

Przygotowali: Jan Kąkol i Maciej Kucharski

Zadanie 1.

Dla danych z wejścia różnych węzłów x_0, x_1, \dots, x_{2n} metodą Newtona wyznaczyć wielomian P stopnia $k = 3n + 1$ taki, że $P(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \dots, 2n$, $P'(x_{2i}) = z_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ z danymi y_0, y_1, \dots, y_{2n} oraz z_0, z_1, \dots, z_n . Wielomian P przedstawić w postaci ogólnej. Następnie obliczyć całkę nieoznaczoną $\int P(x)dx$.

Metoda obliczeniowa: Interpolacja Hermite'a

Przykładowe rozwiązanie.

Dane wprowadzone przez użytkownika:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	1	2
$f'(x_i)$	1		-1

x_0	0	0
x_0	0	0
x_1	1	1
x_2	2	2
x_2	2	2

$f[0,0] = f'[0]$	1
$f[0,1] = \frac{f[1] - f[0]}{1 - 0}$	1
$f[1,2] = \frac{f[2] - f[1]}{2 - 1}$	1
$f[2,2] = f'[2]$	-1

$f[0,0,1] = \frac{f[0,1] - f[0,0]}{1 - 0}$	0
$f[0,1,2] = \frac{f[1,2] - f[0,1]}{2 - 0}$	0
$f[1,2,2] = \frac{f[2,2] - f[1,2]}{2 - 1}$	-2

$f[0,0,1,2] = \frac{f[0,1,2] - f[0,0,1]}{2 - 0}$	0
$f[0,1,2,2] = \frac{f[1,2,2] - f[0,1,2]}{2 - 0}$	-1

$f[0,0,1,2,2] = \frac{f[0,1,2,2] - f[0,0,1,2]}{2 - 0}$	$-\frac{1}{2}$

Współczynniki:

$$b_0 = 0 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 0 \quad b_3 = 0 \quad b_4 = -\frac{1}{2}$$

Wzór:

$$P(x) = 0 + 1(x - 0) + 0(x - 0)^2 + 0(x - 0)^2(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 0)^2(x - 1)(x - 2)$$

$$P(x) = -\frac{x^4}{2} + \frac{3x^3}{2} + x^2 + x$$

Całka:

$$\int P(x) = -\frac{x^5}{10} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Wynik: } -\frac{x^5}{10} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

Opis działania programu:

Program jest złożony z kilku istotnych funkcji, które krótko opiszę.

- pobierzDane() – funkcja odpowiedzialna za pobieranie od użytkownika danych potrzebnych do obliczeń.
- pokazTabelke() – funkcja pomocnicza, drukuje w konsoli to co znajdują się w tablicy, na których później będą dokonywane operacje.
- pokazKolumnyDoAlgorytmu() – funkcja pomocnicza, do graficznej prezentacji tabeli danych
- wylicz() – funkcja odpowiedzialna za wyliczenie ilorazów różnicowych dla węzłów wielokrotnych
- buduj tabele() – funkcja odpowiedzialna za odpowiednie generowanie powtórzeń dla danych wybranych węzłów
- zbudujWielomian() – funkcja odpowiedzialna za podstawianie współczynników wyliczonych z ilorazów różnicowych i ich odpowiednie wymnożenie
- mnozenie() – funkcja odpowiedzialna za mnożenie dwóch wielomianów które dostaje w przyjmowanych parametrach
- calkuj() – funkcja wyliczająca całkę z wielomianu
- drukujWynik() – funkcja drukuje wynik ostateczny

Opis wejścia – wyjścia.

Program rozpoczyna działanie od powitania użytkownika: „Witaj użytkowniku!” W następnej linijce pyta użytkownika ile węzłów x będzie miał zamiar wprowadzić: „Podaj ilość elementów x !” Jeśli mamy zamiar podać 3 węzły x (np. 0, 1, 2) podaje wartość „3”. To inicjuje odpowiednią ilość miejsca dla wszystkich potrzebnych obliczeń. Kolejna linijka to zapytanie o wartość pierwszego węzła: „Podaj wartość x dla x_0 !”. Tutaj użytkownik podaje wartość węzła x_0 . Po podaniu zostanie wysłany komunikat z prośbą o podanie kolejnej wartości węzła. I tak tyle razy ile użytkownik podał w pierwszym zapytaniu programu. Jeśli użytkownik podał, że chce wprowadzić 3 węzły X , to po wprowadzeniu 3 węzłów, program poprosi o podanie $f(x)$: „Podaj wartości y dla x_0 !”. I taki komunikat z odpowiednią wartością przy x (np., x_0, x_1, x_2) będzie się wyświetlał odpowiednią ilość razy (równą zadeklarowanej wcześniej ilości węzłów x). Następnie program poprosi o podanie $f'(x)$, komunikatem: „Podaj wartości yP dla x_0 !”. Zgodnie z treścią zadania $P'(x_{2i})$ dlatego program zapyta o takie elementy jak np. Podaj wartości yP dla x_0 !”, Podaj wartości yP dla x_2 !”, Podaj wartości yP dla x_4 !...” Program nie zapyta o elementy nieparzyste.

Po obliczeniach program wypisze odpowiednie komunikaty:

```
kolumna do algorytmu dla ulatwienia widoku
x | y
-----
0.0 | 0.0
0.0 | 0.0
1.0 | 1.0
2.0 | 2.0
2.0 | 2.0
```

Jest to pokazanie użytkownikowi jak jego dane są rozpisywane w tabelę z uwzględnieniem elementów wielokrotnych.

```
1.0 1.0 1.0 -1.0
```

```
0.0 0.0 -2.0
```

```
0.0 -1.0
```

```
-0.5
```

Wyniki poszczególnych obliczeń. Wydruk pomocniczy pokazujący poszczególne kroki obliczeniowe ilorazu różnicowego.

```
WIELOMIAN
```

```
0.0, 1.0, -1.0, 1.5, -0.5, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
```

Oznacza wartości współczynników wielomianowych przy odpowiedniej potęgę.

```
Wielomian
```

```
0.0x^0 + 1.0x^1 + -1.0x^2 + 1.5x^3 + -0.5x^4 + 0.0x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 +
0.0x^9 + 0.0x^10 + 0.0x^11 + 0.0x^12 + 0.0x^13 + 0.0x^14 + 0.0x^15 + 0.0x^16 +
0.0x^17 + 0.0x^18 + 0.0x^19
```

Wydruk prezentujący to samo co ten wyżej ale z przypisaniem x z odpowiednią potęgą.

```
Wynik po całkowaniu :
```

```
0.0x^1 + 0.5x^2 + -0.33x^3 + 0.37x^4 + -0.1x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 +
0.0x^10 + 0.0x^11 + 0.0x^12 + 0.0x^13 + 0.0x^14 + 0.0x^15 + 0.0x^16 + 0.0x^17 +
0.0x^18 + 0.0x^19 + 0.0x^20
```

Ostatni komunikat to wartość wyliczonej całki.

Cały wydruk działania programu:

```
Witaj uzytkowniku!
Podaja ilosc elementow x:
3
```

Podaj wartosc x dla x0:

0

Podaj wartosc x dla x1:

1

Podaj wartosc x dla x2:

2

Podaj wartosci y dla x0:

0

Podaj wartosci y dla x1:

1

Podaj wartosci y dla x2:

2

Podaj wartosci yP dla x0:

1

Podaj wartosci yP dla x2:

-1

kolumna do algorytmu dla ulatwienia widoku

x		y
---	--	---

0.0		0.0
-----	--	-----

0.0		0.0
-----	--	-----

1.0		1.0
-----	--	-----

2.0		2.0
-----	--	-----

2.0		2.0
-----	--	-----

1.0	1.0	1.0	-1.0
-----	-----	-----	------

0.0 0.0 -2.0

0.0 -1.0

-0.5

WIELOMIAN

0.0, 1.0, -1.0, 1.5, -0.5, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,

Wielomian

$0.0x^0 + 1.0x^1 + -1.0x^2 + 1.5x^3 + -0.5x^4 + 0.0x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 +$
 $0.0x^{10} + 0.0x^{11} + 0.0x^{12} + 0.0x^{13} + 0.0x^{14} + 0.0x^{15} + 0.0x^{16} + 0.0x^{17} + 0.0x^{18} +$
 $0.0x^{19}$

Wynik po calkowaniu :

$0.0x^1 + 0.5x^2 + -0.33333334x^3 + 0.375x^4 + -0.1x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 +$
 $0.0x^{10} + 0.0x^{11} + 0.0x^{12} + 0.0x^{13} + 0.0x^{14} + 0.0x^{15} + 0.0x^{16} + 0.0x^{17} + 0.0x^{18} +$
 $0.0x^{19} + 0.0x^{20}$

Zabezpieczenia i przykładowe uruchomienia programu:

Program posiada kilka zabezpieczeń przed złym użytkowaniem. Użytkownik nie może wpisać dwa razy tej samej wartości dla węzłów. Np:

```
Witaj uzytkowniku!  
Podaj ilosc elementow x:  
3  
Podaj wartosc x dla x0:  
1  
Podaj wartosc x dla x1:  
1  
Taki x juz zostal wpisany!  
Podaj wartosc x dla x1:
```

Jeśli użytkownik poda 0 w momencie pytania użytkownika ilość elementów X, program wypisze zera i przerwie działanie:

```
Witaj uzytkowniku!  
Podaj ilosc elementow x:  
0  
0
```

kolumna do algorytmu dla ułatwienia widoku

```
x | y  
-----
```

WIELOMIAN

```
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,  
Wielomian  
0.0x^0 + 0.0x^1 + 0.0x^2 + 0.0x^3 + 0.0x^4 + 0.0x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 +  
0.0x^10 + 0.0x^11 + 0.0x^12 + 0.0x^13 + 0.0x^14 + 0.0x^15 + 0.0x^16 + 0.0x^17 + 0.0x^18 +  
0.0x^19
```

Wynik po całkowaniu :

```
0.0x^1 + 0.0x^2 + 0.0x^3 + 0.0x^4 + 0.0x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 +  
0.0x^10 + 0.0x^11 + 0.0x^12 + 0.0x^13 + 0.0x^14 + 0.0x^15 + 0.0x^16 + 0.0x^17 + 0.0x^18 +  
0.0x^19 + 0.0x^20
```

Wynik uruchomienia z danymi:

x_i	0	1	-1
$f(x_i)$	2	5	7
$f'(x_i)$	1		-1

```
Witaj uzytkowniku!  
Podaj ilosc elementow x:  
3
```

Podaj wartosc x dla x0:
0
Podaj wartosc x dla x1:
1
Podaj wartosc x dla x2:
-1
Podaj wartosci y dla x0:
2
Podaj wartosci y dla x1:
5
Podaj wartosci y dla x2:
7
2
Podaj wartosci yP dla x0:
1
Podaj wartosci yP dla x2:
-1

kolumna do algorytmu dla ulatwienia widoku

x	y
0.0	2.0
0.0	2.0
1.0	5.0
-1.0	7.0
-1.0	7.0
1.0 3.0 -1.0 -1.0	

2.0 4.0 -0.0

-2.0 4.0

-6.0

WIELOMIAN

2.0, 1.0, 10.0, -2.0, -6.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,

Wielomian

$2.0x^0 + 1.0x^1 + 10.0x^2 + -2.0x^3 + -6.0x^4 + 0.0x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 + 0.0x^{10} + 0.0x^{11} + 0.0x^{12} + 0.0x^{13} + 0.0x^{14} + 0.0x^{15} + 0.0x^{16} + 0.0x^{17} + 0.0x^{18} + 0.0x^{19}$

Wynik po calkowaniu :

$2.0x^1 + 0.5x^2 + 3.33x^3 + -0.5x^4 + -1.2x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 + 0.0x^{10} + 0.0x^{11} + 0.0x^{12} + 0.0x^{13} + 0.0x^{14} + 0.0x^{15} + 0.0x^{16} + 0.0x^{17} + 0.0x^{18} + 0.0x^{19} + 0.0x^{20}$

Wynik uruchomienia z danymi:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	1	2	3
$f'(x_i)$	1		-1	

WYNIK:

Witaj użytkowniku!

Podaj ilość elementów x:

4

Podaj wartosc x dla x0:

0

Podaj wartosc x dla x1:

1

Podaj wartosc x dla x2:

2

Podaj wartosc x dla x3:

3

Podaj wartosci y dla x0:

①

Podaj wartosci y dla x1:

1

Podaj wartosci y dla x2:

2

Podaj wartosci y dla x3:

3

2

Podaj wartosci y_P dla x_0 :

1

Podaj wartosci y_P dla x_2 :

-1

kolumna do algorytmu dla ułatwienia widoku

x	y
---	---

0.0		0.0
-----	--	-----

0.0		0.0
-----	--	-----

1.0		1.0
-----	--	-----

2.0		2.0
-----	--	-----

2.0		2.0
-----	--	-----

3.0					3.0
1.0	1.0	1.0	-1.0	1.0	

```
0.0 0.0 -2.0 2.0
```

0.0 -1.0 2.0

-0.5 1.0

0.5

WIELOMIAN

```
0.0, 1.0, -3.0, 5.5, -3.0, 0.5, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
```

Wielomian

$$0.0x^0 + 1.0x^1 + -3.0x^2 + 5.5x^3 + -3.0x^4 + 0.5x^5 + 0.0x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 + 0.0x^{10} + 0.0x^{11} + 0.0x^{12} + 0.0x^{13} + 0.0x^{14} + 0.0x^{15} + 0.0x^{16} + 0.0x^{17} + 0.0x^{18} + 0.0x^{19}$$

Wynik po całkowaniu :

$$0.0x^1 + 0.5x^2 + -1.0x^3 + 1.37x^4 + -0.6x^5 + 0.083x^6 + 0.0x^7 + 0.0x^8 + 0.0x^9 + 0.0x^{10} + 0.0x^{11} + 0.0x^{12} + 0.0x^{13} + 0.0x^{14} + 0.0x^{15} + 0.0x^{16} + 0.0x^{17} + 0.0x^{18} + 0.0x^{19} + 0.0x^{20}$$