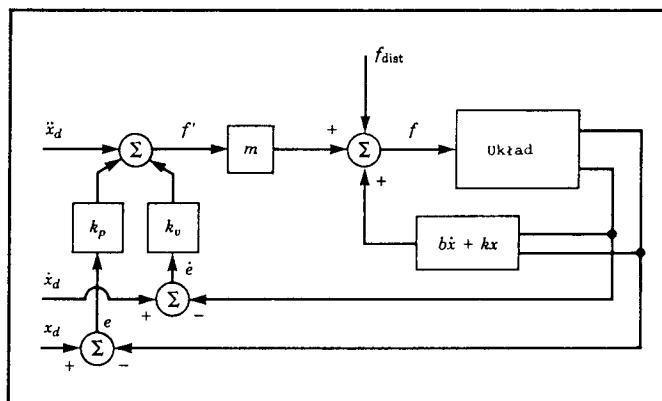
Jednym z zadań sterowania jest eliminowanie zakłóceń, czyli utrzymywanie prawidłowego funkcjonowania (tzn. małych błędów) nawet przy występowaniu pewnych zakłóceń zewnętrznych. Na rys. 9.10 pokazano nadążny układ sterowania z dodatkowym wejściem siły zakłócającej f_{dist} . Analiza naszego układu o zamkniętej pętli prowadzi do równania uchybu

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = f_{dist} \quad (9.53)$$

Równanie (9.53) jest równaniem różniczkowym z funkcją wymuszenia po prawej stronie. Jeśli f_{dist} jest ograniczona, to znaczy że istnieje stała o wartości a , dla której

$$\max_t f_{dist}(t) < a \quad (9.54)$$

wtedy rozwiązanie równania różniczkowego $e(t)$ jest również ograniczone. Stabilne układy liniowe o podanej wyżej własności określa się jako układy typu ograniczone-wiejście, ograniczone-wyjście lub BIBO [3, 4]. Właściwość ta zapewnia stabilność układu dla szerokiej klasy możliwych zakłóceń.



Rys. 9.10. Nadążny układ sterowania poddany działaniu zakłóceń

Błąd w stanie ustalonym

Rozważmy najprostszy rodzaj zakłócenia, a mianowicie gdy f_{dist} jest stała. W tym przypadku możemy wykonać **analizę stanu ustalonego** jako analizę układu pozostającego w spoczynku (tzn. że pochodne wszystkich zmiennych układu są równe零). Przyrównując do zera pochodne występujące w (9.53) otrzymuje się równanie stanu ustalonego

$$k_p e = f_{dist} \quad (9.55)$$

lub

$$e = f_{dist}/k_p \quad (9.56)$$

Wartość e , dana przez (9.56), określa **błąd w stanie ustalonym**. Zatem jest jasne, że przy wyższych wartościach współczynnika wzmacnienia układu pozytyjonowania, k_p , błąd w stanie ustalonym będzie mniejszy.

Dodanie wyrazu całkowego

W celu wyeliminowania błędu w stanie ustalonym stosuje się czasem zmodyfikowane prawo sterowania. Modyfikacja polega na wprowadzeniu wyrazu całkowego do prawa sterowania

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt \quad (9.57)$$

co daje w wyniku równanie uchybu

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{dist} \quad (9.58)$$

Wyraz dodaje się tak, aby układ nie wykazywał błędu w stanie ustalonym przy występowaniu stałych zakłóceń. Jeśli $e(t) < 0$ dla $t < 0$, to możemy zapisać równanie (9.58) dla $t > 0$ jako

$$\ddot{e} + k_v \ddot{e} + k_p \dot{e} + k_i e = \dot{f}_{dist} \quad (9.59)$$

które w stanie ustalonym (przy ustalonym zakłóceniu) przyjmuje postać

$$k_i e = 0 \quad (9.60)$$

zatem

$$e = 0 \quad (9.61)$$

Przy takim prawie sterowania układ staje się układem trzeciego rzędu, a wyznaczenie odpowiedzi układu na warunki początkowe wymaga rozwiązania odpowiedniego równania różniczkowego 3 rzędu. Często wartość k_i jest przyjmowana tak mała, że układ 3 rzędu staje się bliski układowi 2 rzędu bez tego wyrazu (tzn. można wykonać analizę dla dominujących biegunków). Prawo sterowania o postaci (9.57) jest nazywane prawem sterowania regulatorem PID lub prawem sterowania "proporcjonalno-całkowo-różniczkowym" [4]. W równaniach, dotyczących praw sterowania omawianych w tej książce, dla uproszczenia nie podano wyrazu całkowego.

9.8. STEROWANIE CIĄGŁE W CZASIE ALBO DYSKRETNE

W rozpatrywanych dotąd układach sterowania w zasadzie przyjęliśmy, że komputer sterujący wykonuje obliczenie prawa sterowania w okresie równym zeru (tzn. nieskończenie szybko), tak że wartość siły silownika f jest ciągłą funkcją czasu. Oczywiście w rzeczywistości obliczenia wymagają pewnego czasu i dlatego wynikowa siła napędowa jest dyskretną funkcją "schodkową". W całej książce będziemy stosować pewne przybliżone założenie, że dysponujemy bardzo szybkim komputerem sterującym. Takie przybliżenie jest wystarczające, jeśli częstość obliczeń nowych wartości f jest znacznie wyższa od częstości drgań własnych układu sterowanego. W przypadku sterowania dyskretnego w czasie lub sterowania numerycznego nie robi się tego przybliżenia, lecz przy analizie układu bierze się pod uwagę częstość reagowania układu sterowania [3].

Będziemy na ogół przyjmować, że obliczenia mogą być wykonane dostatecznie szybko, aby nasze założenie dotyczące ciągłości funkcji czasu pozostało ważne. Założenie to prowadzi do pytania: jaka częstość będzie wystarczająca? Pojawia się tutaj kilka zadań do rozważenia przy doborze odpowiednio wysokiej częstości reagowania (lub próbkowania):

Śledzenie wejściowych sygnałów odniesienia: Częstość wejściowych sygnałów odniesienia określa dolną granicę częstości próbkowania, która

powinna być co najmniej dwa razy wyższa od częstotliwości pasma wejściowych sygnałów odniesienia. Zazwyczaj nie jest to czynnikiem ograniczającym.

Eliminowanie zakłóceń: Przy eliminowaniu zakłóceń podaje się górne ograniczenie funkcjonowania systemu jako funkcję czasu. Jeśli wzorcowy okres jest dłuższy od czasu korelacji efektów zakłócających (przy założeniu statystycznego modelu zakłóceń przypadkowych), wtedy te zakłócenia nie będą stłumione. Praktycznie przyjmuje się, że okres próbkowania powinien być 10 razy krótszy od czasu korelacji zakłóceń [3].

Zapobieganie niejednoznaczności: Każdorazowo przy stosowaniu czujnika analogowego w schemacie sterowania numerycznego pojawiają się problemy związane z niejednoznacznością, chyba że wyjście czujnika ścisłe ograniczono pasmowo. W większości przypadków dla sensorów nie ogranicza się pasma częstotliwości wyjścia i dlatego częstotliwość próbkowania powinna być dobrana tak, aby zminimalizować energię błędного sygnału.

Rezonanse strukturalne: W naszej charakterystyce dynamiki manipulatora nie uwzględniliśmy zjawiska zginania. Wszystkie rzeczywiste mechanizmy mają skończoną sztywność i dlatego mogą w nich występuwać drgania różnego rodzaju. Jeśli ważne jest stłumienie tych drgań (co często jest pożądane), to musimy wybrać częstotliwość próbkowania co najmniej dwukrotnie większą od częstotliwości własnej tych rezonansów. Do tematu rezonansu powrócimy jeszcze w tym rozdziale.

9.9. MODELOWANIE I STEROWANIE JEDNEGO STOPNIA SWOBODY

W tym podrozdziale rozwiniemy uproszczony model manipulatora o jednej parze obrotowej. Przyjmiemy kilka założeń, które pozwolą nam modelować wynikowy układ jako liniowy układ drugiego rzędu. Bardziej kompletny model układu napędowego takiego manipulatora jest zamieszczony w [5].

Powszechnie stosowanym w wielu robotach przemysłowych źródłem napędu jest silnik obrotowy prądu stałego (DC) (patrz rys. 8.18). Nie obracająca się część silnika (stojan) składa się z obudowy, łożyskowania i magnesów stałych lub elektromagnesów. Magnesy stojana wytwarzają pole magnetyczne przechodzące przez obracającą się część silnika (wirnik). Wirnik składa się z wału i uzwojenia, przez które płynie prąd zasilający silnik. Prąd jest doprowadzany do uzwojeń przez szczotki, stykające się z komutatorem. Komutator jest łączony z różnymi uzwojeniami (łącznie zwartymi twornikiem) w ten sposób, że moment jest wywoływany zawsze w pożądanym kierunku. Zjawisko fizyczne, które powoduje generowanie momentu obrotowego silnika, gdy prąd płynie przez jego uzwojenie, może być opisane za pomocą równania [6]

$$\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

(9.62)

gdzie na ładunek q poruszający się z prędkością \mathbf{V} przez pole magnetyczne o indukcji \mathbf{B} działa siła \mathbf{F} . Ładunkami są tu elektrony prądu płynącego w uzwojeniach, a pole magnetyczne jest wytwarzane przez magnesy stojana. Na ogół zdolność silnika do wytwarzania momentu obrotowego jest określona za pomocą stałej momentu silnika, która wiąże natężenie prądu twornika z momentem obrotowym na wyjściu w postaci zależności

$$r_m = k_m i_a \quad (9.63)$$

Obracający się silnik działa jak generator wytwarzający napięcie w tworniku. Druga stała silnika, stała siły przeciwelektromotorycznej indukcji SEM³⁾ opisuje napięcie generowane przy danej prędkości obrotowej jako

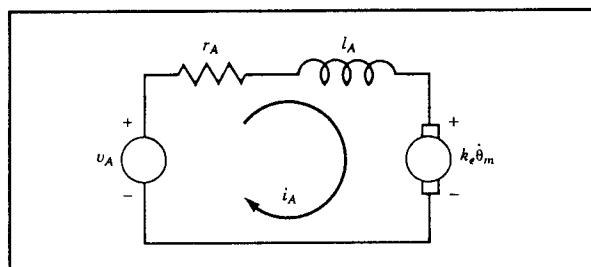
$$v = k_e \dot{\theta}_m \quad (9.64)$$

Z powodu przełączania prądu przez komutator tak, aby płynął on przez różne części uzwojeń, występuje pewne falowanie momentu obrotowego. Chociaż czasem jest to ważne, to na ogół efekty te mogą być pomijane (w każdym przypadku są bardzo trudne do modelowania oraz do kompensowania).

Indukcyjność twornika silnika

Na rys. 9.11 pokazano obwód elektryczny twornika. Głównymi elementami obwodu są: źródło napięcia v_a , indukcyjność uzwojeń twornika l_a oraz generowana siła elektromotoryczna indukcji v . Obwód jest opisany równaniem różniczkowym pierwszego rzędu

$$l_a \frac{di_a}{dt} + r_a i_a = v_a - k_e \dot{\theta}_m \quad (9.65)$$



Rys. 9.11. Obwód twornika silnika prądu stałego

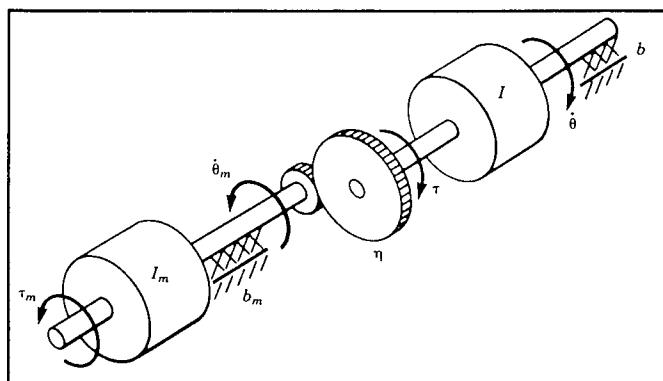
³⁾"SEM" odnosi się do siły elektromotorycznej.

Na ogół korzystne jest sterowanie momentem obrotowym silnika (bardziej niż prędkością) za pomocą elektronicznego obwodu nastawnika. Nastawnik mierzy prąd płynący przez twornik i w sposób ciągły dostosowuje napięcie źródła v_a tak, aby przez twornik płynął pożadany prąd i_a . Taki obwód nazywa się wzmacniaczem prądowym [7]. W takich układach częstość, z jaką prąd twornika może być zmieniany, jest ograniczona przez indukcyjność silnika I_a i górną granicę zdolności napięciowej źródła napięcia v_a . W wyniku powstaje efekt dolnoprzepustowego filtra między wymaganym prądem i momentem obrotowym.

Naszym pierwszym założeniem upraszczającym jest pominięcie indukcyjności silnika. Jest to rozsądne założenie, gdy częstotliwość własna układu zamkniętego jest niska w porównaniu z częstotliwością odcięć indukcyjnego filtra dolnoprzepustowego w obwodzie prądu sterującego. To założenie łącznie z tym, że falowanie momentu obrotowego jest pomijalnie małe, oznacza, że możemy w zasadzie wzbudzać moment obrotowy bezpośrednio. Chociaż może tu wystąpić współczynnik skali (taki jak k_m), który trzeba uwzględnić, to przyjmujemy, że silnik wytworzy moment obrotowy o wartości zadawanej bezpośrednio.

Zredukowany moment bezwładności

Na rys. 9.12 przedstawiono model mechaniczny wirnika silnika prądu stałego, połączonego przez przekładnię zębata z kołem zamachowym o pewnym momencie bezwładności. Moment obrotowy τ_m , przyłożony do wirnika, jest określony zależnością (9.63) w postaci funkcji natężenia i_a prądu płynącego w obwodzie twornika. Przełożenie przekładni (η) powoduje wzrost momentu obrotowego, działającego na koło zamachowe i zmniejszenie jego prędkości obrotowej, co może być opisane zależnościami



Rys. 9.12. Mechaniczny model silnika prądu stałego, połączonego poprzez przekładnię zębata z kołem zamachowym

$$\begin{aligned}\tau &= \eta \tau_m \\ \dot{\theta} &= (1/\eta) \dot{\theta}_m\end{aligned}\quad (9.66)$$

gdzie $\eta > 1$. Zapisując równanie równowagi momentów obrotowych dla tego układu, przy uwzględnieniu momentu obrotowego wirnika, otrzymuje się

$$\tau_m = I_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + (1/\eta)(I \ddot{\theta} + b \dot{\theta}) \quad (9.67)$$

gdzie I_m i I oznaczają momenty bezwładności odpowiednio wirnika silnika i koła zamachowego, a b_m i b - współczynniki tarcia wiskotycznego w łożyskach wirnika i koła zamachowego. Podstawiając zależności (9.66) do równania (9.67) możemy otrzymać moment obrotowy w zależności od zmiennych silnika

$$\tau_m = \left(I_m + \frac{I}{\eta^2} \right) \ddot{\theta}_m + \left(b_m + \frac{b}{\eta^2} \right) \dot{\theta}_m \quad (9.68)$$

lub w zależności od zmiennych obciążenia jako

$$\tau = (I + \eta^2 I_m) \ddot{\theta} + (b + \eta^2 b_m) \dot{\theta} \quad (9.69)$$

Wyraz $I + \eta^2 I_m$ jest nazywany zredukowanym momentem bezwładności "widzianym" na wyjściu (po stronie członu wyjściowego) przekładni. Natomiast wyraz $b + \eta^2 b_m$ może być nazwany tłumieniem zastępczym. Zauważmy, że w układzie napędowym o dużym przełożeniu (tzn. $\eta \gg 1$) bezwładność wirnika silnika może być znaczącą częścią bezwładności zredukowanej. Uwzględniając ten efekt możemy uczynić założenie, że zredukowana bezwładność jest stała. Z rozdz. 6 wiemy, że moment bezwładności I , zredukowany na oś pary obrotowej manipulatora, zmienia się wraz z konfiguracją i obciążeniem. Jednak dla robotów wyposażonych w przekładnie o dużym przełożeniu są to zmiany o mniejszych amplitudach niż w przypadku manipulatora o napędzie bezpośrednim (tzn. $\eta = 1$). W celu zabezpieczenia ruchu członu robota przed tłumieniem podkrytycznym stosowana wartość momentu bezwładności I powinna być największa z przedziału możliwych wartości; oznaczymy tę wartość przez I_{max} . W wyniku takiego doboru otrzymuje się układ z tłumieniem krytycznym lub nadkrytycznym we wszystkich sytuacjach. W rozdz. 10 będziemy rozpatrywać układy o zmiennym momencie bezwładności, dla których nie będziemy czynić tych założeń.

PRZYKŁAD 9.6

Jeśli moment bezwładności członu I zmienia się w przedziale od 2 do 6 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$, moment bezwładności wirnika jest równy $I_m = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, a przełożenie przekładni wynosi $\eta = 30$, to jakie są minimalna i maksymalna wartość zredukowanego momentu bezwładności?

Minimalna wartość zredukowanego momentu bezwładności wynosi

$$I_{min} + \eta^2 I_m = 2,0 + 900 \cdot 0,01 = 11,0 \quad (9.70)$$

a maksymalna

$$I_{max} + \eta^2 I_m = 6,0 + 900 \cdot 0,01 = 15,0 \quad (9.71)$$

Stąd wynika, że procentowy udział zredukowanego momentu bezwładności zmienia się z kwadratem przełożenia. ■

Podatności pominięte przy modelowaniu

Innym istotnym założeniem, przyjętym w naszym modelu, jest pominięcie podatności przekładni, wałów, łożysk i członów napędzanych. W rzeczywistości elementy te mają skończoną sztywność, a uwzględnienie ich podatności w modelu mogłoby podwyższać rząd układu. Argumentem przemawiającym za pominięciem efektów podatności jest to, że jeśli układ jest wystarczająco sztywny, to częstotliwości własne jego niemodelowanych rezonansów są bardzo duże i mogą być pominięte przy modelowaniu, ze względu na dominujący wpływ biegunów drugiego rzędu⁴⁾. Przymiotnik "niemodelowane" określa efekty pomijane przy analizie i syntezie układu sterowania, umożliwiające wykorzystanie prostego modelu dynamicznego, opisanego równaniem (9.69).

Ponieważ zdecydowaliśmy o pominięciu podatności strukturalnych w modelu układu, to musimy być ostrożni, aby nie wywoływać tych rezonansów. Zgodnie z regułą praktyczną [8], jeśli najniższy rezonans strukturalny wystąpi przy ω_{rez} , to należy ograniczyć częstotliwość własną układu zamkniętego do przedziału

$$\omega_n \leq \frac{1}{2} \omega_{rez} \quad (9.72)$$

Stąd wynikają pewne wskazówki dotyczące doboru współczynników wzmacniania w naszym sterowniku. Chociaż stwierdziliśmy, że wzrost wzmacniania prowadzi do szybszej odpowiedzi i mniejszego błędu stanu ustalonego, to jednak wiemy, że niemodelowane rezonanse strukturalne ograniczają wartości współczynników wzmacniania. Typowe manipulatory przemysłowe wykazują rezonanse strukturalne przy częstotliwościach w przedziale od 5 Hz do 25 Hz [8]. Ostatnie projekty manipulatorów z napędem bezpośrednim, w których nie ma podatności wprowadzanych przez reduktory i układy przeniesienia napędu, wykazują najwyższe rezonanse strukturalne przy częstotliwościach w granicach 70 Hz [9].

⁴⁾ Jest to w zasadzie ten sam argument, którego użyliśmy jako uzasadnienia pominięcia biegunu związanego z indukcyjnością silnika. Uwzględniając go podnosząc się rząd całego układu.

PRZYKŁAD 9.7

Rozważ układ z rys. 9.6, którego parametry są równe: $m = 1$, $b = 1$ i $k = 1$. Ponadto wiadomo, że najniższa niemodelowana częstotliwość rezonansowa wynosi 8 rad/s. Znaleźć wartości α , β oraz współczynniki wzmacnienia k_p i k_v dla prawa sterowania pozycja, odpowiadające tłumieniu krytycznemu, zapewniające niewzbudzanie drgań niemodelowanych i możliwie największą sztywność układu zamkniętego.

Przyjmiemy

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ \beta &= \dot{x} + x\end{aligned}\quad (9.73)$$

tzn. układ, który zawiera fikcyjną masę jednostkową i wymuszenie w postaci f' . Zgodnie z naszą praktyczną regułą (9.72) dobieramy częstotliwość własną układu zamkniętego równą $\omega_n = 4$ rad/s. Z (9.18) i (9.46) mamy $k_p = \omega_n^2$, zatem

$$\begin{aligned}k_p &= 16,0 \\ k_v &= 8,0\end{aligned}\quad ■\quad (9.74)$$

Oszacowanie częstotliwości rezonansowej

Pewne efekty podatności strukturalnej, rozpatrywane w rozdz. 8, powodują występowanie rezonansów. W każdym przypadku analizy układu o zidentyfikowanej podatności strukturalnej możliwa jest przybliżona analiza drgań, jeśli możemy opisać masę zastępczą lub moment bezwładności członu podatnego. Analiza ta w przybliżeniu odpowiada modelowaniu za pomocą prostego układu sprężyna-masa, który, jak podano w (9.20), wykazuje częstotliwość własną

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (9.75)$$

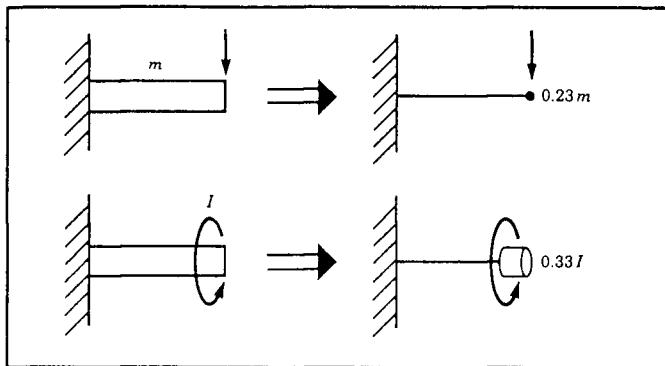
gdzie k jest sztywnością członu podatnego, a m równoważną masą przemieszaną w czasie drgań.

PRZYKŁAD 9.8

Wał (traktowany jako bezmasowy) o sztywności 400 N·m/rad napędza wirujące ciało o momencie bezwładności $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Jeśli sztywność wału była pominięta w modelowaniu dynamiki, to jaka jest częstotliwość tego niemodelowanego rezonansu?

Stosując (9.75) mamy

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{400/1} = 20 \text{ rad/s} = 20/(2\pi) \text{ Hz} \approx 3,2 \text{ Hz} \quad ■\quad (9.76)$$



Rys. 9.13. Modele belek z masami skupionymi służące do oszacowania najmniejszej częstotliwości rezonansowej drgań giętnych (poprzecznych) i skrętnych

W celu zgrubnego oszacowania najmniejszej częstotliwości rezonansowej belek i wałów w poradniku [10] sugeruje się wykorzystanie modeli z masami skupionymi. Dysponujemy wzorami do oszacowania sztywności belek i wałów obciążonych przy końcu, a modele z masami skupionymi umożliwiają wyznaczenie masy zastępczej lub zredukowanego momentu bezwładności, potrzebnych do oszacowania częstotliwości rezonansowej. Na rys. 9.13 zilustrowano wyniki analizy energetycznej [10]. Wspornik o masie m , rozłożonej w sposób ciągły, może być modelowany jako wspornik nieważki, obciążony masą skupioną na swobodnym końcu wspornika w odległości 0,23 m od punktu zamocowania. Analogicznie, wspornik o masie rozłożonej ciągle i momencie bezwładności I może być modelowany jako wspornik o masie skupionej w swobodnym końcu, której moment bezwładności względem podłużnej osi wspornika wynosi $0,33I$.

PRZYKŁAD 9.9

Człon o masie 4,347 kg wykazuje sztywność giętną w punkcie końcowym równą 3600 N/m. Rezonanse związane z podatnością członu będą ograniczać wartości współczynników wzmacnienia układu sterującego. Jakie jest ω_{rez} ?

Masa 4,347 kg jest rozłożona wzduż członu. Wykorzystując model z rys. 9.13 otrzymuje się masę zastępczą $0,23 \cdot 4,347 \approx 1,0$ kg. Zatem rezonansowa częstotliwość drgań wynosi

$$\omega_{rez} = \sqrt{3600/1,0} = 60 \text{ rad/s} = 60/(2\pi) \text{ Hz} \approx 9,6 \text{ Hz} \quad (9.77)$$

Jeśli chcemy osiągnąć pasma częstotliwości układu zamkniętego wyższe od określonych wg wzoru (9.75), to przy syntezie prawa sterowania trzeba uwzględnić podatności strukturalne układu. W ten sposób otrzymuje się modele układów wyższego rzędu, a metody sterowania odpowiednie do sytuacji stają się bar-

dziej skomplikowane. Takie układy sterowania nie są aktualnie stosowane w praktyce przemysłowej, lecz są przedmiotem aktywnych badań [11, 12].

Sterowanie jednym stopniem swobody

Sumując, przyjęliśmy następujące trzy główne założenia:

1. Indukcyjność silnika I_a może być pominięta.
2. Biorąc pod uwagę duże przełożenie modelujemy zredukowany moment bezwładności jako stały i równy $I_{max} + \eta^2 I_m$.
3. Podatności strukturalne są pomijane z wyjątkiem uwzględnienia najniższej częstotliwości rezonansu strukturalnego ω_{rez} , wykorzystywanej przy ustalaniu współczynników wzmacnienia układu sterowania.

Przy tych założeniach pojedynczy stopień swobody manipulatora może być sterowany według rozdzielającego prawa sterowania, danego w postaci

$$\begin{aligned}\alpha &= I_{max} + \eta^2 I_m \\ \beta &= b + \eta^2 b_m\end{aligned}\quad (9.78)$$

oraz

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (9.79)$$

Wynikowe równanie dynamiki układu zamkniętego jest następujące

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \tau_{dist} \quad (9.80)$$

gdzie dobrane współczynniki wzmacnienia wynoszą

$$\begin{aligned}k_p &= \omega_n^2 = \frac{1}{4} \omega_{rez}^2 \\ k_v &= 2\sqrt{k_p} = \omega_{rez}\end{aligned}\quad (9.81)$$

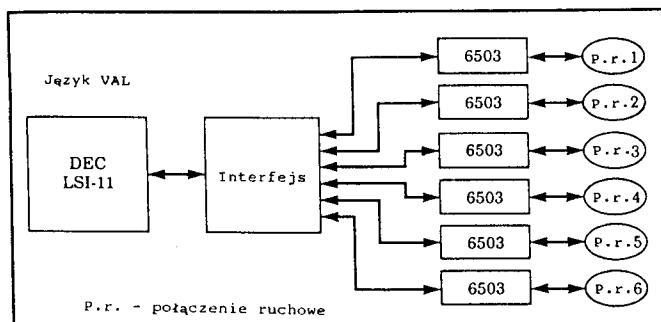
9.10. ARCHITEKTURA STEROWNIKÓW ROBOTA PRZEMYSŁOWEGO

W tym podrozdziale zapoznamy się z architekturą układu sterowania robota przemysłowego Unimation PUMA 560. Jak pokazano na rys. 9.14, architektura tego układu jest hierarchiczna, dwupoziomowa z komputerem DEC LSI-11 jako nadrzędnym komputerem sterującym, który przekazuje rozkazy do sześciu mikroprocesorów⁵⁾ Rockwell 6503. Każdy z tych mikroprocesorów steruje jednym stopniem swobody według prawa sterowania PID, przedstawionego w tym rozdziale. Każda para obrotowa robota PUMA 560 jest wyposażona w przyrostowy enkoder optyczny. Enkodery są przyłączone do liczników położenia, z których

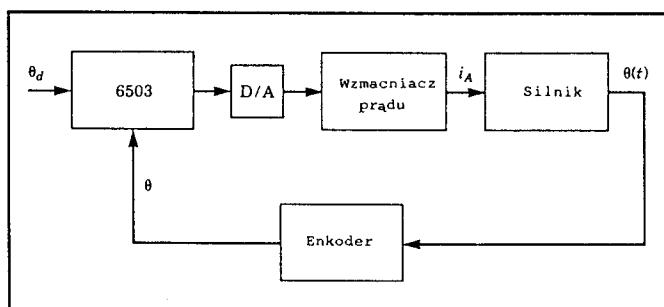
⁵⁾ Te proste 8-bitowe komputery są już nienowoczesne. Obecne sterowniki robotów często są oparte na 32-bitowych mikroprocesorach, jak np. Motorola 68020.

mikroprocesor może odczytać bieżącą współrzędną wewnętrzną pary obrotowej. Robot PUMA 560 nie jest wyposażony w tachometry, lecz współrzędne wewnętrzne są różniczkowane w kolejnych przedziałach czasowych w celu otrzymywania przybliżonych wartości prędkości w parach obrotowych. Do sterowania momentami obrotowymi silników prądu stałego służy mikroprocesor z przyłączonymi przetwornikami cyfrowo-analogowymi (D/A), umożliwiającymi wykorzystanie obwodów sterujących. Prąd przepływający przez silnik jest sterowany w obwodzie analogowym przez nastawianie napięcia przyłożonego do twornika tak, aby utrzymać pożądany prąd twornika.

Co 28 milisekund komputer LSI-11 zadaje nową pozycję mikroprocesorom sterującym, które działają w cyklu 0,875 ms. W tym czasie interpolują pożądane położenie, obliczają uchyb, wykonują obliczenia dla prawa sterowania PID i zadają nową wartość momentów obrotowych silników.



Rys. 9.14. Hierarchiczna struktura komputerowego układu sterowania robota PUMA 560



Rys. 9.15. Bloki funkcjonalne układu sterowania parą obrotową robota PUMA 560

Komputer LSI-11 wykonuje wszystkie operacje na "wyższym poziomie" układu sterowania. Przede wszystkim zajmuje się interpretacją rozkazów programowych VAL (język programowania robotów Unimation), krok po kroku. Gdy interpretowany jest rozkaz ruchu, LSI-11 musi wykonać wszystkie potrzebne obliczenia zadania odwrotnego kinematyki, zaplanować pożądaną trajektorię i zacząć generowanie trajektorii punktów pośrednich (co 28 milisekund) dla sterowników par obrotowych.

LSI-11 jest także przyłączany do standardowych urządzeń peryferyjnych jako terminal i stacja dysków elastycznych. Dodatkowo przyłączany jest również ucący programator klawiaturowy. Jest to ręczny programator, który pozwala operatorowi poruszać robotem na wiele różnych sposobów. Na przykład układ sterowania robota PUMA 560 pozwala użytkownikowi programować ruchy przyrostowo we współrzędnych konfiguracyjnych lub kartezjańskich za pomocą programatora klawiaturowego. W takim trybie pracy przyciskami programatora wyołuje się obliczanie trajektorii "w biegu" przez mikroprocesory sterujące oraz jej zapisywanie w pamięci.

Bibliografia

- [1] W.Boyce, R.DiPrima, *Elementary Differential Equations*, 3rd edition, John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [2] E.Purcell, *Calculus with Analytic Geometry*, Meredith Corporation, New-York, 1972.
- [3] G.Franklin, J.D.Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
- [4] G.Franklin, J.D.Powell, A.Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.
- [5] J.Luh, "Conventional Controller Design for Industrial Robots - a Tutorial", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-13, No.3, June 1983.
- [6] D. Halliday, R.Resnik, *Fundamentals of Physics*, Wiley, 1970.
- [7] Y.Koren, A.Ulsoy, "Control of DC Servomotor Driven Robots", *Proceedings of Robots 6 Conference*, SME Detroit, March 1982.
- [8] R.P. Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, 1981.
- [9] H. Asada, K.Youcef-Toumi, *Direct-Drive Robots-Theory and Practice*, MIT Press, 1987.
- [10] J.Shigley, *Mechanical Engineering Design*, 3rd edition, Mc Graw-Hill, 1977.
- [11] W.Book, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms", *The International Journal of Robotics Research*, Vol.3, No.3, 1984.

- [12] R.Cannon, E.Schmitz, "Initial Experiments on the End-Point Control of Flexible One Link Robot", *The International Journal of Robotics Research*, Vol.3, No.3, 1984.

Ćwiczenia

- 9.1. [20] Dla równania różniczkowego drugiego rzędu z pierwiastkami zespolonymi

$$s_1 = \lambda + \mu i$$

$$s_2 = \lambda - \mu i$$

pokazać, że ogólne rozwiązanie

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

może być zapisane jako

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

- 9.2. [13] Wyznaczyć ruch układu z rys.9.2, jeśli wartości parametrów wynoszą $m = 2$, $b = 6$ i $k = 4$, a klocek (początkowo nieruchomy) jest puszczyony z położenia $x = 1$.
- 9.3. [13] Wyznaczyć ruch układu z rys.9.2, jeśli wartości parametrów wynoszą $m = 1$, $b = 2$ i $k = 1$, a klocek (początkowo nieruchomy) jest puszczyony z położenia $x = 4$.
- 9.4. [13] Wyznaczyć ruch układu z rys.9.2, jeśli wartości parametrów wynoszą $m = 1$, $b = 4$ i $k = 5$, a klocek (początkowo nieruchomy) jest puszczyony z położenia $x = 2$.
- 9.5. [13] Wyznaczyć ruch układu z rys.9.2, jeśli wartości parametrów wynoszą $m = 1$, $b = 7$ i $k = 10$, a klocek jest puszczyony z położenia $x = 1$ z początkową prędkością $\dot{x} = 2$.
- 9.6. [15] Wykorzystaj element (1,1) macierzy (6.60) do obliczenia zmiany (jako procentowy udział wartości maksymalnej) wartości momentu bezwładności zredukowanego na oś pierwszej pary obrotowej tego robota podczas zmiany konfiguracji. Podstaw wartości liczbowe: $l_1 = l_2 = 0,5$ m, $m_1 = 4,0$ kg, $m_2 = 2,0$ kg. Rozważ przypadek, że robot jest napędzany bezpośrednio, a bezwładność wirnika jest pomijalnie mała.
- 9.7. [17] Powtórz ćwiczenie 9.6 dla robota z przekładnią ($\eta = 20$) i momentem bezwładności wirnika $I_m = 0,01$ kg·m².
- 9.8. [18] Rozważ układ z rys.9.6, gdy wartości parametrów są równe: $m = 1$, $b = 4$ i $k = 5$. Wiadomo również, że niemodelowany rezonans występuje przy $\omega_{rez} = 6$ rad/s. Wyznaczyć współczynniki wzmacnienia k_v i k_p , dla których tłumienie krytyczne układu wystąpi przy możliwie największej sztywności.

- 9.9. [25] Zredukowany moment bezwładności I zmienia się między 4 i $5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Moment bezwładności wirnika wynosi $I_m = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, a przełożenie przekładni $\eta = 10$. Niemodelowane rezonanse układu występują przy 8,0, 12,0 i 20,0 rad/s. Znaleźć wartości α i β dla sterownika rozdzielającego i wartości k_p i k_v takie, aby w układzie nie występowało tłumienie podkrytyczne i aby układ nie wzbudzał rezonansów, lecz był tak sztywny, jak to jest możliwe.
- 9.10. [18] Projektant robota o napędzie bezpośrednim przyjmuje, że rezonans spowodowany podatnością giętną członu będzie niemodelowanym rezonansem o najmniejszej częstotliwości. Jeśli człon jest w przybliżeniu belką o przekroju kwadratowym o wymiarach $5 \times 5 \times 10 \text{ cm}$ i ściance o grubości 1 cm oraz całkowitej masie 5 kg, to jaka jest szacunkowa wartość ω_{rez} ?
- 9.11. [15] Robot o napędzie bezpośredni jest napędzany przez wał o sztywności 100 $\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$. Moment bezwładności członu wynosi $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Pomijając masę wału znaleźć, jakie jest ω_{rez} ?
- 9.12. [18] Wał o sztywności 500 $\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ napędza koło wejściowe sztywnej pary kół zębatach o przełożeniu $\eta = 8$. Koło wyjściowe przekładni napędza sztywny człon o momencie bezwładności $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Jaka jest ω_{rez} wywołana podatnością wału?
- 9.13. [25] Wał o sztywności 500 $\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ napędza sztywne koło wejściowe przekładni zębatej o przełożeniu $\eta = 8$. Moment bezwładności wału wynosi $0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Koło wyjściowe przekładni napędza sztywny człon o momencie bezwładności $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Jaka jest ω_{rez} wywołana podatnością wału?
- 9.14. [28] Zredukowany moment bezwładności zmienia wartość między 4 i $5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, moment bezwładności wirnika wynosi $I_m = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, a przełożenie przekładni $\eta = 10$. Niemodelowany rezonans układu jest związany ze sztywnością członu, która przy obciążeniu w punkcie końcowym wynosi 4900 N/m. Znaleźć α i β dla sterownika rozdzielającego i podać takie wartości k_p i k_v , aby w układzie nie występowało tłumienie podkrytyczne i aby układ nie wzbudzał rezonansów, lecz był tak sztywny jak to jest możliwe.
- 9.15. [25] Wał stalowy o długości 30 cm i średnicy 0,2 cm napędza wejściowe koło zębata reduktora o przełożeniu $\eta = 8$. Sztywne koło zębata wyjściowe napędza wał o długości 30 cm i średnicy 0,3 cm. Jaki jest przedział zaobserwowanych częstotliwości rezonansowych, jeśli wartość zredukowanego momentu bezwładności zmienia się między 1 i $4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$?

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 9)

Chcemy zasymulować prosty nadążny układ sterowania dla trójczłonowego płaskiego ramienia. W układzie sterowania każdego stopnia swobody będzie wykorzystane prawo sterowania PD (proporcjonalne plus różniczkujące). Przyjąć współczynniki wzmacnienia tak, aby sztywność układu zamkniętego wynosiła 175,0, 110,0 i 20,0 odpowiednio dla par obrotowych od 1 do 3. Spróbować otrzymać w przybliżeniu tłumienie krytyczne.

Wykorzystać program symulacyjny UPDATE do symulacji pracy układu sterowania przy częstotliwości 100 Hz (obliczyć prawo sterowania przy 100 Hz, a nie przy częstotliwości procesu całkowania numerycznego). Sprawdzić schemat sterowania za pomocą następujących testów:

1. Ustawić ramię w położeniu $\Theta = (60^\circ, -110^\circ, 20^\circ)$ i polecić mu pozostać tam w okresie 3,0 s, następnie zmienić skokowo położenie na $\Theta = (60^\circ, -50^\circ, 20^\circ)$. Odpowiada to skokowej zmianie położenia o 60° w parze obrotowej 2. Zapisać zmiany uchybu w czasie dla każdej pary obrotowej.
2. Sterować ramieniem tak, aby nadążało za trajektorią opisaną funkcją sklejaną z wielomianów 3 stopnia z ćwiczenia programowania dla części 7. Zapisać zmianę uchybu w czasie dla każdego połączenia ruchowego.

10

NIELINIOWE UKŁADY STEROWANIA MANIPULATORÓW

10.1. WPROWADZENIE

W poprzednim rozdziale dokonaliśmy wielu przybliżeń, które pozwoliły na przeprowadzenie analizy liniowego problemu sterowania manipulatora. Najważniejszym z tych przybliżeń było to, aby każdy stopień swobody mógł być rozpatrywany niezależnie i aby momenty bezwładności zredukowane do osi obrotu silników napędzających połączenia ruchowe były stałe. W stosowanych w praktyce sterownikach liniowych, przedstawionych w poprzednim rozdziale, przybliżenie to daje w wyniku nierównomierne tłumienie ruchu w różnych miejscach przestrzeni roboczej i inne niepożądane efekty. W tym rozdziale wprowadzimy bardziej rozwinięte układy sterowania, dla których powyższe założenie nie jest konieczne.

W rozdziale 9 modelowaliśmy manipulator za pomocą n nieszczelnego równania różniczkowych drugiego rzędu i oparliśmy nasz sterownik na takim modelu. W tym rozdziale podstawa projektu sterownika uczynimy wektorowe nielinowe równanie różniczkowe ruchu (o wymiarze $n \times 1$), które wyprowadziliśmy w rozdz. 6 dla ogólnego przypadku manipulatora.

Ponieważ nieliniowa teoria sterowania jest obszerną dziedziną, ograniczymy się do omówienia jednej lub dwóch metod, które wydają się przydatne dla manipulatorów. Tak więc większą uwagę w tym rozdziale skupimy na jednej szczególnej metodzie, zaproponowanej w [1] i nazwanej w [2,3] **metodą obliczanego momentu obrotowego**. Również ograniczymy się do omówienia jednej metody analizy stabilności układów nieliniowych znanej jako metoda Lapunowa [4].

Rozpoczynając nasze rozważania nad nieliniowymi technikami sterowania manipulatora, wróćmy znowu do prostego układu o jednym stopniu swobody, złożonego z masy, sprężyny i tłumienia.

10.2. UKŁADY NIELINIOWE I ZMIENNE W CZASIE

Poprzednio mieliśmy do czynienia z liniowymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach. Taka postać matematyczna wynikła stąd, że układ złożony z masy, sprężyny i tłumienia z rys. 9.6 był modelowany jako liniowy układ niezmienny w czasie. Dla układów, których parametry zmieniają się w czasie, lub układów, które są z natury nieliniowe, rozwiązanie jest trudniejsze.

Gdy nieliniowości nie są duże, można zastosować lokalną **linearyzację** w celu wyprowadzenia równań modeli liniowych, które są przybliżeniami równań nieliniowych w sąsiedztwie punktu pracy. Niestety, w zadaniu sterowania manipulatora nie można wykorzystać takiego podejścia, ponieważ manipulatory stale wykonują ruchy pomiędzy oddalonymi punktami przestrzeni roboczej i nie można znaleźć linearyzacji obowiązującej dla całego obszaru.

Inne podejście polega na przemieszczaniu punktu pracy wraz z manipulatorem w trakcie jego ruchu, zawsze linearyzując równania w pobliżu pożąданiej pozycji manipulatora. Wynikiem tego rodzaju *ruchomej linearyzacji* jest układ liniowy, lecz zmienny w czasie. Chociaż ta quasi-statyczna linearyzacja układu początkowego jest przydatna w pewnych metodach analizy i projektowania, nie będziemy z niej korzystać w naszej procedurze syntezy prawa sterowania. Będziemy zajmować się wprost nieliniowymi równaniami ruchu i nie będziemy uciekać się do linearyzacji przy projektowaniu sterownika.

Gdyby sprężyna z rys. 9.6 nie była liniowa, lecz zawierała element nieliniowy, to moglibyśmy traktować układ jako quasi-statyczny i w każdej chwili wyznaczać bieguny układu. Znaleźlibyśmy współrzędne biegunów "poruszających się" na płaszczyźnie liczb zespolonych jako funkcje położenia członu. Zatem nie moglibyśmy dobrać ustalonych współczynników wzmacniania, zapewniających pożądane współrzędne biegunów (np. odpowiadające tłumieniu krytycznemu). Natomiast należałoby rozważyć bardziej złożone prawa sterowa-

nia o zmiennych w czasie współczynnikach wzmacnienia (w rzeczywistości ich zmiana jest funkcją położenia ciała), zapewniające ustalone tłumienie krytyczne układu. Można to uzyskać przez dostosowanie wartości k_p do nieliniowej sztywności sprężyny, co uzyskuje się za pomocą nieliniowego wyrazu w prawie sterowania, zapewniającego ustaloną wartość sztywności układu przez cały czas pracy. Taka reguła sterowania można nazwać prawem sterowania liniaryzującego, ponieważ wykorzystuje ona nieliniowy wyraz sterowania do "usunięcia" nieliniowości układu sterowanego, w wyniku czego cały układ zamknięty staje się liniowy.

Powrócimy do naszego rozdzielonego prawa sterowania i zobaczymy, że za jego pomocą można wykonać taką liniaryzację funkcji. W naszym schemacie rozdzielonego prawa sterowania część pętli sprzężenia pozostaje taka sama, lecz część modelowa zawiera teraz model nieliniowości. Zatem część modelowa prawa sterowania realizuje liniaryzację funkcji. Najlepiej ilustruje to następujący przykład.

PRZYKŁAD 10.1

Rozważmy nieliniową charakterystykę sprężyny, pokazaną na rys. 10.1. Zamiast zwykłej liniowej zależności $f = kx$, charakterystyka ta jest opisana zależnością $f = qx^3$. Zakładając, że ta sprężyna jest częścią układu fizycznego pokazanego na rys. 9.6, wyznacz prawo sterowania, zapewniające tłumienie krytyczne układu i sztywność k_{CL} .

Równanie układu otwartego jest następujące

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + qx^3 = f \quad (10.1)$$

Część modelowa prawa sterowania jest opisana zależnością $f = \alpha f' + \beta$, gdzie

$$\begin{aligned} \alpha &= m \\ \beta &= b\dot{x} + qx^3 \end{aligned} \quad (10.2)$$

a część sprzężeniowa jest wyrażona wzorem

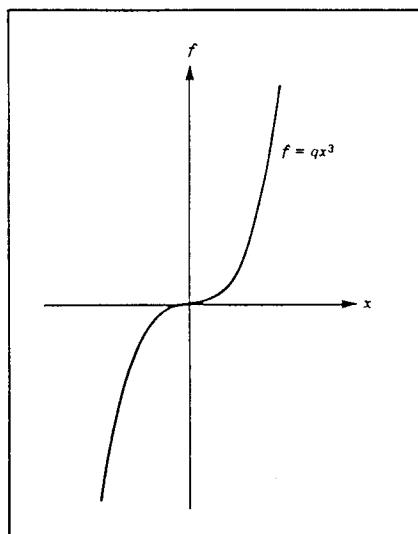
$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (10.3)$$

gdzie wartości współczynników wzmacnienia są obliczane na podstawie pożądanych warunków działania układu. Na rys. 10.2 pokazano schemat blokowy tego układu sterowania. Wynikowy układ zamknięty ma stałe bieguny. ■

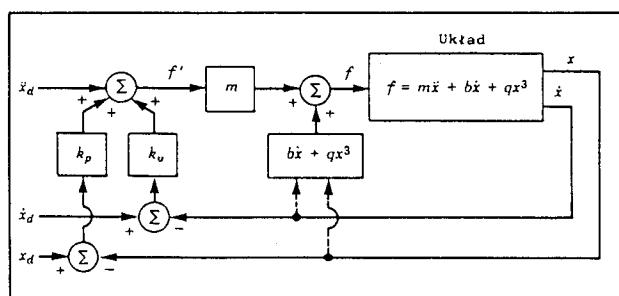
PRZYKŁAD 10.2

Rozważyć nieliniowy przebieg tarcia pokazany na rys. 10.3. Podczas gdy tarcie liniowe (wiskotyczne) jest opisane przez zależność $f = bx$, to tarcie Coulomba jest wyrażone zależnością $f = b_c sgn(\dot{x})$. Tarcie, występujące w po-

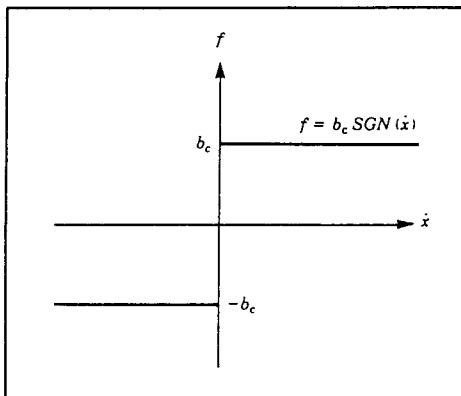
łączeniach ruchowych (obrotowych lub przesuwnych) większości współczesnych manipulatorów, może być dokładniej modelowane za pomocą takiej nieliniowej charakterystyki niż prostego modelu liniowego (z tarciem wiskotycznym). Zakładając, że ten typ tarcia występuje w układzie z rys. 9.6, zaprojektować układ sterujący, wykorzystujący nieliniową część modelową prawa sterowania dla zapewnienia tłumienia krytycznego układu przez cały czas ruchu.



Rys. 10.1. Zależność siły od przemieszczenia dla nieliniowej sprężyny



Rys. 10.2. Nieliniowy układ sterowania w przypadku nieliniowej sprężyny



Rys. 10.3. Zależność siły od prędkości w przypadku tarcia Coulomba

Równanie układu otwartego jest następujące

$$m\ddot{x} + b_c sgn(\dot{x}) + kx = f \quad (10.4)$$

Rozdzielone prawo sterowania jest opisane zależnością $f = \alpha f' + \beta$, gdzie

$$\alpha = m$$

$$\beta = b_c sgn(\dot{x}) + kx \quad (10.5)$$

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

przy czym wartości współczynników wzmacniania są obliczane na podstawie pożądanych warunków działania układu. ■

PRZYKŁAD 10.3

Rozważmy manipulator, pokazany na rys. 10.4, złożony z jednego członu i jednej pary obrotowej. Przyjęto, że masa członu jest skupiona w jego punkcie końcowym, a moment bezwładności członu wynosi ml^2 . W układzie występuje tarcie Coulomba i tarcie wiskotyczne w parze obrotowej oraz obciążenie ciężarem własnym.

Model manipulatora jest opisany równaniem

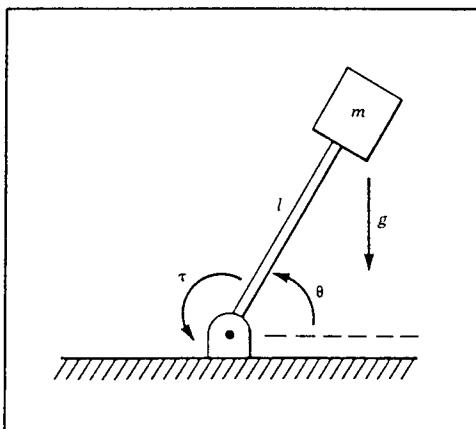
$$\tau = ml^2\ddot{\theta} + v\dot{\theta} + c sgn(\dot{\theta}) + mlg \cos(\theta) \quad (10.6)$$

Układ sterowania ma dwie części: linearyzująca część modelową i część sprzężeniową.

Część modelowa prawa sterowania jest opisana zależnością

$$f = \alpha f' + \beta$$

gdzie



Rys. 10.4. Odwrócone wahadło fizyczne lub jednoczlonowy manipulator

$$\begin{aligned}\alpha &= ml^2 \\ \beta &= v\dot{\theta} + c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + mlg \cos(\theta)\end{aligned}\quad (10.7)$$

Część sprzężona jest wyrażona wzorem

$$f' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (10.8)$$

przy czym wartości współczynników wzmacniania są obliczane na podstawie pożądanego warunku działania układu. ■

Wiemy, że w pewnych prostych przypadkach nie jest trudno zaprojektować sterownik nieliniowy. Ogólna metoda zastosowana w powyższych prostych przykładach jest tą samą metodą, którą wykorzystamy w zadaniu sterowania manipulatora, a mianowicie:

1. Oblicza się nieliniową modelową część prawa sterowania, która "likwiduje" nieliniowości układu sterowanego.
2. Redukuje się układ do układu liniowego, który może być sterowany za pomocą prostej sprzężonej części prawa sterowania, wprowadzonej dla masy jednostkowej.

W pewnym sensie linearyzujące prawo sterowania wprowadza model odwrotny układu sterowanego. Nieliniowości w układzie usuwają nieliniowości w modelu odwrotnym; a to wraz ze sprzężoną częścią prawa sterowania daje w wyniku zamknięty układ liniowy. Oczywiście dokonując takiej "likwidacji" powinniśmy znać parametry i strukturę układu nieliniowego. Często jest to jeden z problemów do rozwiązania przy praktycznym zastosowaniu tej metody.

10.3. WIELOWEJŚCIOWE I WIELOWYJŚCIOWE UKŁADY STEROWANIA

W przeciwieństwie do prostych przykładów, które rozpatrywaliśmy w tym rozdziale, układ sterowania manipulatora jest układem wielowejściowym, wielowyjściowym (MIMO). Oznacza to, że mamy do czynienia z wektorem pożądanych pozycji, prędkości i przyśpieszeń w połączeniach ruchowych, a prawo sterowania służy do obliczania wektora sygnałów sterujących silnikami napędowymi. Nasz podstawowy schemat rozdzielonego prawa sterowania, zawierający część modelową i część sprężoną, obowiązuje nadal, lecz teraz przyjmuje postać macierzowo-wektorową.

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{F}' + \beta \quad (10.9)$$

gdzie dla układu o n stopniach swobody \mathbf{F} , \mathbf{F}' i β oznaczają wektory o wymiarze $n \times 1$; α – macierz o wymiarze $n \times n$. Zauważmy, że macierz α nie musi być diagonalna, lecz raczej jest dobierana tak, aby rozdzielić zmienne w n równaniach ruchu. Jeśli α i β są prawidłowo dobrane, wtedy dla funkcji wejściowej \mathbf{F}' układ staje się układem n niezależnych mas jednostkowych. Z tego powodu, w przypadku wielowymiarowym, część modelowa prawa sterowania jest nazywana linearyzującym i rozdzielającym prawem sterowania. Prawo sprężeniowe dla układu wielowymiarowego przyjmuje postać

$$\mathbf{F}' = \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_p \mathbf{E} \quad (10.10)$$

gdzie \mathbf{K}_v i \mathbf{K}_p oznaczają teraz macierze o wymiarze $n \times n$, które są na ogół dobierane jako diagonalne o stałych współczynnikach wzmacniania na przekątnej, natomiast \mathbf{E} i $\dot{\mathbf{E}}$ oznaczają wektory $n \times 1$ błędów pozycji i prędkości.

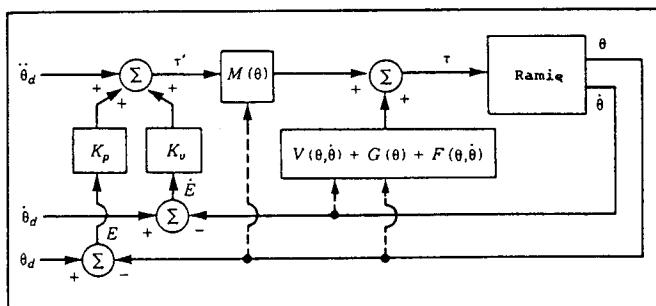
10.4. ZADANIE STEROWANIA MANIPULATORÓW

W rozdziale 6 podaliśmy model i odpowiednie równania ruchu służące do realizacji sterowania manipulatora. Przekonaliśmy się, że równania te są bardzo skomplikowane. Dynamika ciała sztywnego jest opisana równaniem

$$\tau = \mathbf{M}(\theta) \ddot{\theta} + \mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta) \quad (10.11)$$

gdzie $\mathbf{M}(\theta)$ oznacza macierz $n \times n$ bezwładności manipulatora, $\mathbf{V}(\theta, \dot{\theta})$ – wektor $n \times 1$ momentów/sił odśrodkowych i Coriolisa, a $\mathbf{G}(\theta)$ – wektor $n \times 1$ sił grawitacji. Każdy element macierzy $\mathbf{M}(\theta)$ i wektora $\mathbf{G}(\theta)$ jest złożoną funkcją θ , wektora współrzędnych konfiguracyjnych wszystkich połączeń ruchowych manipulatora. Każdy element $\mathbf{V}(\theta, \dot{\theta})$ jest złożoną funkcją zarówno θ , jak i $\dot{\theta}$.

Dodatkowo możemy uwzględnić model tarcia (lub inne efekty). Przyjmując, że nasz model tarcia jest wyrażony funkcją przemieszczeń i prędkości



Rys. 10.5. Układ sterowania manipulatora oparty na opisany modelu

względnych w połączeniach ruchowych, dodajemy wyraz $F(\theta, \dot{\theta})$ do równania (10.11), aby otrzymać model opisany równaniem

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (10.12)$$

Zadanie sterowania złożonego układu, opisanego równaniem (10.12), może być zrealizowane przez rozdzielony sterownik, którego schemat wprowadziliśmy w tym rozdziale. W tym przypadku mamy

$$\tau = \alpha\tau' + \beta \quad (10.13)$$

gdzie τ oznacza wektor $n \times 1$ sił/momentów napędowych. Przyjmujemy

$$\alpha = M(\theta)$$

$$\beta = V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (10.14)$$

z prawem sprzężenia

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + K_V \dot{E} + K_P E \quad (10.15)$$

gdzie

$$E = \theta_d - \theta \quad (10.16)$$

Tak otrzymany układ sterowania jest pokazany na rys. 10.5.

Stosując zależności (10.12)+(10.15) łatwo można wykazać, że układ zamknięty jest opisany przez równanie uchybu w postaci

$$\ddot{E} + K_V \dot{E} + K_P E = 0 \quad (10.17)$$

Zauważmy, że jest to równanie wektorowe o zmiennych rozdzielonych, ponieważ macierze K_V i K_P są diagonalne; tak więc równanie (10.17) można stosować dla każdego połączenia ruchowego w postaci

$$\ddot{e}_i + k_{Vi}\dot{e}_i + k_{Pi}e_i = 0 \quad (10.18)$$

Idealne działanie układu, podane w postaci równania (10.17), jest nieosiągalne w praktyce z różnych przyczyn, z których najważniejszymi są:

1. Dyskretna forma obliczeń komputerowych w przeciwieństwie do idealnego, ciągłego w czasie prawa sterowania, ujętego w (10.14) i (10.15).
2. Niedokładności w modelu manipulatora (koniecznym do obliczenia (10.14)).

W następnym podrozdziale będziemy (przynajmniej częściowo) rozpatrywać te dwie kwestie.

10.5. ROZWAŻANIA PRAKTYCZNE

Przy omawianiu rozzielonego i linearyzującego prawa sterowania w ostatnich kilku podrozdziałach dokonaliśmy kilku założeń, które są rzadko spełnione w praktyce.

Czas wymagany do obliczenia modelu

We wszystkich naszych rozważaniach dotyczących strategii rozzielonego prawa sterowania przyjęliśmy, że cały układ działa w sposób ciągły i że obliczenia obejmujące prawo sterowania nie wymagają żadnego czasu. Dysponując odpowiednio szybkim komputerem możemy wykonać daną liczbę operacji obliczeniowych tak szybko, że jest to rozsądne przybliżenie, jednak koszt komputera może uczynić ten schemat ekonomicznie nieprzydatnym. W przypadku sterowania manipulatora równania dynamiki (10.14) muszą być rozwiązane zgodnie z prawem sterowania. Obliczenia te są dość skomplikowane i - jak wspomniano w rozdz. 6 - szybkie efektywne schematy obliczeniowe były przedmiotem poważnego zainteresowania specjalistów. Ponieważ komputery o dużej mocy obliczeniowej stają się coraz łatwiej dostępne, stąd prawa sterowania, które wymagają wielu obliczeń, stają się coraz bardziej realne w zastosowaniach praktycznych. Kilka eksperymentalnych zastosowań nieliniowych modeli praw sterowania opisano w [5-9], a częściowe realizacje zaczynają pojawiać się w budowie sterowników przemysłowych.

Jak wspomniano w rozdz. 9, prawie wszystkie układy sterowania manipulatorów są wykonywane w technice cyfrowej i działają z pewną częstotliwością próbkowania. To znaczy, że wskazania czujników mierzących pozycję (oraz wszelkie inne) są odczytywane w dyskretnych chwilach czasu. Na podstawie odczytanych wartości sygnał sterujący jest obliczany i wysyłany do silnika. Zatem odczyt czujników oraz wysyłanie sygnału do silników nie są wykonywane w sposób ciągły, lecz ze skończoną częstotliwością próbkowania. Aby przeanalizować efekt opóźnienia wywołany czasem obliczeń i skończoną częstotliwością próbkowania, musimy użyć narzędzi z zakresu sterowania czasowo-dyskretnego.

W dyskretnych chwilach czasu równania różniczkowe przekształca się w równania różnicowe, a do rozważenia problemu stabilności i położenia bieguna takich układów wykorzystuje się odrębne narzędzia. Teoria sterowania czasowo-dyskretnego wykracza poza zakres tej książki, chociaż dla specjalistów z zakresu układów sterowania manipulatorów znajomość wielu zagadnień dotyczących układów czasowo-dyskretnych jest niezbędna (patrz [10]).

Niektóre z ważnych metod teorii sterowania dyskretnego w czasie są często trudne do zastosowania w przypadku układów nieliniowych. Chociaż po trafimy napisać skomplikowane różniczkowe równanie ruchu manipulatora, to czasowo-dyskretny równoważnik jest na ogół niemożliwy do otrzymania. Jest tak, ponieważ dla ogólnego manipulatora jedyną drogą do rozwiązania równań ruchu dla danych warunków początkowych, funkcji wejścia i pewnego skończonego przyrostu, jest całkowanie numeryczne (jak zobaczyliśmy w rozdz. 6). Modele czasowo-dyskretnie są odpowiednie w przypadku zastosowania rozwinięć w szeregi w równaniach różniczkowych lub zastosowania aproksymacji. Jednak rozwinięcie modelu dyskretnego za pomocą aproksymacji ciągłej w czasie nie zawsze jest lepsze od modelu ciągłego w czasie. Wystarczy powiedzieć, że analiza zadania czasowo-dyskretnego sterowania manipulatora jest trudna i zazwyczaj w celu oceny wpływu częstotliwości próbkowania na działanie układu trzeba uciekać się do symulacji.

Będziemy na ogół przyjmować, że obliczenia mogą być wykonane wystarczająco szybko i z taką częstotością, że układ działa w sposób ciągły.

Sterowanie nieliniowe ze sprzężeniem do przodu

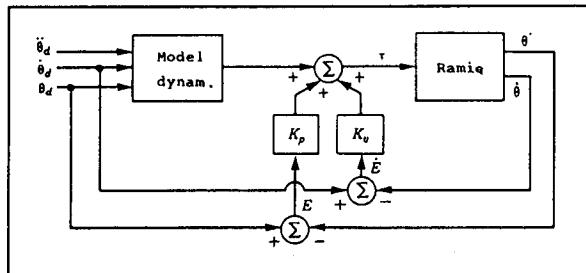
Zastosowanie sterowania ze sprzężeniem do przodu było zaproponowane jako sposób wykorzystania nieliniowego modelu dynamiki w prawie sterowania bez konieczności wykonywania złożonych i czasochłonnych obliczeń z częstotliwością reagowania układu [11]. Na rys. 10.5 część modelowa prawa sterowania zawiera się "w pętli wspomagania", tworząc "czarną skrzynkę", przez którą płyną sygnały sterujące z określoną częstotliwością. Jeśli wybierzemy częstotliwość próbkowania 200 Hz, wtedy dynamiczny model manipulatora musi być obliczany z tą częstotliwością. Inny możliwy układ sterowania jest pokazany na rys. 10.6. Tutaj modelowa część prawa sterowania jest usytuowana "na zewnątrz" pętli wspomagania. W ten sposób można uzyskać szybką wewnętrzną pętlę sprzężenia zwrotnego, w której dokonuje się przemnożenia uchybu przez współczynniki wzmacniania, połączoną z zewnętrzną częścią modelową, z której sygnał wyjściowy jest dodawany z mniejszą częstotliwością.

Niestety, schemat ze sprzężeniem do przodu z rys. 10.6 nie zapewnia pełnego rozdzielenia równań. Jeśli zapiszemy równania¹⁾ układu, to okaże się, że równanie uchybu dla tego układu jest następujące

$$\ddot{\mathbf{E}} + \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{K}_V \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{K}_P \mathbf{E} = 0 \quad (10.19)$$

Oczywiście jeśli zmienia się konfiguracja ramienia, to zmienia się efektywny współczynnik wzmocnienia zamkniętej pętli i quasi-statyczny biegun przemieszcza się na płaszczyźnie liczb zespolonych. Jednakże równanie (10.19) mogłoby być użyte jako punkt początkowy przy rozważaniu projektu mocnego sterownika. Polega to na wyznaczeniu zestawu stałych współczynników wzmocnienia, takich aby pomimo "ruchu" biegunów gwarantowały ich pozostawanie w korzystnych położeniach. Alternatywnie mogłyby być rozważane schematy, w których zmienne współczynniki wzmocnienia są przeliczane i zmieniają się wraz z konfiguracją robota tak, że quasi-statyczne bieguni układu pozostają w ustalonych położeniach.

Zauważmy, że w układzie z rys. 10.6 model dynamiczny jest obliczany jako funkcja jedynie pożądanej trajektorii i dlatego, gdy pożądana trajektoria jest znana wcześniej, to wartości mogą być obliczane przed rozpoczęciem ruchu. Obliczone wcześniej przebiegi momentu obrotowego w czasie rzeczywistym mogą być odczytywane z pamięci. Podobnie, jeśli są obliczane zmienne w czasie współczynniki wzmocnienia, to również one mogą być obliczane wcześniej i zapamiętane. Zatem taki schemat wymagałby niewielkiej liczby działań obliczeniowych w czasie rzeczywistym i tym samym umożliwiałby dobór wysokich częstotliwości próbkowania.



Rys. 10.6. Schemat sterowania z modelową częścią prawa sterowania "na zewnątrz" pętli wspomagania

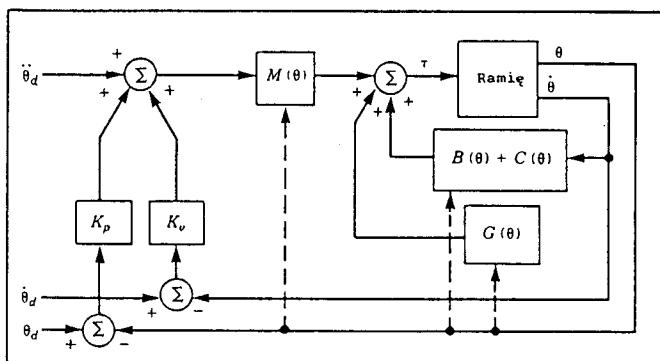
¹⁾ Użyliśmy założeń upraszczających: $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_d) \approx \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}_d, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d) \approx \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$, $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_d) \approx \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_d, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d) \approx \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$.

Realizacja układu sterowania o dwóch częstotliwościach pracy według metody obliczania sił/momentów napędowych

Na rys. 10.7 przedstawiono schemat blokowy rozdzielającego i linearyzującego układu sterowania pozycja, przydatnego do praktycznego zastosowania. Model dynamiczny jest opisany w swojej przestrzeni konfiguracyjnej tak, że parametry dynamiczne są funkcjami tylko pozycji manipulatora. Funkcje te mogą być obliczane w procesie podstawowym przez drugi komputer sterujący [8] lub wyszukiwane w utworzonej wcześniej tablicy [12]. Parametry dynamiczne układu o takiej strukturze mogą być uaktualniane z częstotością mniejszą niż częstotność pracy zamkniętej pętli serwonapędu. Na przykład obliczenia podstawowe mogą być wykonywane z częstotością 60 Hz, podczas gdy częstotość zamkniętej pętli serwonapędu wynosi 250 Hz.

Brak znajomości parametrów

Druga potencjalna trudnośćą spotykana przy stosowaniu algorytmu sterowania wg metody obliczania sił/momentów napędowych jest często niedokładność modelu dynamiki manipulatora. Dotyczy to tylko pewnych elementów modelu, jak np. wpływów tarcia. W rzeczywistości wniknięcie w strukturę modelu tarcia jest szczególnie trudne, nie mówiąc o samych wartościach parametrów [13]. Ponadto, jeśli część modelu dynamicznego manipulatora nie jest powtarzalna, np. zmienia się w czasie eksploatacji robota, to trudno jest utrzymać odpowiednie wartości parametrów modelu przez cały czas pracy robota.



Rys. 10.7. Realizacja układu sterowania manipulatora opartego na jego modelu

Większość robotów służy do chwytania i przenoszenia pewnych części i narzędzi. Gdy robot trzyma narzędzie, wtedy bezwładność i masa narzędzia wpływają na dynamikę manipulatora. W pewnych zastosowaniach przemysłowych rozkład masy narzędzia może być znany i w takim przypadku jest uwzględniany w modelowej części prawa sterowania. Po uchwyceniu narzędzia mogą być aktualizowane wartości macierzy bezwładności, masy całkowitej i współrzędnych środka masy ostatniego członu manipulatora, ujmujące łączne oddziaływanie członu roboczego i narzędzia. Jednak w wielu zastosowaniach rozkład masy obiektu, trzymanego w chwytaku manipulatora, jest na ogół nie znany i wtedy otrzymanie dokładnego modelu dynamiki jest trudne.

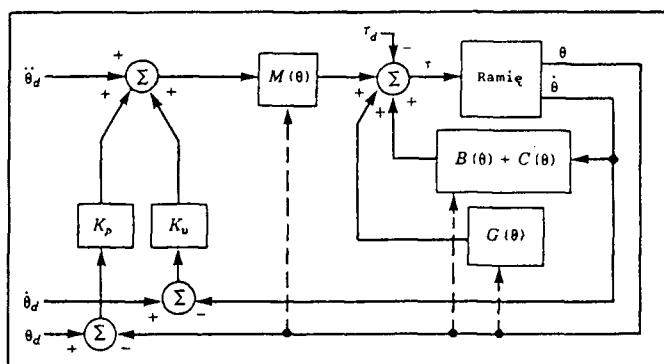
W możliwie najprostszym, nieidealnym przypadku, przyjmujemy dokładny model, realizowany jako analogowy, lecz uwzględniający oddziaływanie zakłóceń zewnętrznych. Na rys. 10.8 zaznaczono wektor sił/momentów napędowych, opisujący oddziaływanie zakłóceń. Zapisując równanie uchybu dla rozpatrywanego układu przy występowaniu nieznanych zakłóceń, dochodzimy do równania

$$\ddot{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_p \mathbf{E} = \mathbf{M}^{-1}(\theta) \tau_d \quad (10.20)$$

gdzie τ_d oznacza wektor sił/momentów napędowych, określający oddziaływanie zakłóceń. Po lewej stronie równania (10.20) zmienne są rozdzielone, lecz z postaci prawej strony wnioskujemy, że zakłócenie w jednym układzie napędowym wprowadza błędy do pozostałych układów napędowych, ponieważ macierz $\mathbf{M}(\theta)$ na ogół nie jest diagonalna.

Na podstawie równania (10.20) można przeprowadzić analizę dotyczącą kilku prostych przypadków. Na przykład można łatwo obliczyć uchyb występujący w stanie ustalonym, a spowodowany stałym zakłóceniem, jako

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{M}^{-1}(\theta) \tau_d \quad (10.21)$$



Rys. 10.8. Sterownik oparty na modelu z zewnętrznym zakłóceniem

Jeśli nasz model dynamiki manipulatora jest niedoskonały, to analiza wynikowego układu zamkniętego staje się bardziej skomplikowana. Zdefiniujemy następujące oznaczenia: $\hat{M}(\theta)$ oznacza model macierzy bezwładności $M(\theta)$ naszego manipulatora. Podobnie $\hat{V}(\theta, \dot{\theta})$, $\hat{G}(\theta)$ i $\hat{F}(\theta, \dot{\theta})$ oznaczają modele sił zależnych od prędkości, siły grawitacji i siły tarcia dla naszego rzeczywistego manipulatora. Doskonała znajomość modelu mogłaby znaczyć, że

$$\begin{aligned}\hat{M}(\theta) &= M(\theta) \\ \hat{V}(\theta, \dot{\theta}) &= V(\theta, \dot{\theta}) \\ \hat{G}(\theta) &= G(\theta) \\ \hat{F}(\theta, \dot{\theta}) &= F(\theta, \dot{\theta})\end{aligned}\tag{10.22}$$

Dlatego, chociaż dynamika manipulatora jest opisana przez

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta})\tag{10.23}$$

to na podstawie naszego prawa sterowania obliczamy

$$\begin{aligned}\tau &= \alpha\tau' + \beta \\ \alpha &= \hat{M}(\theta) \\ \beta &= \hat{V}(\theta, \dot{\theta}) + \hat{G}(\theta) + \hat{F}(\theta, \dot{\theta})\end{aligned}\tag{10.24}$$

Tak więc, rozdzielenie i linearyzacja nie będą wykonane doskonale, jeśli parametry nie są znane dokładnie. Równanie zamkniętego układu ma postać

$$\ddot{\theta} + K_V \dot{\theta} + K_P \theta = M^{-1}[(M - \hat{M})\ddot{\theta} + (V - \hat{V}) + (G - \hat{G}) + (F - \hat{F})]\tag{10.25}$$

gdzie nie wypisano argumentów funkcji dynamicznych w celu skrócenia zapisu. Zauważmy, że jeśli model odpowiada równościami (10.22), to prawa strona równania (10.25) równa się zeru i błędy znikają. Gdy parametry nie są znane dokładnie, to różnice wartości aktualnych i modelowanych parametrów spowodują, że w układzie powstanie uchyb (mogący spowodować nawet niestabilność układu [21]) zgodnie z równaniem (10.25).

Analiza stabilności nieliniowego układu zamkniętego zostanie omówiona w podrozdz. 10.7.

10.6. UKŁADY STEROWANIA WSPÓŁCZESNYCH ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH

Ponieważ trudno jest uzyskać dokładne wartości parametrów modelu, nie zawsze celowe będzie obliczanie złożonego, opartego na modelu, prawa sterowania manipulatora. Moc obliczeniowa, potrzebna do zamodelowania manipulatora z wystarczającą częstością próbkowania, pociąga za sobą zastosowanie kosztownego komputera, co nie zawsze jest opłacalne, szczególnie wtedy gdy nie-

znajomość wartości parametrów uniemożliwia wykorzystanie zalet takiego podjęcia. Producenci robotów przemysłowych uznali, prawdopodobnie z przyczyn ekonomicznych, że próby wykorzystania pełnego modelu manipulatora w sterowaniu są nieopłacalne. Zamiast tego do sterowania współczesnych manipulatorów są wykorzystywane bardzo proste prawa sterowania z uchybem jako wielkością wejściową i są realizowane za pomocą układów opisanych w podrozdz. 9.10. Robot przemysłowy, wyposażony w układ sterowania wysokiej jakości, jest przedstawiony na rys. 10.9.

Indywidualne sterowanie połączeń ruchowych z wykorzystaniem regulatora PID
 Większość stosowanych robotów przemysłowych jest wyposażonych w układ sterowania oparty na schemacie, który można opisać za pomocą naszych oznaczeń w postaci

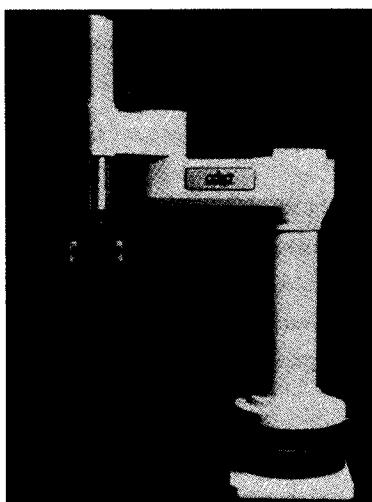
$$\begin{aligned}\alpha &= I \\ \beta &= 0\end{aligned}\quad (10.26)$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową $n \times n$.

Część sprzężona jest opisana w sposób następujący

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E + K_i \int E dt \quad (10.27)$$

gdzie K_v , K_p i K_i oznaczają stałe macierze diagonalne. W wielu przypadkach wyraz $\ddot{\theta}_d$ jest niemożliwy do określenia i jest przyjmowany jako równy zera.



Rys. 10.9. Robot Adept One, o napędzie bezpośrednim, producent Adept Technology Inc.

Oznacza to, że w najprostszych prawach sterowania sterowników robotów nie występują składniki oparte na modelu. Taki schemat układu sterowania, proporcjonalno-różniczkowo-całkowy, jest prosty, ponieważ każde połączenie ruchowe jest sterowane jako oddzielny układ. Często do praktycznej realizacji równania (10.27) wykorzystuje się osobny mikroprocesor dla każdego połączenia ruchowego, co omówiono w podrozdz. 9.10.

Działanie manipulatora, sterowanego w ten sposób, nie jest łatwe do opisania. Ze względu na nierozdzielenie zmiennych, zmiana współrzędnychewnętrznych w jednym z połączeń ruchowych powoduje zmiany w innych. Te oddziaływanie powodują błędy, które są likwidowane przez prawo sterowania z uchybem jako zmienną wejściową. Nie jest możliwe dobranie stałych współczynników wzmacnienia, zapewniających krytycznie tłumioną odpowiedź na zakłócenia dla wszystkich konfiguracji. Dlatego dobierane są "uśrednione" współczynniki wzmacnienia, dające tylko w przybliżeniu tłumienie krytyczne w centrum przestrzeni roboczej robota. W pewnych ekstremalnych konfiguracjach manipulatora układ wykazuje tłumienie albo podkrytyczne, albo nadkrytyczne. W zależności od rozwiązań konstrukcyjnych robota efekty te mogą mieć małe znaczenie i nie pogarszać jakości sterowania. W takich układach ważne jest utrzymanie możliwie wysokich wartości współczynników wzmacnienia, aby te nieuniknione zakłócenia były szybko likwidowane.

Dodatkowa kompensacja siły grawitacji

Ponieważ siły grawitacji mogą powodować statyczne błędy pozycjonowania, niektórzy producenci robotów uzupełniają prawo sterowania o model sił grawitacji $G(\theta)$ (tj. $\beta = \hat{G}(\theta)$ wg naszych oznaczeń). Pełne prawo sterowania przyjmuje postać

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + K_v \dot{\theta} + K_p \theta + K_i \int E dt + \hat{G}(\theta) \quad (10.28)$$

Takie prawo sterowania jest prawdopodobnie najprostsze w przypadku sterownika opartego na modelu. Ponieważ w takim przypadku równanie (10.28) nie może być realizowane oddzielnie dla każdego stopnia swobody, to schemat sterownika powinien umożliwiać przekazywanie informacji między sterownikami lub wykorzystywanie procesora centralnego.

Pewne przybliżenia sterowania rozdzielającego

Istnieją różne sposoby upraszczania równań dynamiki konkretnych manipulatorów [3, 14]. Dla uproszczonego równania dynamiki można wprowadzić z pewnym przybliżeniem rozdzielające i linearyzujące prawo sterowania. Zazwyczaj

przy takim uproszczeniu pomija się niektóre składniki wektora sił/momentów napędowych, zależne od prędkości, tzn. modeluje się tylko siły bezwładności i grawitacji. Często w sterowniku nie są uwzględniane modele tarcia, ponieważ tarcie jest trudne do poprawnego modelowania. Czasem upraszcza się macierz bezwładności i uwzględnia tylko najważniejsze osiowe momenty bezwładności, pomijając jako małe momenty dewiacyjne. Na przykład w pracy [14] przedstawiono uproszczoną wersję obliczeń macierzy bezwładności dla robota PUMA 560, które wymagają tylko około 10% operacji potrzebnych do obliczenia kompletnej macierzy, przy zachowaniu dokładności wyniku w granicach 1%.

10.7. ANALIZA STABILNOŚCI LAPUNOWA

W rozdziale 3 przeprowadziliśmy analizę stabilności liniowych układów sterowania, jak również możliwości określenia odpowiedzi dynamicznej w zależności od tłumienia oraz szerokości pasma częstotliwości układu zamkniętego. Analiza taka jest wymagana również dla układów nieliniowych, które zostały rozdzielone i zlinearyzowane za pomocą doskonałego modelu nieliniowego sterownika, dającego wynikowy układ liniowy. Jednak gdy rozdzielenie i liniaryzacja nie są realizowane w sterowniku lub są wykonane niekompletnie lub niedokładnie, to ogólny układ zamknięty pozostaje układem nieliniowym. Dla układów nieliniowych analiza stabilności i funkcjonowania jest znacznie bardziej skomplikowana. W tym podrozdziale wprowadzimy pewną metodę analizy stabilności, przydatną zarówno dla układów liniowych, jak i nieliniowych.

Rozważmy prosty układ złożony z masy, sprężyny i tłumienia, który początkowo rozważano w rozdz. 9. Równanie ruchu tego układu jest następujące

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (10.29)$$

Energia układu jest opisana przez

$$v = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad (10.30)$$

gdzie pierwszy wyraz oznacza energię kinetyczną masy, a drugi energię potencjalną zmagazynowaną w sprężynie. Zauważmy, że wartość v w energii układu jest zawsze nieujemna (tj. dodatnia lub równa zeru). Określmy prędkość zmiany energii całkowitej, różnicując względem czasu równanie (10.30)

$$\dot{v} = m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} \quad (10.31)$$

Podstawienie zależności (10.29) za $m\ddot{x}$ w związku (10.31) daje

$$\dot{v} = -b\dot{x}^2 \quad (10.32)$$

Zależność ta jest zawsze niedodatnia (ponieważ $b > 0$). Zatem energia układu zawsze maleje, chyba że $\dot{x} = 0$. Świadczy to o tym, że jakkolwiek początkowo zakłócony, układ będzie tracił energię do momentu zatrzymania. Badając możliwe położenia równowagi poprzez analizę stanu ustalonego, opisanego równaniem (10.29), otrzymujemy się

$$kx = 0 \quad (10.33)$$

lub

$$x = 0 \quad (10.34)$$

Zatem na podstawie analizy energetycznej pokazaliśmy, że układ opisany równaniem (10.29) przy danych warunkach początkowych (tj. przy pewnej energii początkowej) będzie ostatecznie dążył do zatrzymania w położeniu równowagi. Ten dowód stabilności (oparty na wyniku analizy energetycznej) jest prostym przykładem bardziej ogólnej metody zwanej analizą stabilności Lapunowa lub drugą (albo prostą) metodą Lapunowa od nazwiska 19-wiecznego matematyka rosyjskiego [15].

Interesującą cechą tej metody jest to, że możemy stwierdzić stabilność układu bez rozwiązywania równania różniczkowego opisującego układ. Jednak, chociaż metoda Lapunowa jest użyteczna przy sprawdzaniu stabilności, to na ogół nie dostarcza żadnej informacji o funkcji przejścia lub funkcjonowaniu układu. Zauważmy, że nasza analiza energetyczna nie dała informacji o tym, czy w układzie występuje tłumienie nadkrytyczne czy podkrytyczne lub jak długo trwałyby stłumienie zakłócenia. Ważne jest zauważenie różnicy między stabilnością i funkcjonowaniem, ponieważ układ stabilny może mimo to wykazywać w przewidzianym zastosowaniu niezadowalające sterowanie.

Metoda Lapunowa jest bardziej ogólna niż pokazano na powyższym przykładzie. Jest jedną z kilku metod, które mogą być stosowane bezpośrednio do układów nieliniowych w celu zbadania ich stabilności. Aby zwięźle przedstawić ideę metody Lapunowa (wystarczająco szczegółowo dla naszych potrzeb), zapoznajmy się z krótkim wprowadzeniem do teorii, a następnie przejdziemy do kilku przykładów. Pełniejszy i ogólniejszy opis teorii Lapunowa można znaleźć w [16, 17].

Metoda Lapunowa służy do wyznaczenia stabilności równania różniczkowego

$$\dot{X} = f(X) \quad (10.35)$$

gdzie X ma wymiar $m \times 1$, a $f(\cdot)$ może być funkcją nieliniową. Zauważmy, że równania różniczkowe wyższych rzędów zawsze mogą być zapisane jako układ równań pierwszego rzędu w postaci (10.35). Aby wykazać za pomocą metody Lapunowa, że układ jest stabilny, wymagane jest zaproponowanie uogólnionej funkcji energii $v(x)$, która ma następujące właściwości:

1. $v(X)$ ma ciągłą pierwszą pochodną cząstkową oraz $v(X) > 0$ dla wszystkich X z wyjątkiem $v(0) = 0$.
2. $\dot{v}(X) \leq 0$. Tutaj $\dot{v}(X)$ oznacza zmianę $v(X)$ wzdłuż wszystkich trajektorii układu.

Właściwości te mogą utrzymywać się tylko w pewnym obszarze lub mogą być globalne, wykazując mniejszy lub większy zapas stabilności w odpowiednich obszarach. Intuicyjnie można przyjąć, że dodatnio określona "energodoboda" funkcja stanu jest zawsze malejąca lub stała - zatem układ jest stabilny w tym sensie, że rozmiar wektora stanu jest ograniczony.

Gdy $\dot{v}(X)$ jest mniejsze od zera, to można stwierdzić asymptotyczną zbieżność wektora stanu do wektora zerowego. Praca Lapunowa została rozwinięta przez LaSalle'a i Lefschetza [4], którzy wykazali, że w pewnych sytuacjach, nawet gdy $\dot{v}(X) \leq 0$ (zauważmy włączoną równość), może występować stabilność asymptotyczna. Dla naszych celów możemy zająć się przypadkiem $\dot{v}(X) = 0$, wykonując analizę stanu ustalonego w celu stwierdzenia, czy układ jest stabilny asymptotycznie lub czy układ poddany badaniu może "zatrzymać" się w innym położeniu niż opisane przez $v(X) = 0$.

Układ opisany przez (10.35) jest określany jako autonomiczny, ponieważ funkcja $f(\cdot)$ nie jest jawną funkcją czasu. Metodę Lapunowa można również rozszerzyć na układy nieautonomiczne, w których czas jest argumentem funkcji nieliniowych. Szczegółowy opis podano w [4, 17].

PRZYKŁAD 10.4

Rozważyć układ liniowy

$$\dot{X} = -AX \quad (10.36)$$

gdzie A jest dodatnio określona macierzą $m \times m$. Można zaproponować domniemaną funkcję Lapunowa w postaci

$$v(X) = \frac{1}{2} X^T X \quad (10.37)$$

która jest ciągła i ma wartości nieujemne w całej dziedzinie. W wyniku różniczkowania otrzymuje się funkcję

$$\dot{v}(X) = X^T \dot{X} = X^T (-AX) = -X^T AX \quad (10.38)$$

która ma wartości niedodatnie w całej dziedzinie, ponieważ A jest macierzą dodatnio określoną. Zatem (10.37) jest rzeczywiście funkcją Lapunowa dla układu (10.36). Układ jest asymetrycznie stabilny, ponieważ pochodna $\dot{v}(X)$ może być równa zeru tylko przy $X = 0$, przy innych wartościach argumentu jest malejąca. ■

PRZYKŁAD 10.5

Rozważyć układ mechaniczny ze sprężyną i tłumieniem, w którym zarówno sprężyna, jak i tłumik są nieliniowe

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) + k(x) = 0 \quad (10.39)$$

Funkcje $b(\cdot)$ i $k(\cdot)$ są funkcjami ciągłymi w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, takimi że

$$\begin{aligned} \dot{x}b(\dot{x}) &> 0 \text{ dla } x \neq 0 \\ xk(x) &> 0 \text{ dla } x \neq 0 \end{aligned} \quad (10.40)$$

Proponując funkcję Lapunowa w postaci

$$v(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x k(\lambda) d\lambda \quad (10.41)$$

otrzymujemy

$$\dot{v}(x, \dot{x}) = \dot{x}\ddot{x} + k(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) - k(x)\dot{x} + k(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) \quad (10.42)$$

Zatem pochodna $\dot{v}(\cdot)$ jest niedodatnia i tylko częściowo określona, ponieważ nie jest określona jako funkcja x , lecz tylko \dot{x} . W celu stwierdzenia stabilności asymptotycznej musimy upewnić się, że układ nie może "zatrzymać się" przy niezerowym x . Aby zbadać wszystkie trajektorie, dla których $\dot{x} = 0$, musimy rozważyć

$$\ddot{x} = -k(x) \quad (10.43)$$

dla którego $x = 0$ jest jedynym rozwiązaniem. Zatem układ będzie zatrzymywał się, jeśli $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$. ■

PRZYKŁAD 10.6

Rozważyć następujące równanie dynamiki manipulatora

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad (10.44)$$

sterowanego wg prawa

$$\tau = K_p E - K_d \dot{\theta} + G(\theta) \quad (10.45)$$

gdzie K_p i K_d oznaczają diagonalne macierze współczynników wzmacniania. Zauważmy, że przyjęty sterownik nie jest typu nadążnego, lecz steruje ruchem manipulatora do położenia docelowego wzdłuż trajektorii zadanej przez równania dynamiki wg sterowania pozycyjnego. Równanie dla wynikowego układu zamkniętego otrzymuje się przyrównując (10.44) i (10.45)

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}_d \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_p \boldsymbol{\theta} = \mathbf{K}_p \boldsymbol{\theta}_d \quad (10.46)$$

skąd można uzyskać dowód na globalną asymptotyczną stabilność układu za pomocą metody Lapunowa [18, 19].

Należy rozpatrzyć domniemaną funkcję Lapunowa

$$v = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{K}_p \mathbf{E} \quad (10.47)$$

Wartości funkcji (10.47) są zawsze nieujemne, ponieważ macierz bezwładności manipulatora $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ oraz macierz współczynnika wzmacnienia \mathbf{K}_p są dodatnio określone. Różniczkując równanie (10.47) otrzymujemy pochodną

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{E}^T \mathbf{K}_p \dot{\boldsymbol{\theta}} = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{K}_d \dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \\ &= -\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{K}_d \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (10.48)$$

która jest niedodatnia, jeśli macierz \mathbf{K}_d jest dodatnio określona. W ostatnim kroku przekształceń (10.48) skorzystaliśmy z interesującej tożsamości

$$\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (10.49)$$

której dowód może być oparty na badaniu struktury równań Lagrange'a [18, 20] (patrz również ćwiczenie 6.17).

Następnie sprawdzamy czy układ może "zaciąć się" przy niezerowym uchybie. Ponieważ pochodna v' będzie równa zeru tylko wzdłuż trajektorii, dla której $\dot{\boldsymbol{\theta}} = 0$ oraz $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0$, to z równania (10.46) wynika, że w tym przypadku

$$\mathbf{K}_p \mathbf{E} = 0 \quad (10.50)$$

a ponieważ macierz \mathbf{K}_p jest nieosobliwa, to

$$\mathbf{E} = 0 \quad (10.51)$$

Zatem prawo sterowania (10.45) zastosowane do układu (10.41) charakteryzuje się globalną stabilnością asymptotyczną.

Jest to ważny dowód, ponieważ w pewnej mierze wyjaśnia sposób sterowania pracą współczesnych robotów. W większości robotów przemysłowych zastosowane są proste serwomechanizmy sterowane uchybem, czasem uwzględniające model sił grawitacji, podobny do opisanego równaniem (10.45). ■

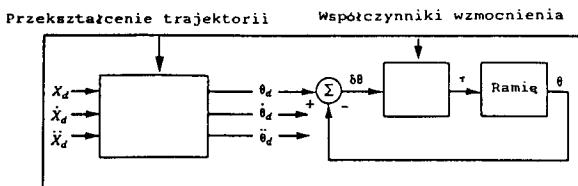
Więcej przykładów nieliniowych praw sterowania manipulatorów, których stabilności można dowieść za pomocą metody Lapunowa, podano w ćwicz. (10.11) + (10.16). Ostatnio teoria Lapunowa jest cytowana najczęściej w publikacjach z zakresu robotyki [18, 25].

10.8. STEROWANIE W PRZESTRZENI KARTEZJAŃSKIEJ

W tym podrozdziale wprowadzimy koncepcję sterowania w przestrzeni kartezańskiej. Chociaż takie układy nie są obecnie stosowane w robotach przemysłowych, to badania nad nimi są prowadzone w wielu instytutach badawczych.

Porównanie z układami sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych

We wszystkich dotąd rozpatrywanych układach sterowania manipulatorów przyjmowaliśmy, że pożądana trajektoria jest zadana w postaci funkcji przemieszczeń, prędkości i przyśpieszeń w połączeniach ruchowych, jako funkcji czasu. Przyjmując, że pożądane wielkości wejściowe były dostępne, projektowaliśmy układy sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych, w których odchylenie od zadanej trajektorii określa różnica między pożdanymi i aktualnymi wielkościami wyrażonymi w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych. Bardzo często chcemy, aby końcówka wykonawcza manipulatora poruszała się po linii prostej lub po torze o innym kształcie opisanym we współrzędnych kartezańskich. Jak pokazano w rozdziale 7, możliwe jest obliczenie przebiegów czasowych trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, które odpowiadają prostoliniowym trajektoriom kartezańskim. Na rys. 10.10 pokazano to podejście do sterowania manipulatora. Podstawową cechą tego podejścia jest proces przekształcania trajektorii, służący do obliczenia trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych. Poprzedza on działanie opisanego wcześniej układu sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych.



Rys. 10.10. Schemat sterowania w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych z wejściem w postaci trajektorii we współrzędnych kartezańskich

Proces przekształcenia trajektorii jest dość trudny (w sensie obliczeniowym), jeśli przeprowadza się go metodą analityczną. Wymagane są następujące obliczenia

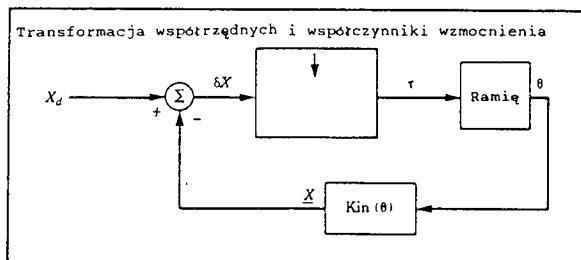
$$\begin{aligned}\Theta_d &= INV\text{KIN}(\mathcal{X}_d) \\ \dot{\Theta}_d &= J^{-1}(\Theta)\dot{\mathcal{X}}_d \\ \ddot{\Theta}_d &= J^{-1}(\Theta)\ddot{\mathcal{X}}_d + J^{-1}(\Theta)\dot{\mathcal{X}}_d\end{aligned}\tag{10.52}$$

We współczesnych układach wektor Θ_d jest wyznaczany zwykle w wyniku rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki, a następnie prędkości i przyśpieszenia w połączeniach ruchowych są obliczane numerycznie poprzez pierwsze i drugie różnice skończone. Jednak takie numeryczne różniczkowanie prowadzi do wzmacnienia zakłóceń i wprowadza opóźnienie²⁾. Dlatego jesteśmy zainteresowani znalezieniem mniej pracochłonnej metody obliczeń (10.52) albo wprowadzeniem innego układu sterowania, w którym taka informacja nie jest potrzebna.

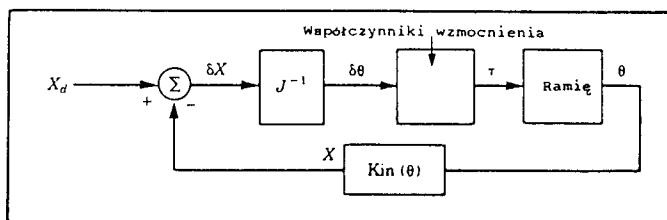
Alternatywne podejście pokazano na rys. 10.11. Tutaj zmierzona pozycja manipulatora jest natychmiast przekształcana za pomocą równań kinematyki do opisu pozycji we współrzędnych kartezańskich. Opis ten jest następnie porównywany z pożdanym położeniem w układzie kartezańskim w celu wyrażenia uchybu w przestrzeni kartezańskiej. Układy sterowania, które są oparte na wyrażeniu uchybu w przestrzeni kartezańskiej, są nazywane **układami sterowania w przestrzeni kartezańskiej**. Dla uproszczenia na rys. 10.11 nie pokazano sprzężenia zwrotnego prędkości.

Proces przekształcania trajektorii jest zastąpiony przez przekształcenie współrzędnych wewnętrz pętli sprzężenia zwrotnego. Zauważmy, że sterowniki do sterowania w przestrzeni kartezańskiej muszą wykonywać wiele obliczeń w pętli, ponieważ przekształcania kinematyczne znajdują się teraz "wewnątrz pętli". Może to być wadą metod sterowania w przestrzeni kartezańskiej, ponieważ wynikowy układ może pracować przy mniejszej częstotliwości próbkowania w porównaniu z układami sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych (za pomocą komputera o tej samej mocy obliczeniowej). To z kolei na ogół pogarsza stabilność i zdolność układu do eliminacji zakłóceń.

²⁾ Rożniczkowanie numeryczne wprowadza opóźnienie, chyba że jest ono oparte na poprzednich, bieżących i następnych wartościach. Gdy cała trajektoria jest zaplanowana wcześniej, ten rodzaj różniczkowania numerycznego może być wykorzystany.



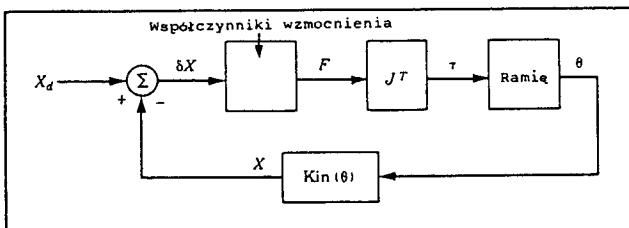
Rys. 10.11. Koncepcja układu sterowania w przestrzeni kartezjańskiej



Rys. 10.12. Układ sterowania w przestrzeni kartezjańskiej oparty na wykorzystaniu odwróconego jakobianu

Intuicyjne układy sterowania we współrzędnych kartezjańskich

Jeden z możliwych układów sterowania, który przyjęto raczej intuicyjnie, jest pokazany na rys. 10.12. W schemacie tym porównywane są położenia bieżące i pożądane, określone w przestrzeni kartezjańskiej, w celu wyrażenia uchybu δX we współrzędnych kartezjańskich. Ten, z założenia mały, błąd przy poprawnej pracy układu sterowania może być przekształcony w małe zmiany współrzędnych konfiguracyjnych za pomocą odwróconego jakobianu. Wynikowe wartości uchybu wyrażone we współrzędnych konfiguracyjnych $\delta\theta$ są następnie mnożone przez współczynniki wzmocnienia, w celu obliczenia sił/momentów napędowych, które spowodują redukcję tych błędów. Zauważmy, że na rys. 10.12 przedstawiono uproszczony schemat sterownika, na którym nie zaznaczono sprzężenia zwrotnego prędkości ze względu na czytelność rysunku. Nazwiemy ten układ sterownikiem z odwróconym jakobianem.



Rys. 10.13. Schemat sterowania we współrzędnych kartezjańskich za pomocą transponowanego jakobianu

Inny możliwy układ jest przedstawiony na rys. 10.13. Tutaj wektor uchybu, określony w układzie kartezjańskim, jest pomnożony przez współczynnik wzmocnienia w celu obliczenia współrzędnych kartezjańskich wektora sił, które przyłożone do członu roboczego spowodują jego ruch w kierunku odpowiadającym redukcji uchybu. Ten wektor siły (w rzeczywistości wektor siła-moment siły), określony w układzie kartezjańskim, jest następnie przekształcany przez jakobian transponowany w celu obliczenia równoważnych sił/momentów napędowych, które spowodują redukcję zmierzzonego uchybu. Nazwiemy ten układ **sterownikiem z transponowanym jakobianem**.

Sterowniki z jakobianem odwróconym i transponowanym wprowadziliśmy w sposób intuicyjny. Nie możemy być pewni, że takie układy będą stabilne, pomijając jakość funkcjonowania. Ciekawe jest również to, że oba układy są bardzo podobne z wyjątkiem tego, że jeden zawiera odwrócenie jakobianu, a drugi jego transpozycję. Trzeba pamiętać, że odwrotność jakobianu na ogół nie jest równa jego transpozycji (tylko w przypadku manipulatora ścisłe kartezjańskiego występuje równość $J^T = J^{-1}$). Dokładny opis dynamicznych własności takich układów (jeśli np. są wyrażone w postaci równania drugiego rzędu w przestrzeni uchybu) jest bardzo skomplikowany. Okazuje się, że oba schematy będą pracować (tzn. mogą być stabilne), lecz niezbyt dobrze (tzn. ich funkcjonowanie nie jest jednakowo dobre w całej przestrzeni roboczej). Oba mogą stać się stabilne przez odpowiedni dobór współczynników wzmocnienia i uwzględnienie sprzężenia zwrotnego prędkości w pewnej postaci, której nie pokazano na rys. 10.12 i 10.13. Chociaż oba będą pracować, żaden nie jest poprawny w tym sensie, że nie możemy znaleźć stałych współczynników wzmocnienia, odpowiadających stałym biegunom zamkniętej pętli. Dynamiczna odpowiedź takiego sterownika będzie zmieniać się wraz z konfiguracją ramienia.

Układ z rozdzieleniem sterowania w przestrzeni kartezjańskiej

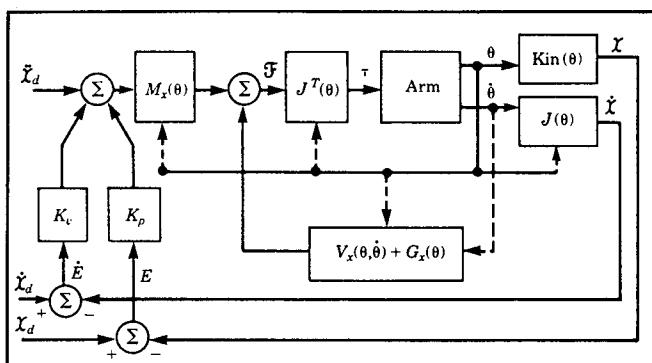
Podobnie jak dla sterowników działających we współrzędnych konfiguracyjnych, również dla sterowników operujących we współrzędnych kartezjańskich dobre funkcjonowanie oznaczałoby takie same właściwości dynamiczne dla wszystkich konfiguracji manipulatora. Ponieważ w układach sterowania w przestrzeni kartezjańskiej uchyb jest wyrażony we współrzędnych kartezjańskich, to chcielibyśmy zaprojektować taki układ sterowania, który przy zachowaniu tłumienia krytycznego dla wszystkich możliwych konfiguracji zmniejszałby uchyb, określony w tych współrzędnych.

Tak samo, jak zapewniliśmy dobry sterowanie układu sterownikiem operującym we współrzędnych konfiguracyjnych, w którym wykorzystano model manipulatora z linearyzacją i rozdzieleniem sterowania, możemy rozpatrzyć ten przypadek w przestrzeni kartezjańskiej. Jednakże teraz trzeba napisać dynamiczne równania ruchu manipulatora we współrzędnych kartezjańskich. Można to zrobić w sposób przedstawiony w rozdz. 6. Wynikowa postać równań ruchu jest całkiem podobna do wersji równania zapisanego we współrzędnych konfiguracyjnych.

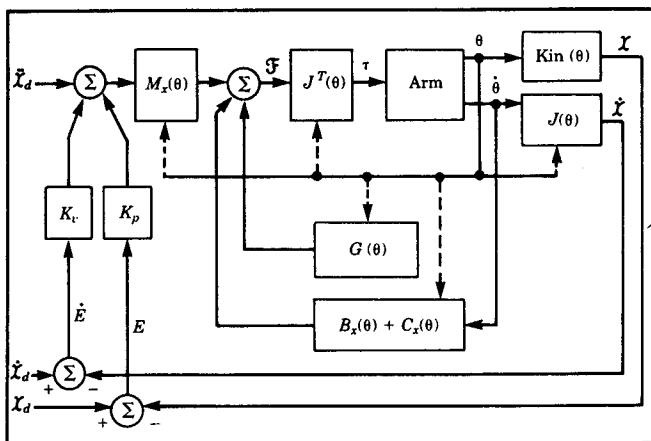
Równanie dynamiki ciała sztywnego może być zapisane w postaci

$$\mathcal{F} = M_x(\theta) \ddot{\chi} + V_x(\theta, \dot{\theta}) + G_x(\theta) \quad (10.53)$$

gdzie \mathcal{F} oznacza fikcyjny wektor siła-moment siły, działający na człon roboczy manipulatora, a χ - odpowiedni wektor przedstawiający pozycję i orientację członu roboczego w układzie kartezjańskim [8]. Analogicznie określono pozostałe wielkości, które oznaczono: $M_x(\theta)$ - macierz bezwładności, $V_x(\theta, \dot{\theta})$ - wektor prędkości, a $G_x(\theta)$ - wektor sił grawitacji, wszystkie wyrażone we współrzędnych kartezjańskich.



Rys. 10.14. Układ sterowania we współrzędnych kartezjańskich



Rys. 10.15. Realizacja układu sterowania w przestrzeni kartezjańskiej

Podobnie jak w przypadku sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych, możemy równania dynamiki wykorzystać w sterowniku z rozdzieleniem i linearyzacją. Ponieważ wg równania (10.53) oblicza się \mathcal{F} -fikcyjny wektor siły w układzie kartezjańskim, który powinien być przyłożony do członu roboczego, zatem w celu zrealizowania układu sterowania wykorzystamy również transponowany jakobian. Obliczamy wektor \mathcal{F} wg (10.53), jednak nie możemy faktycznie przyłożyć takiej siły do końcówki wykonawczej. Zamiast niej obliczamy siły/momenty napędowe, potrzebne do efektywnego zrównoważenia układu

$$\tau = \mathbf{J}^T(\theta) \mathcal{F} \quad (10.54)$$

Na rys. 10.14 pokazano układ sterowania manipulatora w przestrzeni kartezjańskiej, wykorzystujący pełne rozdzielenie dynamiczne. Zauważmy, że model manipulatora jest poprzedzony przez transpozycję jakobianu i że sterownik z rys. 10.14 pozwala na bezpośrednie opisanie trajektorii w układzie kartezjańskim bez konieczności ich przekształcenia.

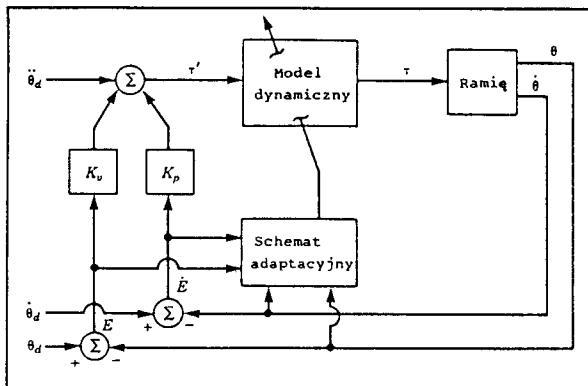
Tak jak w przypadku sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych, praktyczna realizacja zadania może być najlepiej osiągnięta za pomocą układu sterowania o dwóch częstotliwościach pracy. Na rys. 10.15 pokazano schemat blokowy sterownika operującego we współrzędnych kartezjańskich, z rozdzieleniem i linearyzacją, przy czym parametry dynamiczne są określone w postaci funkcji tylko pozycji manipulatora. Te parametry dynamiczne są aktualniane z mniejszą częstotością od częstotliwości pracy zamkniętej pętli serwonapędu w procesie podstawowym lub są obliczane przez drugi komputer sterujący. Jest to właściwe podejście, ponieważ żądamy szybkiej pętli serwonapędu (pracującego

przy częstotliwości 500 Hz lub nawet większej) w celu eliminowania zakłóceń i uzyskania stabilności układu. Ponieważ parametry dynamiczne są funkcjami tylko pozycji manipulatora, powinny być uaktualniane z częstotliwością odpowiadającą prędkości zmian konfiguracji manipulatora. Częstość ta prawdopodobnie nie musi być wyższa niż 100 Hz [8].

10.9. STEROWANIE ADAPTACYJNE

W rozważaniach dotyczących sterowania opartego na modelu zauważono, że często parametry manipulatora nie są znane dokładnie. Gdy parametry w modelu nie odpowiadają parametrom rzeczywistego urządzenia, powstanie uchyb, co wyjaśnia zależność (10.25). Te wartości uchybu mogłyby służyć do sterowania pewnym układem adaptacyjnym, który usiłuje uaktualniać wartości parametrów modelu, aż uchyb zniknie. Kilka takich układów adaptacyjnych zostało już zaproponowanych.

Idealny układ adaptacyjny mógłby odpowiadać układowi przedstawionemu na rys. 10.16. Pewien proces adaptacyjny, oparty na obserwacji stanu manipulatora i uchybu, poprawia parametry w modelu nieliniowym, aż błędy znikną. Taki układ mógłby uczyć się swoich właściwości dynamicznych. Projektowanie i analiza układów adaptacyjnych wykracza poza zakres tej książki. Metodę projektowania układu o dokładnie takiej strukturze, jak na rys. 10.16, zapewniającej stabilność globalną, przedstawiono w [20, 21]. Odpowiednią technikę opisano w [22].



Rys. 10.16. Koncepcja adaptacyjnego sterownika manipulatora

Bibliografia

- [1] R.P.Paul, "Modelling, Trajectory Calculation, and Servoing of a Computer Controlled Arm", Technical Report AIM-177, Stanford University Artificial Intelligence Laboratory, 1972.
- [2] B.Markiewicz, "Analysis of the Computed Torque Drive Method and Comparison with Conventional Position Servo for a Computed-Controlled Manipulator", Jet Propulsion Laboratory Technical Memo 33-601, March 1973.
- [3] A.Bejczy, "Robot Arm Dynamics and Control", Jet Propulsion Laboratory Technical Memo 33-669, February 1974.
- [4] J.LaSalle, S.Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York, 1961.
- [5] P.K.Khosla, "Some Experimental Results on Model-Based Control Schemes", IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.
- [6] M.Leahy, K.Valavanis, G.Saridis, "The Effects of Dynamic Models on Robot Control", IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.
- [7] M.Leborgne, R.Dumas, J.Borelly, C.Samson, B.Espiau, "Nonlinear Control of Robot Manipulators Part 2: Simulation and Implementation of a Robust Control Method", Technical Report, IRISA/INRIA, Rennes, France, 1985.
- [8] O.Khatib, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol.RA-3, No.1, 1987.
- [9] C.An, C.Atkeson, J.Hollerbach, "Model-Based Control of a Direct Arm, Part II: Control", IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.
- [10] G.Franklin, J.Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1989.
- [11] A.Liegeois, A.Fournier, M.Aldon, "Model Reference Control of High Velocity Industrial Robots", *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, 1980.
- [12] M.Raibert, "Mechanical Arm Control Using a State Space Memory", SME Paper MS77-750, 1977.
- [13] B.Armstrong, "Friction: Experimental Determination, Modelling and Compensation", IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.
- [14] B.Armstrong, O.Khatib, J.Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm", IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.

- [15] A. Lyapunov, "On the General Problem of Stability of Motion", (in Russian), Kharkov Mathematical Society, Soviet Union, 1892.
- [16] C. Desoer, M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.
- [17] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, 1978.
- [18] S. Arimoto, F. Miyazaki, "Stability and Robustness of PID Feedback Control for Robot Manipulators of Sensory Capability", Third International Symposium of Robotics Research, Gouvieux, France, July 1985.
- [19] D. Koditschek, "Adaptive Strategies for the Control of Natural Motion", *Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control*, Ft. Lauderdale, December 1985.
- [20] J. Craig, P. Hsu, S. Sastry, "Adaptive Control of Mechanical Manipulators", IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.
- [21] J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1988.
- [22] J. J. Slotine, W. Li, "On the Adaptive Control of Mechanical Manipulators", *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 6, No. 3, 1987.
- [23] R. Kelly, R. Ortega, "Adaptive Control of Robot Manipulators: An Input-Output Approach", IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988.
- [24] H. Das, J. J. Slotine, T. Sheridan, "Inverse Kinematic Algorithms for Redundant Systems", IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988.
- [25] T. Yabuta, A. Chona, G. Beni, "On the Asymptotic Stability of the Hybrid Position/Force Control Scheme for Robot Manipulators", IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988.

Ćwiczenia

- 10.1. [15] Podać nieliniowe równania sterowania dla α , β - sterownika z rozdzieleniem układu opisanego równaniem

$$\tau = (2\sqrt{\theta} + 1)\ddot{\theta} + 3\dot{\theta}^2 - \sin(\theta)$$

Znaleźć takie współczynniki wzmacnienia, aby układ był zawsze tłumiony krytycznie z $k_{CL} = 10$.

- 10.2. [15] Podać nieliniowe równania sterowania dla α , β - sterownika z rozdzieleniem układu opisanego równaniem

$$\tau = 5\dot{\theta} + 2\ddot{\theta} - 13\dot{\theta}^3 + 5$$

Znaleźć takie współczynniki wzmacnienia, aby układ był zawsze tłumiony krytycznie z $k_{CL} = 10$.

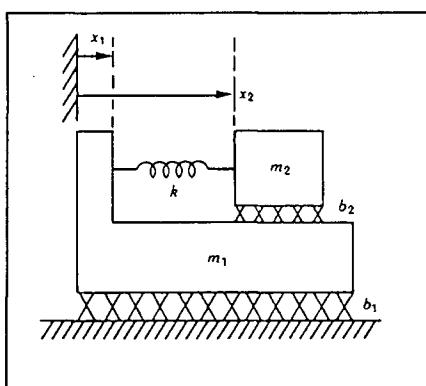
- 10.3. [19] Narysować schemat blokowy sterownika, operującego we współrzędnych konfiguracyjnych, dla manipulatora dwuczłonowego z podrozdz. 6.7, zapewniającego tłumienie krytyczne układu sterowania manipulatora w całej jego przestrzeni roboczej. Podać równania dla bloków schematu.
- 10.4. [20] Narysować schemat blokowy sterownika, operującego we współrzędnych kartezjańskich, dla dwuczłonowego manipulatora z podrozdz. 6.7, zapewniającego tłumienie krytyczne układu sterowania manipulatora w całej przestrzeni roboczej (patrz przykład 6.6). Podać równania wewnątrz bloków schematu.
- 10.5. [18] Zaprojektować nadążyły układ sterowania manipulatora, którego dynamika opisana jest przez równania

$$\tau_1 = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\tau_2 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + v_2 \dot{\theta}_2$$

Czy sądzisz, że te równania mogą reprezentować rzeczywisty układ?

- 10.6. [17] Dla układu sterowania, zaprojektowanego dla jednoczłonowego manipulatora w przykładzie 10.3, podać wyrażenie na błąd pozycji stanu ustalonego jako funkcję błędu masy. Niech $\psi_m = m - \hat{m}$. Wynik powinien być funkcją l , g , θ , ψ_m i k_p . Dla jakiej pozycji manipulatora funkcja ta osiąga maksimum?
- 10.7. [26] Dla układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody z rys. 10.17 zaprojektować taki sterownik, aby x_1 i x_2 nadawały za trajektorią i w układzie występuowało tłumienie krytyczne zakłóceń.



Rys. 10.17. Układ mechaniczny o dwóch stopniach swobody

- 10.8. [30] Rozważyć równania dynamiki dwuczłonowego manipulatora z podrozdz. 6.7 w postaci konfiguracji przestrzennej. Wyprowadzić wyrażenia na wrażliwość wartości obliczanego momentu napędowego na odchyłki θ . Czy możesz powiedzieć cokolwiek o częstotliwości obliczania równań dynamiki w sterowniku podobnym do tego z rys. 10.7 jako o funkcji przeciętnych prędkości w połączeniach ruchowych podczas normalnych operacji?
- 10.9. [32] Rozważyć równania dynamiki dwuczłonowego manipulatora z przykładu 6.6 w postaci przestrzennej konfiguracji kartezjańskiej. Wyprowadzić wyrażenia na wrażliwość obliczanego momentu napędowego na małe odchylenia θ . Czy możesz powiedzieć cokolwiek o częstotliwości obliczeń równań dynamiki w sterowniku podobnym do tego z rys. 10.15 jako o funkcji przeciętnych prędkości w połączeniach ruchowych podczas normalnych operacji?

- 10.10. [15] Zaprojektować układ sterowania manipulatora opisanego równaniem

$$f = 5\ddot{x}x + 2\ddot{x} - 12$$

Dobrać współczynniki wzmacnienia tak, aby w układzie zawsze występowało tłumienie krytyczne, a zamknięta pętla miała sztywność równą 20.

- 10.11. [20] Rozważyć układ regulacji pozycji, który (pozostając ogólnym) usiłuje zachować $\theta_d = 0$. Dowieść, że prawo sterowania

$$\tau = -K_p \theta - M(\theta)K_v \dot{\theta} + G(\theta)$$

daje nieliniowy układ asymptotycznie stabilny. Możesz zapisać K_v w postaci $K_v = k_v I_n$, gdzie k_v jest skalarem, a I_n jest macierzą jednostkową $n \times n$. Wskazówka: Ćwiczenie jest podobne do przykładu 10.6.

- 10.12. [20] Rozważyć układ regulacji pozycji, który (pozostając ogólnym) usiłuje zachować $\theta_d = 0$. Dowieść, że prawo sterowania

$$\tau = -K_p \theta - \hat{M}(\theta)K_v \dot{\theta} + G(\theta)$$

daje nieliniowy układ asymptotycznie stabilny. Możesz zapisać K_v w postaci $K_v = k_v I_n$, gdzie k_v jest skalarem, a I_n jest macierzą jednostkową $n \times n$. Macierz $\hat{M}(\theta)$ jest dodatnio określonym oszacowaniem macierzy mas manipulatora. Wskazówka: Ćwiczenie jest podobne do przykładu 10.6.

- 10.13. [25] Rozważyć układ regulacji pozycji, który (pozostając ogólnym) usiłuje utrzymać $\theta_d = 0$. Dowieść, że prawo sterowania

$$\tau = -M(\theta)[K_p \theta + K_v \dot{\theta}] + G(\theta)$$

daje układ nieliniowy asymptotycznie stabilny. Możesz zapisać K_v w postaci $K_v = k_v I_n$, gdzie k_v jest skalarem, a I_n jest macierzą jednostkową $n \times n$. Wskazówka: Ćwiczenie jest podobne do przykładu 10.6.

- 10.14. [25]** Rozważyć układ regulacji pozycji, który (pozostając ogólnym) usiłuje zachować $\theta_d = 0$. Dowieść, że prawo sterowania

$$\tau = -\hat{M}(\Theta)[K_p \Theta + K_v \dot{\Theta}] + G(\Theta)$$

daje układ nieliniowy asymptotycznie stabilny. Możesz zapisać K_v w postaci $K_v = k_v I_n$, gdzie k_v jest skalarem, a I_n jest macierzą jednostkową $n \times n$. Macierz $\hat{M}(\Theta)$ jest dodatnio określonym oszacowaniem macierzy mas manipulatora. Wskazówka: Ćwiczenie jest podobne do przykładu 10.6.

- 10.15. [28]** Rozważyć układ regulacji pozycji, który (pozostając ogólnym) usiłuje zachować $\theta_d = 0$. Dowieść, że prawo sterowania

$$\tau = -K_p \Theta - K_v \dot{\Theta}$$

daje układ nieliniowy stabilny. Pokazać, że stabilność nie jest asymptotyczna i podać wyrażenie na błąd stanu ustalonego. Wskazówka: podobnie jak w przykładzie 10.6.

- 10.16. [30]** Dowieść globalnej stateczności sterownika kartezjańskiego z jakobiem transponowanym, wprowadzonego w podrozdz. 10.8. Zastosować odpowiednią postać sprzężenia zwrotnego prędkości do stabilizacji układu. Wskazówka: patrz [18].

- 10.17. [15]** Zaprojektować sterownik nadążny trajektorii dla układu o dynamice opisanej przez równanie

$$f = ax^2 \ddot{x} + bx^2 + c \sin(x)$$

tak aby błędy były zmniejszane z tłumieniem krytycznym dla wszystkich konfiguracji.

- 10.18. [15]** Dynamika układu o otwartej pętli jest opisana przez równanie

$$\tau = m\ddot{\theta} + b\dot{\theta}^2 + c\theta$$

Układ jest sterowany według prawa sterowania

$$\tau = m[\ddot{\theta}_d + k_v \dot{\theta} + k_p e] + \sin(\theta)$$

Podać równanie różniczkowe, które charakteryzuje działanie zamkniętej pętli układu.

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 10)

Powtórzyć część 9 ćwiczenia z zakresu programowania i wykonać te same testy dla nowego sterownika, wykorzystującego kompletny model dynamiki manipulatora trójczłonowego do rozdzielenia zmiennych i linearyzacji układu. W tym przypadku przyjmij

$$K_p = \begin{bmatrix} 100,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 100,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 100,0 \end{bmatrix}$$

Znaleźć diagonalną macierz K_v , która gwarantuje tłumienie krytyczne dla wszystkich konfiguracji manipulatora. Porównać wyniki z otrzymanymi dla prostszego sterownika, wykorzystanego w części 9 ćwiczenia z zakresu programowania.

STEROWANIE MANIPULATORÓW Z REGULOWANĄ WARTOŚCIĄ SIŁY

11.1. WPROWADZENIE

Sterowanie pozycyjne jest odpowiednie dla przypadku, gdy manipulator porusza się według pewnej trajektorii w przestrzeni, natomiast gdy dochodzi do kontaktu między końcówką wykonawczą i otoczeniem manipulatora, to sterowanie tylko pozycyjne może nie wystarczać. Rozważmy manipulator myjący gąbką okno. Z powodu małej podatności gabki możliwe jest regulowanie siły przyłożonej do okna przez sterowanie pozycją końcówki wykonawczej względem okna. Jeśli gąbka jest bardzo podatna, a pozycja szyby jest znana dokładnie, to taka technika mogłaby działać całkiem poprawnie.

Jeśli sztywność końcówki wykonawczej, narzędzia lub otoczenia jest duża, to wzrasta trudność wykonania operacji, w których manipulator styka się z powierzchnią. Zamiast gąbki wyobraźmy sobie, że manipulator wyciera farbę z powierzchni szyby za pomocą sztynwego narzędzia skrobiącego. Jeśli położenie powierzchni szyby jest zadane niedokładnie lub serwomechanizmy manipulatora działają niedokładnie, to zadanie może stać się niemożliwe do wykonania i albo szyba może zostać rozbita, albo manipulator może operować narzędziem skrobiącym ponad szybą, bez utrzymania kontaktu z nia.

W obu zadaniach, mycia i skrobania, zamiast podawania położenia płaszczyzny szyby, celowe wydaje się zadawanie wartości siły, która ma być utrzymywana w kierunku *normalnym do powierzchni*.

W odróżnieniu od poprzednich rozdziałów, w tym rozdziale przedstawimy metody, które dotąd nie zostały zastosowane w robotach przemysłowych, lub są stosowane, lecz w sposób bardzo uproszczony. Głównym celem tego rozdziału jest wprowadzenie **hybrydowego pozycyjno/siłowego sterownika**, będącego pewnym formalizmem, który może posłużyć do sterowania robotów przemysłowych z regulowaną wartością siły. Bez względu na to, która metoda(y) okaże się użyteczna w zastosowaniach przemysłowych, to wiele koncepcji podanych w tym rozdziale pozostanie aktualnych.

11.2. ZASTOSOWANIE ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH DO ZADAŃ MONTAŻOWYCH

Większość robotów przemysłowych służy do realizacji względnie prostych zadań, takich jak: zgrzewanie, malowanie natryskowe oraz operacje pobierania przedmiotów i umieszczania ich w określonym miejscu. Sterowanie z regulowaną siłą pojawiło się jedynie w kilku zastosowaniach; np. niektóre roboty mają już możliwość prostego sterowania wartością siły, która pozwala im wykonywać takie zadania, jak szlifowanie i stępienie ostrych krawędzi. Oczywiście następnym dużym obszarem zastosowań będą zadania montażowe na linii, na której łączonych jest kilka części. Przy takich zadaniach *dopasowywanie części* kontrolowanie i sterowanie siłami kontaktowymi jest szczególnie ważne.

Precyjne sterowanie manipulatorów przy uwzględnieniu nieoznaczoności i zmienności ich środowiska pracy jest warunkiem wstępny zastosowania robotów do operacji montażowych w przemyśle. Wydaje się, że przez zaopatrzenie chwytaków manipulatorów w czujniki, które mogłyby dawać informację o stanie zadań manipulacyjnych, można wykonać istotny postęp w kierunku wykorzystania robotów do zadań montażowych. Obecnie zdolność manipulacyjna manipulatorów wciąż pozostaje dosyć mała, co prowadzi do ograniczenia ich zastosowania w dziedzinie zautomatyzowanego montażu.

Zastosowanie manipulatorów do zadań montażowych wymaga wysokiej dokładności pozycjonowania jednej części względem drugiej. Współczesne roboty przemysłowe są często zbyt mało dokładne do wykonania takich zadań i dalsze budowanie robotów w obecnej postaci może nie mieć uzasadnienia. Większa dokładność manipulatora może być osiągnięta tylko kosztem rozmiaru, masy i ceny. Zdolność pomiaru i sterowania siłami kontaktowymi, generowanymi przez chwytak, daje jednak inną możliwość, pozwalającą na rozszerzenie efektywnej dokładności manipulatora. Ponieważ wykorzystywana jest zasada względnego

pomiaru, absolutne błędy odnoszące się do pozycji manipulatora i obiektów manipulowanych nie są tak ważne, jak w przypadku sterownika pozycjnego. Ponieważ małe zmiany we względnej pozycji elementów generują duże siły kontaktowe, zatem gdy oddziałują na siebie części o umiarkowanej sztywności, to znajomość i sterowanie tymi siłami może doprowadzić do znacznego zwiększenia efektywnej dokładności pozycjonowania.

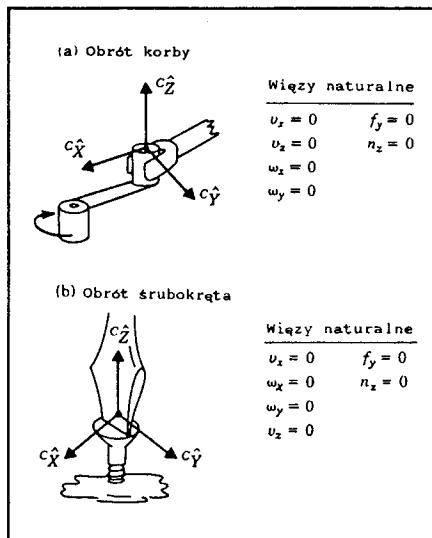
11.3. UKŁAD STEROWANIA DLA ZADAŃ CZEŚCIOWO OGRANICZONYCH

Podejście przedstawione w tym rozdziale jest oparte na układzie sterowania w sytuacjach, w których ruch manipulatora jest częściowo ograniczony z powodu styku z jedną lub większą liczbą powierzchni [1-3]. Ten układ został oparty na uproszczonym modelu oddziaływania między końcówką wykonawczą manipulatora i jego otoczeniem, w celu lepszego zrozumienia zadań częściowo ograniczonych. Ponieważ jesteśmy zainteresowani opisem zjawiska kontaktu i stopniami swobody manipulatora, rozważamy tylko siły wywołane przez kontakt. Jest to równoważne analizie quasi-statycznej z pominięciem innych sił statycznych, takich jak pewne składowe sił tarcia i ciężkości. Analiza jest poprawna wtedy, gdy siły spowodowane kontaktem między względnie sztywnymi obiektyami są dominującym źródłem obciążen układu.

Każde zadanie manipulacyjne może być rozdzielone na podzadania, które są definiowane przez poszczególne sytuacje występujące między końcówką wykonawczą manipulatora (lub narzędzia) i otoczeniem. W każdym takim częściowym zadaniu występuje zbiór więzów zwanych więzami naturalnymi; wynikają one z charakterystyk mechanicznych i geometrycznych danego zadania. Na przykład chwytek stykający się z ustaloną, sztywną powierzchnią nie ma możliwości ruchu poprzez tę powierzchnię, a zatem istnieje *naturalny wiez pozycyjny*. Jeśli na powierzchni nie występuje tarcie, to chwytek nie może wyërzeć dowolnej siły stycznej do tej powierzchni, a zatem istnieje *naturalny wiez siłowy*.

Na ogół dla każdej konfiguracji podzadań można zdefiniować uogólnioną powierzchnię z więzami pozycyjnymi wzdłuż normalnych do tej powierzchni i więzami siłowymi wzdłuż stycznych. Te dwa typy więzów, siłowe i pozycyjne, rozdzielają stopnie swobody możliwych ruchów końcówki wykonawczej na dwa ortogonalne zbiory, które muszą być sterowane wg różnych kryteriów.

Na rys. 11.1 pokazano dwa przykładowe zadania wraz z ich odpowiednimi więzami naturalnymi. Zauważmy, że w każdym przypadku zadanie jest określone względem układu $\{C\}$, tzw. układu więzów, który jest umieszczany odpowiednio do zadania. Stosownie do zadania układ $\{C\}$ może być ustalony w otoczeniu



Rys. 11.1. Więzy naturalne dla dwóch różnych zadań

lub może poruszać się wraz z końcówką wykonawczą manipulatora. Na rys. 11.1a pokazano układ więzów związany z korbą, który porusza się wraz z nią w kierunku \hat{x} , zawsze skierowanym do osi obrotu korby. Tarcie działające między końcami palców zapewnia bezpieczne złapanie uchwytu, który jest osadzony na osi tak, że może obracać się względem ramienia korby. Na rys. 11.1b układ więzów jest przyczepiony do końca śrubokreta i porusza się wraz z nim. Zauważmy, że w kierunku \hat{y} siła jest ograniczona do zera, ponieważ przecięcie na ibie wkręta pozwalałoby śrubokrętowi ślizgać się w tym kierunku. W tych przykładach zadany zbiór ograniczeń pozostaje spełniony przez cały czas trwania zadania. W bardziej złożonych sytuacjach zadanie rozbiija się na podzadania, dla których może być zidentyfikowany ustalony zbiór więzów naturalnych.

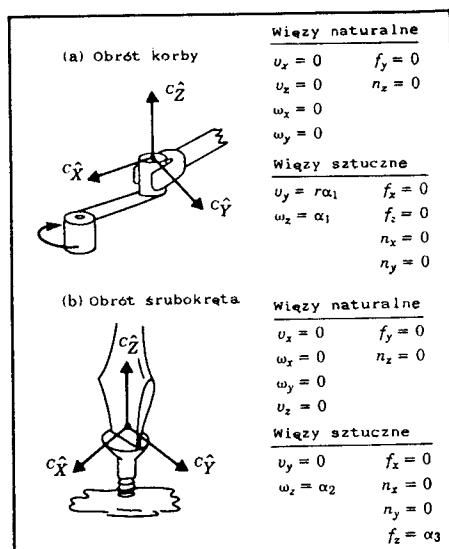
Na rys. 11.1 więzy pozycyjne wskazano przez podanie wartości składowych prędkości końcówki wykonawczej V , zapisanych w układzie $\{C\}$. Można również zapisać więzy pozycyjne przez podanie wyrażeń dla pozycji, a nie dla prędkości. Jednak w wielu przypadkach jest prościej zadać więz pozycji w postaci "prędkość równa się zeru". Podobnie więzy siłowe były zadane przez podanie wartości składowek wektora \mathcal{F} siła-moment siły, działającego na końcówkę wykonawczą, opisanego w układzie $\{C\}$. Zauważmy, że przez pojęcie więzów pozycyjnych rozumiemy więzy dotyczące pozycji i/lub orientacji, a przez pojęcie więzów siłowych rozumiemy więzy dotyczące siły i/lub momentu sił.

Określenie **więzy naturalne** wskazuje, że więzy te powstają w sposób naturalny w konkretnej sytuacji kontaktowej i nie odnoszą się do pożądanej lub zamierzzonego ruchu manipulatora.

Dodatkowe więzy, zwane **więzami sztucznymi**, są wprowadzane jako uzupełniające do więzów naturalnych w celu wyszczególnienia pożądanych ruchów lub wywieranej siły. Oznacza to, że każdorazowo, gdy użytkownik zadaje pożadaną trajektorię zarówno co do pozycji, jak i/lub siły, definiuje więz sztuczny. Więzy te występują również w kierunku stycznych lub normalnych do uogólnionej powierzchni więzu; lecz w przeciwieństwie do więzów naturalnych, sztuczne więzy siłowe są określane w kierunku normalnych do powierzchni, a sztuczne więzy pozycyjne w kierunku stycznych - zatem spójność z więzami naturalnymi jest zachowana.

Na rys. 11.2 pokazano więzy naturalne i sztuczne dla dwóch zadań. Zauważmy, że gdy dla pewnego stopnia swobody w układzie $\{C\}$ określony jest naturalny więz pozycyjny, to powinien być zadany również sztuczny więz siłowy i na odwrót. Ruch w każdym stopniu swobody w układzie więzów odbywa się aż do napotkania więzu pozycyjnego lub siłowego.

Strategia montażu jest określeniem odnoszącym się do sekwencji planowanych więzów sztucznych, które zapewnią realizację zadania w pożadany sposób. Takie strategie muszą uwzględniać metody, za pomocą których układ może wykryć zmianę w sytuacji kontaktowej, tak że zmiana stanu więzów naturalnych może być wykryta. Każda taka zmiana w więzach naturalnych powoduje



Rys. 11.2. Więzy naturalne i sztuczne dla dwóch zadań

przywołanie nowego zbioru więzów sztucznych ze zbioru strategii montażowych i narzucenie go przez układ sterowania. Metody automatycznego doboru więzów dla danego zadania montażowego nie są jeszcze opracowane. W tym rozdziale przyjmiemy, że zadanie zostało przeanalizowane w celu wyznaczenia więzów naturalnych i że człowiek określił strategię montażu, wg której jest sterowany manipulator.

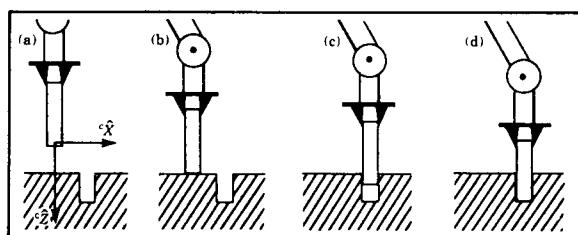
Zauważmy, że w naszej analizie zadań zwykle będziemy pomijać siły tarcia pomiędzy stykającymi się powierzchniami. Założenie to będzie wystarczające dla potrzeb naszego wprowadzenia, a jednocześnie pozwoli otrzymać strategie, które sprawdzają się w wielu przypadkach. Zwykle siły tarcia działają w kierunkach objętych sterowaniem pozycyjnym. Dlatego odgrywają one rolę zakłóceń w układzie sprzężenia zwrotnego pozycyjnego i są uwzględniane przez układ sterowania.

PRZYKŁAD 11.1

Na rys. 11.3a-d pokazano sekwencję montażową zastosowaną w celu włożenia okrągłego kołka do okrągłego otworu. Kołek jest opuszczany na powierzchnię na lewo od otworu i następnie przesuwany wzdłuż powierzchni, aż trafi w otwór. Następnie jest wsuwany do otworu, aż do osiągnięcia dna, co odpowiada zakończeniu montażu. Każda z czterech opisanych sytuacji kontaktowych określa podzadanie. Dla każdego z pokazanych podzadań należy podać więzy naturalne i sztuczne. Należy również wskazać, jak układ wykrywa zmianę więzów naturalnych w czasie wykonywania operacji.

Wpierw zwiążemy układ więzów z kołkiem, jak to pokazano na rys. 11.3a. Na rysunku tym kołek ma możliwość swobodnego ruchu w przestrzeni, a zatem naturalne więzy są następujące

$$C_g = 0 \quad (11.1)$$



Rys. 11.3. Sekwencja czterech sytuacji kontaktowych przy wkładaniu kołka do otworu

Więzami sztucznymi w tym przypadku są więzy narzucone przez trajektorię, zgodnie z którą kołek porusza się w kierunku C_Z do powierzchni. Na przykład

$$C_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{podejścia} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

gdzie $v_{podejścia}$ jest prędkością, z jaką kołek zbliża się do powierzchni.

Na rys. 11.3b kołek osiągnął powierzchnię. Aby to stwierdzić, dokonujemy pomiaru siły w kierunku C_Z . Gdy zmierzona wartość siły przekroczy wartość progową, odpowiada to kontaktowi i pociąga za sobą nową sytuację kontaktową z nowym zbiorem więzów naturalnych. Jeśli przyjmiemy, że sytuacja kontaktowa jest taka jak na rys. 11.3b, to kołek nie ma możliwości swobodnego ruchu w kierunku C_Z ani obrotu wokół osi C_X lub C_Y . W pozostałych trzech stopniach swobody kołek nie jest zdolny do wywarcia sił, a zatem więzy naturalne są następujące

$$\begin{aligned} C_{V_z} &= 0 \\ C_{\omega_x} &= 0 \\ C_{\omega_y} &= 0 \\ C_{f_x} &= 0 \\ C_{f_y} &= 0 \\ C_{n_z} &= 0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

Więzy sztuczne opisują strategię przesuwania się po powierzchni w kierunku C_X , z jednoczesnym przyłożeniem małej siły zapewniającej zachowanie kontaktu. Zatem mamy

$$\begin{aligned} C_{V_x} &= v_{poślizgu} \\ C_{V_y} &= 0 \\ C_{\omega_z} &= 0 \\ C_{f_z} &= f_{kontaktu} \\ C_{n_x} &= 0 \\ C_{n_y} &= 0 \end{aligned} \quad (11.4)$$

gdzie $f_{kontaktu}$ jest siłą przyłożoną normalnie do powierzchni, podczas przesuwania się kołka, a $v_{poślizgu}$ jest prędkością, z jaką kołek ślizga się po powierzchni.

Na rys. 11.3c kołek wsunął się nieznacznie do otworu. Ta sytuacja jest wykrywana przez pomiar wartości prędkości w kierunku \hat{Z} , aż przekroczy ona wartość progową (stanie się niezerowa w przypadku idealnym). Po zaobserwowaniu tego faktu następuje ponowne zasygnalizowanie zmiany więzów naturalnych, a więc nasza strategia (ujęta jako zbiór więzów sztucznych) musi zmienić się. Nowe więzy naturalne są następujące

$$\begin{aligned} C_{v_x} &= 0 \\ C_{v_y} &= 0 \\ C_{\omega_x} &= 0 \\ C_{\omega_y} &= 0 \\ C_{f_z} &= 0 \\ C_{n_z} &= 0 \end{aligned} \quad (11.5)$$

Wybieramy więzy sztuczne

$$\begin{aligned} C_{v_z} &= v_{wkładania} \\ C_{\omega_z} &= 0 \\ C_{f_x} &= 0 \\ C_{f_y} &= 0 \\ C_{n_x} &= 0 \\ C_{n_y} &= 0 \end{aligned} \quad (11.6)$$

gdzie $v_{wkładania}$ jest prędkością, z jaką kołek jest wsuwany do otworu. Ostatecznie stwierdzenie sytuacji pokazanej na rys. 11.3d następuje, gdy siła w kierunku \hat{Z} przekroczy wartość progową. ■

Warto zauważyć, że zmiany w naturalnych więzach są zawsze stwierdzane przez pomiar zmiennej pozycji lub siły, która nie jest sterowana. Na przykład aby stwierdzić przejście z sytuacji na rys. 11.3b do sytuacji na rys. 11.3c, sprawdzamy prędkość w kierunku \hat{Z} , w trakcie sterowania siłą w tym kierunku. Aby stwierdzić, kiedy kołek uderzy w dno otworu, sprawdzamy C_{f_z} , chociaż sterujemy C_{v_z} .

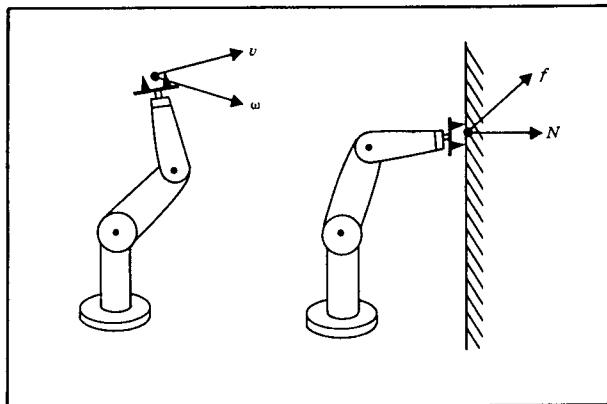
Określenie strategii montażu w celu połączenia bardziej skomplikowanych części jest bardzo złożonym zagadnieniem. W naszej prostej analizie tego zadania pominęliśmy również skutki niepewności. Rozwój układów automatycznego planowania, które włączają skutki niepewności i mogą być stosowane w sytuacjach praktycznych, jest nadal zagadnieniem badawczym [4-8]. Dobry przegląd tych metod jest zawarty w [9].

11.4. ZADANIE POŁĄCZONEGO STEROWANIA POZYCJA/SIŁA

Na rys. 11.4 pokazano dwa skrajne przykłady sytuacji kontaktowych. Na rys. 11.4a manipulator porusza się w przestrzeni swobodnej. W tym przypadku więzy naturalne są więzami od sił – ponieważ nie ma obiektu, który wywołałby siły reakcji, wszystkie więzy od sił są równe zera¹⁾.

Manipulator o sześciu stopniach swobody ma możliwość swobodnego poruszania się, lecz nie jest zdolny do wywarcia siły w żadnym kierunku. Na rys. 11.4b pokazano sytuację, gdy końcówka wykonawcza manipulatora jest trwale złączona ze ścianą. W tym przypadku na manipulator nałożono sześć naturalnych więzów pozycyjnych, ponieważ nie ma możliwości zmiany pozycji. Jednak manipulator jest zdolny do wywarcia sił i momentów sił na obiekt we wszystkich sześciu stopniach swobody.

W rozdz. 9 i 10 przedstawiono problem sterowania pozycją, który wykorzystuje się w sytuacji z rys. 11.4a. Ponieważ sytuacja z rys. 11.4b nie występuje zbyt często w praktyce, zwykle należy rozważać sterowanie siłą w kontekście zadań częściowo ograniczonych, w których niektóre stopnie swobody układu są sterowane wg pozycji, a pozostałe wg siły. Stąd w tym rozdziale będziemy rozpatrywali schematy sterowania hybrydowego, tzn. pozycja/siła.



Rys. 11.4. Dwie skrajne sytuacje kontaktowe. Manipulator po lewej porusza się w przestrzeni swobodnej, gdzie nie istnieje powierzchnia kontaktu. Manipulator po prawej jest trwale połączony ze ścianą i wszystkie ruchy są wyeliminowane

¹⁾ Należy pamiętać, że skoncentrowaliśmy się tu na siłach kontaktu między końcówką wykonawczą i otoczeniem, a nie na siłach bezwładności.

Hybrydowy sterownik pozycji/siły musi być przygotowany do:

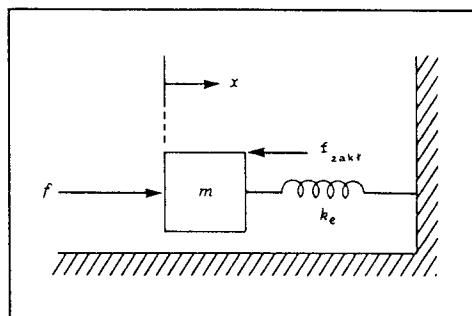
1. Sterowania pozycją manipulatora wzdłuż kierunków, na których istnieją naturalne więzy sił.
2. Sterowania siłą manipulatora wzdłuż kierunku, w którym istnieje naturalny więz pozycyjny.
3. Realizacji dowolnej kombinacji tych zadań wzdłuż ortogonalnych kierunków dowolnego układu $\{C\}$.

11.5. STEROWANIE SIŁĄ W UKŁADZIE MASA-SPRĘŻYNA

W rozdz. 9 zaczęliśmy badanie problemu sterowania pozycją od omówienia bardzo prostego problemu sterowania pojedynczej masy. Następnie w rozdz. 10 wykorzystaliśmy model manipulatora w taki sposób, że problem sterowania manipulatorem był równoważny sterowaniu układu n niezależnych mas (dla manipulatora o n połączeniach ruchowych). Podobnie nasze studia nad sterowaniem siłą rozpoczęliśmy od przypadku sterowania siłą wywieraną przez prosty układ o jednym stopniu swobody.

Rozważając siły kontaktu należy opracować pewien model otoczenia, na które oddziałujemy. W celu rozwinięcia tej koncepcji wykorzystamy bardzo prosty model oddziaływanego między ciałem sterowanym i otoczeniem. Modelujemy kontakt z otoczeniem za pomocą sprężyny, to znaczy przyjmujemy, że nasz układ jest idealnie sztywny, a otoczenie ma pewną sztywność k_e .

Rozważmy sterowanie masą przyłączoną do sprężyny tak, jak to pokazano na rys. 11.5. Do rozważań włączymy również niewiadomą siłę zakłócającą $f_{zakł}$, która może modelować nieznaną siłę tarcia lub opór zazębienia w przekładniach manipulatora. Zmienną, którą chcemy sterować, jest siła działająca na otoczenie f_e , która jest siłą w sprężynie.



Rys. 11.5. Układ masowo - sprężysty

Stąd

$$f_e = k_e x \quad (11.7)$$

Równanie ruchu tego układu jest następujące

$$f = \ddot{m}x + k_e x + f_{zakł} \quad (11.8)$$

lub zapisane w zależności od zmiennej f_e , która chcemy sterować

$$f = m k_e^{-1} \ddot{f}_e + f_e + f_{zakł} \quad (11.9)$$

Wykorzystując koncepcję sterownika rozdzielonego przyjmujemy

$$\alpha = m k_e^{-1}$$

$$\beta = f_e + f_{zakł}$$

i otrzymujemy prawo sterowania

$$f = m k_e^{-1} [\ddot{f}_d + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f] + f_e + f_{zakł} \quad (11.10)$$

gdzie $e_f = f_d - f_e$ jest uchybem siły pomiędzy siłą pożądaną f_d i zmierzoną siłą wywieraną na otoczenie f_e . Jeśli moglibyśmy obliczyć wartość f z (11.10), to otrzymalibyśmy układ zamknięty

$$\ddot{e}_f + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f = 0 \quad (11.11)$$

Jednakże nie wiemy nic o sile $f_{zakł}$, występującej w prawie sterowania, więc (11.10) nie jest tutaj przydatne. Moglibyśmy przyjąć, że siła ta jest poza prawem sterowania, lecz analiza stanu ustalonego pokazuje, że możemy dokonać lepszego wyboru, zwłaszcza gdy sztywność otoczenia k_e jest duża (co zwykle ma miejsce).

Jeśli zdecydowaliśmy się opuścić w naszym prawie sterowania wyraz $f_{zakł}$, przyrównać (11.9) i (11.10) i dokonać analizy stanu ustalonego (podstawiając wszystkie pochodne czasowe równe zeru), to otrzymujemy

$$e_f = \frac{f_{zakł}}{\alpha} \quad (11.12)$$

gdzie $\alpha = m k_e^{-1} k_{pf}$ jest efektywnym współczynnikiem wzmacniania sprężenia zwrotnego od siły. Jeśli jednak zdecydowaliśmy się wykorzystać f_d w prawie sterowania (11.10) zamiast wyrazu $f_e + f_{zakł}$, to uchyb stanu ustalonego będzie równy

$$e_f = \frac{f_{zakł}}{1 + \alpha} \quad (11.13)$$

Gdy sztywność otoczenia jest duża, co często ma miejsce, to α może być małe

i dlatego obliczenie uchybu stanu ustalonego wg (11.13) daje dużo lepszy wynik w porównaniu do obliczenia wg (11.12). Dlatego sugerujemy prawo sterowania w postaci

$$f = m k_e^{-1} [\ddot{f}_d + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f] + f_d \quad (11.14)$$

Na rys. 11.6 przedstawiono schemat blokowy układu zamkniętego, wykorzystującego prawo sterowania (11.14).

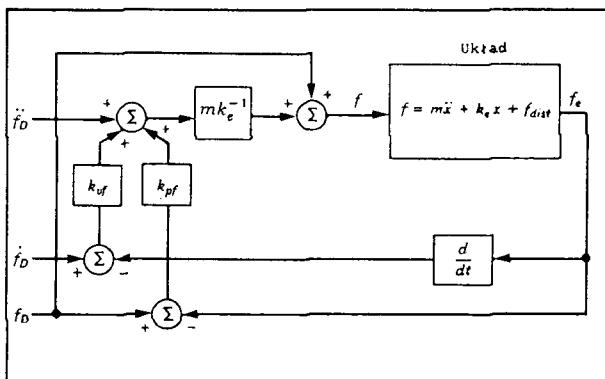
Na ogół praktyczne aspekty wpływają na zmianę realizacji układu sterowania siłą w stosunku do układu pokazanego na rys. 11.6. Po pierwsze, na ogół trajektorie siły są stałe; znaczy to, że zwykle jesteśmy zainteresowani, aby sterowana siła kontaktu utrzymywała się na pewnym ustalonym poziomie. Zastosowania, w których siły kontaktu powinny zmieniać się według pewnej dowolnej funkcji czasu, są rzadkie. Dlatego wartości \dot{f}_d i \ddot{f}_d na wejściu układu sterowania są bardzo często przyjmowane jako równe零.

Innym praktycznym uwarunkowaniem jest to, że na zmierzone wartości siły nakładają się zakłócenia i numeryczne różniczkowanie do obliczenia \dot{f}_e nie jest celowe. Ponieważ $f_e = k_e x$, to możemy otrzymać pochodną siły wywieranej na otoczenie jako $\dot{f}_e = k_e \dot{x}$. Jest to bardziej realne, ponieważ większość manipulatorów umożliwia uzyskanie dobrych pomiarów prędkości. Stąd prawo sterowania możemy zapisać w postaci

$$f = m [k_{pf} k_e^{-1} e_f - k_{vf} \dot{x}] + f_d \quad (11.15)$$

Odpowiedni schemat blokowy pokazano na rys. 11.7.

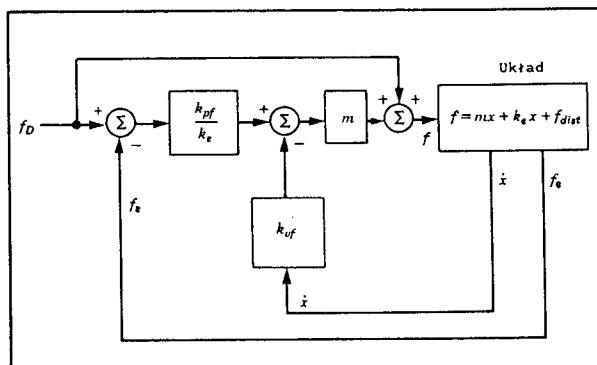
Zauważmy, że interpretacja układu z rys. 11.7 jest taka, że uchyb siły generuje wielkość wejściową dla wewnętrznej pętli sterowania prędkości ze wzmacnieniem k_{vf} . Pewne prawa sterowania siłą również zawierają wyraz całkowy w celu polepszenia funkcjonowania układu w stanie ustalonym.



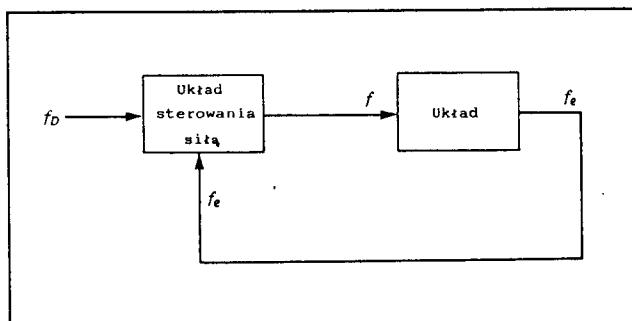
Rys. 11.6. Układ sterowania siłą dla układu masa-sprężyna

Oddzielnym zagadnieniem jest również kwestia pojawienia się w naszym prawie sterowania sztywności otoczenia k_e , która jest często nieznana i zmienna. Jednak roboty montażowe najczęściej manipuluują sztywnymi elementami i k_e może przyjmować bardzo duże wartości. Na ogół czyni się takie założenie, a współczynniki wzmacnienia dobiera się tak, aby układ był nienazwany na zmiany wartości k_e .

Naszym zamierzeniem w konstruowaniu prawa sterowania siłą kontaktu było omówienie jednej sugerowanej struktury i wyeksponowanie kilku ważnych problemów. W pozostałej części tego rozdziału wprost przyjmiemy, że taki układ sterowania siłą może być zbudowany i wyodrębnimy go jako "czarną skrzynkę", jak pokazano na rys. 11.8. W praktyce nie jest łatwo zbudować dobrze funkcjonujący układ sterowania siłą i to zagadnienie jest nadal celem aktywnych badań [11-14]. Dobry przegląd tej problematyki podano w [15].



Rys. 11.7. Praktyczny układ sterowania siłą dla układu masa-sprężyna



Rys. 11.8. Układ sterowania siłą traktowany jako "czarna skrzynka"

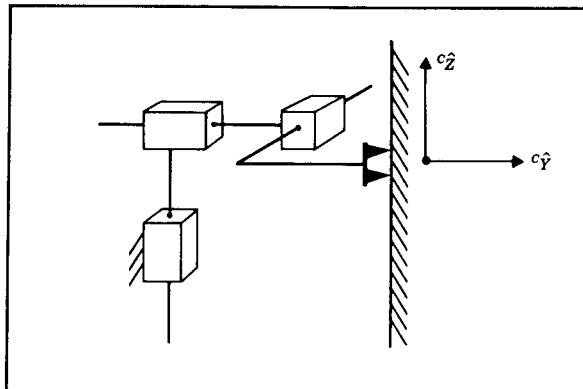
11.6. UKŁAD STEROWANIA HYBRYDOWEGO POZYCJA/SIŁA

W tym podrozdziale omówimy strukturę układu sterowania, będącego realizacją hybrydowego sterownika pozycja/siła.

Manipulator pracujący w układzie kartezjańskim, pokrywającym się z układem więzów $\{C\}$

Rozważymy najpierw prosty przypadek manipulatora o trzech stopniach swobody z parami przesuwnymi umożliwiającymi ruch w kierunkach osi \hat{Z} , \hat{Y} i \hat{X} . Dla uproszczenia przyjmiemy, że każdy człon ma masę m i przesuwa się w prowadnicach bez tarcia. Założymy również, że kierunki ruchów w parach pokrywają się z osiami układu więzów $\{C\}$. Końcówka wykonawcza styka się z powierzchnią o sztywności k_e ; normalna do tej powierzchni ma kierunek $c_{\hat{Y}}$. Zatem w tym kierunku wymagane jest sterowanie siłą, a w kierunkach $c_{\hat{X}}$ i $c_{\hat{Z}}$ – sterowanie pozycją (patrz rys. 11.9).

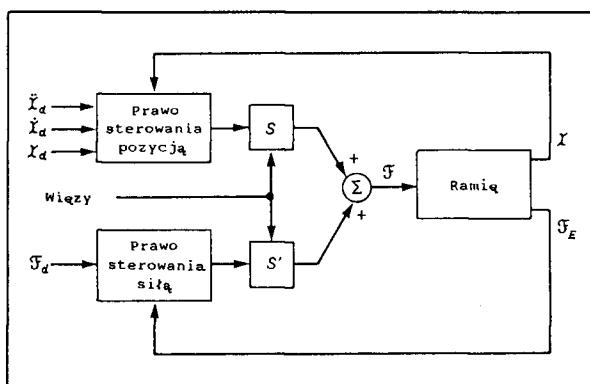
W takim przypadku rozwiązanie problemu sterowania pozycja/siła jest oczywiste. Pary przesuwne 1 i 3 powinny być sterowane za pomocą sterownika pozycyjnego, opracowanego dla masy jednostkowej i opisanego w rozdz. 9. Para przesuwna 2 (umożliwiająca ruch w kierunku \hat{Y}) powinna być sterowana za pomocą sterownika siły, przedstawionego w podrozdz. 11.4. Można więc zadać trajektorię pozycji w kierunkach $c_{\hat{X}}$ i $c_{\hat{Z}}$, niezależnie zadając trajektorię siły (prawdopodobnie stałą) w kierunku $c_{\hat{Y}}$.



Rys. 11.9. Manipulator kartezjański o trzech stopniach swobody stykający się z powierzchnią

Jeśli chcemy mieć możliwość zmiany powierzchni więzu tak, aby jej normalna mogła mieć kierunek zarówno \hat{X} , jak i \hat{Z} , to możemy uczynić nasz układ sterowania manipulatorem kartezjańskim bardziej uniwersalnym. Strukturę sterownika ustalamy tak, aby można było zadawać kompletną trajektorię pozycji dla wszystkich trzech stopni swobody, a także trajektorię siły dla wszystkich trzech stopni swobody. Oczywiście nie możemy zapewnić takiego sterowania, które uwzględnia te sześć więzów przez cały czas, lecz będziemy wskazywać, które składniki i jakiej trajektorii będą uwzględniane w danej chwili.

Rozważmy sterownik pokazany na rys. 11.10. Pokazano tutaj sposób sterowania wszystkich trzech par przesuwnych manipulatora kartezjańskiego na jednym schemacie zawierającym zarówno sterownik pozycji, jak i siły. Macierze S i S' zostały wprowadzone do układu sterowania w celu wskazywania która z procedur - pozycji czy siły - jest wykorzystywana do sterowania każdym połączeniem ruchowym manipulatora. Macierz S jest macierzą diagonalną z jedynkami i zerami na przekątnej. Gdy w macierzy S występuje jedynka, a w macierzy S' zero, to zadziała sterowanie pozycją. Gdy w macierzy S występuje zero, a jedynka w S' , wtedy otrzymamy sterowanie siłą. Zatem macierze S i S' są prostymi przełącznikami, które ustalają procedurę sterowania każdym stopniem swobody w układzie $\{C\}$. Zgodnie z przyjętą macierzą S zawsze trzy składniki trajektorii są sterowane, chociaż kombinacja procedur sterowania (pozycja i siła) jest dowolna. Pozostałe trzy składniki pożądanej trajektorii i odpowiednie wartości uchybu są pomijane. Zatem, gdy pewien stopień swobody jest sterowany siłą, to błędy pozycjonowania w tym stopniu swobody są pomijane.



Rys. 11.10. Sterownik hybrydowy dla manipulatora kartezjańskiego o trzech stopniach swobody

PRZYKŁAD 11.2

Dla manipulatora, pokazanego na rys. 11.9, wykonującego ruch w kierunku C_y , ograniczony przez powierzchnię kontaktu, podać macierze S i S' .

Ponieważ ruchy składowe w kierunkach \hat{X} i \hat{Z} są sterowane pozycyjnie, to na przekątnej macierzy S wpisujemy jedynki, odpowiadające tym dwóm składowym. Spowoduje to uaktywnienie sterowania pozycją w wymienionych dwóch kierunkach i ruch będzie realizowany według trajektorii wejściowej. Każda wejściowa trajektoria pozycji dla składowej \hat{Y} będzie pominięta. W macierzy S' kolejność jedynek i zer na przekątnej jest odwrotna, a zatem mamy

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(11.16)

Na rys. 11.10 pokazano sterownik hybrydowy dla przypadku specjalnego, w którym osie par kinematycznych mają te same kierunki co osie układu więzów $\{C\}$. W następnym podrozdziale wykorzystamy metody rozpatrywane w poprzednich rozdziałach, aby zaprojektować ogólny sterownik współpracujący z dowolnym manipulatorem i dla dowolnego układu $\{C\}$. Jednak w przypadku idealnym układ funkcjonuje tak, jakby manipulator dysponował napędem w każdym stopniu swobody.

Ogólny przypadek manipulatora

Warunkiem, aby sterownik hybrydowy, pokazany na rys. 11.10, mógł być użyty w dowolnym manipulatorze, jest bezpośrednie wykorzystanie koncepcji sterowania we współrzędnych kartezjańskich. W rozdziale 6 przedstawiono sposób zapisu równań ruchu manipulatora we współrzędnych kartezjańskich członu roboczego, a w rozdz. 10 pokazano jak takie sformułowanie może być wykorzystane do osiągnięcia rozdzielonego sterowania pozycją manipulatora w układzie kartezjańskim. Główna myśl opiera się na wykorzystaniu modelu dynamicznego, zapisanego we współrzędnych kartezjańskich, co umożliwia sterowanie w taki sposób, że układ rzeczywistego manipulatora i obliczany model są zbiorem niezależnych, niezwiązań mas jednostkowych. Po dokonaniu rozdzielenia zmiennych i linearyzacji możemy skorzystać z układu sterowania, opisanego w rozdz. 11.4.

Na rys. 11.11 pokazano układ sterowania oparty na równaniach dynamiki manipulatora we współrzędnych kartezjańskich, pozwalający na traktowanie

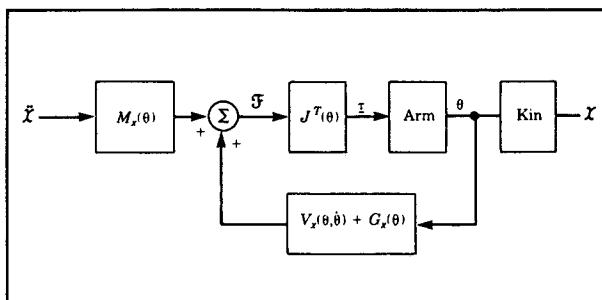
manipulatora jako zbioru niezwiązań mas jednostkowych. W celu wykorzystania układu sterowania hybrydowego równania dynamiki we współrzędnych kartezjańskich i jakobian są zapisywane w układzie więzów $\{C\}$. Podobnie zadanie kinematyki jest rozwiązywane względem układu więzów.

Ponieważ zaprojektowaliśmy sterownik hybrydowy dla manipulatora pracującego w układzie kartezjańskim, którego osie pokrywają się z osiami układu więzów, oraz wykorzystaliśmy rozdzielenie zmiennych kartezjańskich, to otrzymaliśmy układ o takich samych właściwościach wejścia-wyjścia i wystarczy tylko połączyć te dwa układy w celu stworzenia uniwersalnego sterownika hybrydowego pozycja/siła.

Na rys. 11.12 przedstawiono schemat blokowy sterownika hybrydowego dla dowolnego przypadku manipulatora. Zauważmy, że równania dynamiki są zapisane w układzie więzów, tak jak i Jakobian. Równania kinematyki zapisano tak, aby włączyć przekształcenie współrzędnych do układu więzów, a zmierzone siły przekształcić do układu $\{C\}$. Wartości uchybu są obliczane w układzie $\{C\}$, a proces sterowania w układzie $\{C\}$ jest zadawany przez odpowiedni dobór macierzy S^2 . Na rys. 11.13 pokazano manipulator sterowany przez taki układ.

Uwzględnienie zmiennej sztywności

Ścisłe sterowanie pozycją lub siłą odpowiada dwóm krańcowym przypadkom sztywności układu sterowania. Sztywność idealnego układu sterowania pozycją jest nieskończona wielka, co powoduje odrzucenie wszystkich zakłóceń pochodzących od sił działających na układ.



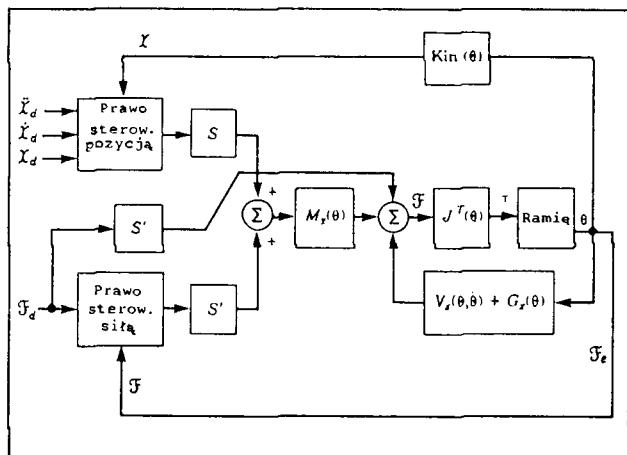
Rys. 11.11. Układ sterowania rozdzielonych zmiennych kartezjańskich, wprowadzony w rozdz. 10

²⁾ Podział sposobów sterowania według pewnych kierunków związanych z zadaniami uogólniono w [10] (w stosunku do elementarnego podejścia przedstawionego w tym rozdziale).

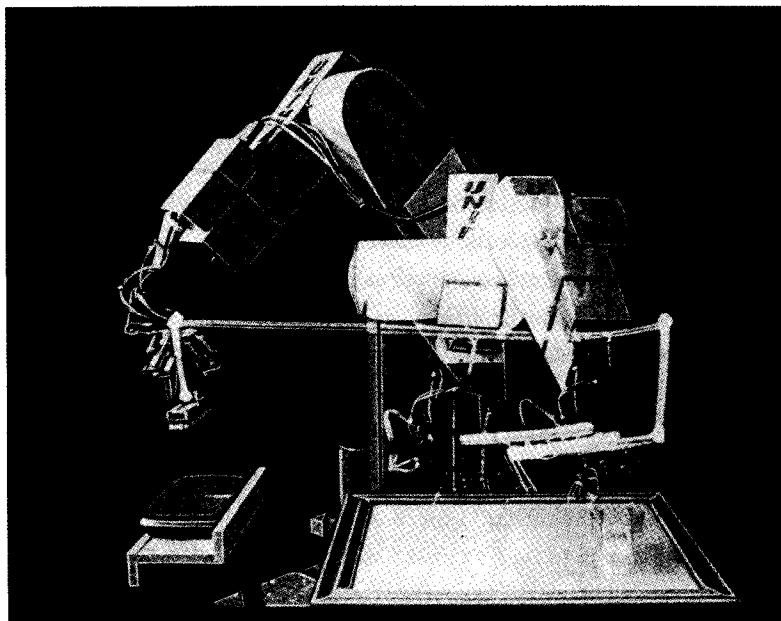
Podobnie idealny układ sterowania siłą wykazuje zerową sztywność i utrzymuje wywieraną siłę bez względu na zakłócenia pozycji. Użyteczna byłaby również możliwość sterowania sztywnością końcówki wykonawczej tak, aby mogła być różna od zera lub nieskończoności. Interesuje nas więc sterowanie sztywnością mechaniczną końcówki wykonawczej [14, 16, 17].

W naszej analizie zjawiska kontaktu wyobraziliśmy sobie, że otoczenie jest bardzo sztywne. Podczas styku ze sztywnym otoczeniem stosujemy układ sterowania siłą o zerowej sztywności. Podczas kontaktu z otoczeniem o zeroowej sztywności (przy swobodnym ruchu w przestrzeni) stosujemy układ sterowania pozycją o wysokiej sztywności. Zatem okazuje się, że przy sterowaniu końcówką wykonawczą stosuje się sztywność układu sterowania, która jest w przybliżeniu odwrotnością sztywności lokalnego otoczenia, co zapewnia prawdopodobnie dobrą strategię. Dlatego przy operowaniu częściami plastycznymi lub sprężystymi będziemy dążyć do uzyskania sztywności układu sterowania różnej od zera lub nieskończoności.

W układzie sterownika hybrydowego można to uzyskać przez wykorzystanie sterowania pozycją i zmniejszenie wartości współczynnika wzmacnienia prędkości ruchu w odpowiednim stopniu swobody w układzie $\{C\}$, tak aby ruch w zakresie tego stopnia swobody pozostawał tłumiony krytycznie. Zdolność do zmiany współczynnika wzmacnienia zarówno pozycji, jak i prędkości dla odpowiednich stopni swobody układu $\{C\}$ pozwala na realizację uogólnionej sztywności końcówki wykonawczej za pomocą hybrydowego sterownika pozycja/siła [17]. Jednak w wielu praktycznych sytuacjach mamy do czynienia z oddziaływaniem sztywnych części i wtedy pożąданie jest sterowanie tylko pozycją lub tylko siłą.



Rys. 11.12. Sterownik hybrydowy pozycja/siła dla dowolnego manipulatora. Dla uproszczenia nie pokazano pętli zewnętrznego sprzężenia zwrotnego prędkości



Rys. 11.13. Manipulator PUMA 560 myjący okno, wyposażony w układ sterowania COSMOS, rozwinięty przez O.Khatiba w Uniwersytecie Stanforda. Odpowiednie eksperymenty wykonano stosując palce wyposażone w czujniki siły i strukturę sterowania podobną do układu z rys. 11.12 [10]

11.7 UKŁADY STEROWANIA WSPÓŁCZESNYCH ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH

Rzeczywiste układy sterowania siłą, takie jak wprowadzony w tym rozdziale hybrydowy sterownik pozycja/siła, nie występują we współczesnych robotach przemysłowych. W praktycznej realizacji występują następujące problemy: duża liczba wymaganych obliczeń, brak dokładnych wartości parametrów modelu dynamicznego, brak dobrych czujników siły i trudności, jakie użytkownik napotyka przy planowaniu strategii pozycja-siła.

Podatność bierna

Manipulatory o dużej sztywności, wyposażone w układy sterowania pozycja, są nieprzydatne do zadań związanych ze stykaniem się części i generowaniem siły kontaktowej. Często w takich sytuacjach części ulegają zgnieceniu lub zaklinowaniu. W wyniku pierwszych doświadczeń z manipulatorami stosowanymi do montażu można stwierdzić, że roboty mogły wykonywać takie zadania tylko dzięki podatnościom części, zamocowań lub samego manipulatora. Zdolność jednej lub większej liczby części układu do "ugięcia się" często umożliwiała udane dopasowanie części.

Do wykonywania zadań tego typu zaprojektowano specjalne przyrządy wprowadzające podatność do układu. Najbardziej udanym przykładem jest przyrząd o sterowanej podatności (RCC), opracowany w Draper Labs [18]. Przyrząd RCC zaprojektowano tak, aby wprowadzać "właściwy" rodzaj podatności, która pozwalała wykonać pewne zadania płynnie i szybko z małym (lub równym zeru) prawdopodobieństwem zaklinowania części. Przyrząd RCC jest układem sprężyn o sześciu stopniach swobody, umieszczonym pomiędzy kością manipulatora i końcówką wykonawczą. Ustawiając wartości sztywności sześciu sprężyn można wprowadzić do układu dowolną podatność. Takie układy są nazywane układami z bierną podatnością i są wykorzystywane do pewnych zadań związanych z przemysłowymi zastosowaniami manipulatorów.

Wprowadzenie podatności poprzez zmianę współczynników wzmacnienia

Obok podanych sposobów wprowadzenia do układu podatności biernej (a więc o ustalonej wartości) można zaproponować inne sposoby, polegające na zmianie sztywności manipulatora przez dostosowanie współczynników wzmacnienia układu sterowania pozycją. Kilka robotów przemysłowych pracuje w podobny sposób przy takich operacjach jak np. szlifowanie, w których powinien być utrzymywany kontakt z powierzchnią, lecz nie jest wymagane dokładne sterowanie siłą.

Szczególnie interesujące podejście do tego zagadnienia zostało zaproponowane przez Salisbury'ego [16]. W układzie sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych współczynniki wzmacnienia w pętli sprzężenia zwrotnego pozycji są modyfikowane w taki sposób, że końcówka wykonawcza wykazuje pewną sztywność współrzędnych kartezjańskich (stopni swobody). Rozważa się więc uogólnioną sprężynę o sześciu stopniach swobody. Jej działanie może być opisane przez zależność

$$\mathcal{F} = K_{px} \delta X \quad (11.17)$$

gdzie K_{px} oznacza diagonalną macierz o trzech współczynnikach sztywności liniowej i trzech współczynnikach sztywności skrętnej na przekątnej. Zastanówmy się, w jaki sposób można spowodować, aby końcówka wykonawcza manipulatora wykazywała taką charakterystykę sztywnościową?

Przywołując definicję jacobianu manipulatora, mamy

$$\delta X = J(\Theta) \delta \Theta \quad (11.18)$$

Łącząc (11.18) z (11.17) otrzymujemy

$$\mathcal{F} = K_{px} J(\Theta) \delta \Theta \quad (11.19)$$

Z rozważań statycznych mamy

$$\tau = J^T(\theta) \mathcal{F} \quad (11.20)$$

co po połączeniu z (11.19) daje

$$\tau = J^T(\theta) K_{px} J(\theta) \delta\theta \quad (11.21)$$

Tutaj jakobian jest zwykle zapisany w układzie narzędziu. Równanie (11.21) wyraża sposób, w jaki siły/momenty napędowe powinny być generowane w funkcji małych przemieszczeń w połączeniach ruchowych $\delta\theta$ w tym celu, aby człon roboczy manipulatora zachowywał się jak sprężyna kartezjańska o sześciu stopniach swobody.

Zatem stosując prosty sterownik pozycji, operujący we współrzędnych konfiguracyjnych, można korzystać z prawa sterowania w postaci

$$\tau = K_p E + K_v \dot{E} \quad (11.22)$$

gdzie K_p i K_v oznaczają stałe diagonalne macierze współczynników wzmacnienia, a E - uchyb, określony jako różnica $\theta_d - \theta$.

Salisbury sugeruje wykorzystanie związku

$$\tau = J^T(\theta) K_{px} J(\theta) E + K_v \dot{E}, \quad (11.23)$$

gdzie K_{px} oznacza pożądaną macierz sztywności członu roboczego, określona we współrzędnych kartezjańskich. Dla manipulatora o sześciu stopniach swobody K_{px} jest macierzą diagonalną o sześciu wartościach na przekątnej, opisujących trzy sztywności liniowe i trzy sztywności skrętnie, wykazywane przez człon roboczy. Poprzez wykorzystanie jakobianu macierz sztywności, określona w układzie kartezjańskim, została przekształcona w macierz sztywności, określoną we współrzędnych konfiguracyjnych.

Pomiar siły

Pomiar siły pozwala manipulatorowi na wykrywanie kontaktu z powierzchnią oraz na podjęcie pewnych działań. Na przykład określenie ruch kontrolowany opisuje strategię ruchu przy sterowaniu pozycją, kiedy po wykryciu działającej siły ruch zostaje zatrzymany. Dodatkowo, pomiar siły może być zastosowany do ważenia obiektów, które manipulator podnosi. Może to być wykorzystane do prostego sprawdzania w czasie operacji przenoszenia części, czy część została podniesiona oraz czy jest to część właściwa.

Pewne roboty, dostępne handlowo, są wyposażone w czujniki siły umieszczone na członie roboczym. Takie roboty można zaprogramować w celu zatrzymywania się lub podejmowania innych działań po przekroczeniu progu siłowego. Niektóre roboty można też zaprogramować do ważenia obiektów przenoszonych przez chwytak.

Bibliografia

- [1] M.Mason, "Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators", M.S.Thesis, MIT AI Laboratory, May 1978.
- [2] J.Craig, M.Raibert, "A Systematic Method for Hybrid Position/Force Control of a Manipulator", *Proceedings of the 1979 IEEE Computer Software Applications Conference*, Chicago, November 1979.
- [3] M.Raibert, J.Craig, "Hybrid Position/Force Control of Manipulators", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, June 1981.
- [4] T.Lozano-Perez, M.Mason, R.Taylor, "Automatic Synthesis of Fine-Motion Strategies for Robots", *1st International Symposium of Robotics Research*, Bretton Woods, N.H., August 1983.
- [5] M.Mason, "Automatic Planning of Fine Motions: Correctness and Completeness", *IEEE International Conference on Robotics*, Atlanta, March 1984.
- [6] M.Erdmann, "Using Backprojections for the Fine Motion Planning with Uncertainty", *The International Journal of Robotics Research*, Vol.5, No.1, 1986.
- [7] S.Buckley, "Planning and Teaching Compliant Motion Strategies", Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, January 1986.
- [8] B.Donald, "Error Detection and Recovery for Robot Motion Planning with Uncertainty", Ph.D.Dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, July 1987.
- [9] J.C.Latombe, "Motion Planning with Uncertainty: On the Preimage Back-chaining Approach", in *The Robotics Review*, O.Khatib, J.Craig and T.Lozano-Perez, Editors, MIT Press, 1988.
- [10] O.Khatib, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol.RA-3, No.1, 1987.
- [11] D.Whitney, "Force Feedback Control of Manipulator Fine Motions", *Proceedings Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, 1976.
- [12] S.Eppinger, W.Seering, "Understanding Bandwidth Limitations in Robot Force Control", *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, N.C., 1987.
- [13] W.Townsend, J.K.Salisbury, "The Effect of Coulomb Friction and Stiction on Force Control", *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, N.C., 1987.
- [14] N.Hogan, "Stable Execution of Contact Tasks Using Impedance Control", *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, N.C., 1987.

- [15] N.Hogan, E.Colgate, "Stability Problems in Contact Tasks", in *The Robotics Review*, O.Khatib, J.Craig, and T.Lozano-Perez, Editors, MIT Press, 1988.
- [16] J.K.Salisbury, "Active Stiffness Control of a Manipulator in Cartesian Coordinates", 19th IEEE Conference on Decision and Control, Dec. 1980.
- [17] J.K.Salisbury, J.Craig, "Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues", *International Journal of Robotics Research*, Vol.1, No.1.
- [18] S.Drake, "Using Compliance in Lieu of Sensory Feedback for Automatic Assembly", Ph.D.Thesis, Mechanical Engineering Department, MIT, September 1977.

Ćwiczenia

- 11.1. [12] Podaj naturalne więzy dla zadania wkładania kołka o przekroju kwadratowym do otworu o przekroju kwadratowym. Naszkicuj swoją definicję układu $\{C\}$.
- 11.2. [10] Podaj więzy sztuczne (tj. trajektorię), które zaproponowałbyś, aby kołek z ćwiczenia 11.1 wsuwał się do otworu bez zakleszczenia.
- 11.3. [20] Wykaż, że wykorzystanie prawa sterowania (11.4) dla układu danego przez (11.9) daje w wyniku równanie przestrzeni uchybu

$$\ddot{e}_f + k_{vf} \dot{e}_f + (k_{pf} + m^{-1} k_e) e_f = m^{-1} k_e f \text{ zakł}$$

a zatem, że dobór współczynników wzmacnienia dla zapewnienia tłumienia krytycznego jest możliwy tylko wtedy, gdy znana jest sztywność otoczenia k_e .

- 11.4. [17] Dana jest macierz

$$A_T = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 10,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 0,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 5,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli wektor siła-moment siły w układzie $\{A\}$ jest następujący

$$A_V = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 2,0 \\ -3,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 4,0 \end{bmatrix}$$

to należy znaleźć wektor 6×1 siła-moment siły z punktem odniesienia w początku układu $\{B\}$.

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 11)

W celu symulacji sterowania manipulatorem zrealizować sterowanie sztywnością w układzie kartezjańskim dla trójczłonowego manipulatora płaskiego, wykorzystując prawo sterowania (11.23). Zastosować jako-bian zapisany w układzie {3}.

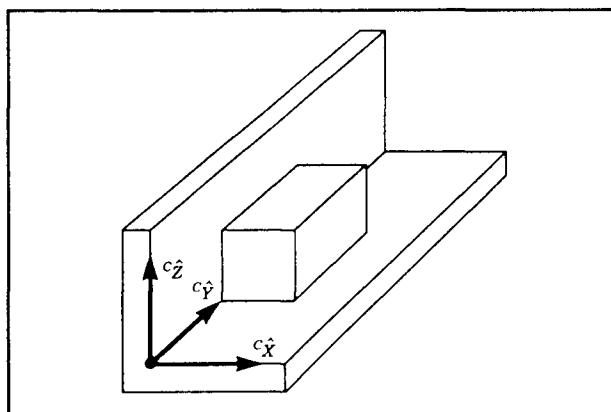
Dla manipulatora będącego w pozycji $\Theta = [60,0^\circ \ -90,0^\circ \ 30,0^\circ]^\top$ macierzy sztywności K_{px} w postaci

$$K_{px} = \begin{bmatrix} k_{małe} & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & k_{duże} & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & k_{duże} \end{bmatrix}$$

zasymulować przyłożenie następujących sił statycznych:

- 1) siła 1 N jest przyłożona w początku układu {3} i działa w kierunku \hat{x}_3 ,
- 2) siła 1 N jest przyłożona w początku układu {3} i działa w kierunku \hat{y}_3 .

Wartości $k_{małe}$ i $k_{duże}$ powinny być znalezione doświadczalnie. Przyjąć dużą wartość $k_{duże}$ w celu uzyskania wysokiej sztywności w kierunku \hat{y}_3 oraz małą wartość $k_{małe}$ w celu uzyskania niskiej sztywności w kierunku \hat{x}_3 . Jakie są odchylenia stanu ustalonego w tych dwóch przypadkach?



Rys. 11.14. Kloczek z ograniczeniem ruchu od dołu przez podłogę i z boku przez ścianę

12

JĘZYKI I UKŁADY PROGRAMOWANIA ROBOTÓW

12.1. WPROWADZENIE

W tym rozdziale rozpoczęniemy rozważania dotyczące sprzęgu pomiędzy użytkownikiem i robotem przemysłowym, który zapewnia wykorzystanie wszystkich właściwości układów mechanicznych i algorytmów sterowania, które rozpatrywaliśmy w poprzednich rozdziałach.

Złożoność połączenia użytkownika z robotem wzrasta, gdyż wymagania stawiane manipulatorom i innym automatom programowalnym w zastosowaniach przemysłowych są coraz wyższe. Powoduje to, że sposób połączenia użytkownika z robotem staje się bardzo ważnym zagadnieniem. W rzeczywistości, wiele zadań projektowania i wykorzystywania robotów przemysłowych skupia się na tym zagadnieniu.

Roboty przemysłowe różnią się istotnie od środków "sztywnej" automatyzacji tym, że są "elastyczne", to znaczy programowalne. Nie tylko ruchy manipulatora są programowalne, lecz poprzez wykorzystanie czujników i komunikacji z innymi środkami automatyzacji manipulatory mogą dostosowywać się do zmian w miarę wykonywania zadania.

Przy rozpatrywaniu zagadnień programowania manipulatorów należy pamiętać o tym, że jest ono zwykle tylko jednym z elementów zautomatyzowanego procesu. Lokalny zestaw wyposażenia, w skład którego mogą wchodzić jeden lub większa liczba manipulatorów, układy przenośnikowe, podajniki i uchwyty, określa się terminem gniazdo produkcyjne. Na wyższym poziomie organizacji gniazda produkcyjne mogą być połączone w sieci produkcyjne, a centralny komputer sterujący może kierować całym procesem produkcyjnym¹⁾. Zatem programowanie manipulatorów jest często rozpatrywane jako część szerokiego zagadnienia programowania zespołu różnorodnych maszyn połączonych w zautomatyzowane gniazdo produkcyjne.

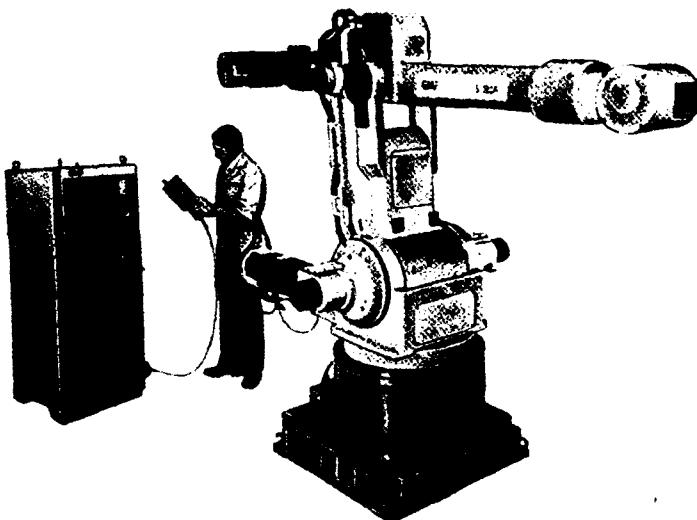
12.2. TRZY POZIOMY PROGRAMOWANIA ROBOTA

Istnieje wiele postaci sprzęgów opracowanych dla celów programowania robotów. Zanim mikrokomputery gwałtownie rozpowszechniły się w przemyśle, sterowniki robotów były podobne do prostych sterowników sekwencyjnych, wykorzystywanych do sterowania urządzeń zautomatyzowanych. Współczesne metody sterowania opierają się na programowaniu komputerowym, a zagadnienia programowania robotów uwzględniają wszystkie kwestie spotykane w ogólnym programowaniu komputerowym.

Nauczanie przez pokazywanie

Wszystkie wcześniej wyprodukowane roboty były programowane za pomocą metody, którą nazywamy nauczaniem przez pokazywanie. Metoda ta polega na przemieszczaniu robota do pożądanego punktu docelowego i zapisywaniu jego pozycji w pamięci programatora, a następnie jej odczytywaniu. W fazie nauczania robota użytkownik może "ręcznie" prowadzić robota lub sterować nim za pomocą ręcznego programatora. Programator ręczny jest przenośnym pulpitem z klawiszami, które umożliwiają sterowanie każdym połączeniem ruchowym manipulatora lub każdym stopniem swobody w układzie kartezjańskim. Niektóre z takich sterowników pozwalają na sprawdzanie warunków i wybór opcji działania, co umożliwia zapis prostych programów logicznych. Niektóre programatory ręczne są wyposażane w alfanumeryczne wyświetlacze i w swej złożoności są zbliżone do terminali komputerowych. Na rys. 12.1 pokazano operatora, wykorzystującego programator klawiszowy do programowania dużego robota przemysłowego.

¹⁾Układy zwane FMS lub CISIM (uwaga tłum.)



Rys. 12.1. Robot GMF S380, często wykorzystywany do zgrzewania punktowego nadwozia samochodu. Tutaj operator używa ręcznego programatora do sterowania manipulatora. Fotografia za zgodą GMFanuc Corp.

Języki bezpośredniego programowania robotów

Wraz z pojawieniem się niedrogich komputerów o dużej mocy obliczeniowej pojawiła się tendencja do programowania robotów w językach programowania komputera. Zazwyczaj języki komputerowego programowania robotów wykazują specjalne cechy, wynikające z specyfiki programowania manipulatorów i dlatego są nazywane **językami programowania robotów (RPLs)**. Większość systemów, wyposażonych w język programowania robota, ma również interfejs w rodzaju ręcznego programatora klawiszowego.

Istnieją różne języki programowania robotów. Można je podzielić na trzy następujące kategorie:

1. **Wyspecjalizowane języki manipulacyjne.** Takie języki programowania robotów zostały opracowane na podstawie całkiem nowego języka, przeznaczonego do wykorzystania w specyficznych dla robotów zastosowaniach i nie zawsze może on być traktowany jako ogólny język programowania. Przykładem jest język VAL, opracowany do sterowania robotów przemysłowych Unimation Inc [1]. Język VAL został rozwinięty jako wyspecjalizowany język sterowania manipulatora, natomiast jest nieefektywny jako ogólny język komputerowy. Na przykład nie operuje liczbami zmiennoprzecinkowymi lub typu łańcucha znaków, a podprogramów nie można wykorzystać do przesyłania argumentów. Dopiero najnowsza wersja VAL II wykazuje

je te cechy [2]. Innym przykładem wyspecjalizowanego języka manipulatorów jest język AL, opracowany w Uniwersytecie Stanforda [3].

2. **Biblioteka podprogramów robota dla istniejącego języka komputerowego.** Języki programowania robotów rozwinięto na podstawie popularnego języka komputerowego (np. Pascal) przez dołączenie biblioteki specyficznych podprogramów robotowych. Użytkownik pisze zatem program w Pascalu korzystając z częstych przywołań pakietów podprogramów wcześniejszych określonych dla specyficznych potrzeb robotowych. Jako przykłady można podać AR-BASIC z American Cimflex [4] i Robot-BASIC z Intelleddex [5], oba są zasadniczo bibliotekami podprogramów dla realizacji standardowego BASIC-a. Język JARS, rozwinięty przez Laboratorium Silników Odwrzutowych NASA, jest przykładem takiego języka programowania robotów opartego na Pascalu [6].
3. **Biblioteka podprogramów robota dla nowego języka ogólnego przeznaczenia.** Te języki programowania robotów zostały opracowane dzięki stworzeniu nowego języka ogólnego przeznaczenia jako bazy programowej, a następnie dołączeniu biblioteki wstępnie określonych specyficznych podprogramów robotowych. Przykładem takiego Języka programowania robotów jest język AML, opracowany przez IBM [7]. Język programowania robotów KAREL, opracowany przez GMF Robotics [8], zalicza się również do tej kategorii, chociaż jest on podobny do Języka Pascal.

Studia nad programami, aktualnie stosowanymi w zrobotyzowanych gniazdach produkcyjnych, wskazują na wysoki procent instrukcji Językowych nie związanych ściśle z robotem [7]. W programowaniu robotów występuje wiele zagadnień dotyczących inicjacji, testowania logicznego, rozgałęziania, komunikacji itp. Z tych powodów może wystąpić tendencja do odejścia od opracowywania specjalnych Języków programowania robotów i skoncentrowania się na rozwijaniu ogólnych języków, takich jak w kategoriach 2 i 3.

Języki programowania na poziomie zadania

Trzeci poziom metodologii programowania robotów obejmuje **Języki programowania na poziomie zadania**. Zalicza się tutaj języki, które pozwalają użytkownikowi na wskazanie wprost pożądanych celów, zamiast wyszczególniania każdego działania robota. W takim systemie użytkownik ma możliwość włączania instrukcji do programu opracowanego na znacznie wyższym poziomie niż język bezpośredniego programowania robota. System programowania robota na poziomie zadania powinien mieć zdolność automatycznego wykonania wielu planowanych zadań. Na przykład po zadaniu instrukcji "chwycić sworzeń" system powinien zaplanować trajektorię manipulatora, zapewniającą uniknięcie ko-

lizji z otoczeniem, automatyczny wybór dobrego usytuowania chwytu na sworzniu i uchwycenie go. W programowaniu za pomocą języka bezpośredniego programowania robota wszystkie te czynności muszą być wykonane przez programistę.

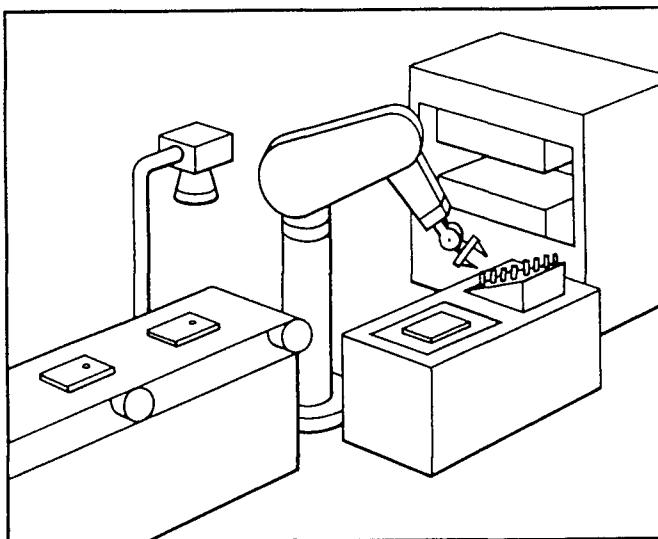
Granica między językami bezpośredniego programowania robotów i językami programowania na poziomie zadania jest całkiem wyraźna. Wprawdzie dokonano znaczących postępów w dziedzinie języków programowania bezpośredniego robót, które ułatwiają programowanie, lecz te osiągnięcia nie mogą być uznane za składniki systemu programowania na poziomie zadania. Systemy programowania manipulatorów na poziomie zadania dotąd nie istnieją, lecz są przedmiotem ciągłych badań [9, 10].

12.3. PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIA

Na rys. 12.2 pokazano zautomatyzowane gniazdo produkcyjne, przeznaczone do zadań montażowych w hipotetycznym procesie wytwarzania. Gniazdo produkcyjne składa się z przenośnika sterowanego komputerem, który dostarcza jeden rodzaj części do montażu (wsporniki), kamery połączonej z systemem wizyjnym, używanej do zlokalizowania części na przenośniku, oraz robota przemysłowego (robot PUMA 560), wyposażonego w kciuk z czujnikiem siły. Mały podajnik, umieszczony na stole, dostarcza drugi rodzaj części (kołek) do manipulatora. Prasa sterowana komputerem może być załadowana i wyładowana przez robota, a gotowe zespoły są umieszczane na palecie.

Całość procesu jest sterowana przez sterownik manipulatora wg następującej sekwencji:

1. Przenośnik jest uruchamiany, a następnie zatrzymywany, gdy układ wizyjny powiadamia, że wspornik został wykryty na przenośniku.
2. Układ wizyjny określa pozycję i orientację wspornika na przenośniku i sprawdza defekty wspornika, takie jak np. zła liczba otworów.
3. Wykorzystując informacje wyjściowe, uzyskane z systemu wizyjnego, manipulator chwyta wspornik z zadana siłą. Sprawdzana jest odległość między palcami, aby upewnić się, czy wspornik został właściwie uchwycony. Jeśli tak nie jest, to robot wycofuje się i układ wizyjny powtarza swe zadanie.
4. Wspornik jest umieszczany w uchwycie na powierzchni stołu. W tym punkcie przenośnik może zostać ponownie uruchomiony w celu dostarczenia następnego wspornika. Oznacza to, że kroki 1 i 2 mogą zostać wykonane ponownie, równolegle z następnymi krokami.
5. Kołek jest wyjmowany z podajnika i wkładany częściowo do stożkowego otworu we wsporniku. Do wykonania i sprawdzenia zakończenia tej



Rys. 12.2. Zautomatyzowane gniazdo montażowe wyposażone w robot przemysłowy

operacji wykorzystywane jest sterowanie siłą. Jeśli miejsce na podajniku jest puste, to operator jest powiadamiany i manipulator czeka, aż operator rozkaże mu podjąć na nowo pracę.

6. Zespół wspornik-kołek jest chwytyany przez robota i umieszczany w prasie.
7. Napęd prasy zostaje uruchomiony i kołek zostaje całkowicie wciśnięty w otwór we wsporniku. Prasa sygnalizuje wykonanie operacji i wspornik jest umieszczany z powrotem w uchwycie w celu końcowego sprawdzenia.
8. Za pomocą czujnika siły sprawdzane jest prawidłowe zamocowanie kołka. Czujnik mierzy siłę reakcji kołka. W tym celu manipulator naciska go z boku i sprawdza, jak daleko kołek wystaje ze wspornika.
9. Jeśli montaż jest oceniony jako prawidłowy, robot umieszcza ukończoną część w następnym miejscu palety. Jeśli paleta jest pełna, to powiadamiany jest operator. Jeśli montaż jest zły, to zespół jest odrzucany do skrzyni odpadowej.
10. Oczekiwanie na wykonanie kroku 2 (rozpoczętego wcześniej, równolegle), a następnie wykonanie kroku 3.

Jest to przykład zadania, które jest możliwe do wykonania (choć trudne) przez współczesne roboty przemysłowe. Jest oczywiste, że taki proces prawdopodobnie nie może zostać zdefiniowany drogą "nauczania przez pokazywanie". Np. w przypadku palet nauczenie lokalizacji wszystkich przedziałów palet byłoby bardzo pracochłonne. Łatwiejsze byłoby określenie położen narożników, a następnie obliczenie lokalizacji przedziałów na podstawie wymiarów palety. Ponadto przesyłanie sygnałów w czasie trwania procesu i

równolegle wykonywanie czynności nie jest możliwe do zaprogramowania za pomocą typowego ręcznego programatora. Ten rodzaj zastosowania wymaga opisu procesu za pomocą języka programowania robota (patrz ćwiczenie 12.5). Z drugiej strony zastosowanie to jest zbyt złożone dla bezpośredniego zaprogramowania w każdym z istniejących języków na poziomie zadania. Jest ono typowym zastosowaniem języka bezpośredniego programowania robota. Wróćmy do tego przykładu przy rozpatrywaniu cech języków programowania robota.

12.4. WYMAGANIA STAWIANE JĘZYKOWI PROGRAMOWANIA ROBOTÓW

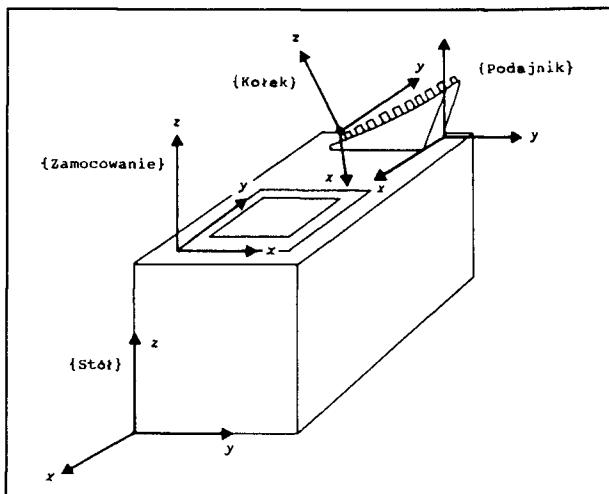
Modelowanie otoczenia

Ponieważ programy manipulacyjne z definicji dotyczą ruchu obiektów w przestrzeni trójwymiarowej, każdy język programowania robota musi być wyposażony w środki do opisania takich działań. Wspólnym elementem wszystkich języków programowania robota jest istnienie specjalnych **typów geometrycznych**. Na przykład wprowadzane są typy, służące do przedstawienia zbiorów współrzędnych wewnętrznych, jak również pozycji, orientacji układów kartezjańskich. Istnieją również predefiniowane operatory, które mogą operować tymi typami. "Układy standardowe" wprowadzone w rozdz. 3 mogłyby służyć jako możliwy model otoczenia: Wszystkie ruchy są opisane jako ruchy układu narzędzia względem układu stanowiska, a układy celów są zbudowane z dowolnych wyrażeń obejmujących typy geometryczne.

Gdy dane jest środowisko programowe robota, które tworzą typy geometryczne, to robot i inne maszyny, części i uchwyty mogą być modelowane przez określenie zmiennych związanych z każdym obiektem. Na rys. 12.3 pokazano część omawianego uprzednio gniazda produkcyjnego z układami odniesienia, związanymi z miejscami istotnymi dla potrzeb zadania. Każdy z tych układów w programie robota byłby reprezentowany przez zmienną typu "układ".

W wielu językach programowania robota możliwość definiowania zmiennych różnych typów geometrycznych oraz odwoływanie się do nich w programie tworzą bazę modelu otoczenia. Zauważmy, że fizyczne kształty obiektów nie są częścią takiego modelu; również nie są nimi powierzchnie, objętości, masy lub inne właściwości. Sposób modelowania obiektów w otoczeniu robota jest jedną z podstawowych decyzji podejmowanych przy projektowaniu systemu programowania robota. Większość współczesnych systemów działa wg schematu opisanego powyżej.

Pewne systemy modelowania otoczenia pozwalają na zapis **powiązania** między nazwanymi obiektami [3]. Oznacza to, że system może być powiadomiony o powiązaniu dwóch lub większej liczby nazwanych obiektów. Jeśli jeden obiekt



Rys. 12.3. Często gniazdo produkcyjne jest modelowane tylko przez zbiór układów związanych z obiektami mającymi znaczenie dla wykonania zadania

Jest bezpośrednio przemieszczony za pomocą odpowiedniej instrukcji programu, to również wszystkie obiekty z nim powiązane są przemieszczane. Zatem, w naszym zastosowaniu, gdy kolek został włożony do otworu we wsporniku, to system powinien zostać powiadomiony (przez instrukcję języka programowania) o tym, że te dwa obiekty zostały powiązane. Kolejne ruchy wspornika (tzn. zmiany wartości zmiennej układu "wspornik") powodowałyby również aktualizację zapamiętanej wartości zmiennej układu "kolek".

Idealny system modelowania otoczenia powinien zawierać więcej informacji o obiektach, z którymi manipulator ma do czynienia, jak również o samym manipulatorze. Rozważmy przykład systemu, w którym obiekty są opisane w postaci modeli typu CAD, przedstawiających przestrzenny kształt obiektu przez podanie definicji ich krawędzi, powierzchni czy objętości. Dysponowanie danymi w takiej postaci pozwala na realizację cech systemu programowania na poziomie zadania. Możliwości te będą omówione w rozdziale 13.

Specyfikacja ruchu

Podstawową funkcją języka programowania robota jest umożliwienie opisu pożądanych ruchów robota. Poprzez instrukcje ruchu zawarte w języku programowania użytkownik może wykorzystać możliwości planowania toru opisane w rozdziale 7. Instrukcje ruchu pozwalają użytkownikowi zadawać punkty pośrednie i punkt docelowy oraz wykorzystać ruch interpolowany we współrzędnych konfiguracyjnych lub ruch prostoliniowy w układzie współrzędnych kartezjańskich. Dodatkowo użytkownik może kontrolować prędkość lub czas trwania ruchu.

Aby zilustrować sposób składania podstawowych form ruchu, rozpatrzymy następującą sekwencję ruchów manipulatora: 1) przemieścić do pozycji "cel1", następnie 2) przemieścić po linii prostej do pozycji "cel2", 3) przemieścić bez zatrzymania przez "punkt pośredni 1" i zakończyć ruch w pozycji "cel3". Przyjmując wszystkie te punkty toru jako nauczone lub opisane programowo, ten fragment programu można zapisać w następujący sposób:

W języku VAL II:

```
move goal1
moves goal2
move via1
move goal3
```

W języku AL ("garm" znaczy tutaj manipulator):

```
move garm to goal1;
move garm to goal2 linearly;
move garm to goal3 via via1;
```

W języku Intelleddex Robot-BASIC:

```
10 move goal1
20 move straight goal2
30 cpon
40 move via1
50 move goal3
60 cpoff
```

Większość języków ma podobną składnię dla prostych instrukcji ruchu. Różnice w podstawowych instrukcjach ruchu dla różnych języków programowania robota stają się bardziej widoczne, gdy rozważymy następujące cechy:

1. Zdolność do wykonywania operacji matematycznych na typach strukturalnych, takich jak układy, wektory i macierze obrotu.
2. Zdolność opisania całości geometrycznych (takich jak układy) w różnych dogodnych reprezentacjach - z możliwością przekształceń między reprezentacjami.
3. Zdolność do nakładania ograniczeń na czas trwania lub prędkości poszczególnych ruchów. Na przykład w wielu systemach występują możliwości zadawania prędkości jako części prędkości maksymalnej. W niektórych systemach można zadawać wprost pożądany czas trwania ruchu lub pożądane maksymalne prędkości w połączeniach ruchowych.
4. Zdolność do zadawania celów w różnych układach odniesienia, uwzględniając układy zdefiniowane przez użytkownika i układy będące w ruchu (np. na przenośniku).

Struktura programu

Podobnie jak w konwencjonalnych językach programowania komputerów, system programowania robota pozwala użytkownikowi na wybór programu. Znaczy to, że takie działania jak sprawdzanie wartości, rozgałęzianie, pętle, przywoływanie podprogramów, a nawet przerwania na ogólny występują w językach programowania robota.

W programowaniu zautomatyzowanych gniazd produkcyjnych, bardziej niż w wielu innych zastosowaniach komputerów, ważne jest równoczesne wykonywanie działań. Przede wszystkim bardzo często dwa lub więcej robotów pracuje równocześnie w pojedynczym gnieździe produkcyjnym, aby skrócić czas trwania cyklu procesu. Lecz nawet w zastosowaniach pojedynczych robotów, takich jak pokazane na rys. 12.2, pozostałe wyposażenie gniazda musi być sterowane przez sterownika robota w sposób równoległy. Stąd w językach programowania robotów często występują podstawowe instrukcje wysyłania i odczytywania sygnału oraz oczekiwania, a czasem również spotyka się bardziej wyrafinowane konstrukcje równoczesnego wykonywania zaprogramowanych działań [3].

Inną często spotykana okolicznością jest potrzeba monitorowania różnych procesów za pomocą pewnego rodzaju czujnika. W takim przypadku albo przez przerwanie, albo przez zapytanie, system robota musi być zdolny do reagowania na pewne wydarzenia, które są wykrywane przez czujniki. Niektóre języki programowania robotów [2, 3] zapewniają możliwość łatwego programowania takiej kontroli zdarzeń.

Warunki programowe

Podobnie jak w przypadku wszystkich języków komputerowych, dobrze zorganizowane warunki programowania pomagają zwiększyć wydajność programisty. Programowanie manipulatora jest z reguły trudnym procesem interakcyjnym, opartym na metodzie prób i błędów. Jeśli użytkownik będzie zmuszony do ciągłego powtarzania cyklu kompilowania programów, to jego wydajność będzie mała. Dlatego większość współczesnych języków programowania robotów ma możliwość wykonywania pojedynczych instrukcji podczas opracowywania programu i poprawiania błędów. Niezbędne są również takie elementy warunków programowania jak edytory tekstu, debuggery i systemy zapisu plików.

Uwzględnienie czujników

Ważnym elementem programowania robota jest informacja pochodząca od czujników. System powinien mieć zdolność do sprawdzania odczytu czujników dotyku i siły oraz wykorzystywania tej informacji. Bardzo użyteczna jest też zdolność do śledzenia odczytu czujników "w tle".

Połączenie z układem wizyjnym pozwala temu systemowi wysłać do manipulatora współrzędne obiektu będącego przedmiotem zainteresowania. Na przykład w naszym wzorcowym zastosowaniu system wizyjny lokalizuje wsprornik na taśmie przenośnika i wysyła do sterownika manipulatora informację o jego pozycji i orientacji względem kamery. Ponieważ położenie kamery względem układu stanowiska jest znane, to pożądany układ celu dla manipulatora może być obliczony przy wykorzystaniu tej informacji.

Pewne czujniki mogą być częścią pozostałego wyposażenia gniazda produkcyjnego. Na przykład pewne sterowniki robotów mogą wykorzystywać sygnały wyjściowe z czujnika zamocowanego na przenośniku, dzięki czemu manipulator może śledzić ruch taśmy i lokalizować na niej obiekty w trakcie ruchu [2].

Połączenie z układami sterowania siłą (co rozpatrzone w rozdz. 9) realizuje się za pomocą specjalnych instrukcji, które pozwalają użytkownikowi zadawać strategię sterowania siłą [3]. Taka strategia jest z konieczności integralną częścią układu sterowania manipulatora – język programowania robota służy tu jako sprzęt. Programowanie robota, które wykorzystuje aktywne sterowanie siłą, może wymagać innych specjalnych cech, takich jak zdolność przedstawiania wyników pomiaru sił zebranych podczas ruchu [3].

W układach umożliwiających aktywne sterowanie siłą opis pożądanej i wywieranej siły może być częścią specyfikacji ruchu. W języku AL aktywne sterowanie siłą opisuje się w instrukcjach ruchu przez zadanie sześciu składowych sztywności (trzech liniowych i trzech kątowych) i wywieranej siły. W ten sposób programowana jest sztywność manipulatora. W celu wywarcia siły w określonym kierunku przyjmuje się, że sztywność w tym kierunku jest równa zeru, a zadawana jest wywierana siła. Przykład:

```
move garm to goal  
with stiffness=(80,80,0,100,100,100)  
with force=20*ounces along zhat;
```

12.5. PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIE ZAPISANE W TRZECH JĘZYKACH PROGRAMOWANIA ROBOTA

Aby ocenić obecny stan wiedzy w zakresie języków programowania robotów, zapoznajmy się z kilkoma przykładami programów zapisanych w różnych językach. W tym podrozdziale wybraliśmy przykład paletyzacji z [11] i pokazujemy rzeczywisty kod sterujący wykonaniem tego zadania, wyrażony w trzech różnych językach programowania robotów. Każdy z programów opisuje ten sam scenariusz: wziąć część z palety o r_1 rzędach i c_1 kolumnach; położyć na palecie o r_2 rzędach i c_2 kolumnach; sygnalizować lub czekać na dostarczenie i usu-

nięcie pełnej lub pustej palety. Programy te zawierają objaśnienia, tak więc czytelnik powinien je zrozumieć po uważnym przeczytaniu.

Przykład paletyzacji zapisany w języku AL

Poniżej przytoczono program zapisany w języku AL [3], który realizuje opisane zadanie.

```
BEGIN "Palletizing sample program"
  FRAME in_pallet,out_pallet, part;
  COMMENT
    The (1,1) positions of the pallets and
    grapping position of he parts;
  VECTOR del_r1, del_c1;
  VECTOR del_r2, del_c2;
  COMMENT Relative displacements along the rows and columns;
  SCALAR r1, c1, ir1, ic1;
  SCALAR r2, c2, ir2, ic2;
  COMMENT counters;
  EVENT in_pallet_empty, in_pallet_replaced;
  EVENT out_pallet_full, out_pallet_replaced;
  COMMENT
    Here insert the frame definitions for IN_PALLET
    and OUT_PALLET and the vector value for displacements
    along the rows and columns. These would be taught and
    recorded using the robot. Frame definitions are typically
    unreadable by humans;
  COMMENT
    Now define the procedure PICK and PLACE called in the
    main program later on;
  PROCEDURE PICK;
  BEGIN
    FRAME pick_frame;
    ir1:= ir1 + 1;
    IF ir1 GT r1
    THEN
    BEGIN
      ir1 := 1;
      ic1 := ic1 + 1;
      IF ic1 GT c1
      THEN
      BEGIN
        SIGNAL in_pallet_empty;
        WAIT in_pallet_replaced;
        ic1 := 1;
      END;
    END;
    pick_frame := in_pallet+(ir1-1)*del_r1+(ic1-1)*del_c1;
    MOVE BHAND TO pick_frame;
    CENTER BARM;
    AFFIX part TO BARM;
  END;
  PROCEDURE PLACE;
  BEGIN
    FRAME place_frame;
    ir2:= ir2 + 1;
    IF ir2 GT r2
```

```

THEN
BEGIN
    ir2 := 1;
    ic2 := ic2 + 1;
    IF ic2 GT c2
    THEN
        BEGIN
            SIGNAL out_pallet_empty;
            WAIT out_pallet_replaced;
            ic2 := 1;
        END;
    END;
    place_frame := out_pallet+(ir2-1)*del_r2+(ic2-1)*del_c2;
    MOVE part TO place_frame;
    OPEN BHAND TO 3.0*IN;
    UNFIX part FROM BARM;
END;
COMMENT The main program;
OPEN BHAND TO 3.0*IN;
WHILE TRUE DO
BEGIN
    PICK;
    PLACE;
END;
END;

```

Przykład programu paletyzacji zapisany w języku KAREL

Poniżej przytoczono program zapisany w języku KAREL [8], za pomocą którego realizuje się opisane zadanie.

```

program PALLET
-- Transfers workpieces from one pallet to another.
var
-- Variables for the input pallet:
BASE1 : position      -- (1,1) position on pallet
IR1,IC1 : integer       -- counters for rows & cols
NR1,NC1 : integer       -- limits for rows & cols
DR1,DC1 : vector        -- delta between rows & cols
ISIG1,OSIG1 : integer   -- signals for pallet changing
-- Variables for the output pallet:
BASE2 : position      -- (1,1) position on pallet
IR2,IC2 : integer       -- counters for rows & cols
NR2,NC2 : integer       -- limits for rows & cols
DR2,DC2 : vector        -- delta between rows & cols
ISIG2,OSIG2 : integer   -- signals for pallet changing
-----
routine PICK
-- Pick a workpiece from the input pallet.
var
    TARGET : position      -- target pose
begin
    IR1 = IR1 + 1
    if IR1 > NR1
    then
        IR1 = 1
        IC1 = IC1 + 1

```

```

if IC1 > NC1
then
    IC1 = 1
        -- get a new pallet
    dout[OSIG1] = true
        -- notify pallet-changer
    wait for din[ISIG1]+
        -- wait for input line to go high,
        -- meaning pallet has been changed
    dout[OSIG1] = false
        -- turn off our output signal
        -- compute target pose
endif
endif
TARGET = BASE1
    -- start with (1,1) pose
shift (TARGET,(IR1-1)*DR1+(IC1-1)*DC1)
    -- shift for row and col offset
    -- get the part
move near TARGET by 50      -- move to 50 mm away from TARGET
move to TARGET
close hand 1
move away 50      -- back away from TARGET by 50 mm
end PICK
-----
```

```

routine PLACE
-- Place a workpiece on the output pallet.
var
    TARGET : position      -- target pose
begin
    IR2 = IR2 + 1
    if IR2 > NR2
    then
        IR2 = 1
        IC2 = IC2 + 1
        if IC2 > NC2
        then
            IC2 = 1
                -- get a new pallet
            dout[OSIG2] = true
                -- notify pallet-changer
            wait for din[ISIG2]+
                -- wait for input line to go high,
                -- meaning pallet has been changed
            dout[OSIG2] = false
                -- turn off our output signal
                -- compute target pose
        endif
    endif
    TARGET = BASE2
        -- start with (1,1) pose
shift (TARGET,(IR2-1)*DR2+(IC2-1)*DC2)
    -- shift for row and col offset
move near TARGET by 50      -- move to 50 mm away from TARGET
move to TARGET
open hand 1
move away 50      -- back away from TARGET by 50 mm
end PLACE
```

```
-----  
-----          MAIN PROGRAM  
-----  
  
begin  
  IR1 = 0 ; IC1 = 0      -- initialize counters  
  IR2 = 0 ; IC2 = 0  
-- initialize other variables:  
--  
--  BASE1 , NR1 , NC1 , DR1 , DC1 , ISIG1 , OSIG1  
--  
--  BASE2 , NR2 , NC2 , DR2 , DC2 , ISIG2 , OSIG2  
--  
-- numerical pose definitions omitted here  
open hand 1  
while true do           -- loop  
  pick  
  place  
endwhile  
end PALLET
```

Przykład programu paletyzacji zapisany w języku VAL II

W wersji programu dla celów paletyzacji zapisanego w języku VAL II [2] manipulator przenosi części między dwiema paletami stosując zewnętrzne sygnały binarne wejścia/wyjścia, w celu zażądania dodatkowych palet. Program komunikuje się z użytkownikiem przez terminal systemowy, zadając pytania i dostarczając informacji o pracy systemu. Położenie palety jest zadane drogą nauczania poprzez przemieszczenie robota do naroży palety za pomocą ręcznego programatora. Program następnie oblicza położenie miejsc na palecie. Po dokonaniu tego robot przenosi części do momentu, aż zostanie zatrzymany ręcznie przez operatora.

```
.PROGRAM main()  
;  
; ABSTRACT: This is the top level program to move parts  
; between two pallets. It allows the operator to teach  
; the pallet locations if desired, and then moves parts  
; from one pallet to the next.  
;  
; DATA STRUCTURES:  
;  
;   in.pallet[]  = An array of locations for items on the  
;                 pallet to be unloaded.  
;   in.height    = Approach/depart height for input pallet.  
;   in.max       = The number of items on a full input pallet.  
;   in.count     = The number of items left on this input  
;                 pallet.  
;   out.pallet[] = An array of locations for items on the  
;                 pallet to be loaded.  
;   out.height   = Approach/depart height for output pallet.  
;   out.max      = The number of items on a full output pallet.  
;   out.count    = The number of items left on this output  
;                 pallet.  
;   #safe        = Safe robot location reachable from both  
;                 pallets.  
;
```

```

LOCAL $ans, in.count, out.count
; Define binary signal numbers used to control pallets
transfer = 1001 ;Input signal TRUE when transfers permitted
in.ready = 1002 ;Input signal TRUE when input pallet ready
out.ready = 1003 ;Input signal TRUE when output pallet ready
in.change = 4 ;Output signal requests new input pallet
out.change= 5 ;Output signal requests new output pallet
; Ask operator about setup and teach new pallets if desired
PROMPT "Do you want to define the pallet (Y/N):", $ans
IF $ans == "Y" THEN
    DETACH() ;Detach robot from program control
    TYPE "Use the PENDANT to teach the input pallet location"
    CALL setup.pallet(in.count, in.pallet[], in.height)
    TYPE "Use the PENDANT to teach the output pallet location"
    CALL setup.pallet(out.count, out.pallet[], out.height)
    TYPE "Press the COMP button on the PENDANT to continue"
    ATTACH() ;Attach robot (wait for COMP button)
END
; Initialize transfer data
transfer.count = 0 ;Count of parts transferred
in.count = 0 ;Assume empty input pallet at start
out.count = 0 ;Assume full output pallet at start
; Wait for transfer signal, then start the pallet transfer
MOVES #safe ;Move robot to a safe place
TYPE "Waiting for transfer signal ...", /S
WAIT SIG(transfer) ;Wait until transfer signal seen
TYPE "starting transfer", /C2
; Main loop transferring from one pallet to the other, requesting
; new pallets as necessary. Quit when transfer signal becomes FALSE
WHILE SIG(transfer) DO ;While transfer is still ok...
    IF in.count <= 0 THEN ;If out of input parts, ask for new
        SIGNAL in.change ;Request pallet change
        WAIT SIG(-in.ready) ;Wait for input not ready
        WAIT SIG(in.ready) ;Followed by input ready
        in.count = in.max ;Indicate full pallet
    END
    IF out.count <= 0 THEN If output pallet full, ask for new
        SIGNAL out.change ;Request pallet change
        WAIT SIG(-out.ready) ;Wait for output not ready
        WAIT SIG(out.ready) ;Followed by output ready
        out.count = out.max ;Indicate empty pallet
    END
    ; Acquire input part
    OPEN ;Open gripper
    APPROX in.pallet[in.count], in.height ;Move over part
    SPEED 20 ;Move at 20% speed
    MOVES in.pallet[in.count] ;Move to part
    CLOSEI ;Close immediately
    DEPARTS in.height ;Move up again
    in.count = in.count - 1 ;Count down
    ; Place output part
    APPROX out.pallet[out.count], out.height ;Move over output
    SPEED 20 ;Move at 20% speed
    MOVES out.pallet[out.count] ;Move to empty place
    OPENI ;Open immediately
    DEPARTS out.height ;Move up again
    out.count = out.count - 1 ;Count down
    ; Count transfer and display it
    transfer.count = transfer.count + 1
    TYPE /U1, "Number of parts transferred:", /I8, transfer.count

```

```

END ;End of while loop
; All done transferring parts, move robot to safe place and quit
MOVES #safe
.END
.PROGRAM setp.pallet(count, array[], approach)
; ABSTRACT: Routine to compute an array of locations given locations
; which represent the upper left, lower left, and lower right point
; of a pallet. All output locations have the orientation of the
; upper left part location.
;
; INPUT PARM: None
;
; OUTPUT PARM: count      = Number of items on this pallet.
;                 array[]   = Array containing the pallet locations.
;                 approach  = The approach height for this pallet.
;
LOCAL ul, ll, lr, ap, t[], ncol, nrow
LOCAL row, col, cs, rs, i, frame
; Ask operator to teach pallet locations
CALL teach.point("upper left pallet position", ul)
CALL teach.point("lower left pallet position", ll)
CALL teach.point("lower right pallet position", lr)
CALL teach.point("approach height above the pallet", ap)
PROMPT "Enter the number of columns (left to right); ",ncol
PROMPT "Enter the number of rows (top to bottom); ",nrow
count = ncol*nrow ;Compute count of items
; Setup to compute pallet locations
cs = 0 ;Assume 1 column, zero spacing
IF ncol > 1 THEN
  cs = DISTANCE(ll,lr)/(ncol-1) ;Compute spacing of columns
ENDIF
rs = 0 ;Assume 1 row, zero spacing
IF nrow > 1 THEN
  rs = -DISTANCE(ul,ll)/(nrow-1) ;Compute spacing of rows
ENDIF
; Compute frame values
SET frame = FRAME(ll,lr,ul,ul) ;Compute frame for pallet
approach = DZ(INVERSE(frame):ap) ;Compute approach height
;wrt frame plane
DECOMPOSE t[1] = ul
; Loop to compute array values
i = 1
FOR row = 0 to nrow-1
  FOR col = 0 to ncol-1
    SET array[i] = frame:TRANS(row*rs,col*cs,0,t[4],t[5],t[6])
    i = i + 1
  END
END
RETURN
.END

```

12.6. SPECYFICZNE PROBLEMY ZWIĄZANE Z JĘZYKAMI PROGRAMOWANIA ROBOTA

Pomimo postępów dokonanych w ostatnich latach programowanie robotów jest nadal trudnym zadaniem. Programowanie robota zawiera wszystkie problemy konwencjonalnego programowania komputera oraz ponadto pewne dodatkowe trudności spowodowane przez fizyczne oddziaływanie otoczenia [12].

Wewnętrzny model otoczenia w odniesieniu do zewnętrznej rzeczywistości

Główna cechą systemu programowania robota jest model otoczenia, zawarty w komputerze. Nawet gdy model ten jest całkiem prosty, to wystarczająco trudne jest zapewnienie jego zgodności z fizyczną rzeczywistością. Sprzeczności między modelem wewnętrznym i zewnętrzną rzeczywistością pojawiają się w przypadku słabego lub nieudanego chwytu obiektu, kolizji oraz wielu bardziej subtelnych problemów.

Zgodność między modelem wewnętrznym i zewnętrznym otoczeniem musi być zapewniona dla początkowego stanu programu i musi być utrzymywana w czasie jego realizacji. Podczas programowania wstępnego lub wykrywania błędów od użytkownika zależy zapewnienie, aby stan przedstawiony w programie odpowiadał stanowi fizycznemu gniazda produkcyjnego. Inaczej niż w przypadku konwencjonalnego programowania, gdzie odtworzenie poprzedniej sytuacji zależy tylko od zapamiętania i odczytania zmiennychewnętrznych, w programowaniu robota obiekty fizyczne zwykle muszą być ponownie pozycjonowane.

Oprócz niepewności co do pozycji każdego obiektu manipulator działa również z ograniczoną dokładnością. Bardzo często etapy montażu wymagają wykonania ruchów wymagających większej dokładności niż dokładność pozycjonowania manipulatora. Częstym przykładem jest tu wkładanie kolka do otworu, gdzie luz jest o rząd wielkości mniejszy niż dokładność pozycjonowania manipulatora. Dokładność manipulatora zazwyczaj zmienia się w przestrzeni roboczej, co dodatkowo komplikuje zagadnienie.

W przypadku obiektów, których dokładne położenie nie jest znane, ważne jest uściślenie posiadanej informacji. Można tego dokonać stosując sensory, np. dotyku, układy wizyjne lub wykorzystując właściwe strategie sterowania siłą dla ruchów z ograniczeniami.

Podczas wykrywania błędów w programach manipulatorów bardzo użyteczna jest możliwość modyfikacji programu, cofnięcia go o krok i ponownego sprawdzenia procedury, co wiąże się z powrotem manipulatora i obiektów manipulowanych do poprzedniego stanu. Jednak przy pracy z obiektami fizycznymi nie zawsze jest to łatwe, a czasem wręcz niemożliwe. Przykładami są operacje malowania, nitowania, wiercenia lub spawania, które powodują modyfikacje fizyczne obiektów manipulowanych. Dlatego często użytkownik musi posłużyć się nową kopią obiektu odpowiednio zmodyfikowaną. Jest również prawdopodobne, że pewne operacje, poprzedzające operację usuwaną, trzeba będzie powtórzyć, aby wprowadzić stan umożliwiający jej usunięcie.

Zagadnienie czułości programu

Standardowym podejściem przy pisaniu dużego programu komputerowego jest programowanie hierarchiczne. Polega ono na opracowywaniu fragmentów programu na niskim poziomie, a następnie utworzeniu z nich większych całości lub kompletnego programu. Zasadniczym wymogiem przy posługiwaniu się tą metodą jest to, aby małe części były względnie niewrażliwe na instrukcje językowe, które je poprzedzają, i aby ich działanie nie było ograniczone żadnymi założeniami. W programowaniu manipulatora często to nie wystarcza. Podprogram, który pracował poprawnie testowany oddzielnie, często zawodzi, gdy stanowi część większego programu. Problemy takie na ogół są związane z różnymi prędkościami ruchów i konfiguracjami manipulatora.

Programy sterujące manipulatorem mogą być bardzo czułe na warunki początkowe, np. na początkową pozycję manipulatora. W realizacji trajektorii ruchu pozycja początkowa będzie wpływać na trajektorię, jaka będzie realizowana w danym ruchu. Początkowa pozycja manipulatora może również wpływać na prędkość, z jaką będzie on poruszał się w czasie realizacji krytycznej części ruchu. Te stwierdzenia są prawdziwe dla manipulatorów, dla których trajektorie zapisano we współrzędnych konfiguracyjnych za pomocą funkcji sklejanych z wielomianów trzeciego stopnia, rozpatrywanych w rozdz. 7. Choć tych efektów można uniknąć drogą odpowiedniego zaprogramowania, często mogą one pozostać niezauważone podczas testowania procedur, a ujawnią się dopiero po połączeniu procedur w pełny program sterujący.

Z powodu niewystarczającej dokładności manipulatora fragment programu, zapisany w celu wykonania operacji w jednym miejscu, może wymagać "dostrojenia" (tzn. ponownego naużenia pozycji) w celu wykonania operacji w innym miejscu. Zmiany położenia w obrębie gniazda produkcyjnego powodują zmiany konfiguracji manipulatora przy osiąganiu celów. Odpowiednie przemieszczenia w obrębie gniazda produkcyjnego testują dokładność układu kinematycznego manipulatora i jego serwonapędów, a podczas takich prób często pojawiają się problemy, np. w postaci zmiany kinematycznej konfiguracji manipulatora (np. ramię w lewo na ramię w prawo lub łokieć do góry na łokieć w dół). Ponadto takie zmiany w konfiguracji mogą powodować konieczność wykonania ruchów o znacznie większym zakresie.

Przestrzenny kształt trajektorii może się zmieniać, jeśli odcinki toru zawierają się w różnych częściach przestrzeni roboczej manipulatora. Jest to szczególnie istotne dla metod planowania trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych. Również przy planowaniu toru we współrzędnych kartezjańskich mogą pojawić się problemy, jeśli tor przebiega w pobliżu punktów osobliwych.

Gdy testujemy ruch manipulatora po raz pierwszy, należy stosować małą prędkość ruchu. Pozwala to użytkownikowi na zatrzymanie ruchu, jeśli pojawi się możliwość kolizji, oraz na jego dokładniejszą kontrolę. Po początkowym przetestowaniu zaprogramowanego ruchu z małą prędkością pożądane jest jej zwiększenie, co może wywołać zmianę wielu aspektów ruchu. Z powodu ograniczeń większości układów sterowania manipulatora, podczas ruchu z większymi prędkościami należy spodziewać się większych wartości uchybu. Również przy zastosowaniu sterowania siłą, w sytuacjach kontaktu z otoczeniem, zmiany prędkości mogą zupełnie zmieniać strategie tego typu sterowania, wymagane dla poprawnej pracy układu.

Konfiguracja manipulatora również wpływa na dokładność wywierania siły na otoczenie. Jest to zależne od uwarunkowania jakobianu manipulatora w danej konfiguracji, co na ogół jest trudne do rozważenia podczas opracowywania programu sterującego dla robota.

Wykrywanie błędów

Inną prostą konsekwencją pracy w świecie realnym jest różnica pomiędzy rzeczywistym a spodziewanym położeniem obiektów manipulowanych. Część oprogramowania manipulatorów podejmuje próby uwzględnienia tego faktu i przeprowadzenia operacji montażowych tak dokładnie jak to jest możliwe. Lecz nawet wtedy błędy są prawdopodobne. Stąd ważnym aspektem programowania manipulatora jest uniknięcie tych błędów.

Prawie każda instrukcja ruchu w programie może nie zostać wykonana prawidłowo z różnych powodów. Najczęstsze przyczyny to przesuwające się lub wypadające z chwytyka przedmioty, obiekty nie znajdujące się tam, gdzie powinny się znaleźć, zaklinowanie elementu podczas wkładania do otworu, możliwość zlokalizowania otworu itd.

Pierwszym problemem, pojawiającym się przy próbie likwidacji skutków błędu, jest jego identyfikacja. Ponieważ roboty na ogół mają ograniczone zdolności pomiarowe i decyzyjne, to wykrycie błędu jest często utrudnione. W celu wykrycia błędu program robota musi zawierać pewien rodzaj bezpośredniego testu. Test ten mógłby sprawdzać pozycję manipulatora, aby przekonać się, czy zawiera się ona we właściwym przedziale; np. w operacji wkładania kołka brak zmiany jego pozycji mógłby wskazywać na zaklinowanie, podczas gdy zbyt duże zmiany mogłyby wskazywać, że otwór został ominięty lub obiekt wyśliznął się z chwytyka. Jeśli system manipulatora dysponuje układem wizyjnym, to mógłby wykonać fotografię w celu wykazania obecności lub nieobecności obiektu, a jeśli obiekt jest obecny, to wyznaczyć jego położenie. Inne testy mogą uwzględniać siłę, np. pomiar obciążenia chwytyka, aby

sprawdzić, czy obiekt nie został upuszczony lub czy wartość siły kontakto-wej podczas ruchu nie przekracza pewnych granic.

Ponieważ każda instrukcja ruchu w programie może potencjalnie zawieść, te bezpośrednie sposoby testowania mogą być kłopotliwe i zajmować więcej miejsca w pamięci komputera niż reszta programu. Zamiast podejmować próby wykrywania wszystkich możliwych błędów, co jest bardzo trudne, zazwyczaj sprawdza się wykonanie kilku instrukcji, które wydają się być najbardziej zawodne. Proces sprawdzania najbardziej zawodnych części programu wymaga interakcyjnego przetestowania robota na etapie opracowywania programu.

Po wykryciu błędu można próbować określić przyczyny. Można tego dokonać wykorzystując jedynie manipulator i sterowanie programowe, przez ręczną interwencję użytkownika, albo przez pewną kombinację tych dwóch sposobów. W każdym przypadku próba usunięcia skutków błędu może spowodować nowe błędy. Może się okazać, że program do znajdowania błędów stanie się główną częścią programu manipulatora.

Zastosowanie równoległości w programach sterowania manipulatora może powodować dalsze komplikacje w wykrywaniu błędów. Gdy wiele procesów odbywa się równocześnie i jeden z nich powoduje wystąpienie błędu, to może on wpływać lub nie wpływać na inne procesy. W wielu przypadkach możliwe jest zatrzymanie procesu wprowadzającego błędy, przy kontynuowaniu innych. Często jest jednak konieczne przerwanie wielu lub wszystkich trwających procesów i ich ponowne rozpoczęcie od stanu początkowego.

Bibliografia

- [1] B Shimano, "VAL: A Versatile Robot Programming and Control System", Proceedings of COMPSAC 1979, Chicago, November 1979.
- [2] B Shimano, C.Geschke, C.Spalding, "VAL II:A Robot Programming Language and Control System", SME Robots VIII Conference, Detroit, June 1984.
- [3] S.Mujtaba, R.Goldman, "AL Users' Manual", 3rd edition, Stanford Department of Computer Science, Report No. STAN-CS-81-889, December 1981.
- [4] A.Gilbert i inni., AR-BASIC: An advanced and User Friendly Programming System for Robots, American Robot Corporation, June 1984.
- [5] Intelleddex, Inc., "Model 605 Operator's Manual", Section 3, Intelleddex, Inc., 1983.
- [6] J.Craig, "JARS-JPL Autonomous Robot System: Documentation and Users Guide", JPL Interoffice memo, September 1980.
- [7] R Taylor, P.Summers, J.Meyer, "AML: A Manufacturing Language", International Journal of Robotics Research, Vol.1, No.3, Fall 1982.
- [8] GMF Robotics Inc., "KAREL Language Reference", Version 1.20p, Troy, Mich., 1986.

- [9] R.Taylor, "A Synthesis of Manipulator Control Programs from Task-Level Specifications", Stanford University AI Memo 282, July 1976.
- [10] T.Lozano-Perez, "Automatic Planning of Manipulator Transfer Movements", *IEEE Transactions on Man, Systems and Cybernetics*, Vol.SMC-11, No.10, October 1981.
- [11] W.Gruver, B.Soroka, "Programming, High Level Languages", in *The International Encyclopedia of Robotics*, R.Dorf, S.Nof, Editors, Wiley Interscience, 1988.
- [12] R.Goldman, *Design of an Interactive Programming Environment*, UMI Research Press, Ann Arbor, Mich., 1985.

Ćwiczenia

- 12.1. [15] Napisać program sterujący dla robota (posługując się dowolną z prac [1] do [8]), służący do podnoszenia klocka z miejsca A i umieszczania go w miejscu B.
- 12.2. [20] Opisać proces zawiązywania sznurowadła w prostych rozkazach, które mogą tworzyć podstawę programu robota.
- 12.3. [32] Zaprojektować składnię nowego języka języka programowania robota. Uzważydzić sposoby zadawania czasu trwania i prędkości dla trajektorii ruchowych, instrukcje wejścia/wyjścia dla urządzeń peryferyjnych, rozkazy sterujące chwytkiem i pomiarem siły (tj. ruch z ograniczeniami). Możesz pominać sterowanie siłą i równoległość działania (patrz ćwicz. 12.4).
- 12.4. [28] Rozszerzyć opis nowego języka programowania robota z ćwicz. 12.3 przez dodanie podprogramów do sterowania siłą i równoległości działania.
- 12.5. [38] Napisać program w dostępnym handlowo języku programowania robota do realizacji zadania opisanego w podrozdz.12.3. Zrobić wszystkie uzasadnione założenia dotyczące połączeń we/wy i innych szczegółów. Posłużyć się jakąkolwiek z prac [1]+[8] lub inną w celu zapoznania się ze szczegółami składni.
- 12.6. [27] Wykorzystać dowolny język programowania robota (patrz [1]+[8]) i napisać ogólny program do rozładowania palety o dowolnych wymiarach. Program powinien zapewnić rozładowanie palety kolejno wg rzędów i kolumn i sygnalizować operatorowi, gdy paleta jest pusta. Przyjąć, że części są wyładowywane na taśmę przenośnika.
- 12.7. [35] Posłużyć się dowolnym językiem programowania robota (patrz [1]+[8]) i napisać ogólny program do rozładowania palety początkowej o dowolnych wymiarach i załadowania palety docelowej również o dowolnych wymiarach. Program powinien zapewnić rozładowanie i załadowanie

palet kolejno wg rzędów i kolumn i sygnalizować operatorowi, gdy paleta początkowa jest pusta lub gdy paleta docelowa jest pełna.

- 12.8.** [35] Posłużyć się językiem AL [3] i napisać program, który wykorzystuje sterowanie siłą do napełnienia pudełka papierosów z 20 papierosami. Przyjąć, że manipulator ma dokładność pozycjonowania ok. 6 mm, tak więc sterowanie siłą powinno być wykorzystane do wielu operacji. Papierosy są dostarczane na taśmie przenośnika, a system wizyjny określa ich współrzędne.
- 12.9.** [35] Posłużyć się dowolnym językiem programowania robota (patrz [1]+[8]) i napisać program do montażu słuchawki typowego telefonu. Sześć składników (uchwyt, mikrofon, głośnik, dwie przykrywki i przewód) jest dostarczanych na specjalnej palecie, zawierającej po jednej części każdego rodzaju. Przyjąć, że dysponujemy podstawą z zamocowaniem dla uchwytu słuchawki. Dokonać wszystkich potrzebnych i uzasadnionych założeń.
- 12.10.** [33] Napisać program w języku AL [3], który wykorzystuje dwa manipulatory. Jeden, nazwany GARM, jest wyposażony w specjalny chwytek do trzymania butelki wina. Drugi, nazwany BARM, trzyma kieliszek i jest wyposażony w kiść z czujnikiem siły. Może on być wykorzystany do zasygnalizowania manipulatorowi GARM zakończenia nalewania, po stwierdzeniu, że kieliszek jest pełny.

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 12)

W celu wykonania symulacji ruchu robota opracuj sprzęt dla innych procedur, które napisałesz w Pascalu, tak aby po zdefiniowaniu tych procedur użytkownik mógł napisać program w Pascalu, który przywołuje te procedury.

Zdefiniować instrukcje, które pozwolą użytkownikowi ustalić układy stanowiska i narzędzia:

```
setstation(SrelB: vec3);
settool(TrelW: vec3);
```

gdzie "SrelB" podaje położenie układu stanowiska względem układu bazowego robota, a "TrelW" określa położenie układu narzędzia względem układu kiści manipulatora. Zdefiniować instrukcje ruchu:

```
moveto(goal: vec3);
moveby(increment: vec3);
```

gdzie "goal" określa położenie układu celu względem układu bazowego, a "increment" określa położenie układu celu względem bieżącego układu narzędzia. Umożliwić opisanie wielosegmentowych torów, gdy użytkownik po raz pierwszy przywołuje funkcję "pathmode", następnie zadaje ruchy do punktów przejściowych i ostatecznie przywołuje funkcję "runpath". Przykład:

```
pathmode; (* enter path mode *)
moveto(goal1);
moveto(goal2);
runpath; (* execute the path without stopping at goal1 *)
```

Napisać prosty programu aplikacyjny. Drukować położenie ramienia co każde n sekund.

13

UKŁADY PROGRAMOWANIA AUTONOMICZNEGO

13.1. WPROWADZENIE

Zdefiniujemy **układ programowania autonomicznego (off-line)** jako język programowania robota, który został rozszerzony (na ogół dzięki wykorzystaniu grafiki komputerowej) w kierunku umożliwienia pisania programów dla robota bez jego udziału¹⁾. Systemy programowania autonomicznego są ważne zarówno w programowaniu współczesnych zautomatyzowanych narzędzi przemysłowych, jak również jako podstawa dla badań z dziedziny robotyki. Przy projektowaniu takich układów należy rozważyć wiele kwestii, które przedstawimy w tym rozdziale, a następnie zilustrujemy przykładowym projektem takiego układu. Rozważane kwestie to: przestrzenna reprezentacja brył, ilustracja graficzna takich obiektów, automatyczne wykrywanie kolizji, włączenie kinematyki, planowanie trajektorii, symulacja dynamiczna, symulacja czujników, współpraca

¹⁾ Rozdział 13 jest przedrukiem za zgodą z *International Symposium of Robotics Research* R. Bollesa i B. Rotha (wydawcy). Wzięto z "Issues in the Design of Off-line Programming Systems" J. Craiga, MIT Press, Cambridge, MA © 1988.

działające oprogramowanie, tłumaczenia przez postprocesory na różne języki docelowe oraz cechowanie gniazda produkcyjnego.

W ostatnim dziesięcioleciu rozwój rynku robotów przemysłowych nie był nawet w przybliżeniu tak szybki jak przepowiadano. Jedną z głównych przyczyn tego zjawiska jest fakt, że roboty są nadal zbyt trudnym narzędziem do efektywnego ich wykorzystania. Zainstalowanie robota do konkretnego zadania i doprowadzenie systemu do produkcyjnej gotowości wymaga wiele czasu i doświadczeń. Z różnych przyczyn, w niektórych zastosowaniach problem wykorzystania robotów był poważniejszy niż w innych. Doprowadziło to do wcześniejszej robotyzacji pewnych obszarów zastosowań (np. zgrzewanie punktowe, malowanie natryskowe). Obserwuje się brak kadry, wystarczająco dobrze wyszkolonej w zakresie systemów zrobotyzowanych, co również wpływa na ograniczenie rozwoju niektórych, jeśli nie wszystkich zastosowań. W niektórych fabrykach kierownictwo zaleca zastosowanie robotów w zakresie szerszym niż jest to wykonalne przez inżynierów odpowiedzialnych za wdrożenia. Ponadto duży procent robotów nie jest w pełni wykorzystywany. Podane informacje dowodzą, że wykorzystanie współczesnych robotów przemysłowych jest trudnym zadaniem w zakresie ich instalacji i programowania.

Jest wiele czynników, które czynią programowanie robota trudnym zadaniem, podobnie jak to ma miejsce przy programowaniu komputerów. Ponadto programowanie robota, jak i każdej maszyny programowej, wymaga rozwiązania różnych kwestii, które utrudniają rozwój gotowego oprogramowania. Jak wynika z poprzedniego rozdziału, większość z tych specjalnych problemów wynika z faktu, że manipulator pracuje w realnym otoczeniu [1]. Stąd nawet proste systemy programowania zawierają "model" tego otoczenia i dysponują "wiedzą" o obecności lub nieobecności różnych obiektów, zakodowaną w strategii programowej. Podczas opracowywania programu dla robota (a szczególnie później, podczas wykorzystania go w produkcji) konieczne jest przestrzeganie zgodności modelu zawartego w systemie programowania z aktualnym stanem otoczenia robota. Interakcyjne poszukiwanie i usuwanie błędów z programów, z udziałem manipulatora, wymaga często ręcznego odtwarzania stanu otoczenia robota, tzn. części, narzędzia itp. muszą być przemieszczone do położen początkowych. Takie odtwarzanie staje się szczególnie trudne (a czasami kosztowne) wtedy, gdy robot wykonuje nieodwracalną operację na jednej lub większej liczbie części (np. wiercenie, frezowanie itp.). Najbardziej widocznym efektem obecności otoczenia realnego jest nierzamierzone ujawnienie się błędu podczas nieodwracalnej operacji z udziałem części, narzędzi lub samego manipulatora.

Chociaż występują trudności w utrzymaniu wysokiej dokładności wewnętrznego modelu otoczenia manipulatora, to należy również zanotować pewne

korzyści, jak np. rozwój badań dotyczących czujników i systemów wizji komputerowej. Prowadzi to do ulepszenia technik, za pomocą których modele otoczenia mogą być tworzone, weryfikowane i poprawiane. Oczywiście zastosowanie każdego algorytmu obliczeniowego, służącego do generowania rozkazów dla robota, wymaga dostępu do modelu robota i jego otoczenia.

Postęp w dziedzinie technik programowania wydaje się związany z rozwojem systemów programowania robotów, szczególnie ze wzrostem złożoności wewnętrznego modelu, wprowadzanym przez język programowania. Wcześniejše generacje robotów, "nauczane przez pokazywanie" w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, wykorzystywały ograniczony model otoczenia, co nie ułatwiało programistie wykonania zadania. Bardziej złożone sterowniki robotów zawierają modele kinematyczne, umożliwiające wykonywanie ruchów w przestrzeni kartezjańskiej. Rozwój języków programowania robota umożliwia wprowadzanie różnych rodzajów danych i operacji, jakie programista może wykorzystać do modelowania właściwości otoczenia i akcji robota. Niektóre z tych języków umożliwiają modelowanie chwytów oraz wprowadzanie danych w celu uwzględnienia sił i momentów sił oraz innych danych [2].

Współczesne języki programowania robotów mogą być nazywane "językami programowania bezpośredniego", jeśli każda akcja, jaką system podejmuje, musi być programowana przez inżyniera - praktyka. Przeciwieństwem są tzw. systemy programowania na poziomie zadania, wykorzystujące języki symboliczne, w których programista może postawić cele wyższego poziomu, takie jak np. "włożyć kołek" lub nawet "zbudować piecyk". Systemy takie wykorzystują techniki z dziedziny badań nad sztuczną inteligencją do automatycznego generowania ruchu i opracowywania strategii. Jednak języki programowania na poziomie zadania jeszcze nie istnieją, chociaż różne fragmenty takich systemów są rozwijane przez wielu badaczy [3]. Systemy programowania na poziomie zadania będą wymagać kompletnego modelu robota i jego otoczenia, w celu zrealizowania automatycznego planowania operacji.

Chociaż ten rozdział dotyczy pewnych szczególnych kwestii programowania robota, to przez odniesienie do układu programowania autonomicznego rozszerza rozważania na inne urządzenia programowalne. Często występującym argumentem, przemawiającym za układami programowania autonomicznego, jest to, że nie wymagają one zaangażowania do tego celu wyposażenia produkcyjnego, gdy wystąpi potrzeba przeprogramowania, a zatem zautomatyzowane fabryki mogą pracować w sposób ciągły. System ten służy również jako naturalny łącznik baz danych komputerowego wspomagania projektowania (CAD), wykorzystywanych w fazie projektowania i rozwoju wyrobu, z rzeczywistym procesem wytwarzania. W niektórych zastosowaniach bezpośrednie wykorzystanie danych

projektowych (CAD) może znacznie zredukować czas programowania wymagany dla procesu wytwarzania.

Autonomiczne programowanie robotów oferuje również inne potencjalne korzyści, które są doceniane przez użytkowników robotów przemysłowych. Większość omawianych dotąd kwestii dotyczyła manipulowania fizycznymi obiektymi, wchodzący w skład gniazda produkcyjnego, przy wykorzystaniu oprogramowania robota. W takim przypadku wypróbowanie różnych strategii staje się bardzo pracochłonne. Programowanie robotów na drodze symulacji umożliwia wykonanie ogromnej pracy programowej, związanej z realizacją zadania, przy użyciu jedynie komputera, co zmniejsza liczbę problemów związanych z programowaniem robotów.

Układy autonomicznego programowania powinny służyć jako naturalne przejście od systemów programowania bezpośredniego do systemów programowania na poziomie zadania. Najprostszy układ autonomicznego programowania jest zwykłym rozszerzeniem graficznym języka programowania robota i z tego poziomu może zostać rozszerzony do systemu programowania na poziomie zadania. To stopniowe rozszerzanie polega na dodawaniu automatycznych rozwiązań dla różnych zadań częściowych, jeśli te rozwiązania są dostępne i wykorzystywane przez programistę do badania możliwości działania w symulowanym otoczeniu. Do czasu zbudowania systemów programowania na poziomie zadania użytkownik musi poprzedzić na automatycznym planowaniu podzadań i samodzielnie opracować program nadzędny. Z tego punktu widzenia układy programowania autonomicznego stanowią bazę dla badań i rozwoju systemów planowania zadań. Wielu badaczy w swoich pracach rozwinięło różne składniki takich systemów (np. 3-wymiarowe modele graficzne, postprocesory językowe itp.). Za- tem systemy autonomicznego programowania powinny być użytecznym narzędziem badawczym, jak również służyć pomocą we współczesnej praktyce przemysłowej.

13.2. GŁÓWNE KWESTIE DOTYCZĄCE UKŁADÓW PROGRAMOWANIA AUTONOMICZNEGO

W tym podrozdziale omówiono wiele kwestii, które należy rozważyć przy projektowaniu układu programowania autonomicznego. Zbiór dyskutowanych tematów posłuży do ustalenia zakresu definicji układu programowania autonomicznego.

Sposób połączenia użytkownika z układem

Ponieważ główną motywacją rozwoju układu programowania autonomicznego jest stworzenie narzędzi, które ułatwiają programowanie manipulatorów, to sposób połączenia z użytkownikiem ma doniosłe znaczenie. Z drugiej strony istotne jest usunięcie zależności programowania od realnego wyposażenia. W rozważa-

niach wstępnych te dwa cele wydają się sprzeczne, programowanie rzeczywistych robotów jest wystarczająco trudne, czy więc bez obecności urządzenia będzie ono łatwiejsze? To pytanie dotyczy istoty problemu projektowania układu programowania autonomicznego.

Producenci robotów przemysłowych wiedzą z praktyki, że języki programowania robotów, dostarczone wraz z robotami, nie mogą być w pełni wykorzystane przez dużą część personelu obsługującego. Z tej i innych przyczyn wiele robotów przemysłowych jest dostarczanych z dwupoziomowym sprzęgiem [4], z których jeden poziom jest przeznaczony dla programistów, a drugi dla operatorów. Operatorzy używają programatora ręcznego i oddziałują bezpośrednio na robota w celu opracowania jego programu. Programiści piszą kod w Języku programowania robota i oddziałują bezpośrednio na robota w celu naużenia go punktów pracy i przetestowania programu. Na ogół te dwa podejścia do opracowania programu zapewniają zarówno łatwość obsługi, jak i elastyczność robota.

Z punktu widzenia rozszerzenia języka programowania robota naturalne jest, aby układ programowania autonomicznego zawierał język programowania robota jako część sprzęgu użytkownika. Język ten powinien wykazywać wszystkie wartościowe cechy obecnych układów programowania robotów. Na przykład przy korzystaniu z języka programowania robota języki interakcyjne są bardziej wydajne niż języki kompilowane, które zmuszają użytkownika do przejścia przez cykl "edit-compile-run" przy każdej modyfikacji programu.

Ponieważ część językowa sprzęgu użytkownika dziedziczy wiele z tradycyjnych języków programowania robotów, stanowi niższy poziom sprzęgu (tzn. łatwy do wykorzystania) i musi być starannie opracowana w układzie programowania autonomicznego. Głównym składnikiem tego sprzęgu jest komputerowa reprezentacja graficzna programowanego robota i jego otoczenia. Wykorzystując takie urządzenia, jak pióro świetlne lub mysz, użytkownik może wskazać różne miejsca lub obiekty na ekranie monitora. Projekt sprzęgu użytkownika określa dokładnie sposób oddziaływanego użytkownika na ekran, w celu opracowania programu dla robota. Takie samo urządzenie wskazujące może wskazywać pozycje w "menu" w celu określenia trybu lub przywołania funkcji.

Podstawowym zadaniem jest nauczenie robota wykonywania ruchu o sześciu stopniach swobody za pomocą odpowiedniej grafiki. Dostępność modeli 3-wymiarowych uchwytów i części obrabianych w układzie programowania autonomicznego czyni to zadanie sterowania stosunkowo łatwym. Sprzęg umożliwia użytkownikowi wskazanie miejsc na powierzchni, przyjęcie orientacji układu zgodnie z lokalną normalą do powierzchni, jego przesunięcie, reorientację itp. Zależnie od specyfiki zastosowania takie zadania są łatwo wykonywane w symulowanym otoczeniu przy wykorzystaniu okna graficznego.

Dobrze zaprojektowany sprzęt użytkownika powinien umożliwiać niespecjalistom pełną realizację wielu zastosowań. Dodatkowo, układy i sekwencje ruchowe "nauczane" przez niespecjalistę mogą być tłumaczone przez układ programowania autonomicznego na wyrażenia tekstowe języka programowania robota. Te proste programy mogą być udoskonalane w formie języka programowania robota przez bardziej doświadczonych programistów. Dostępność języka programowania robota pozwala programistom na dowolne dostosowanie programu do bardziej złożonych zadań.

Trójwymiarowa grafika

Centralnym elementem w układach autonomicznego programowania jest wykorzystanie opisów graficznych symulowanego robota i gniazda produkcyjnego. Takie zadanie wymaga, aby robot i wszystkie uchwyty, części i narzędzia w gnieździe były modelowane jako obiekty 3-wymiarowe. Aby przyśpieszyć opracowanie programu, pożądane jest wykorzystanie modeli części i oprzyrządowania, zapożyczonych z systemu CAD, w którym zostały zaprojektowane. Ponieważ systemy CAD stają się dominujące w przemyśle, to taki rodzaj danych geometrycznych będzie łatwo dostępny. Ze względu na konieczność integracji procesów od etapu projektowania do przygotowania produkcji rozsądne wydaje się, aby układ programowania autonomicznego zawierał podkład modelowania CAD lub sam był częścią systemu projektowania CAD. Jeśli układ programowania autonomicznego jest układem oddzielnym, to musi dysponować odpowiednimi sprzęgami w celu przenoszenia modeli do i z zewnętrznych systemów CAD. Jednak, nawet odrębny układ programowania autonomicznego powinien dysponować lokalnym podkładem CAD ułatwiającym szybkie tworzenie modeli mniej istotnych elementów gniazda produkcyjnego lub dołączenie danych specyficznych dla robota do modeli zapożyczonych z systemu CAD.

Układy programowania autonomicznego wymagają wielokrotnej reprezentacji obiektów przestrzennych. Dla wielu operacji istnieje dokładny opis analityczny powierzchni lub bryły, ale skorzystanie w pełni z możliwości graficznych systemu często wymaga innej reprezentacji. Obecna technika odpowiada układom, w których podstawową figurą jest płaski wielobok. Zatem gdy kształt obiektu może być przedstawiony przez powierzchnię gładką, to monitor (szczególnie do celów animacji) wymaga przedstawienia wielościanowego. Graficzne oddziaływanie użytkownika poprzez sprzęt, polegające na wskazaniu punktu na powierzchni, powinno odpowiadać zadaniu punktu na prawdziwej powierzchni, nawet jeśli użytkownik widzi tylko model wielościanowy.

Ważnym zastosowaniem 3-wymiarowej reprezentacji geometrycznej modeli obiektów jest automatyczne wykrywanie kolizji. To znaczy gdy wystąpi jakaś kolizja między obiektami w symulowanym otoczeniu, to układ programowania

autonomicznego powinien automatycznie ostrzegać użytkownika i dokładnie wskazywać, gdzie kolizja ma miejsce. Ponieważ takie zastosowania, jak np. montaż, wprowadzają wiele pożądanych "kolizji", to konieczne staje się informowanie układu, że kolizje między pewnymi obiektemi są akceptowalne. Również wartościową będzie zdolność do generowania ostrzeżeń o kolizji, gdy obiekty przechodzą przez obszary tolerancji zadane dla prawdziwej kolizji. Podczas gdy problem dokładnego wykrycia kolizji dla dowolnej bryły 3-wymiarowej jest trudny, to wykrycie kolizji dla modeli wielościanowych jest na ogół dość łatwe.

Emulacja kinematyczna

Główym środkiem, zapewniającym aktualność symulowanego otoczenia, jest wiarygodne pozorowanie aspektów geometrycznych każdego symulowanego manipulatora. Z punktu widzenia zadania odwrotnego kinematyki, układ programowania autonomicznego może być sprzęgnięty ze sterownikiem robota na dwa odrębne sposoby. Pierwszy polega na zastąpieniu sterownika robota w rozwiązywaniu zadania odwrotnego kinematyki i podawaniu pozycji robota w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych. Drugi sposób polega na przesyłaniu współrzędnych kartezjańskich do sterownika robota, a sterownik wykorzystuje rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki, dostarczone przez producenta, do określenia konfiguracji robota. Drugi sposób jest prawie zawsze preferowany, szczególnie od czasu zastosowania procedury wzorcowania ramienia przez producentów robotów. Takie techniki wzorcowania sprawiają, że rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki jest przystosowane do indywidualnego robota. W tym przypadku pożądane staje się przekazywanie informacji do sterownika robota na poziomie układu kartezjańskiego.

Stąd wynika, że funkcje kinematyczne, wykorzystane w symulatorze, powinny odzwierciedlać funkcje nominalne, użyte w sterowniku robota, dostarczany przez twórcę robota. Kilka szczegółów rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki, podanego przez twórcę, powinno być emulowane możliwie najlepiej przez oprogramowanie symulatora. Każdy algorytm zadania odwrotnego kinematyki musi dokonywać wyboru w celu usunięcia osobliwości. Na przykład gdy połączenie obrotowe 5 robota PUMA 560 znajduje się w położeniu zerowym, a osie 4 i 6 są współliniowe, to robot jest w położeniu osobliwym. Z rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki, realizowanego przez sterownik robota, można wyznaczyć tylko sumę kątów obrotu w przegubach 4 i 6, a następnie zastosować dowolną regułę w celu wyboru indywidualnych wartości dla połączeń obrotowych 4 i 6. Układ autonomicznego programowania musi emulować zastosowany algorytm. Inny przykład stanowi wybór najbliższego do pożądanego rozwiązania, gdy istnieje wiele rozwiązań alternatywnych. Symu-

lator musi wykorzystywać ten sam algorytm co i sterownik w celu uniknięcia potencjalnie istotnych błędów przy symulowaniu rzeczywistego manipulatora. Korzystną właściwością sterowników robotów jest zdolność do określania celu w układzie kartezjańskim i wskazania, które z możliwych rozwiązań manipulator powinien wybrać. Unika się w ten sposób emulacji algorytmu wyboru rozwiązania przez symulator, ponieważ układ programowania autonomicznego może wymusić swój wybór na sterowniku.

Emulacja planowania trajektorii

Jako dodatek do emulacji kinematycznej, w przypadku statycznego pozycjonowania manipulatora, układ autonomicznego programowania powinien dokładnie emulować trajektorie przestrzennego ruchu manipulatora. W takim przypadku głównym problemem jest to, że układ autonomicznego programowania powinien symulować algorytmy zawarte w sterownikach robota, a algorytmy planowania i realizacji trajektorii są różne w zależności od producenta robota. Symulacja przyjętego przestrzennego kształtu toru jest ważna przy wykrywaniu kolizji między robotem i otoczeniem. Symulacja czasowych aspektów trajektorii jest ważna z punktu widzenia przewidywanych okresów cyklu pracy. Gdy robot operuje w ruchomym otoczeniu (np. w pobliżu innego robota), to dokładna symulacja czasowych właściwości ruchu jest konieczna do dokładnego przewidywania kolizji, a w pewnych przypadkach do komunikacji lub rozwiązania problemów synchronizacji zadań, takich jak np. blokada systemu.

Emulacja dynamiczna

Symulacja ruchu manipulatorów może pomijać pewne właściwości dynamiczne, jeśli układ autonomicznego programowania dobrze wykonuje emulację algorytmu planowania trajektorii sterownika i jeśli rzeczywisty robot porusza się według pożądanych trajektorii z pomijalnymi błędami. Jednakże przy wysokiej prędkości lub w warunkach dużego obciążenia błędy realizacji trajektorii mogą stać się istotne. Symulacja tych błędów stwarza konieczność modelowania dynamiki manipulatora i obiektów, które on przenosi, jak również algorytmu sterowania wykorzystywanego w sterowniku manipulatora. Obecnie występują praktyczne problemy z uzyskaniem od producentów robotów informacji koniecznej do wykonania tego rodzaju symulacji dynamicznej, przydatnej w praktyce, lecz w pewnych przypadkach symulacja dynamiczna może być przeprowadzona efektywnie.

Symulacja wieloprocesowa

Pewne zastosowania przemysłowe wymagają dwóch lub więcej robotów współpracujących w tym samym otoczeniu. Nawet pojedyncze gniazdo produkcyjne często zawiera przenośnik taśmowy, automatyczną linię obrabiarek, system wizyjny lub inne urządzenia aktywne, z którymi musi współdziałać. Z tego powodu jest ważne, aby układ programowania autonomicznego był zdolny do symulacji wielu poruszających się urządzeń oraz innych działań równoległych. Bazą jest tutaj język, który powinien być językiem wieloprocesorowym. Takie warunki umożliwiają zapisanie niezależnych programów sterujących dla każdego z dwóch lub większej liczby robotów w pojedynczym gnieździe, a następnie symulowanie działania gniazda z programami wykonywanymi równocześnie. Dając do języka instrukcje oczekiwania i przesyłania sygnałów, uzyskuje się współdziałanie robotów w symulowanym zastosowaniu.

Symulacja czujników

Badania wykazały, że większa część programów sterujących dla robotów stanowi nie instrukcje ruchu, lecz raczej instrukcje inicjujące sprawdzanie błędów, instrukcje wejścia/wyjścia i inne [5]. Stąd ważna staje się zdolność układu programowania autonomicznego do przygotowania otoczenia, która umożliwia symulację pełnego zastosowania, obejmującego współpracę z czujnikami, urządzeniami wejścia/wyjścia i komunikację z innymi urządzeniami. Układ programowania autonomicznego uwzględniający symulację czujników i wieloprocesowość nie tylko testuje ruchy robota, lecz również weryfikuje część komunikacyjną i synchronizacyjną programu robota.

Tłumaczenie językowe do systemu docelowego

Kłopotliwe dla obecnych użytkowników robotów przemysłowych (lub innych urządzeń programowanych) jest to, że prawie każdy dostawca takich systemów podaje własny język programowania. Jeśli układ programowania autonomicznego ma być uniwersalny, to musi poradzić sobie z problemem tłumaczenia na i z wielu różnych języków. Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest praca układu w jednym języku programowania, a następnie przetłumaczenie programu na format wymagany przez urządzenie docelowe. Zdolność do transformowania programów, zainstalowanych w urządzeniach, i włączenia ich do układu programowania autonomicznego jest również pożądana.

Z problemem tłumaczenia języka związane są wprost dwie potencjalne korzyści, wynikające z zastosowania układów programowania autonomicznego.

Większość zwolenników tych układów zauważa, że jeden uniwersalny sprzęt, który pozwala użytkownikom programować różne roboty, rozwiązuje problemy nauczania i posługiwania się wieloma językami. Druga korzyść wynika z rozważyń natury ekonomicznej i progностycznej, wg których w fabrykach pojawiają się setki lub nawet tysiące robotów. Koszt związany z pełnym oprogramowaniem urządzenia (takim jak język i sprzęt graficzny) może spowodować ograniczenia w planie instalacji każdego robota. Ekonomicznie uzasadnionym wydaje się raczej zainstalowanie bardzo prostego "niemego", lecz taniego sterownika w każdym robocie i uzależnienie go od oddzielnego "inteligentnego" układu autonomicznego programowania. Zatem ważną kwestią w układach autonomicznego programowania staje się problem przekładu przy użyciu taniego procesora programu z rozbudowanego uniwersalnego języka na prosty język zaprojektowany do realizacji.

Wzorcowanie gniazd produkcyjnych

Modelowanie komputerowe sytuacji rzeczywistych wiąże się z niedokładnością modelu. W celu wykorzystania programów opracowanych przy zastosowaniu układu programowania autonomicznego, integralną częścią systemu muszą być metody wzorcowania gniazd produkcyjnych. Znaczenie tego problemu zmienia się w zależności od zastosowania i czyni programowanie autonomiczne pewnych zadań znacznie bardziej realistycznym od innych. Jeśli w pewnym zastosowaniu większość punktów pracy robota musi być nauczana z wykorzystaniem rzeczywistego robota, to układy programowania autonomicznego przestają być efektywne pod względem dokładności rozwiązania.

Rozważmy np. zadanie nawiercania wielu setek otworów w przegrodzie. Rzeczywiste położenie przegrody względem robota może być określone drogą nauczania przy wykorzystaniu rzeczywistego robota przez wykonanie trzech pomiarów. Na podstawie takich danych położenie wszystkich otworów może być automatycznie aktualniane, jeśli ich współrzędne są dostępne w systemie CAD. W tej sytuacji tylko te trzy punkty muszą zostać ustalone z udziałem robota. Większość zadań jest tego typu "wielu operacji względem ustalonego obiektu", np. wkładanie części klawiatury komputera, frezowanie, zgrzewanie, spawanie łukowe, paletyzacja, malowanie, stepianie krawędzi itp.

13.3. STANOWISKO SYMULACJI KOMPUTEROWEJ (CIMSTATION)

W tym podrozdziale rozważamy główny element projektu stanowiska komputerowej symulacji - układ programowania autonomicznego, opracowany przez SILMA Inc [6]. Układ ten stanowi podstawową część systemu, zawierającego model

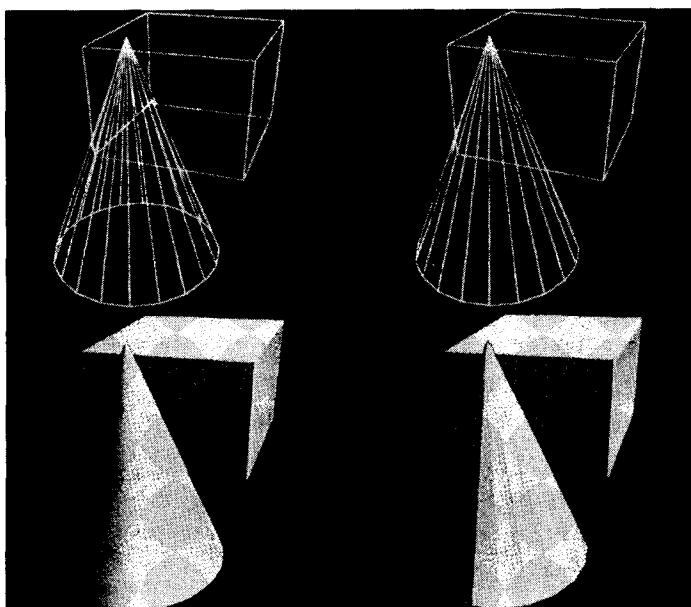
otoczenia i opisującego dowolnie wiele obiektów o właściwościach takich jak przestrzenny kształt, pozycja, prędkość i inne. Omówiony zostanie sposób programowania modelu otoczenia oraz sposób przekształcania wynikowych programów w celu sterowania odpowiednimi urządzeniami rzeczywistymi.

Modele i grafika

Stanowisko symulacji komputerowej umożliwia budowę modeli typu CAD na podstawie rysunku lub przesyłania ich z zewnętrznych systemów CAD przez sprzęt IGES (Graficzna Wymiana Danych Początkowych) lub przez translatory. W każdym przypadku modele są reprezentowane przez linie graniczne powierzchni lub brył. Wewnętrzna reprezentacja tych linii lub powierzchni są zbiory wieloboków płaskich lub ścian. W strukturze danych modelu krawędzie dzielące ściany zapisane są tylko raz, podobnie jak punkty dzielące krawędzie. Ta struktura danych umożliwia również rozpatrywanie grup ścian jako pojedynczej powierzchni, np. wielościanów, które formują powierzchnię zaokrągloną lub walcową. Oprócz reprezentacji wielościanowej model może obejmować również reprezentację analityczną. Dla zgodności z istniejącymi systemami CAD ten system może również zawierać modele krawędziowe, które są zbiorami fragmentów linii, nie zawierającymi informacji o powierzchni.

Istnieje wiele sposobów ilustracji wielościanowych modeli powierzchni. Na rys. 13.1 pokazano przykłady kilku technik. Najprostszą techniką ilustracji jest tryb krawędziowy, w którym każda krawędź obiektu jest rysowana za pomocą przekształcenia perspektywicznego. Wykorzystując techniki nazwane eliminacją tylnych ścian usuwa się zasłonięte linie brył wypukłych, co daje obraz łatwiejszy do interpretacji przez oglądającego. Eliminacja tylnych ścian jako technika obliczeniowa jest prostsza od zadania pełnej eliminacji zasłoniętej linii. Jedną z metod osiągnięcia eliminacji zasłoniętej linii jest zaciemianie ścian. Rysując wpierw ściany położone dalej od oglądającego, powodujemy zakrycie ich przez ściany położone bliżej, tworząc obraz bez zasłoniętych linii. Dokładne tworzenie obrazów cieniowanych wymaga techniki buforów-Z polegającej na sortowaniu obrazu punkt po punkcie. Techniki takie jak cieniowanie Gorauda mogą być wykorzystane do optycznego wygładzania wielościanowego modelu powierzchni.

Przy wykrywaniu kolizji między dwoma modelami powierzchniowymi do obliczeń wykorzystano modele wielościanowe. Aby przyśpieszyć wykrywanie kolizji, dla wszystkich obiektów w modelu otoczenia wcześniej przeliczono obszary ograniczające. Na stanowiskach bez urządzeń graficznych wykorzystywany jest algorytm wykrywania kolizji, podobny do zamieszczonego w [7].



Rys. 13.1. Przykłady ilustracji modeli siatkowych. W kierunku ruchu wskaźówek zegara: model krawędziowy, eliminacja tylnych ścian, cieniowanie płaskie, cieniowanie Gorauda

Gdy urządzenia graficzne są dostępne, to mogą być one wykorzystywane w obliczeniach dotyczących wykrywania kolizji. Stanowiska symulacji komputerowej wykorzystują algorytm podobny, lecz bardziej ogólny niż metoda przedstawiona w [8]. W tym algorytmie urządzenie hardwarowe, stosowane do tworzenia bryły 3-wymiarowej z wieloboków (zwykle używanej w celu ilustracji), jest wykorzystywane do szybkiego obliczenia, czy jakiś obiekt nie przekracza granic zadanego obszaru. Urządzenie ogranicza naturę każdej bryły 3-wymiarowej do postaci topologicznie równoważnej sześcianowi. Algorytm wykrywania kolizji, aby np. wykryć kolizję z obiektem 'A', działa w sposób następujący:

1. Sprawdzić, czy któryś wielobok nie przekracza granic obszaru ograniczającego obiekt 'A'.
2. Dla każdego wieloboku, znalezionego w kroku 1, skonstruować jego obszar ograniczający, sprawdzić przekroczenie jego granic przez wieloboki obiektu 'A'.
3. Jeśli w kroku 2 wykryto przekroczenie granicy, to wykorzystać procedurę do wyznaczenia miejsc przecięć wieloboków płaskich.

Jako rozwinięcie poprzedniego algorytmu, stanowisko do symulacji komputerowej może również wykryć bliskie minięcie obiektów w granicach zadanej tolerancji przez "rozszerzenie" wszystkich obiektów o pożądane tolerancje.

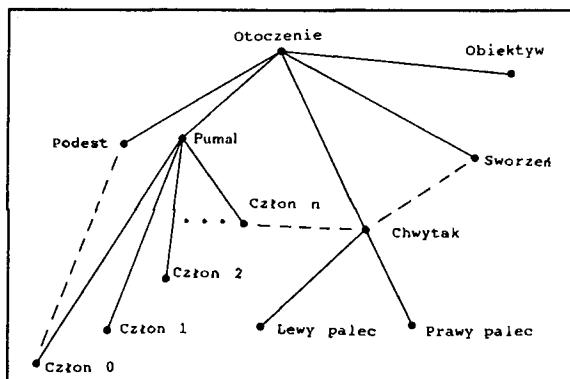
Obiekty i model otoczenia

Każda symulowana jednostka, taka jak część obrabiana, uchwyt lub człon robota, jest reprezentowana przez obiekt. Struktura danych obiektu zawiera model jednostki, kilka innych właściwości oraz miejsce przewidziane na przyszłe dodatkowe dane. Prostym przykładem innej cechy obiektu jest etykieta, przez którą obiekt jest przywoływany. Obiekty mogą być budowane z ich modeli i przechowywane w bibliotekach baz danych w celu późniejszego wykorzystania.

Grupowanie obiektów w zespoły ułożone w strukturę drzewa jest naturalne. Na przykład n -przegubowy robot jest rozbudowanym obiektem, składającym się z $n+1$ podobiektów (od członu 0 do członu n). Podobiekty są przywoływane przez nazwy ścieżek prowadzących do nich, np. 'puma1-człon3'. Całe symulowane otoczenie stanowi pojedynczy obiekt o podstawie nazwanej "otoczeniem". Każde przemieszczenie obiektu powoduje przemieszczanie podobiektów, natomiast relacja w kierunku przeciwnym nie zachodzi.

Na rys. 13.2 pokazano przykład prostego modelu otoczenia zawierającego robot, końcówkę wykonawczą, część ('sworzeń') i obiekt, na którym robot jest zamontowany ('podest'). Linie przerywane na rys. 13.2 wskazują złącza, które są wykorzystywane do czasowego tworzenia sztywnych połączeń między dwoma obiektami. Złącza łączą końcówkę wykonawczą z końcowym członem robota. Pozwalają one również symulowanemu manipulatorowi na podniesienie symulowanego sworzenia. W sytuacji pokazanej na rys. 13.2 rozkazy: porusz 'puma1/człon n', 'chwytak' lub 'sworzeń' dają w wyniku ruch manipulatora.

Każdorazowe poruszenie obiektu powoduje ruch innych obiektów otoczenia w wyniku ich umiejscowienia w strukturze otoczenia lub w wyniku istnienia złączy. Zbiór obiektów, które mają zostać poruszone, jest określany naasadzie relacji wewnętrz "drzewa" otoczenia oraz relacji złącz.



Rys. 13.2. Przykład drzewa modelu otoczenia

Model otoczenia zawsze zawiera obiekt nazywany 'obiektywem', którego pozycja określa miejsce, z którego otoczenie jest widziane. Jako cecha tego obiektu przechowywana jest długość ogniskowej. 'Obiektyw' może być umieszczony gdziekolwiek, w celu otrzymania różnych punktów widzenia. Mogliby np. być umocowany do chwytaka w celu animacji obrazu, widzianego przez obserwatora związanego z chwytakiem.

Powiązanie kinematyki z obiektami modelu

W celu symulowania ruchu mechanizmów takich jak manipulatory, procedury kinematyczne mogą być związane z każdym obiektem struktury w modelu otoczenia. W stanowiskach symulacji komputerowej procedury te są odnoszone do najbardziej oddalonego członu robota, nazywanego zawsze 'członem n'. Obiekt z towarzyszącymi mu procedurami kinematycznymi zyskuje miano wyróżnionego. Jeśli rozkaz ruchu dotyczy obiektu, który należy do klasy obiektów wyróżnionych, to jest on wykonywany przy wykorzystaniu procedur kinematycznych skojarzonych z obiektem wyróżnionym. Zatem rozkaz przemieszczania 'sworznia' (przykład z rys. 13.2) powoduje realizację zadania odwrotnego kinematyki dla obiektu 'puma1', a w wyniku tego wszystkie związane z nim mechanizmy i obiekty poruszają się również. Stanowisko symulacji komputerowej na ogół wykorzystuje procedury kinematyczne w postaci jawnej, lecz w razie potrzeby mogą być zastosowane rozwiązania iteracyjne. Jeśli jest to możliwe, procedury kinematyczne dostarczone przez producenta robota mogą być bezpośrednio wykorzystane. Na rys. 13.3 pokazano symulowany manipulator w gnieździe obróbkowym - rozkaz przemieszczenia przy mocowanego narzędzia lub ostatniego członu powoduje realizację zadania odwrotnego kinematyki do określenia ruchu całego mechanizmu.

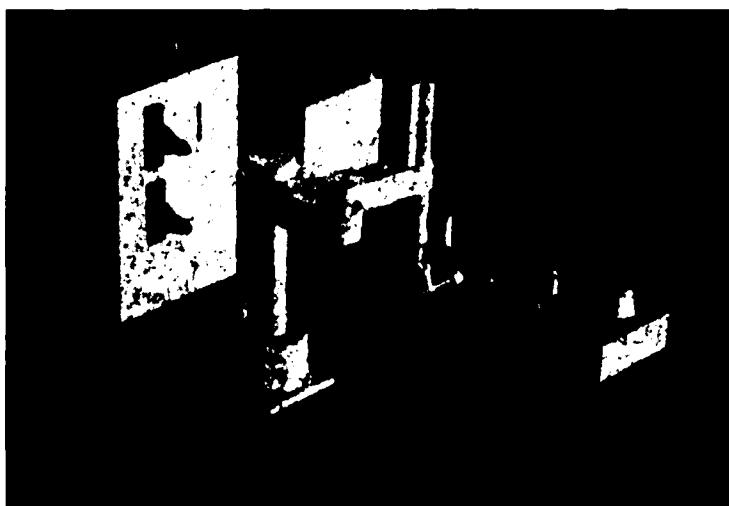
Obiekty modelu są ograniczone do klasy otwartych łańcuchów szeregowych, lecz mogą mieć całkowicie ogólną topologię.

Powiązanie trajektorii z obiektami

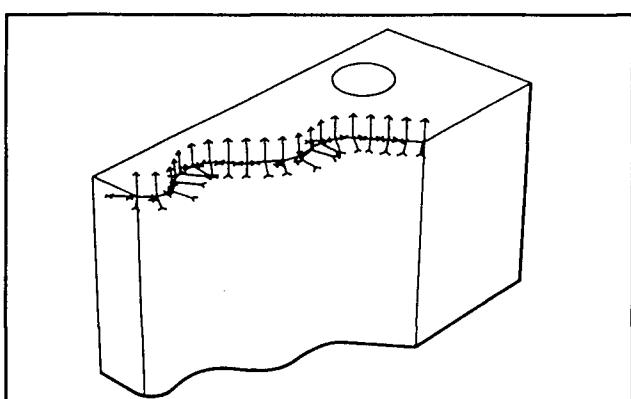
Aby uwzględnić zmianę czasu w modelu otoczenia, podczas ruchu obiektu zawsze wiąże się z nim pewną trajektorię. Trajektoria jest w istocie funkcją czasu, opisana w pewnym układzie odniesienia, zatem opisuje zmiany pozycji i orientacji obiektu jako funkcje czasu. W każdej chwili zbiór trajektorii może być skojarzony z różnymi obiektami otoczenia, tworząc bazę symulacji jednocońskiego ruchu.

Właściwości geometryczne trajektorii mogą być opisane na kilka sposobów za pomocą stanowiska symulacji komputerowej. Często, jak w typowych językach programowania, trajektoria jest zadawana jako sekwencja punktów

pośrednich. Każdy z punktów pośrednich może być wskazany graficznie lub numerycznie. Trajektoria może być również zadana w sposób numeryczny z wykorzystaniem procedury wyznaczającej szereg układów według pewnego algorytmu. Najważniejszym sposobem zadawania trajektorii jest korzystanie z danych CAD. Na rys. 13.4 pokazano trajektorię (opisaną przez ciąg równo oddalonych układów), która została wygenerowana z modelu CAD, przesłanego przez sprzęt IGES z innego systemu CAD.



Rys. 13.3. Rozkaz przemieszczenia końcówki wykonawczej lub przedmiotu przy- mocowanego do niej powoduje ruch całego mechanizmu przy wykorzystaniu zada-nia odwrotnego kinematyki robota



Rys. 13.4. Trajektoria wyprowadzona z danych CAD

Dynamika i ocena stanu otoczenia

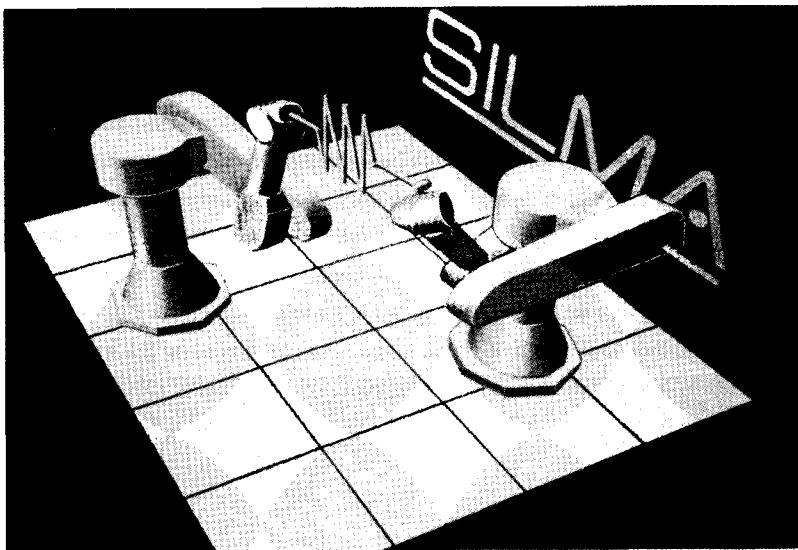
Trajektorie, związane z ruchem obiektów, spełniają tutaj rolę trajektorii pożądanych, które są równoważne z trajektoriami rzeczywistymi, jeśli stanowisko symulacji komputerowej nie uwzględnia wpływu dynamiki. Jeśli prowadzona jest symulacja dynamiczna, wtedy pożądana trajektoria, stan obecny i prawo sterowania związane z danym obiektem wyznaczają rzeczywistą pozycję obiektu w dowolnym czasie. W trybie dynamicznym stanowisko symulacji komputerowej modeluje manipulatory i inne obiekty jako bryły sztywne, wykorzystuje ich prawa sterowania oraz algorytm całkowania Rungego-Kutty czwartego rzędu do określenia ruchu symulowanych obiektów. W każdym trybie, jeśli pożądana jest ilustracja graficzna stanu otoczenia, system aktualnia pozycje wszystkich obiektów i przywołuje funkcje graficzne. Ta prezentacja zależy od położenia 'obiektywu' i jego bieżącej długości ogniskowej, przy czym jedno i drugie może być zmienne w czasie.

W trybie symulacji dynamicznej może być symulowanych wiele manipulatorów, które oddziałują na siebie. Na rys.13.5 pokazano spręgnięcie ruchu dwóch robotów wskutek działania siły przenoszonej przez sprężynę. Podczas symulacji pełnego systemu dynamicznego z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego stanowisko symulacji komputerowej służy do przechowywania danych i generowania wykresów czasowych różnych zmiennych.

Język SIL

Użytkownicy na ogół opracowują programy sterujące w sposób interakcyjny, za pomocą sprzęgu z menu i myszą lub wprost w języku programowania nazwanym SIL [9]. W trybie generowania programu działania z wykorzystaniem sprzęgu generują odpowiednie instrukcje języka SIL. Zatem, wykorzystywane przez programistów lub osoby nie będące programistami, stanowisko symulacji komputerowej tworzy programy w języku SIL. Stanowisko to wykorzystuje swoje możliwości sprzętowe do edycji tekstu, zapisu plików, kopiowania zbiorów itp.

Język SIL ma składnię języka Pascal i dużą liczbę wstępnie zdefiniowanych operacji, procedur i funkcji. Przykłady wstępnie zdefiniowanych typów obejmują operacje geometryczne, takie jak przekształcenia **zzy** (zbiór kątów Eulera), **ypr** (skręt, skok i pochylenie wokół ustalonych osi), **punkt** (wektor), **układ** (przekształcenie jednorodne) i wiele innych. Przykładem wstępnie zdefiniowanej procedury jest procedura "moveto", która jest wykorzystywana do realizacji większości specyfikacji ruchu w języku SIL.



Rys. 13.5. Dwa roboty rozciągające sprężynę, łączącą ich człony robocze

Procedury języka SIL mogą być **polimorficzne**, co oznacza, że ta sama nazwa procedury może być wykorzystywana dla różnych procedur, jeśli różnią się one co do typu i liczby argumentów. Ta cecha odgrywa ważną rolę przy budowie języka programowania robota z minimalną liczbą słów kluczowych koniecznych do zapamiętania przez użytkownika. Na przykład instrukcja `moveto('tool',foo)` będzie poruszać 'tool' do "foo", gdzie "foo" może być wektorem kątów konfiguracyjnych, układem, wektorem pozycji (opisującym tylko przesunięcie) lub operacją opisującą tylko obrót. Zatem język SIL nie wymaga mnożenia nazw rozkazów spotykanych w większości języków sterowania ruchem (tj. poruszyć, potrzasnąć, obrócić, przesunąć).

Język SIL cechuje również **automatyczne wymuszanie typów**. To pozwala układowi na rozróżnianie semantycznie równoważnych rodzajów danych i umożliwia określenie funkcji odwzorowujących między tymi rodzajami. Na przykład operacje, które reprezentują obroty w przestrzeni, mogą automatycznie zmieniać się w inne. Zatem, jeśli podprogram akceptuje argument typu kątów Eulera `xyz`, to może natychmiast być przywołyany z argumentem typu `ypr` lub innym argumentem opisującym obrót. To również prowadzi do przejrzystej składni i niemnożenia nazw funkcji.

Rozszerzeniem poza standardowe ramy języka Pascal jest interakcyjność języka SIL. Pojedyncza instrukcja może być zadana układowi w dowolnym czasie, a wyniki jej działania mogą być zaobserwowane. Środowisko języka SIL porównuje się ze środowiskiem LISP-u, jako że zmienne globalne, funkcje i

procedury są natychmiast dostępne. Gdy użytkownik definiuje nową funkcję, to staje się ona częścią stanu globalnego. W przeciwnieństwie do języka LISP, SIL jest językiem symbolicznym i ma względnie łatwą składnię języka Pascal. Znaczna większość stanowisk symulacji komputerowej jest napisana w języku SIL, tak że przez dopisanie nowych funkcji można dokonać rozszerzenia systemu. W pełni sprawdzony program w języku SIL może być komplikowany w celu zwiększenia efektywności.

Fakt, że SIL jest językiem współdziałającym lub wieloprocesorowym, stanowi znaczne rozszerzenie języka Pascal. Użytkownik może definiować proces podobnie jak deklarację procedury (bardzo proste przykłady są pokazane na rys. 13.6 i 13.7). Później wiele procesów może przebiegać równocześnie. Procesy komunikują się poprzez zmienne globalne lub przez przesyłanie informacji. Instrukcje przesyłania informacji to sygnał i oczekiwanie. Rodzajem sygnalizowanych (i oczekiwanych) danych może być każdy legalny rodzaj języka SIL, tak że informacje mogą być zarówno prostymi kodami zerojedynkowymi, jak i złożonymi typami strukturalnymi. Większość symulacji z zakresu automatyzacji wykorzystuje jako sygnały symbole zerojedynkowe, ponieważ odpowiada to charakterowi prostych binarnych portów wejścia/wyjścia znajdujących się w wielu sterownikach.

Podsumowując, język SIL można określić jako zinterpretowany, wieloprocesowy język Pascal z wieloma wstępnie zdefiniowanymi operacjami związanymi z zadaniem programowania robota.

Symulacja czujników

Stanowisko symulacji komputerowej pozwala symulować wiele rodzajów czujników. Na ogół, wykorzystując wieloprocesorowe stanowisko i inne cechy systemu, użytkownik może przeprowadzić staranną symulację czujników. W tym podrozdziale są rozpatrywane pewne proste możliwości symulacji czujników.

Symulacja pomiaru siły dla ruchów ograniczonych jest możliwa przy wykorzystaniu wieloprocesorowego stanowiska i zdolności do wykrywania kolizji. W ruchu ograniczonym kolizje między końcówką wykonawczą (włączając każdy przedmiot z nią połączony) i otoczeniem są sprawdzane z częstotliwością próbkowania siły, a jeśli kolizja wystąpi, ruch robota jest przerywany. Monitorowanie siły jest realizowane jako oddzielny proces, który – przebiegając z częstotliwością próbkowania siły – sprawdza wystąpienie kolizji.

Podobnie symulacja wyłączników krańcowych i czujników światlnych jest wykonywana za pomocą aparatury wykrywającej kolizje.

Systemy wizyjne mogą być symulowane za pomocą procesu emulacji systemu wizyjnego. Ten proces może być wykorzystany do wyznaczenia pozycji i orientacji dowolnego obiektu gniazda obróbkoowego. Symulacja polega na wprowadze-

niu opóźnienia (jako zadanego czasu wykonania procesu), a następnie przesłaniu danych o położeniu układu obiektu do systemu. Jeśli obiekt nie leży w symulowanym polu widzenia kamery, to niepowodzenie wykrycia obiektu może być zasygnalizowane.

Przekład docelowych języków systemowych

Środowisko SIL dostarcza uniwersalnego języka z wieloma rozwiniętymi własnościami, jak np. dostęp do modelu otoczenia. Środowisko SIL wykazuje duże możliwości i może być łatwo wykorzystane w trudnym zadaniu opracowywania programów dla robota. Aby wynikowy program był użyteczny, powinien być przetłumaczony na język pracy symulowanego robota (lub innego urządzenia programowalnego). Języki programowania współczesnych sterowników robotów różnią się znacznie co do typów, operacji i struktury programu. Podsystem stanowiska symulacji komputerowej wykonuje tłumaczenie z języka uniwersalnego (SIL) na język urządzenia. Część tej maszyny obliczeniowej jest wspólna bez względu na język celowy, lecz część jest od tego języka uzależniona.

Problem tłumaczenia języków w układzie autonomicznego programowania jest bardziej złożony niż krzyżowy kompilator dla dwóch języków uniwersalnych. Powoduje to fakt, że język celowy jest ograniczony, a program źródłowy odwołuje się do modelu otoczenia, na ogólnie nieobecnego w systemie docelowym. Rozważmy program w języku SIL, który wykorzystuje złącza podczas manipulowania modelem otoczenia, a również odnosi się do pozycji celu robota opisanej względem położenia różnych obiektów otoczenia. W systemie docelowym, który nie zawiera modelu otoczenia i złącza, taki program może nie być realizowany. Podobnie, jeśli program w języku SIL wykorzystuje pewne typy lub operacje, które są podtrzymywane na platformie celowej, to tłumaczenie może nie być zrealizowane. Zatem analizując program SIL w świetle opisu języka docelowego, określa się, czy program jest *przetłumaczalny*. Analiza ta obejmuje więcej niż tylko sprawdzenie zgodności typów i operacji.

Rozważmy dwa proste przykłady programów w języku SIL, pokazane na rys. 13.6 i 13.7. Są one przeznaczone do wykorzystania w sterowniku, pracującym w układzie nie zawierającym operacji "rel" (mnożenie układów). Chociaż w obu programach wykorzystano operator "rel" do mnożenia układów, to jeden program jest wykonalny (rys. 13.7), a drugi nie (rys. 13.6). W wersji pokazanej na rys. 13.7 operator "rel" występuje tylko w wyrażeniach, których operandy są niezmiennikami programu, a zatem program może być zrealizowany.

```

process puma1(is.ok: boolean);
var x,bin1,bin2,drop: frame;
begin
  bin1:= [40,40,0,0,90,-90] as crt.zyz;
  bin2:= [20,80,0,0,90,-90] as crt.zyz;
  drop:= [0,0,15,0,180,0] as crt.ypr;
  signal(sensor,ready,true);
  wait(is.ok);
  if is.ok then
    x:=bin1
  else
    x:=bin2;
  . moveto('bolt', drop rel x);
end;

```

Rys. 13.6. Niewykonalny program w języku SIL

```

process puma2(is.ok: boolean);
var x,bin1,bin2,drop: frame;
begin
  bin1:= [40,40,0,0,90,-90] as crt.zyz;
  bin2:= [20,80,0,0,90,-90] as crt.zyz;
  drop:= [0,0,15,0,180,0] as crt.ypr;
  signal(sensor,ready,true);
  wait(is.ok);
  if is.ok then
    x:=drop rel bin1
  else
    x:=drop rel bin2;
  moveto('bolt', x);
end;

```

Rys. 13.7. Wykonalny program w języku SIL

Analiza programu przebiega w następujący sposób. Program źródłowy SIL jest przekształcany w graf, w którym każdy węzeł jest blokiem kodu, zaczynającym etykietą, zawierającym tylko instrukcje sekwencyjne i zakończoną instrukcją "go to" lub instrukcją warunkową "go to". Łuki grafu przedstawiają skoki w programie, które mogą lub nie mogą być wykonywane w czasie rzeczywistym zależnie od wartości danych wejściowych itp. Całość programu SIL jest analizowana pod względem stopnia wykorzystania zmiennych, które określają wektor stanu. Przez porównanie tablicowego zapisu typów i operacji języka SIL oraz systemu docelowego pewne elementy tego wektora stanu są oznaczane jako niereprezentowalne. W każdym węźle grafu programu występuje pytanie o możliwość wejścia do tego węzła tak, aby niereprezentowalna zmienna miała różne wartości. Jeśli jest to możliwe i jeśli węzeł wykorzy-

```

PROGRAM PUMA2
CONST
IS_OK = 2
SENSORREADY = 3
VAR
X,DROP,BIN1,BIN2: POSITION
BEGIN
$MOTYPE = JOINT
$TERMTYPE = COARSE
$UFRAME = POS(0.0,0.0,-950.0,0.0,0.0,0.0,")
$UTOOL = POS(-0.0,-0.0,334.962,-0.0,0.0,0.0,")
$SPEED = 346.41
G336:-
BIN1 = POS(400.0,400.0,0.0,-89.9994,0.000508,-89.9999,")
BIN2 = POS(200.0,800.0,0.0,-89.9994,0.000508,-89.9999,")
DROP = POS(0.0,0.0,150.0,0.0,180.0,0.0,")
DOUT[SENSORREADY] = TRUE
IF DIN[IS_OK] THEN
GOTO G329
ENDIF
GOTO G332
G329:-
X = (BIN1:DROP)
GOTO G326
G332:-
X = (BIN2:DROP)
G326:-
MOVE TO X NOWAIT
END PUMA2

```

Rys. 13.8. Wersja programu z rys. 13.6 zapisana w języku KAREL

stuje niereprezentowalną zmienną, to program jest niewykonalny. Jeśli analiza dowodzi, że niereprezentowalne operacje są wykonywane tylko na niezmiennikach programu, wtedy wyrażenia te mogą być obliczone wcześniej, a wynik pojawi się w programie docelowym.

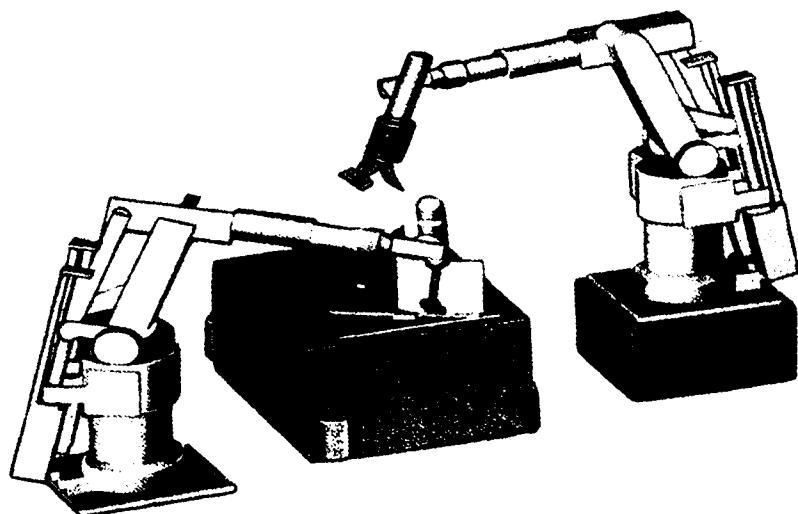
Jeśli program jest wykonalny, to translator dostarczy kompletny program w języku docelowym, ze strukturami programowymi i instrukcjami wejścia /wyjścia. W przypadku wielu języków docelowych większość programów, zapisanych w języku SIL, jest wykonalna. Użytkownicy zaznajomieni z ograniczeniami systemów docelowych mogą na ogół uniknąć tworzenia niewykonalnych programów w języku SIL. Na rys. 13.8 pokazano program w języku KAREL [10], który jest wynikiem przetłumaczenia programu zapisanego w języku SIL, pokazanego na rys. 13.7. Zauważmy, że ponieważ KAREL zawiera operator "rel", to oba programy SIL pokazane powyżej są wykonalne dla tego sterownika. Zauważmy również, że translator bierze pod uwagę zmianę reprezentacji orientacji (z reprezentacji typu zyz do typu, który w języku KAREL jest równoważny ypr) oraz użyte jednostki (np. mm).

Możliwości wzorcowania

Do stanowiska symulacji komputerowej można czasowo przyłączyć w trybie *bezpośrednim* sterownik robota. W ten sposób robot symulowany i rzeczywisty poruszają się równocześnie. Tryb bezpośredni pozwala na wykorzystanie robota do niezależnego nauczenia położenia obiektu i do poprawienia danych modelu otoczenia, wykorzystywanego w stanowisku.

W głównej procedurze wzorcującej wykorzystuje się relacje między punktami modelu i punktami rejestrowanymi w procesie nauczania robota. W algorytmie wykorzystuje się n punktów cechowanych (gdzie $n \geq 3$) do uaktualnienia położenia bryły sztywnej. System oblicza błąd pozycjonowania dla punktów nauczanych, co pozwala użytkownikowi na oszacowanie dokładności robota.

Inna procedura wzorcująca, nazwana "deformującą", może być wykorzystana do deformacji kształtu ciągłego toru, wyprowadzonego z modelu CAD przez ponowne nauczanie n punktów wzdłuż toru. W tej procedurze wykorzystuje się funkcję błędu w postaci funkcji sklejanej z wielomianów 3 stopnia, w celu gładkiego zdeformowania oryginalnej krzywej przestrzennej (wyprowadzonej z CAD) poprzez interpolację punktów nauczanych, przy utrzymaniu jej kształtu możliwie najbardziej zbliżonego do oryginalnego. Z wykorzystaniem wszystkich możliwości wspomnianych w tym podrozdziale może być symulowane i autonomicznie programowane gniazdo produkcyjne z kilkoma robotami, takie jak np. przedstawione na rys. 13.9.



Rys. 13.9. Symulacja pełnego gniazda roboczego

13.4. AUTOMATYZACJA PODZADAŃ W UKŁADACH AUTONOMICZNEGO PROGRAMOWANIA

W tym podrozdziale krótko omówimy pewne zagadnienia, które mogą być włączone do "linii bazowej" układu autonomicznego programowania, przedstawionego wcześniej. Większość tych zagadnień dotyczy automatycznego planowania pewnej części zastosowań przemysłowych.

Automatyczne umiejscawianie robota

Jednym z najbardziej podstawowych zadań, jakie mogą być wykonane za pomocą układu autonomicznego programowania, jest wyznaczanie przestrzennego układu gniazda produkcyjnego tak, aby manipulator(y) mógł osiągnąć każdy wymagany punkt przestrzeni roboczej. Wyznaczenie poprawnego umiejscowienia robota lub części obrabianej metodą prób i błędów jest szybciej dokonywane w symulowanym otoczeniu niż w rzeczywistym gnieździe. Zautomatyzowanie poszukiwania dogodnego położenia robota lub części obrabianej jest następnym krokiem w kierunku zmniejszenia obciążenia użytkownika.

Automatyczne umiejscowienie robota może być dokonane przez zastosowanie przeszukiwania bezpośredniego lub dzięki opartym na pewnych heurystykach technikom poszukiwania. Ponieważ większość robotów jest montowana na podłodze (lub stropie) i oś pierwszego przegubu obrotowego jest prostopadła do podłogi, to na ogół poszukiwanie dotyczy tylko płaszczyzny zamocowania podstawy robota. Poszukiwanie może być oparte na optymalizacji pewnych kryteriów lub prowadzone tylko do momentu znalezienia pierwszej dogodnej lokalizacji. Dogodność miejsca może być określona jako bezkolizyjna zdolność osiągnięcia wszystkich punktów przestrzeni roboczej lub w sposób bardziej ścisły. Racjonalne kryterium maksymalizacyjne mogłoby być pewną formą *miary manipulacyjności*, jak to rozwiązano w rozdz. 8. Realizacja wykorzystująca podobną miarę manipulacyjności była rozpatrywana w [11]. Wynikiem takiego automatycznego doboru umiejscowienia robota jest gniazdo, w którym robot osiąga każdy z punktów jego przestrzeni roboczej w dobrze uwarunkowanej konfiguracji.

Unikanie kolizji i optymalizacja trajektorii

Planowanie bezkolizyjnych trajektorii [12, 13] i planowanie torów optymalnych czasowo [14-16] może być włączone do systemu programowania autonomicznego. Pewne problemy pokrewne, które mają mniejszy zasięg lub mniejszą przestrzeń poszukiwań, są również przedmiotem zainteresowania. Rozważmy np.

problem wykorzystania robota o sześciu stopniach swobody do spawania łukowego, którego geometria wymaga tylko pięciu stopni swobody. Automatyczne planowanie ruchu zbędnego stopnia swobody może być wykorzystane w celu uniknięcia kolizji i położen osobliwych robota [17].

Automatyczne planowanie skoordynowanego ruchu

W wielu sytuacjach spawania łukowego szczegóły procesu wymagają, aby pewna zależność między częścią obrabianą i wektorem grawitacji była utrzymywana podczas spawania. Uwidacznia się to w dwóch lub trzech stopniach swobody orientacji systemu, na którym część jest montowana, który działa w sposób skoordynowany równocześnie z robotem. W takim systemie może być dziewięć lub więcej stopni swobody wymagających koordynacji. Obecnie systemy takie są na ogół programowane za pomocą technik nauczania z wykorzystaniem programatora ręcznego. System planujący automatyczną syntezę koordynowanych ruchów dla takiego układu mógłby okazać się bardzo wartościowy [17, 18].

Symulacja sterowania siłą

W symulowanym otoczeniu, w którym obiekty są reprezentowane przez ich powierzchnie, możliwa jest symulacja strategii sterowania siłą manipulatora. Zadanie to zawiera trudny problem modelowania pewnych własności powierzchniowych i rozszerzenia symulatora dynamicznego w kierunku modelowania więzów nałożonych przez różne sytuacje kontaktowe. W takim środowisku możliwe byłoby oszacowanie łatwości różnych operacji montażowych ze sterowaniem siłą [19].

Automatyczne harmonogramowanie

Obok problemów geometrycznych związanych z programowaniem robota, często występują trudne problemy harmonogramowania i komunikacji, szczególnie w przypadku, gdy rozszerzamy symulację na grupę gniazd. Chociaż pewne systemy symulacji (w czasie dyskretnym) oferują abstrakcyjną symulację takich systemów [20], to niewiele z nich proponuje algorytmy planowania. Harmonogramowanie współdziałających procesów jest problemem trudnym, który jest przedmiotem badań [21, 22]. Układ programowania autonomicznego mógłby służyć jako idealne podłożę testowe takiego badania i mógłby być udoskonalony dzięki wykorzystaniu użytecznego algorytmu z tej dziedziny.

Automatyczne szacowanie błędów i tolerancji

Układ programowania autonomicznego może wykazywać pewne właściwości, przedstawione w ostatnich pracach dotyczących modelowania źródeł błędów pozycjonowania i wpływu danych pochodzących z niedoskonałych czujników [23, 24]. Model otoczenia mógłby uwzględniać różne granice błędów i informację o tolerancjach, a układ mógłby oszacować prawdopodobieństwo sukcesu różnych zadań pozycjonowania lub montażu. Układ mógłby sugerować wykorzystanie i usytuowanie czujników tak, aby poprawić ich niedoskonałości.

13.5. PODSUMOWANIE

Układy programowania autonomicznego są w pełni użyteczne we współczesnych zastosowaniach przemysłowych i mogą służyć jako baza przy kontynuowaniu badań i rozwoju robotyki. Silną motywacją w rozwoju tych układów jest zapelenie luk pomiędzy systemami programowania bezpośredniego dostępnymi dzisiaj i przyszłymi systemami programowania na poziomie zadania.

Bibliografia

- [1] R.Goldman, *Design of an Interactive Manipulator Programming Environment*, UMI Research Press, Ann Arbor, Mich., 1985.
- [2] S.Mujtaba, R.Goldman, "AL User's Manual", 3rd edition, Stanford Department of Computer Science, Report No. STAN-CS-81-889, December 1981.
- [3] T.Lozano-Perez, "Spatial Planning: A Configuration Space Approach", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-11, 1983.
- [4] B.Shimano, C.Geschke, C.Spalding, "VAL II: A Robot Programming Language and Control System", SME Robots VIII Conference, Detroit, June 1984.
- [5] R.Taylor, P.Summers, J.Meyer, "AML: A Manufacturing Language", *International Journal of Robotics Research*, Vol.1, No.3, Fall 1982.
- [6] SILMA Inc., "The CimStation User's Manual", Version 4.0, Available from SILMA Inc. 1601 Saratoga Sunnyvale Rd., Cupertino, Calif. 95014, 1989.
- [7] J.Bobrow, "The Efficient Computation of the Minimum Distance Between Convex Polyhedra", UC Irvine, to appear.
- [8] R.Smith, "Fast Robot Collision Detection Using Graphics Hardware", *Symposium on Robot Control*, Barcelona, November 1985.
- [9] SILMA Inc. "Programming in SIL", Available from SILMA Inc., 1601 Saratoga - Sunnyvale Rd., Cupertino, Calif. 95014, 1988.
- [10] GMF Inc., "KAREL Language Reference", Version 1.20p, Troy, Mich., 1986.
- [11] B.Nelson, K.Pedersen, M.Donath, "Locating Assembly Tasks in a Manipu-

- lator's Workspace", IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C. April 1987.
- [12] T.Lozano-Perez, "A Simple Motion Planning Algorithm for General Robot Manipulators", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol.RA-3, No.3, June 1987.
- [13] R.Brooks, "Solving the Find-Path Problem by Good Representation of Free Space", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-13: 190-197, 1983.
- [14] J.Bobrow, S.Dubowsky, J.Gibson, "On the Optimal Control of Robotic Manipulators with Actuator Constraints", *Proceedings of the American Control Conference*, June 1983.
- [15] K.Shin, N.McKay, "Minimum-Time Control of Robotic Manipulators with Geometric Path Constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1985.
- [16] R.Johanni, F.Pfeiffer, "A Concept for Manipulator Trajectory Planning", *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, 1986.
- [17] J.J.Craig, "Coordinated Motion of Industrial Robots and 2-DOF Orienting Tables", *Proceedings of the 17th International Symposium on Industrial Robots*, Chicago, April 1987.
- [18] S.Ahmad, S.Luo, "Coordinated Motion Control of Multiple Robotic Devices for Welding and Redundancy Coordination through Constrained Optimization in Cartesian Space", *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, 1988.
- [19] M.Peshkin, A.Sanderson, "Planning Robotic Manipulation Strategies for Sliding Objects", IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.
- [20] E.Russel, "Building Simulation Models with Simscript II.5", C.A.C.I, Los Angeles, 1983.
- [21] A.Kusiak, A.Villa, "Architectures of Expert Systems for Scheduling Flexible Manufacturing Systems", IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.
- [22] R.Akella, B.Krogh, "Hierarchical Control Structures for Multicell Flexible Assembly System Coordination", IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.
- [23] R.Smith, M.Self, P.Cheeseman, "Estimating Uncertain Spatial Relationships in Robotics", IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.
- [24] H.Durrant-Whyte, "Uncertain Geometry in Robotics", IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.

Ćwiczenia

- 13.1. [10] W jednym lub dwóch zdaniach zdefiniować wykrywanie kolizji, uniknięcie kolizji, planowanie toru bezkolizyjnego.
- 13.2. [10] W jednym lub dwóch zdaniach zdefiniować model otoczenia, emulację planowania toru, animację dynamiczną.
- 13.3. [10] W jednym lub dwóch zdaniach zdefiniować automatyczne umiejscawianie robota, trajektorie czasowo-optymalne, analizę propagacji błędu.
- 13.4. [10] W jednym lub dwóch zdaniach zdefiniować graficzny model krawędziowy, cieniowanie obrazu powierzchni, eliminację zasłoniętych linii.
- 13.5. [10] W jednym lub dwóch zdaniach zdefiniować język programowania robota, programowanie autonomiczne, programowanie na poziomie zadania.
- 13.6. [10] Jednym lub dwoma zdaniami zdefiniować wzorcowanie, ruch skoordynowany, automatyczne harmonogramowanie.
- 13.7. [20] Wykonać wykres wskazujący, jak w ostatnich dziesięciu latach wzrastały zdolności graficzne komputera (może to być wykres liczby wektorów rysowanych na sekundę przez oprzyrządowanie w cenie 10 000 dolarów).
- 13.8. [20] Opracować listę zadań, które można scharakteryzować jako "zbiór operacji przeprowadzonych ze sztynnym obiektem", które mogą być programowane autonomicznie.
- 13.9. [20] Rozpatrzyć zalety i wady korzystania z takiego układu programowania, który zawiera wewnętrzny szczegółowy model otoczenia.
- 13.10. [20] Jaka sytuacja (rozpatrując względne położenie obiektów) jest najgroźniejsza dla algorytmu wykrywania kolizji omówionego w tym rozdziale, podczas pracy w czasie rzeczywistym?

Ćwiczenie z zakresu programowania (część 13)

1. Rozpatrzyć płaski prostokąt z półkolistymi zakończeniami. Nazwiemy ten kształt "kapsułą". Napisać procedurę, która dla danego położenia dwóch takich kapsuł określa, czy dotykają się one, czy nie. Zauważ, że wszystkie punkty kapsuły są równe odległe od pojedynczego odcinka.
2. Ulokować obiekt o kształcie kapsuły w pobliżu symulowanego manipulatora i sprawdzić możliwość zaistnienia kolizji podczas ruchu wzduż trajektorii. Wykorzystać ten kształt jako kształt członów manipulatora. Opisać każdą wykrytą kolizję.
3. Zapisać procedurę do graficznej ilustracji kapsuł, które obrazują manipulator i przeszkody w przestrzeni roboczej.

DODATEK A:

TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

Zależności dla obrotu wokół osi głównych o kąt θ

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Tożsamości wynikające z okresowości funkcji sinus i kósinus

$$\sin\theta = -\sin(-\theta) = -\cos(\theta + \pi/2) = \cos(\theta - \pi/2)$$

$$\cos\theta = \cos(-\theta) = \sin(\theta + \pi/2) = -\sin(\theta - \pi/2) \quad (\text{A.4})$$

Funkcje sinus i kosinus dla sumy i różnicy katów θ_1 i θ_2

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1 + \theta_2) &= c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= s_{12} = c_1 s_2 + s_1 c_2 \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) &= c_{12} = c_1 c_2 + s_1 s_2 \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) &= s_{12} = c_1 s_2 - s_1 c_2\end{aligned}\tag{A.5}$$

"Jedynka trygonometryczna"

$$c^2 \theta + s^2 \theta = 1\tag{A.6}$$

Jeżeli katy trójkąta są oznaczone a, b i c, gdzie a leży naprzeciw boku A, itd., to "twierdzenie kosinusew" przyjmuje postać

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos a\tag{A.7}$$

Zastąpienie "tangensa kata połówkowego"

$$u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

prowadzi do

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ \sin \theta &= \frac{2u}{1 + u^2}\end{aligned}\tag{A.8}$$

Aby obrócić wektor Q wokół wersora \hat{K} o kąt θ , wykorzystuje się wzór Rodrigues'a

$$Q' = Q \cos \theta + \sin \theta (\hat{K} \times Q) + (1 - \cos \theta)(\hat{K} \cdot Q)\hat{K}\tag{A.9}$$

W dodatku B zawarto macierze równoważnych obrotów dla 24 konwencji zbioru katów. W dodatku C zawarto pewne wzory wykorzystywane przy rozwiązywaniu zadania odwrotnego kinematyki.

DODATEK B:

24 KONWENCJE ZBIORU KĄTÓW

Dwanaście zbiorów kątów Eulera jest danych przez

$$R_{X'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta \\ -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Z'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'X'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta \\ c\beta s\gamma & c\beta c\alpha & -s\beta \\ c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'Z'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta & c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'X'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma \\ s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Z'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'X'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ s\beta s\gamma & c\beta & -s\beta c\gamma \\ -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'Z'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'X'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta \\ c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

Dwanaście ustalonych zbiorów katów jest danych przez

$$R_{XYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{XZY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta & -\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{YXZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & -\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\cos\gamma & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{YZX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & \cos\gamma \\ \sin\beta & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\alpha & \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{ZXY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\beta\cos\gamma & \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & \sin\gamma \\ \sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{XYX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\cos\beta\sin\gamma + \cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma + \sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{XZX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & \cos\beta\cos\gamma - \sin\gamma & -\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta & \sin\beta\cos\gamma + \cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{YXY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma & \sin\beta & \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta & -\sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta & \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{YZY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma & -\cos\beta & \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta & \sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta & -\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{ZXZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta \\ c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

DODATEK C:

WZORY DLA ZADANIA ODWROTNEGO KINEMATYKI

Pojedyncze równanie

$$\sin\theta = a \quad (\text{C. 1})$$

ma dwa rozwiązania

$$\theta = \pm \text{Atan2}\left(\sqrt{1 - a^2}, a\right) \quad (\text{C. 2})$$

Podobnie dla równania

$$\cos\theta = b \quad (\text{C. 3})$$

istnieją dwa rozwiązania

$$\theta = \text{Atan2}\left(b, \pm \sqrt{1 - b^2}\right) \quad (\text{C. 4})$$

Jeśli zarówno (C. 1), jak i (C. 3) są dane, wtedy istnieje pojedyncze rozwiązanie określone przez

$$\theta = \text{Atan2}(a, b) \quad (\text{C. 5})$$

Równanie przestępne

$$a\cos\theta + b\sin\theta = 0 \quad (\text{C. 6})$$

ma dwa rozwiązania

$$\theta = \text{Atan2}(a, -b) \quad (\text{C. 7})$$

oraz

$$\theta = \text{Atan2}(-a, b) \quad (\text{C. 8})$$

Równanie

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \quad (\text{C. 9})$$

które rozwiązałyśmy w podrozdziale 4.5, stosując podstawienie tangensa kąta połówkowego, można także rozwiązać korzystając z zależności

$$\theta = \text{Atan2}(b, a) \pm \text{Atan2}\left(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c\right) \quad (\text{C. 10})$$

Układ równań

$$a\cos\theta - b\sin\theta = c \quad (\text{C. 11})$$

$$a\sin\theta + b\cos\theta = d$$

które były rozwiązyane w podrozdziale 4.4, można także rozwiązać za pomocą zależności

$$\theta = \text{Atan2}(ad - bc, ac + bd) \quad (\text{C. 12})$$

DODATEK D:

ODPOWIEDZI DO ĆWICZEŃ

1. WPROWADZENIE

- 1.1. Poniżej podano przykład właściwej odpowiedzi (poz. [9] bibl. rozdz. 1):
- 1955 - Denavit i Hartenberg rozwinięli metodę opisu mechanizmów
 - 1961 - George Devol patentuje projekt pierwszego robota
 - 1968 - Robot Shakey opracowano w S.R.J.
 - 1975 - Utworzono Instytut Robotów w Ameryce
 - 1975 - UNIMATION staje się pierwszą firmą robotową przynoszącą korzyści
 - 1978 - Pierwszy robot PUMA zainstalowano w G.M.
 - 1985 - Rynek robotów w USA przekracza 500 milionów dolarów rocznie.
- 1.4. Kinematyka jest nauką o położeniu i pochodnych położenia bez uwzględniania sił powodujących ruch.
- Przestrzeń robocza jest miejscem położień i orientacji osiągalnych przez człon roboczy manipulatora.
- Trajektoria jest funkcją czasu opisującą położenie (i wyższe pochodne) mechanizmu robota w każdej chwili.

- 1.5. *Układ współrzędnych* zwykle określa pozycję i orientację względem pewnego układu odniesienia.

Stopnie swobody są liczbą niezależnych zmiennych, które powinny być podane w celu pełnego usytuowania wszystkich członów (sztywnych) mechanizmu.

Sterowanie położeniem zakłada wykorzystanie układu sterowania, zwykle ze sprzężeniem zwrotnym, w celu sterowania położeniem jednego lub więcej ruchomych ciał.

- 1.6. *Sterowanie siłą* polega na użyciu algorytmów (zwykle o zamkniętej pętli) do sterowania siłami kontaktowymi, generowanymi, gdy robot styka się ze swoim otoczeniem pracy.

Język programowania robota jest językiem programowania stosowanym w celu wyszczególnienia czynności manipulatora.

- 1.7. *Sztywność konstrukcji* jest określona przez współczynnik k w zależności $F = k\Delta x$ (tzn. prawo Hooke'a), opisującej sztywność pewnej konstrukcji. *Sterowanie nieliniowe* odnosi się do układu sterowania o zamkniętej pętli, w którym nieliniowość wykazuje albo układ sterowany, albo sam algorytm sterowania.

Programowanie autonomiczne jest to proces tworzenia programu dla urządzenia bez wnikania do niego.

2. OPISY PRZESTRZENNE I PRZEKSZTAŁCENIA

2.1.

$$R = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ c\phi s\theta & c\phi c\theta & -s\phi \\ s\phi s\theta & s\phi c\theta & c\phi \end{bmatrix}$$

2.2.

$$R = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 & 0,5 \\ 0,353 & 0,707 & -0,612 \\ -0,353 & 0,707 & 0,612 \end{bmatrix}$$

2.3.

$$R = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta c\phi & s\theta s\phi \\ s\theta & c\theta c\phi & -c\theta s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix}$$

2.4.

$$R = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,353 & 0,353 \\ 0,500 & 0,612 & -0,612 \\ 0 & 0,707 & 0,707 \end{bmatrix}$$

2.12.

$$A_V = [-1,34 \quad 22,32 \quad 30,0]^T$$

2.13.

$$\frac{B_T}{C} = \frac{B_T}{A} U_T^{-1} \frac{C}{U}^{-1}$$

2.14.

$$\frac{A_T}{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} R_{11} & R_{12} & R_{13} & Q_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & Q_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & Q_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

gdzie

$$Q_x = P_x - P_x(k_x^2 v\theta + c\theta) - P_y(k_x k_y v\theta - k_z s\theta) - P_z(k_x k_z v\theta + k_y s\theta)$$

$$Q_y = P_y - P_x(k_x k_y v\theta + k_z s\theta) - P_y(k_y^2 v\theta + c\theta) - P_z(k_y k_z v\theta + k_x s\theta)$$

$$Q_z = P_z - P_x(k_x k_z v\theta - k_y s\theta) - P_y(k_y k_z v\theta + k_x s\theta) - P_z(k_z^2 v\theta + c\theta)$$

2.17.

$$A_P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R c\theta \\ R s\theta \\ z \end{bmatrix}$$

2.18.

$$A_P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R c\alpha c\beta \\ R s\alpha c\beta \\ R s\beta \end{bmatrix}$$

2.21.

$$R_k(\delta\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -k_z \delta\theta & k_y \delta\theta \\ k_z \delta\theta & 1 & -k_x \delta\theta \\ -k_y \delta\theta & k_x \delta\theta & 1 \end{bmatrix}$$

2.27.

$$B_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.28.

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & -0,500 & 0,866 & 3 \\ 0 & 0,866 & 0,500 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.29.

$$B_T = \begin{bmatrix} 0 & 0,500 & -0,866 & 0 \\ 0 & -0,866 & -0,500 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.30.

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -0,500 & 0,866 & 0 & 3 \cdot 0,500 \\ 0,866 & -0,500 & 0 & 3 \cdot 0,866 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.31.

$$B_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.32.

$$C_T = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,500 & 0 & -3 \\ 0,500 & -0,866 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.33.

$$B_C = \begin{bmatrix} -0,866 & -0,500 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,500 & 0,866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.34.

$$C_A = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,500 & 0 & -3 \cdot 0,866 + 2 \\ 0,500 & -0,866 & 0 & -4 \cdot 0,866 - 1,5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. KINEMATYKA MANIPULATORA

3.1.

$${}_{0_3}^T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie: $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, itp.

3.2.

$$\alpha_{i-1} = 0, -90^\circ, 90^\circ, 0, 90^\circ, -90^\circ$$

$$a_{i-1} = 0, 0, 0, a_3, 0, 0$$

$$d_i = 0, d_2, d_3, d_4, 0, 0$$

$$\theta_i = \theta_1, \theta_2, 180^\circ, \theta_4, \theta_5, \theta_6$$

$${}_{0_3}^T = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 & s_1 & c_1 s_2 & -d_2 s_1 + d_3 c_1 s_2 \\ -s_1 c_2 & -c_1 & s_1 s_2 & d_2 c_1 + d_3 s_1 s_2 \\ s_2 & 0 & c_2 & d_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{3_6}^T = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6 & -c_4 s_5 & a_3 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & -s_4 s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.

$${}_{W_4}^T = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4.

$${}_{0_1}^T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{1_2}^T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}^T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.8.

Gdy $\{G\} = \{T\}$, to $\begin{matrix} B \\ W \end{matrix}^T \begin{matrix} W \\ T \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ S \end{matrix}^T \begin{matrix} S \\ G \end{matrix}^T$, zatem $\begin{matrix} W \\ T \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ W \end{matrix}^{-1} \begin{matrix} B \\ S \end{matrix}^T \begin{matrix} S \\ G \end{matrix}^T$

3.9.

$$\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}_{tip} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}^T \begin{matrix} 2 \\ tip \end{matrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 \\ l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 \\ l_2 s_2 \end{bmatrix}$$

3.14.

$$a = |(Q - P) \cdot \hat{c}|, \text{ gdzie } \hat{c} = \frac{\hat{m} \times \hat{n}}{|\hat{m} \times \hat{n}|}$$

$$\alpha = \text{sign}((Q - P) \cdot \hat{c}) \arccos(\hat{m} \cdot \hat{n})$$

3.16.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 0,5, & a_2 &= 0 \\ \alpha_0 &= 0, & \alpha_1 &= 90^\circ, & \alpha_2 &= -90^\circ \\ d_1 &= 0, & d_2 &\approx -1,5, & d_3 &= 0 \\ \theta_1 &= 0, & \theta_2 &= 0, & \theta_3 &\approx -45^\circ \end{aligned}$$

4. ZADANIE ODWROTNE KINEMATYKI MANIPULATORA

4.2. Zadanie może mieć różne rozwiązania zależnie od tego jak dane są interpretowane. danych. Jeśli przyjmie się, że dany cel zawiera pożdaną orientację ostatniego członu, to rozwiązanie znajduje się dość łatwo. Według równania (4.108) oblicza się $\begin{matrix} B \\ W \end{matrix}^T$. Niech $\begin{matrix} B \\ W \end{matrix}^T = \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}^T$, wtedy na podstawie rozwiązania ćwiczenia 3.3 można otrzymać

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(l_1 + l_2 c_2) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(l_1 + l_2 c_2) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przyrównując elementy (1,3) oraz (2,3) po obu stronach powyższego równania, otrzymuje się

$$\theta_1 = \text{Atan2}(r_{13}, -r_{23})$$

Jeśli $r_{13} = 0$ i $r_{23} = 0$, wtedy cel jest nieosiagalny.

Przyrównując elementy (1,4), (2,4) oraz (3,4) po obu stronach powyższego równania, przy założeniu, że $c_1 \neq 0$, otrzymuje się

$$\theta_2 = \text{Atan2}(p_z/l_2, c_2)$$

$$\text{gdzie } c_2 = \frac{1}{l_2} \left(\frac{p_x}{c_1} - l_1 \right) \text{ lub } c_2 = \frac{1}{l_2} \left(\frac{p_y}{s_1} - l_1 \right)$$

Przyrównując elementy (3,1) oraz (3,2) otrzymuje się $s_{23} = r_{31}$, $c_{23} = r_{32}$, stąd

$$\theta_3 = \text{Atan2}(r_{31}, r_{32}) - \theta_2$$

Jeśli zarówno r_{31} , jak i r_{32} są równe zeru, to cel jest nieosiągalny.

W drugiej interpretacji danych zadania zakłada się, że tylko pozycja jest zadana. W tym przypadku można otrzymać do czterech rozwiązań. Przyjmując ${}^3P_{narz} = l_3 \hat{x}_3$, otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 + l_2 c_2 + l_3 c_{23}) c_1 \\ (l_1 + l_2 c_2 + l_3 c_{23}) s_1 \\ l_2 s_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

stąd $\theta_1 = \text{Atan2}(p_y, p_x)$ lub $\text{Atan2}(-p_y, -p_x)$; $\theta_3 = \text{Atan2}(s_3, c_3)$

$$\text{gdzie } c_3 = \frac{1}{2l_2 l_3} (\alpha^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2), \quad s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2}$$

przy czym

$$\alpha = \begin{cases} \frac{p_x}{c_1} - l_1, & \text{jeśli } c_1 \neq 0 \\ \frac{p_y}{s_1} - l_1, & \text{jeśli } s_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \text{Atan2}(p_z - l_2 s_2, \alpha - l_2 c_2) - \theta_3$$

- 4.7. Na powtarzalność wpływają: - błąd stanu ustalonego układu wspomagania; - sprząste odkształcenia członów; - luzy w przekładniach; - niedokładności łożysk; - zakłócenia w odczytach sensorów, - efekty cieplne. Na dokładność wpływają wszystkie wyżej wymienione oraz niedokładna znajomość parametrów D.H.
- 4.8. Zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jeśli ustalimy ostatni człon w zadanej pozycji i orientacji, to pierwsze trzy człony stanowią czworobok przegubowy, który może przyjąć nieskończenie wiele położeń, ponieważ ma ruchliwość.
- 4.10. Podprzestrzeń jest dana w zależności od wyrażenia dla 0_3T , które jest funkcją trzech zmiennych: x , y i θ . Zmieniając wartości tych zmiennych w ich przedziałach, otrzymuje się tę podprzestrzeń.

$$\begin{matrix} {}^0_3T = \left[\begin{array}{cccc} -\beta c\theta & \beta s\theta & \alpha & x \\ \alpha c\theta & -\alpha s\theta & \beta & y \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{matrix}$$

4.11. Wersor ${}^2\hat{v}$ powinien zostać obrócony do kierunku 0z_0 wg równania

$${}^0z_0 = {}^0R {}^2\hat{v}$$

stąd

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ -s_1 c_2 & s_1 s_2 & c_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right]$$

Powyższe równanie ma dwa rozwiązania

$$\theta_1 = \text{Atan2}\left(-\sqrt{v_x^2 + v_y^2}, v_z\right), \quad \theta_2 = \text{Atan2}(-v_y, v_x)$$

$$\text{oraz } \theta_1 = \text{Atan2}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}, v_z\right), \quad \theta_2 = \text{Atan2}(-v_y, v_x) + \pi$$

Jeśli $v_x = v_y = 0$, wtedy występuje osobliwość i θ_2 jest dowolne.

4.13. 1. Jawna postać rozwiązania jest szybsza obliczeniowo.

2. Umożliwia znalezienie wszystkich rozwiązań.

3. Czasem jest bardziej dokładna.

4.14. Według metody Piepera można uzyskać jawną postać rozwiązania dla dowolnego manipulatora o 3 stopniach swobody.

4.16. Ponieważ $s\alpha_1 = 0$, to można łatwo zastosować metodę Piepera. Z układu (4.50) otrzymuje się $z = k_4$ lub ${}^0p_{4z} = f_3 c\alpha_1 + d_2 c\alpha_1$. Stąd wg (4.45) będzie ${}^0p_{4z} = f_3 = a_3 s\alpha_2 s_3 + d_3 c\alpha_2$. Podstawiając dane liczbowe otrzymuje się $s_3 = 0,707$, zatem $\theta_3 \approx 45^\circ$ lub $\theta_3 = 135^\circ$.

4.17. Ponieważ $a_1 = 0$, to stosując metodę Piepera dla: $r = k_3$, otrzymuje się równanie względem zmiennej θ_3

$$0,707s_3 + 0,707 = 0, \quad s_3 = -1, \quad \theta_3 = -90^\circ, \quad \underline{\theta} \approx [0, 0, -90^\circ]$$

4.18. 2 4.19. 4 4.20. 1 4.21. 2 4.22. 1

4.24. $\alpha_{i-1} = \text{Atan2}(-t_{23}, t_{33}) \quad a_{i-1} = t_{14}$

$$d_i = \sqrt{t_{24}^2 + t_{34}^2}$$

$$\theta_i = \text{Atan2}(-t_{12}, t_{11})$$

5. JAKOŚIANY: PRĘDKOŚCI I SIŁY STATYCZNE

5.1.

$${}^0J(\underline{\theta}) = \left[\begin{array}{cc} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{array} \right]$$

$$\det({}^0 \mathbf{J}(\underline{\theta})) = l_1 l_2 s_2$$

Otrzymano ten sam wynik jak w przypadku ${}^3 \mathbf{J}(\underline{\theta})$, tzn. konfiguracje osobliwe są przy $\theta_2 = 0^\circ$ lub 180° .

5.2.

$${}^4 \mathbf{J}(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & s_3 l_2 & 0 \\ 0 & c_3 l_2 + l_3 & l_3 \\ -l_1 - l_2 c_2 - l_3 c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4. Przekształcenie, które potencjalnie może być osobliwe:

$$\underline{\nu} = \mathbf{J}(\underline{\theta}) \dot{\underline{\theta}} - w \text{ dziedzinie pozycji}$$

$$\underline{\tau} = \mathbf{J}^T(\underline{\theta}) \mathbf{F} - w \text{ dziedzinie siły}$$

Ponieważ transponowanie macierzy kwadratowej nie jest związane z rzędem tej macierzy, zatem osobliwości $\mathbf{J}(\underline{\theta})$ są takie same jak w $\mathbf{J}^T(\underline{\theta})$.

5.5.

$${}^6 \mathbf{J} = \begin{bmatrix} k_1 k_6 - d_3(c_{23} k_2 - s_{23} k_8) & k_1 k_7 - d_3(-c_{23} k_3 + s_{23} k_9) \\ k_4 k_8 + k_5 k_2 & -k_4 k_9 - k_5 k_3 \\ a_3 k_8 + d_4 k_2 & -a_3 k_9 - d_4 k_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 k_{10} - d_3(c_{23} k_{11} + s_{23} c_5) & -s_{23} k_2 - c_{23} k_8 & s_{23} k_3 + c_{23} k_9 & -s_{23} k_{11} + c_{23} c_5 \\ k_5 k_{11} - k_4 c_5 & k_6 & k_7 & k_{10} \\ -a_3 c_5 + d_4 k_{11} & k_6 & k_7 & k_{10} \\ 0 & -k_8 & k_9 & c_5 \\ 0 & s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{gdzie } k_1 = d_4 s_{23} + a_3 c_{23} + a_2 c_2$$

$$k_6 = s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6$$

$$k_2 = c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6$$

$$k_7 = -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6$$

$$k_3 = c_4 c_5 s_6 + s_4 s_6$$

$$k_8 = s_5 s_6$$

$$k_4 = a_3 + a_2 c_3$$

$$k_{10} = s_4 s_5$$

$$k_5 = d_4 + a_2 s_3$$

$$k_{11} = c_4 s_5$$

5.6. Tak, to jest prawda.

5.7. Patrz rys. 11.9 (str. 394), gdzie przedstawiono manipulator kartezjański o trzech stopniach swobody, który ma trzy wzajemnie prostopadłe pary przesuwne; zatem $\dot{\underline{\theta}} = [\dot{d}_1 \ \dot{d}_2 \ \dot{d}_3]^T$.

5.8. Punkt izotropowy dla manipulatora z ćwiczenia 5.2 wystąpi, jeśli $l_1 = \sqrt{2}l_2$ oraz gdy $\theta_2 = \pm 135^\circ$. W tej konfiguracji manipulator chwilowo jest podobny do kartezjańskiego.

5.9. Zadanie pozostaje nierozwiążane. Małą część odpowiedzi można znaleźć w bibliografii [7].

5.10. $\underline{\tau} = {}^3J^T {}^3F, \quad {}^3F = {}^3J^{-T} \underline{\tau}$

$${}^3J^{-T} = \begin{bmatrix} l_2 & -l_1 c_2 & -l_2 \\ 0 & l_1 s_2 & 0 \end{bmatrix} / l_1 l_2 s_2$$

5.11.

$$B_V = \begin{bmatrix} B_R & -B_R A_P X \\ A & 0 \\ 0 & B_R \end{bmatrix} A_V = [3,52 \quad -7,80 \quad -17,1 \quad 1,91 \quad 0,51 \quad 0]^T$$

5.12. Konfiguracja osobliwa wewnętrz przestrzeni roboczej manipulatora wystąpi dla takiego zbioru wartości kątów, że $l_1 + l_2 c_2 + l_3 c_{23} = 0$ (θ_1 jest dowolne). Na granicy przestrzeni roboczej dla dowolnego zbioru $\{\theta_1, \theta_2, 0\}$.

5.13.

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = -10s_1 l_1 - 10l_2 s_{12}, \quad \tau_2 = -10l_2 s_{12}$$

5.14. W położeniu osobliwym $\theta_3 = -\text{Atan2}(d_4, a_3)$.

Jeśli $a_3 \rightarrow 0$, to $\theta_3 \rightarrow -\text{Atan2}(d_4, 0) = -90^\circ$.

5.15. Z rozwiązania zadania kinematyki manipulatora można łatwo otrzymać

$${}^0P_{4org} = [(d_2 + l_2 + l_3)s_1 \quad -(d_2 + l_2 + l_3)c_1 \quad 0]^T$$

stąd

$${}^0J = \begin{bmatrix} (d_2 + l_2 + l_3)c_1 & s_1 & 0 \\ (d_2 + l_2 + l_3)s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.16. Masz szczęście. Odpowiedź jest dana przez równanie (5.42)

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & c_1 s_2 \\ 0 & c_1 & s_1 s_2 \\ 1 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

5.17.

$$J(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_6 \\ B_1 & B_2 & \dots & B_6 \end{bmatrix}$$

gdzie A_i oraz B_i są to wektory (3×1) określone wg wzorów

$$A_i = \begin{cases} {}^0\hat{z}_i \times \left({}^0\mathbf{P}_{tool} - {}^0\mathbf{P}_{iorg} \right) & \text{jeśli połączenie } i \text{ jest obrotowe} \\ {}^0\hat{z}_i & \text{jeśli połączenie } i \text{ jest przesuwne} \end{cases}$$

$$B_i = \begin{cases} {}^0\hat{z}_i & \text{jeśli połączenie } i \text{ jest obrotowe} \\ 0 & \text{jeśli połączenie } i \text{ jest przesuwne} \end{cases}$$

5.18. Tylko czwartą kolumnę macierzy ${}^0_3\mathbf{T}$ różniczkuje się względem θ :

$${}^0\mathbf{J}(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_1 c_2 & -l_2 c_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 & -l_2 s_1 s_2 & 0 \\ 0 & l_2 c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

5.19.

$${}^0 \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{2org} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - d_2 c_1 & -s_1 \\ a_1 c_1 - d_2 s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix}$$

$$DET({}^0\mathbf{J}(\underline{\theta})) = -d_2. \text{ Osobliwość dla } d_2 = 0.$$

6. DYNAMIKA MANIPULATORA

6.1. $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$, $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$, gdzie r – promień, h – wysokość walca o masie m . Ze względu na symetrię $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

6.2. Według wzoru (6.27) ${}^{Ci}I_{zzi} = \frac{1}{12}m_i(l_i^2 + w_i^2)$. Pozostałe momenty można pominać.

$$\tau_1 = (I_{zz1} + I_{zz2} + 2m_2 r_2 l_1 c_2 + m_2 l_1^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2 l_2) \ddot{\theta}_1 +$$

$$+ (m_2 r_2 l_2 + I_{zz2} + m_2 l_1 r_2 c_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 r_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) +$$

$$+ m_2 r_2 g c_{12} + m_1 r_1 g c_1 + m_2 l_1 g c_1$$

$$\tau_2 = (I_{zz2} + m_2 l_1 r_2 c_2 + m_2 l_2 r_2) \ddot{\theta}_1 + (I_{zz2} + m_2 l_2 r_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 r_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 +$$

$$+ m_2 r_2 g c_{12}$$

$$\text{Dalsze uproszczenia można zrobić, ponieważ } r_i = \frac{1}{2}l_i.$$

6.3. To zadanie jest bardzo pracochłonne. Zadanie w ćwiczeniu 6.5 jest podobne, lecz prostsze, ponieważ manipulator ma tylko dwa człony i przyjęto masy skupione.

6.4.

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i\dot{\omega}_i \cdot {}^iR^i$$

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^i\dot{\omega}_i \cdot {}^iR^i$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i +$$

$$+ 2{}^i\omega_i \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{z}_{i+1}$$

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{v}_{Ci+1} &= {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{Ci+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{Ci+1}) + \\ &+ {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \end{aligned}$$

$${}^{i+1}\dot{F}_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}\dot{v}_{Ci+1}$$

$${}^{i+1}\dot{N}_{i+1} = C_{i+1} {}^iI_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times C_{i+1} {}^iI_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1}$$

$${}^i f_i = {}^i R^i {}^{i+1}f_{i+1} + {}^i F_i$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^i R^i {}^{i+1}n_{i+1} + {}^i P_{Ci} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i R^i {}^{i+1}f_{i+1}$$

$$\tau_i = {}^i f_i^T {}^i \hat{z}_i$$

$$\begin{aligned} 6.5. \quad & \alpha_{i-1} = 0, \quad 90^\circ, \quad 0; \quad a_{i-1} = 0, \quad l_1, \quad l_2; \quad d_i = 0, \quad 0, \quad 0; \quad \theta_i = \theta_1, \quad \theta_2, \quad 0; \\ & {}^1P_{C1} = l_1 \hat{x}_1; \quad {}^2P_{C2} = l_2 \hat{x}_2; \quad {}^{C1}I_1 = 0; \quad {}^{C2}I_2 = 0; \\ & \omega_0 = \dot{\omega}_0 = 0; \quad f_3 = n_3 = 0; \quad {}^0v_0 = g \hat{z}_0 \end{aligned}$$

Według wzorów iteracyjnych (6.45)–(6.48) dla prędkości i przyspieszeń uzyskano:

$${}^1\omega_1 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1]^T; \quad {}^1\dot{\omega}_1 = [0 \quad 0 \quad \ddot{\theta}_1]^T; \quad {}^1\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T$$

$${}^1\dot{v}_{C1} = [-l_1 \dot{\theta}_1^2 \quad l_1 \ddot{\theta}_1 \quad g]^T;$$

$${}^2\omega_2 = [s_2 \dot{\theta}_1 \quad c_2 \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T;$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = [s_2 \ddot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad c_2 \ddot{\theta}_1 - s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad \ddot{\theta}_2]^T$$

$${}^2\dot{v}_2 = [-l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 + s_2 g \quad l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + c_2 g \quad -l_1 \ddot{\theta}_1]^T$$

$${}^2\dot{v}_{C2} = \left[\begin{array}{c} -(l_1 c_2 + l_2 c_2^2) \dot{\theta}_1^2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 + s_2 g \\ (l_1 s_2 + l_2 s_2 c_2) \dot{\theta}_1^2 + l_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 g \\ 2l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - l_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 \end{array} \right]$$

Równania dynamiki (6.37) przyjmują postać

$${}^1\mathbf{F}_1 = m \dot{{}^1v}_{C1} = m_1 [-l_1 \dot{\theta}_1^2 \quad l_1 \ddot{\theta}_1 \quad g]^T$$

$${}^1\mathbf{N}_1 = {}^{C1}\mathbf{I}_1 \dot{{}^1\omega}_1 + {}^1\omega_1 \times {}^{C1}\mathbf{I}_1 {}^1\omega_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$${}^2\mathbf{F}_2 = m_2 \dot{{}^2v}_{C2} = m_2 \begin{bmatrix} (l_1 + l_2 c_2) c_2 \dot{\theta}_1^2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 + s_2 g \\ (l_1 + l_2 c_2) s_2 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 g \\ 2l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - l_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{N}_2 = {}^{C2}\mathbf{I}_2 \dot{{}^2\omega}_2 + {}^2\omega_2 \times {}^{C2}\mathbf{I}_2 {}^2\omega_2 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Według wzorów iteracyjnych (6.51)-(6.53) dla sił i momentów sił otrzymano

$${}^2f_2 = {}^2R {}^3f_3 + {}^2\mathbf{F}_2 = {}^2\mathbf{F}_2$$

$${}^2n_2 = {}^2\mathbf{N}_2 + {}^2R {}^3n_3 + {}^2P_{C2} \times {}^2\mathbf{F}_2 + {}^2P_3 \times {}^2R {}^3f_3 =$$

$$= m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 - l_2^2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_2^2 c_2 \ddot{\theta}_1 \\ l_2 (l_1 + l_2 c_2) s_2 \dot{\theta}_1^2 - g l_2 c_2 + l_2^2 \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = ((m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2 c_2)^2) \ddot{\theta}_1 - 2m_2 l_2 (l_1 + l_2 c_2) s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + v_1 \dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 (l_1 + l_2 c_2) s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g l_2 c_2 + v_2 \dot{\theta}_2$$

Uwaga: dodano wyrazy $v_i \theta_i$ oznaczające tarcie wiskotyczne.

- 6.6. Jakobian ${}^0J(\underline{\theta})$ zapisany w układzie $\{0\}$ podaje wzór (5.67). Jego odwrócenie i pochodną względem czasu przedstawiono poniżej:

$${}^0J^{-1}(\underline{\theta}) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

$${}^0J(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} -l_1 c_1 \dot{\theta}_1 - l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -l_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix}$$

Równania dynamiki (6.99) mają następującą postać

$$\mathbf{M}_x(\underline{\theta}) = \frac{1}{l_1^2 l_2^2 s_2^2} \begin{bmatrix} m_{11} l_2^2 c_{12}^2 + m_{22} (l_1 c_1 + l_2 c_{12})^2 & \alpha \\ \alpha & m_{11} l_2^2 s_{12}^2 + m_{22} (l_1 s_1 + l_2 s_{12})^2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = m_{11} l_2^2 s_{12} c_{12} + m_{22} (l_1 s_1 + l_2 s_{12})(l_1 c_1 + l_2 c_{12})$$

$$m_{11} = (m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2 c_2)^2), \quad m_{22} = m_2 l_2^2$$

6.7. Aby zapisać stan $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ pojedynczego połączenia ruchowego, gdy każdy z wymiarów stanu skwantyfikowano do 16 "BINS", potrzeba $16 \times 16 \times 16$ adresów. Lecz jeśli połączenie θ_j jest w dowolnym z tych "BINS", to połączenie θ_j może być w $16 \times 16 \times 16$ różnych stanach. Zatem w ogólności dla trzech połączeń trzeba $(16 \times 16 \times 16)^3$ miejsc dla zapisu równań $\underline{x} = f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ w postaci tablicy. Każde miejsce zawiera trzy wartości (τ_1, τ_2, τ_3) , zatem wymagana wielkość pamięci wynosi $3(16 \times 16 \times 16)^3$ miejsc.

6.8. Dla rozpatrywanego manipulatora:

$${}^0P_1 = 0; \quad {}^1P_2 = d_2 \hat{y}_1; \quad {}^1P_{C1} = 0; \quad {}^2P_{C2} = 0$$

$${}^0v_0 = g\hat{z}_0; \quad \omega_0 = \dot{\omega}_0 = 0, \quad f_3 = n_3 = 0$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1]^T \quad {}^1\ddot{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \ddot{\theta}_1]^T$$

$${}^1\dot{v}_1 = [0 \ 0 \ g]^T \quad {}^1\dot{v}_{C1} = [0 \ 0 \ g]^T$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = [0 \ -\dot{\theta}_1 \ 0]^T \quad {}^2\omega_2 = [0 \ -\ddot{\theta}_1 \ 0]^T$$

$${}^2\dot{v}_2 = [-2d_2 \dot{\theta}_1 \ -d_2 \ddot{\theta}_1 \ -g \ -d_2 \dot{\theta}_1^2 + \ddot{d}_2]^T$$

$${}^2\dot{v}_{C2} = {}^2\dot{v}_2 \quad (\text{ponieważ } {}^2P_{C2} = 0)$$

$${}^1F_1 = [0 \ 0 \ m_1 g]^T \quad {}^1N_1 = [0 \ 0 \ I_{zz1} \ddot{\theta}_1]^T$$

$${}^2F_2 = m_2 [-2d_2 \dot{\theta}_1 \ -d_2 \ddot{\theta}_1 \ -g \ -d_2 \dot{\theta}_1^2 + \ddot{d}_2]^T \quad {}^2N_2 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$${}^2n_2 = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad {}^1n_1 = [m_2 d_2 g \ 0 \ I_{zz1} \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1]^T$$

$$\tau_1 = I_{zz1} \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \ddot{d}_2$$

6.9. Rozwiązanie bardzo podobne do 6.8. Przyjmij masę m_3 dla członu 3, chociaż to nie było podane.

6.10.

$${}^2J(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} -d_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2j(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} -\dot{d}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2J^{-1}(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} -1/d_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_x(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} m_2 + I_{zz1}/d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_x(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} I_{zz1}\dot{\theta}_1\dot{d}_2/d_2^2 - m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ -m_2\dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_x(\theta) = [0 \quad 0]^T$$

6.11. $\tau_M = \left(\frac{1}{100}\right)^2 I_{zz1} \dot{\omega}_M$, gdzie τ_M - moment obrotowy silnika, $\dot{\omega}_M$ - przyspieszenie kątowe wału silnika. Zatem moment bezwładności zredukowany na wał silnika wynosi $\left(\frac{1}{100}\right)^2 I_{zz1}$.

$$6.12. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \ddot{\theta}_1 \hat{z}_1 = [0 \quad 0 \quad 2c]^T \\ \dot{v}_{C1} &= [-2(b + 2ct)^2 \quad 4c \quad 0]^T \end{aligned}$$

$$6.13. \begin{aligned} {}^3\mathbf{M}_x(\theta) &= \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 l_1^2 / (l_1 + l_2 c_2)^2 + m_2 \end{bmatrix} \\ {}^3\mathbf{v}_x(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 \\ -[m_1 l_1^2 l_2 / (l_1 + l_2 c_2)^2 + m_2 (2l_1 + l_2(1 + 2c_2))] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_2 \end{bmatrix} \\ {}^3\mathbf{G}_x(\theta) &= [m_2 g c_2 \quad 0]^T, \quad {}^3\mathbf{F}_x(\theta, \dot{\theta}) = [v_2 \dot{\theta}_2 / l_2 \quad v_1 \dot{\theta}_1 / (l_1 + l_2 c_2)]^T \end{aligned}$$

6.14. Wyrazy niepoprawne są następujące

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \dots + m_1 d_2 \ddot{\theta}_1 + (m_1 d_2 \dot{\theta}_1 + m_2 \dot{d}_2) g c_1 \\ \tau_2 &= \dots + m_1 \dot{d}_2 \ddot{\theta}_1 - m_1 d_1 \dot{d}_1 + m_2 d_2 g s_1 \end{aligned}$$

6.15. Odpowiedź jest taka sama jak pokazana w przykładzie 6.5.

$$6.16. \underline{\tau} = [f_1 \quad \tau_2]^T = \mathbf{M}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{v}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta)$$

$$\text{gdzie } \theta = [d_1 \quad \theta_2]^T$$

$$\mathbf{M}(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\theta, \dot{\theta}) = 0, \quad \mathbf{G}(\theta) = 0$$

6.17. Patrz w bibliografii pozycja [22], a także przykład 10.6.

6.18. Sensowny model tarcia, tj. wyraz $\mathbf{F}(\theta, \dot{\theta})$, prawdopodobnie ma tę własność, że siła tarcia (lub moment) w połączeniu ruchowym i zależy tylko od prędkości w połączeniu, tzn. $\mathbf{F}(\theta, \dot{\theta}) = [f_1(\theta, \dot{\theta}_1) \quad f_2(\theta, \dot{\theta}_2) \dots f_N(\theta, \dot{\theta}_N)]^T$. Ponadto, każda funkcja $f_i(\theta, \dot{\theta}_i)$ powinna być "bierma", tzn. powinna leżeć w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych $f_i(\dot{\theta}_i)$.

7. GENEROWANIE TRAJEKTORII

7.1. W celu połączenia punktu początkowego, dwóch punktów przejściowych i punktu docelowego potrzeba trzech wielomianów trzeciego stopnia.

Oznacza to, że dla każdego połączenia ruchowego trzeba obliczyć po cztery współczynniki dla trzech wielomianów, zatem łącznie - 18 wielomianów i 72 współczynniki.

- 7.2. Stosując wzory (7.6) dla $\theta_0 = -5^\circ$, $\theta_f = 80^\circ$, $t_f = 4,0$ s, otrzymuje się $a_0 = -5^\circ$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3 \cdot 85/16^\circ$, $a_3 = -85/32^\circ$.
- 7.3. Stosując wzór (7.23) widzimy, że przyspieszenie powinno być $\ddot{\theta} \geq 4 \cdot 85/16 = 85/4$. Jeśli wybierzemy dokładnie $\ddot{\theta} = 85/4 \text{ } ^\circ/\text{s}^2$, wtedy liniowy odcinek skraca się do zera, a $t_b = 2$ s. Jeśli zamiast tego wybierzemy $\ddot{\theta} = 85 \text{ } ^\circ/\text{s}^2$, wtedy z (7.22) mamy $t_b = 2 - \sqrt{3}$ s. Zatem długość odcinka liniowego wynosi $2\sqrt{3}$ s, a prędkość na tym odcinku wynosi $\dot{\theta} = 85/(2 - \sqrt{3}) \text{ } ^\circ/\text{s}$.
- 7.4. W zasadzie jest to ćwiczenie programowania. Dane opisujące trajektorię (punkty pośrednie, czas, itp.) powinny być zawarte w wykazie zawierającym po jednym węźle na odcinek trajektorii. Również planowana trajektoria (czasy odcinków krzywoliniowych, prędkość itd.) powinny być zawarte w drugim algorytmie, który stanowi wyjście z procedury.
- 7.5. Wykorzystaj wzory (7.15) do wyznaczenia współczynników.
- 7.6. Stosując wzory (7.11) dla pierwszego odcinka oraz przyjmując dane: $\theta_0 = 5^\circ$, $\theta_f = 15^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\theta}_f = 17,5 \text{ } ^\circ/\text{s}$, $t_f = 1$ s, otrzymuje się: $a_0 = 5$, $a_1 = 0$, $a_2 = 12,5$, $a_3 = -2,5$.
 Dla drugiego odcinka przyjmując dane: $\theta_0 = 15^\circ$, $\theta_f = 40^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 17,5$, $\dot{\theta}_f = 0$, $t_f = 1$ s, otrzymuje się: $a_0 = 15$, $a_1 = 17,5$, $a_2 = 40$, $a_3 = -32,5$.
 Następnie oblicza się wartości wielomianu (7.3) w celu otrzymania wykresów trajektorii.
- 7.7. Żaden odcinek nie jest "wewnętrzny" odcinkiem, zatem wykorzystano wzory (7.26) i (7.28). Według (7.26) obliczono:
 $\ddot{\theta}_1 = 80$, $t_1 = 1 - \sqrt{3}/2$, $\dot{\theta}_{12} = 40/(2 + \sqrt{3})$.
 Według (7.28) obliczono:
 $\ddot{\theta}_3 = -80$, $t_3 = 1 - \sqrt{1 - 5/8}$, $\dot{\theta}_{23} = 50/(1 + \sqrt{1 - 5/6})$
 W końcu punkt wewnętrzny oblicza się wg wzoru (7.24)
 $t_2 = (\dot{\theta}_{23} - \dot{\theta}_{12})/80$
- 7.8. Wykorzystując wzory (7.15) oblicza się współczynniki, a wg wzoru (7.3) wyznacza się wielomiany.
- 7.9. Dla pierwszego odcinka wg (7.11), przyjmując dane: $\theta_0 = 5^\circ$, $\theta_f = 15^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\theta}_f = 0$, $t_f = 2$ s, otrzymuje się: $a_0 = 5$, $a_1 = 0$, $a_2 = 15/2$, $a_3 = -5/2$.
 Dla drugiego odcinka przyjęto dane: $\theta_0 = 15^\circ$, $\theta_f = -10^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\theta}_f = 0$, $t_f = 2$ s, i obliczono: $a_0 = 15$, $a_1 = 0$, $a_2 = -75/4$, $a_3 = 25/4$.
 Następnie wg wzoru (7.3) wyznaczono krzywe.

7.10. Podobnie jak dla ćw. 7.7 wykorzystano (7.26) do obliczeń $\dot{\theta}_1 = \text{sign}(15 - 5)60 = 60$, $t_1 = 2 - \sqrt{11}/3$, $\dot{\theta}_{12} = 20/(2 + \sqrt{11}/3)$.

Z zależności (7.28) obliczono: $\dot{\theta}_3 = \text{sign}(15 - (-10))60 = 60$, $t_3 = 2 - \sqrt{19}/6$, $\dot{\theta}_{23} = -50/(2 + \sqrt{19}/6)$.

W końcu z (7.24) $t_2 = (\dot{\theta}_{23} - \dot{\theta}_{12})/(-60)$.

7.11. $S_{T_G} = [10 \ 20 \ 30 \ 0 \ 0 \ 30]^T$

7.12.

$$S_{T_G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0,707 & -0,707 & -20 \\ 0 & 0,707 & 0,707 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.13. i 7.14. Ćwiczenia z zakresu programowania. Uwaga: przyjmij takie same trajektorie dla każdego połączenia ruchowego.

7.15. Niech

$$\dot{\theta}_v = \frac{1}{2(t_{f1} + t_{f2})} \left[3(\theta_v - \theta_0) \frac{t_{f2}}{t_{f1}} + 3(\theta_g - \theta_v) \frac{t_{f1}}{t_{f2}} \right]$$

Wtedy: $a_{20} = \theta_v$, $a_{21} = \dot{\theta}_v$, $a_{22} = 3(\theta_g - \theta_v)/t_{f2}^2 - 2\dot{\theta}_v/t_{f2}$,

$$a_{23} = -2(\theta_g - \theta_v)/t_{f2}^3 - \dot{\theta}_v/t_{f2}^2$$

$$a_{10} = \theta_0$$
, $a_{11} = 0$, $a_{12} = 3(\theta_v - \theta_0)/t_{f1}^2 + \dot{\theta}_v/t_{f1}$,

$$a_{13} = -2(\theta_v - \theta_0)/t_{f1}^3 + \dot{\theta}_v/t_{f1}^2$$

7.16. $t_f > \max \left[\frac{2|\theta_f - \theta_0|/\dot{\theta}_{max}}{3}, \sqrt{\frac{6|\theta_f - \theta_0|/\ddot{\theta}_{max}}{}} \right]$

Zatem współczynniki wielomianu są dane dane przez wzory (7.11).

7.17. Różniczkując podany wielomian otrzymuje się:

$$\dot{\theta}(t) = 180t - 180t^2, \ddot{\theta}(t) = 180 - 360t$$

stąd dla $t = 0$ i $t = 1$ otrzymuje się: $\theta(0) = 10$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\ddot{\theta}(0) = 180$
 $\theta(1) = 40$, $\dot{\theta}(1) = 0$, $\ddot{\theta}(1) = -180$.

7.18. Stosując te same równania jak w ćwiczeniu 7.17 i obliczając dla $t = 2$ otrzymuje się: $\theta(2) = -110$, $\dot{\theta}(2) = -360$, $\ddot{\theta}(2) = -540$.

7.19. Ponieważ: $\dot{\theta}(t) = 5 + 140t - 135t^2$, $\ddot{\theta}(t) = 140 - 270t$, zatem: $\theta(0) = 10$, $\dot{\theta}(0) = 5$, $\ddot{\theta}(0) = 140$, $\theta(1) = 40$, $\dot{\theta}(1) = 10$, $\ddot{\theta}(1) = -130$.

7.20. Stosując równania z ćwiczenia 7.19 i obliczając dla $t = 2$ otrzymuje się: $\theta(2) = -60$, $\dot{\theta}(2) = -225$, $\ddot{\theta}(2) = -400$.

8. PROJEKTOWANIE MECHANIZMÓW MANIPULATORA

8.1. Promień lasera może być rozpatrywany jako prosta w przestrzeni. Na ogół bierze się 4 stopnie swobody, aby usytuować prostą w przestrzeni.

Zatem odpowiedź jest 4.

8.3. Stosując (8.1) mamy:

$$L = u - l, \quad W = \frac{4}{3}\pi(u^3 - l^3), \quad Q_L = (u - l)\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi(u^3 - l^3)}.$$

8.4. Niech k_2 oznacza sztywność wału o średnicy 2 mm, a k_3 – sztywność wału o średnicy 3 mm. Stosując wzory (8.14) i (8.19) otrzymuje się

$$\frac{1}{k_{zast}} = \frac{1}{k_2} n^2 + \frac{1}{k_3}.$$

Z zależności (8.15) oblicza się:

$$k_2 = \pi \cdot 7,5 \cdot 10^{10} \cdot 0,002^4 / 32 \cdot 0,30 = 0,393 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

$$k_3 = \pi \cdot 7,5 \cdot 10^{10} \cdot 0,003^4 / 32 \cdot 0,30 = 1,988 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

$$\frac{1}{k_{zast}} = 1/0,393 \cdot 8^2 + 1/1,988 = 0,5427, \quad k_{zast} = 1,8426 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

8.5. Obciążenie skręcające wywołane przez przyspieszenie środka masy wokół osi łożyska wynosi $\tau = 0,30 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 9,8 = 58,8 \text{ N} \cdot \text{m}$. Wymagana sztywność wału $k = \tau/\Delta\theta = 58,8/0,1 = 588 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$.

Rozwiązujejąc równanie (8.18) względem d otrzymuje się

$$d = \sqrt[4]{\frac{32Ik}{G\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,30 \cdot 588}{7,5 \cdot 10^{10} \cdot \pi}} = 0,01244 \text{ m} = 12,44 \text{ mm}$$

8.6. $k_{zast} = 230,77 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$.

8.7. Jeśli pokrywają się trzy punkty połączeń ruchomych na ruchomej lub nieruchomej platformie. Na przykład dla mechanizmu z rys. 8.22, jeśli $q_i = q_j = q_k$ ($i \neq j \neq k$), lub jeśli $p_i = p_j = p_k$.

8.8. We wzorze Grublera (8.9) mamy: $n = 18$ (12 przegubów kulowych i 6 par przesuwnych), $l = 14$ (po dwie części każdego siłownika daje 12 członów, ponadto ruchoma i nieruchoma platforma).

$$F = 6(14 - 18 - 1) + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 12$$

8.9. Sztywność układu napędowego zredukowana do koła zębatego #1 oblicza się wg wzoru

$$\frac{1}{k_{zeb\#1}} = \frac{1}{k_{sprz\#1}} + \frac{1}{k_{wału}} + \frac{1}{k_{sprz\#2}} = 1/100 + 1/400 + 1/100 = 0,0225$$

$$k_{zeb\#1} = 44,44 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

Przyjęto, że wał łączący koła zębate #2 i #3 jest sztywny. Zatem sztywności zredukowane do kół zębatych #3 i #4:

$$\frac{1}{k_{zeb\#3}} = 1/2000 + 1/6^2 \cdot 44,44 = 1,125 \cdot 10^{-3}, \quad k_{zeb\#3} = 888,89 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

$$\frac{1}{k_{zeb\#4}} = 1/2000 + 1/6^2 \cdot 888,88 = 5,3125 \cdot 10^{-4}, \quad k_{zeb\#4} = 1882,35 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

$$8.10. \text{ Błąd} = \frac{2000 - 1882,35}{1882,35} \cdot 100\% = 6,25\%.$$

8.11. Patrz rozwiązanie ćwiczenia 4.12.

8.12. Dla $i = 1, 2, \dots, 6$ $d_i = |\overset{\circ}{T} \mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i|$.

8.13. Maksimum $w = |l_1 l_2 s_2|$ dla wszystkich konfiguracji wystąpi przy maksymum $w' = l_1 l_2$. Ponieważ $l_1 + l_2 = c$ (gdzie c – pewna stała), to $w' = cl_1 + l_1^2$, $dw'/dl_1 = c - 2l_1$, $d^2w'/dl_1^2 = -2$. Stąd maksimum w' wystąpi wtedy, gdy $l_1 = c/2$, a zatem $l_1 = l_2$.

8.14. Tak samo jak w ćwiczeniu 8.13, ponieważ oś trzeciego stopnia swobody jest prostopadła do pierwszych dwu.

8.16. $k = 0,006135 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$.

8.17. $\eta = r_2/r_1 = 6$. 8.18. 4 8.19. 6 8.20. 3

8.22. $I = I_{swob} + \frac{1}{3}I_{styk}$, $I_{swob} = 2\sqrt{d_c^2 - (r_1 - r_2)^2}$

$I_{styk} = 2[(\pi - \theta_1)r_1 + \theta_1 r_2]$, gdzie $\theta_1 = \arccos(r_1/d_c)$,

d_c – odległość osi kół pasowych, $r_1 > r_2$

$k = AE/(I_{swob} + \frac{1}{3}I_{styk})$.

9. LINIOWE UKŁADY STEROWANIA MANIPULATORÓW

9.1. W ogólnym rozwiązyaniu $x(t) = c'_1 e^{s_1 t} + c'_2 e^{s_2 t}$ stałe c'_1 i c'_2 powinny być (na ogół) liczbami zespolonymi, ponieważ występuje s_i , a $x(t)$ powinno być rzeczywiste. Podstawiając podane zależności na s_i oraz stosując wzór Eulera (9.13) otrzymuje się

$$x(t) = (c'_1 + c'_2)e^{\lambda t} \cos \mu t + (c'_1 - c'_2)i e^{\lambda t} \sin \mu t$$

Aby $x(t)$ było rzeczywiste, stałe powinny spełniać warunek $c'_1 + c'_2 = c_1$ $c'_1 - c'_2 = c_2 i$, gdzie c_1 i c_2 są rzeczywiste. To prowadzi do rozwiązania $x(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t$.

9.2. Za pomocą wzorów (9.5) otrzymuje się $s_1 = -1,0$, $s_2 = -2,0$, stąd:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \text{ oraz } \dot{x}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$\text{Dla } t = 0, \quad x(0) = 0 = c_1 + c_2, \quad \dot{x}(0) = 0 = -c_1 + 2c_2$$

$$\text{Dodając te dwa równania otrzymuje się } c_2 = -1, \quad c_1 = 2.$$

$$\text{W końcu } x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.$$

$$9.3. \quad x(t) = 4(1 + t)e^{-t}$$

$$9.4. \quad x(t) = 2e^{-2t} \cos t + 4e^{-2t} \sin t$$

$$9.5. \quad x(t) = \frac{7}{3}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-5t}$$

$$9.6. \quad \text{Minimum występuje, gdy } c_2 = -1 \Rightarrow l_2^2 m_2 - 2l_1 l_2 m_2 + l_1^2(m_1 + m_2).$$

$$\text{Maksimum, gdy } c_2 = 1 \Rightarrow l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 + l_1^2(m_1 + m_2).$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymuje się: min = 1, max = 3, stąd zmiana wartości jako procentowy udział wartości maksymalnej wynosi 66,67%.

$$9.7. \quad \text{Minimum zastępczego momentu bezwładności wynosi } I_{min} + \eta^2 I_m = 5,0.$$

Maksimum $I_{max} + \eta^2 I_m = 7,0$. Zmiana jako procentowy udział wartości maksymalnej wynosi 28,57%.

9.8. Równanie dynamiki układu zamkniętego (9.38) osiąga tłumienie krytyczne. W przypadku zastosowania ograniczenia (9.72) dla $\omega_{rez} = 6 \text{ rad/s}$ układ wzmacnienia powinien mieć $\omega_n = 3 \text{ rad/s}$. Z zależności (9.20) $\omega_n = \sqrt{k'/m}$, stąd $k' = 9$, $k_p = k' - k = 4$, $b' = 6$, $k_v = 2$.

- 9.9. Minimalna wartość zastępczego momentu bezwładności układu wynosi $4 + 100 \cdot 0,01 = 5$, maksymalna wartość wynosi 6. Dla najwyższej częstotliwości rezonansowej, tzn. $\omega_n \leq 4$ rad/s, aby zapewnić tłumienie podkrytyczne, projekt uwzględnia maksymalną wartość zastępczego momentu bezwładności, tzn. $m = 6$.

Ponieważ nie podano informacji o tłumieniu i sztywności w układzie otwartym, to przyjmijmy je równe zeru. Zatem $\alpha = 6$, $\beta = 0$. Ponieważ $\alpha = m$, to teraz mamy w wyniku układ jednostkowy ($m = 1$). Stąd: $k_p = \omega_n^2 m = 16$, $k_v = 2\sqrt{mk_p} = 8$.

- 9.10. Stosując wzór (8.24) oraz przyjmując aluminium mamy

$$k = 0,333 \cdot 2 \cdot 10^{11} (0,05^4 - 0,04^4) / 4 \cdot 0,5^3 = 123 \cdot 10^3$$

Wykorzystując informacje z rys. 9.13 wyznacza się masę zastępczą $m = 0,23 \cdot 5 = 1,15$ kg oraz $\omega_{rez} = \sqrt{k/m} \approx 327,04$ rad/s. Jest to bardzo wysoka częstotliwość, zatem projektant jest prawdopodobnie w błędzie myśląc, że drgania tego członu przedstawiają najwyższą częstotliwość rezonansową.

- 9.11. $\omega_{rez} = 31,62$ rad/s $\approx 5,03$ Hz.

- 9.12. $k = 500 \cdot 8^2 = 32\ 000$; $\omega_{rez} = \sqrt{32\ 000/1} = 178,8$ rad/s $\approx 28,47$ Hz.

- 9.13. Jak w ćwiczeniu 9.12 sztywność zastępcza $k = 32\ 000$. Zastępczy moment bezwładności $I = 1 + 0,1 \cdot 8^2 = 7,4$, natomiast $\omega_{rez} = \sqrt{32\ 000/7,4} = 65,76$ rad/s $\approx 10,47$ Hz.

- 9.14. $k_p = 612,5$, $\alpha = 6$, $k_v = 49,5$, $\beta = 0$.

- 9.16. Sztywność przekładni jest jak w ćwiczeniu 8.4, tzn. $k = 1,843$ N·m/rad, $\omega_{max} = \sqrt{1,843/1} = 1,357$ rad/s $\approx 0,2$ Hz, $\omega_{min} = \sqrt{1,843/4} = 0,679$ rad/s $\approx 0,11$ Hz.

10. NIELINIOWE UKŁADY STEROWANIA MANIPULATORÓW

- 10.1. Niech $\tau = \alpha\dot{\tau}' + \beta$, $\alpha = 2\sqrt{\theta} + 1$, $\beta = 3\dot{\theta}^2 - \sin\theta$. Zatem $\tau' = \ddot{\theta}_d + k_w \dot{e} + k_\theta e$, gdzie $e = \theta_d - \theta$; $k_\theta = k_{CL} = 10$, $k_w = 2\sqrt{k_{CL}} = 2\sqrt{10}$.

- 10.2. Niech $\tau = \alpha\dot{\tau}' + \beta$, $\alpha = 2$, $\beta = 50\dot{\theta} - 13\dot{\theta}^2 + 5$ oraz $\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e$, gdzie $e = \theta_d - \theta$; $k_p = 10$, $k_v = 2\sqrt{10}$.

- 10.5. $\underline{\tau} = M\underline{\ddot{\theta}} + \mathbf{v}$,

$$M = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ m_2 l_2^2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ v_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Zatem jak zwykle: $\tau = \alpha\dot{\tau}' + \beta$, $\alpha = M$, $\beta = v$;

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e, \quad e = \theta_d - \theta,$$

$$k_p = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix}, \quad k_v = \begin{bmatrix} k_{v1} & 0 \\ 0 & k_{v2} \end{bmatrix}, \quad k_{vi} = 2\sqrt{k_{pi}}$$

Ponieważ macierz mas M nie jest symetryczna, to równania te nie mogą reprezentować sprzążonego układu mechanicznego.

- 10.6.** W stanie ustalonym równanie błędu układu jest następujące

$$k_p e = (\psi_m l g \cos \theta) / \hat{m} l^2, \text{ stąd } e = \psi g \cos \theta / k_p \hat{m} l.$$

Zauważ, że jest to funkcja \hat{m} , jak również innych zmiennych wspomnianych w zadaniu. Osiaga maksimum przy $\theta = 0$ lub 180° , ponieważ błąd wynika z obciążenia masą, co nie jest zaskoczeniem.

- 10.7.** W zadaniu nie podano tego, ale my przyjmiemy, że silnik może wywierać siłę F_i na każdą masę. Dodatnia siła F_i wywołuje wzrost x_i . Z warunków równowagi sił działających na ciała otrzymuje się równania ruchu:

$$f_1 = m_1 \ddot{x}_1 + (b_1 + b_2) \dot{x}_1 + b_2 \dot{x}_2 + kx_2 - kx_1$$

$$f_2 = m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - x_1)$$

Niech $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{F}' + \beta$, przy $\alpha = M$, $\beta = Q$

$$\text{gdzie } M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} (\beta_1 + \beta_2) \dot{x}_1 - \beta_2 \dot{x}_2 + k(x_2 - x_1) \\ b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = [f_1 \ f_2]^T, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T, \quad \mathbf{E} = [e_1 \ e_2]^T, \quad e_i = x_{di} - x_i$$

$$\mathbf{F}' = \ddot{\mathbf{x}}_d + k_v \dot{\mathbf{E}} + k_p \mathbf{E}$$

$$k_p = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix}, \quad k_v = \begin{bmatrix} k_{v1} & 0 \\ 0 & k_{v2} \end{bmatrix}, \quad k_{vi} = 2\sqrt{k_{pi}}$$

- 10.8.** Wpierw zauważ (patrz. rozdz. 6.7), że zależność od θ_1 występuje tylko w $G(\Theta)$ i zatem

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \partial G_1 / \partial \theta_1 & \partial \tau_1 / \partial \theta_2 \\ \partial G_2 / \partial \theta_1 & \partial \tau_2 / \partial \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\partial G_1 / \partial \theta_1 = -m_2 l_2 g s_{12} - (m_1 + m_2) l_1 g s_1$$

$$\partial G_2 / \partial \theta_1 = -m_2 l_2 g s_{12}$$

$$\partial \tau_1 / \partial \theta_2 = -l_1 l_2 m_2 s_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - 2m_2 l_1 l_2 c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 c_2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 l_2 g s_{12}$$

$$\partial \tau_2 / \partial \theta_2 = -l_1 l_2 m_2 s_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 c_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 g s_{12}$$

Aby móc powiedzieć więcej, trzeba uczynić pewne założenia. Niech średnia prędkość wynosi $\dot{\theta}_A$, a średnie przyspieszenie $\ddot{\theta}_A = \dot{\theta}_A^2$. Dla wielu

robotów jest to bliskie prawdy. Przy tej prędkości $\delta\theta = \dot{\theta}_A \Delta t$, gdzie Δt jest okresem wyrazów zależnych od konfiguracji.

$$|\delta\tau_1| = \Delta t (\dot{\theta}_A^3 l_1 l_2 m_2 (3s_2 + 2c_2) + 2m_2 l_2 g s_{12} \dot{\theta}_A + (m_1 + m_2) l_1 g s_1 \dot{\theta}_A)$$

$$|\delta\tau_2| = \Delta t (\dot{\theta}_A^3 l_1 l_2 m_2 (s_2 + c_2) + 2m_2 l_2 g s_{12} \dot{\theta}_A)$$

Stąd można stwierdzić, że np. maksymalna wartość τ wyznaczono dla średnich trajektorii; dla $\delta\tau$ wymaga się, aby było mniejsze od 5% tego maksimum. Zatem Δt może być wyznaczone na podstawie oczekiwanej $\dot{\theta}_A$.

10.9. Podobnie jak w ćwiczeniu 10.8 wynik będzie określony w zależności od średniej prędkości kartezjańskiej, zamiast od średniej prędkości wewnętrznej, co można uzyskać za pomocą pewnej średniej normy jacobianu.

10.10. Niech $f = \alpha f' + \beta$, przy czym $\alpha = 2$, $\beta = 5x - 12$,

$$\text{oraz } f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e, \quad e = x_d - x, \quad k_p = 20, \quad k_v = 2\sqrt{20}$$

10.11. Dla rozpatrywanego układu uogólniona funkcja energii (wg Lapunowa) ma postać:

$$v = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T K_p \theta; \quad \dot{v} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} + \dot{\theta}^T [-v_M(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} - G(\theta) - k_p \theta - M(\theta) k_v \dot{\theta} + G(\theta)] + \dot{\theta}^T k_p \theta = -\dot{\theta}^T M(\theta) K_v \dot{\theta}$$

Pochodna \dot{v} jest niedodatnia, jeśli $M(\theta)K_v$ jest dodatnio określona; $K_v = k_v I_n$, gdzie k_v jest liczbą dodatnią.

10.12. Całkowicie podobne do ćwiczenia 10.11.

10.13. Zastosuj

$$v = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} + \int_{s1}^{s2} M(\theta) K_p \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} ds > 0$$

stąd $\dot{v} = -\dot{\theta}^T M(\theta) K_v \dot{\theta} < 0$, jeśli $K_v = k_v I_n$, $k_v > 0$.

10.14. Analogicznie do ćwiczenia 10.13.

10.15. Zastosuj

$$v = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T K_p \theta + P(\theta)$$

gdzie $P(\theta)$ jest energią potencjalną zachowaną w mechanizmie

$$\dot{v} = -\dot{\theta}^T G(\theta) - \dot{\theta}^T K_v \dot{\theta} + \dot{P}(\theta). \quad \text{Teraz } G(\theta) = \partial P(\theta) / \partial \theta. \quad \text{Można wykazać,}$$

że $\dot{\theta}^T G(\theta) = \dot{P}(\theta)$, $\dot{v} = -\dot{\theta}^T K_v \dot{\theta}$, z czego wynika stabilność układu.

Błąd stanu ustalonego $\theta = -K_p^{-1} G(\theta)$.

10.17. $\alpha = ax^2$, $\beta = bx^2 + csinx$, $k_v = 2\sqrt{k_p}$

10.18. $M\ddot{\theta} + B\dot{\theta}^2 + C\dot{\theta} = M[\ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e] + \sin\theta$

11. STEROWANIE MANIPULATOREM Z REGULOWANĄ WARTOŚCIĄ SIŁY

11.1. Więzy naturalne: $v_x = 0$, $v_y = 0$, $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$, $f_z = 0$.

11.2. Więzy sztuczne: $v_z = -a_1$, $f_x = 0$, $f_y = 0$, $N_x = 0$, $N_y = 0$, $N_z = 0$, gdzie a_1 oznacza prędkość wkładania.

11.3. Przyjmując, że zależności (11.9) i (11.14) są sobie równe, otrzymujemy

$$mk_e^{-1}[\ddot{f}_d + k_{vf}\dot{e}_f + k_{pf}e_f] + f_d = mk_e^{-1}\ddot{f}_e + f_e + f_{zakł}$$

$$mk_e^{-1}[\ddot{e}_f + k_{vf}\dot{e}_f + k_{pf}e_f] = f_e - f_d - f_{zakł}$$

$$\ddot{e}_f + k_{vf}\dot{e}_f + (k_{pf} + m^{-1}k_e)e_f = m^{-1}k_e f_{zakł}$$

A zatem dla zapewnienia tłumienia właściwego (tzn. dla doboru k_{vf}) trzeba znać k_e (które jest na ogół niewiadome).

11.4. Wpierw wyznacza się $\overset{B}{A}^T$ przez odwrócenie $\overset{A}{B}^T$

$$\overset{B}{A}^T = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,500 & 0,000 & -8,66 \\ -0,500 & 0,866 & 0,000 & 5,00 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & -5,00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Następnie } \overset{B}{F} = \overset{B}{A}^T \overset{A}{F} = [1 \ 1,73 \ -3]^T$$

$$\overset{B}{N} = \overset{B}{P}_{A\text{org}} \times \overset{B}{F} + \overset{B}{A}^T \overset{A}{N} = [-6,3 \ -30,9 \ -15,8]^T$$

$$\overset{B}{g} = [1,0 \ 1,73 \ -3 \ -6,3 \ -6,3 \ -30,9 \ -15,8]^T$$

11.5. Podobnie jak w ćwiczeniu 11.4 w wyniku otrzymuje się

$$\overset{B}{g} = [2,19 \ 8,19 \ 0 \ 44,3 \ -8,5 \ -60,3]^T$$

11.6. Przy założeniu, że książka jest sztywna, dobra strategia polega na włożeniu jednego rogu książki do szczeliny, a następnie obróceniu jej do pozycji pionowej, kiedy to wywierając siłę wpycha się ją do środka.

11.7. Dobrym pomysłem jest związanie układu $\{c\}$ z drzwiami tak, że porusza się w miarę postępu zadania. Więzy naturalne: $v_y = 0$, $v_z = 0$, $\omega_x = 0$, $w_y = 0$, $f_x = 0$, $N_z = 0$. Więzy sztuczne: $v_x = a_1$, $\omega_z = a_1/r f_y = 0$, $f_z = 0$, $N_x = 0$, $N_y = 0$, gdzie r oznacza promień drzwi (tzn. odległość od zawiasu do początku układu $\{c\}$), a_1 oznacza prędkość liniową chwytaka manipulatora.

11.8. Więzy naturalne: $v_x = 0$, $v_y = 0$, $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$, $f_z = 0$. Tutaj przyjmiemy, że ponieważ korek jest bardzo zaciśnięty, to będzie podobny do kwadratowego pręta w kwadratowym otworze i jego obrót wokół osi \hat{z} nie jest możliwy. Wtedy więzy sztuczne: $v_z = a_1$, $f_x = 0$, $f_y = 0$, $N_x = 0$, $N_y = 0$, $N_z = 0$,

11.9. Zastosuj prawo sterowania $\tau = \ddot{\Theta}_d + I^T K_{px} \mathbf{IE} + K_v \dot{\mathbf{E}}$, gdzie $\mathbf{E} = \Theta_d - \Theta$. Podstawiając $\tau = \ddot{\Theta}$ i przyrównując do prawej strony prawa sterowania, otrzymuje się

$$\ddot{\mathbf{E}} + K_V \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{I}^T K_{Px} \mathbf{IE} = 0$$

Wybierz równanie Lapunowa $\mathbf{L} = \mathbf{E}^T \mathbf{I}^T K_{Px} \mathbf{IE} + \dot{\mathbf{E}}^T \dot{\mathbf{E}}$. Jest ono dodatnio określone zarówno względem \mathbf{E} , jak i $\dot{\mathbf{E}}$. Różniczkując to równanie, przy uproszczeniu, że $\mathbf{I} \approx \mathbf{0}$, otrzymuje się $\dot{\mathbf{L}} = -2\dot{\mathbf{E}}^T K_V \dot{\mathbf{E}}$, która jest ujemnie określona, jeśli K_V jest dodatnio określone.

- 11.10.** To zadanie wykracza poza zakres książki, ponieważ wprowadza teorię sterowania wielu zmiennych. Rozpatrywany układ jest wielowejściowy i wielowyściowy, wiąże się z tym "pierwsze zadanie", co oznacza "tłumienie krytyczne" w tym kontekście. Niech wspomnę tutaj o schemacie tłumienia, który dawał dobre wyniki w doświadczeniach laboratoryjnych. W ten sam sposób, w jaki układ skalarny o sztywności K_p jest tłumiony z wartością $2\sqrt{K_p}$, tak wykorzystujemy $\mathbf{I}^T 2\sqrt{K_{Px}} \mathbf{I}$ do tłumienia układu o sztywności $\mathbf{I}^T K_{Px} \mathbf{I}$. Uwaga: $\sqrt{K_{Px}}$ ma na przekątnej pierwiastki kwadratowe elementów diagonalnych macierzy K_{Px} .

- 11.11.** Więzy naturalne: $v_x = 0$, $v_z = 0$, $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$, $f_y = 0$.

12. JĘZYKI PROGRAMOWANIA ROBOTA

Ćwiczenia w tym rozdziale mają charakter programowania. Pozostawiłem wybór, jaki język programowania robota zastosować opcjonalnie (8 lub więcej sugestii). Zatem trudno dać rozwiązania i postanowiłem nie robić tego. Instruktorzy prawdopodobnie zdecydują, jak wyszczególnić zadania w danym języku dla robota dostępnego w ośrodku i może wykorzystać lokalne ustalenia i urządzenia. Stąd spodziewam się wielu odchyleń od problematyki sugerowanej w tekście książki.

13. UKŁADY PROGRAMOWANIA AUTONOMICZNEGO

- 13.1.** Wykrywanie kolizji (w tym kontekście) odnosi się do algorytmu umożliwiającego określenie, czy dwa lub więcej obiektów (zamodelowanych przestrzennie) dotyka lub uderza każdy z pozostałych. Omijanie kolizji jest trudnym zadaniem obliczania toru, wzduż którego obiekt jest przemieszczany tak, aby nie wystąpiły kolizje. Planowanie toru bezkolizyjnego jest bardziej opisowym pojęciem dla unikania kolizji.
- 13.2.** Model otoczenia jest zbiorem danych zawartych w pamięci komputera, które opisują pewne właściwości manipulatora lub jego środowiska. Emulacja planowania toru jest pojęciem stosowanym do opisania algorytmu w układzie symulacyjnym, który próbuje modelować (lub emulować) algorytm planowania toru dla sterownika robota. Emulacja dynamiczna jest synonimem symulacji dynamicznej – lecz implikuje, że dynamiczny symulator próbuje dorównać pewnemu układowi fizycznemu.

- 13.3. Automatyczne umiejscawianie robota jest wynikiem algorytmu, który określa względne umiejscowienie między robotem i wyrobem, a ponadto sposób osiągnięcia pewnych właściwości, takich jak: osiągi kinetyczne, omijanie osobliwości, omijanie kolizji i inne. Trajektorie czasowo-optymalne są to takie trajektorie, które przemieszczają z A do B w minimalnym czasie. Analiza propagacji błędu jest algorymem do obliczeń przewidywanej pewności wiedzy dotyczącej modelu otoczenia.
- 13.4. Graficzny model krawędziowy odrysowuje wielościan przez oddawanie wszystkich jego krawędzi. W cieniowanym obrazie przestrzeni wszystkie ściany wielościanu są rzutowane na ekran jako dwuwymiarowe wieloboki, a następnie "wypełniane" - tzn. wszystkie punkty świetlne z tych wieloboków są rozjaśniane. Często stosuje się sortowanie wieloboków lub technikę dwubuforową w celu eliminacji linii zakrytych.
- 13.5. Języki programowania robota są zbliżone do konwencjonalnych języków komputerowych z dodaniem zdań o ruchu lub innych poleceń specyficznych dla robota. Programowanie na poziomie zadania odnosi się do języków lub układów, w których możliwe jest programowanie na wysokim poziomie, jak np. "wziąć sworzeń". Programowanie autonomiczne jest zdefiniowane w pierwszym zdaniu rozdz. 13.
- 13.6. Wzorcowanie (kalibrowanie) w kontekście układów programowania autonomicznego odnosi się do zadania zbliżenia symulowanego gniazda roboczego do aktualnego gniazda. Ruch skoordynowany występuje, gdy dwa lub więcej narzędzi powinno poruszać się razem w sposób zsynchronizowany kinetycznie. Automatyczne harmonogramowanie jest algorymem, który automatycznie dzieli zadanie między wiele maszyn.
- 13.7. Sytuacja zmienia się każdego roku, zatem sprawdź ostatnie doniesienia. W późnych latach osiemdziesiątych i wczesnych dziewięćdziesiątych moc grafiki komputerowej była wzrastająca prawdopodobnie z współczynnikiem 2-5 na każdy rok.
- 13.8. Wkładanie części do komputera PC, zgrzewanie nadwozia, spawanie łykowe części, malowanie samochodu itp.
- 13.9. Bardziej "inteligentny" układ programujący wymaga większego modelu otoczenia (mówiąc w uproszczeniu). Jednak większy model otoczenia może być niedokładny na więcej sposobów.
- 13.10. Dość zbliżona do takiej sytuacji jest niemożność szybkiego cofnięcia jeszcze przed dotknięciem powierzchni ograniczającej.