

## 作业二：有竞争的公平品博弈、混合策略均衡

以下两个公共品博弈只考虑单纯策略

1. 在行为博弈实验里开展的公共品博弈通常为以下形式。五名博弈者，各有初始资金 100 元。每位博弈者可选择将一定的金额  $x_i$  投资到一个公共基金中， $x_i$  可以是  $[0, 100]$  区间上的任意实数。没有投入公共基金的资金保留在自己手中，归自己所有，但不会增值。投入公共基金的资金会增值成为原来的 3 倍（即投入总额  $X$ ，增值后成为  $3X$ ）。基金增值后，五人将平分其总金额（即每个人获得总额的  $1/5$ ，无论自己投入了多少）。
  - a. 在纳什均衡中，每人投入的金额是多少？
  - b. 该投入水平是不是最优的？当每个人投入多少，能够使每一名参与者的收益达到最大？
  - c. 假如博弈规则增加一条规定：只有当所有博弈者投入的总金额大于等于 100 元时，投资才会成功，公共基金的金额会增长为原来的 3 倍；而如果投资总额小于 100 元，投资失败，公共基金的金额将变为 0（即投入的金额全部损失）。请问，在这个新的公共品博弈中，纳什均衡有哪些？（提示：可先猜测可能的均衡点，再根据定义证明这些确实构成均衡；再证明其他投入方式不可能构成纳什均衡。）
2. 有竞争的公共品博弈。假设两个组参与挑战杯的竞赛，每组 5 人。每个人可选择投入的资源（努力程度）为 0 到 100 之间的任意实数（包括 0 和 100）。每一组的研究成果取决于该组投入的总努力。投入努力总量较大的一组将获胜；获胜组所得的奖励是所投入资源总价值的 3 倍（即投入  $X$ ，获得  $3X$ ）；失败组所投入的资源则全部损失，价值为 0。如果两组投入总量相等则为平局，此时每组获得的奖励价值是所投入资源价值的 1.5 倍。无论胜、负还是平局，博弈结束时，每个组所获奖励的价值由该组内 5 名成员平等分享。（进行分析的时候注意，这里的决策者仍然是每一个个人，不是小组。）
  - a. 两组中每个人都投入 100，是否构成纳什均衡？简要证明。
  - b. 两组中每个人都投入 0，是否构成纳什均衡？简要证明。
  - c. 请证明：在任何纳什均衡中，两个组各自的总投入一定是相等的。（提示：可以使用反证法，假设存在一个纳什均衡，其中两组的投入不等，那么较低组的每个人投入的努力一定是多少，再考虑较高组的情况。）
  - d. （稍难）本博弈的所有纳什均衡有哪些？简要证明。（提示：基于上面 a, b, c 部分的结果，考虑是否存在除了 a, b 之外的其他努力水平的均衡。）

以下两题考虑混合策略

3. 考察以下的“鹰-鸽”博弈

		Player 2	
		Hawk	Dove
Player 1		Hawk	0, 0
		Dove	1, 6
		3, 3	

- a. 记博弈者 1 使用 Hawk 的概率为  $p$ , Dove 的概率为  $1-p$ ; 博弈者 2 使用 Hawk 的概率为  $q$ , Dove 的概率为  $1-q$ 。写出博弈者 1 的两个单纯策略各自的期望收益; 以及博弈者 2 的两个单纯策略的期望收益。
  - b. 画图表示博弈者 1 和博弈者 2 的最优反应函数, 并简要的给予文字解释。
  - c. 本博弈的纳什均衡有哪几个 (考虑混合策略和单纯策略) ?
4. 两名博弈者各自选择一个正整数, 按以下规则决定胜负: 如果一方的数比另一方的大, 但不超过对方数的 3 倍, 则大的一方获胜。如果一方的数超过 (大于等于) 另一方的 3 倍, 则大的一方失败。如果双方的数正好相等, 则为平局。(决出胜负后, 负者付给胜者 1 元, 如果打平, 双方均不付钱。)
- a. 简要证明这个博弈没有单纯策略的纳什均衡。
  - b. 简要证明, 每一方都以  $1/3$  的概率从 1、2、5 这三个数中随机选择, 该策略组合构成一个纳什均衡。

提示: 使用课上讲到的混合博弈的纳什均衡的两个特征。可以试着画出博弈的收益矩阵一个局部, 看看给定博弈者 2 的混合策略, 博弈者 1 各个单纯策略的收益情况。尝试说明为什么给定 2 的策略, 此时 1 的最优策略只可能是均等地混合使用 1、2、5。(在讨论中要注意按照规则博弈者 1 可以选择任意正整数, 而不仅仅是 1、2、5。)