第五讲：动态博弈

静态博弈与动态博弈

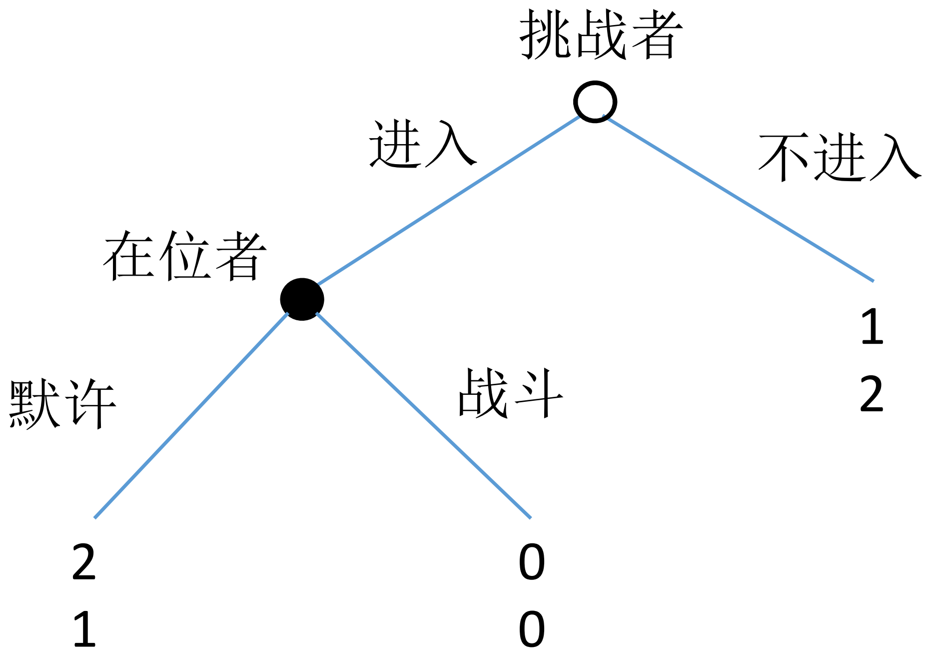
- 到现在为止我们研究的都是静态博弈(static games)
  - 没有决策的时间(timing)和先后次序(sequence)的考虑
  - 又称同时博弈(simultaneous games)

- 动态博弈(dynamic games)
  - 博弈者按一定的先后次序(sequence)行动
  - 又称序贯博弈 (sequential games)

博弈的延展型 (Extensive Form)

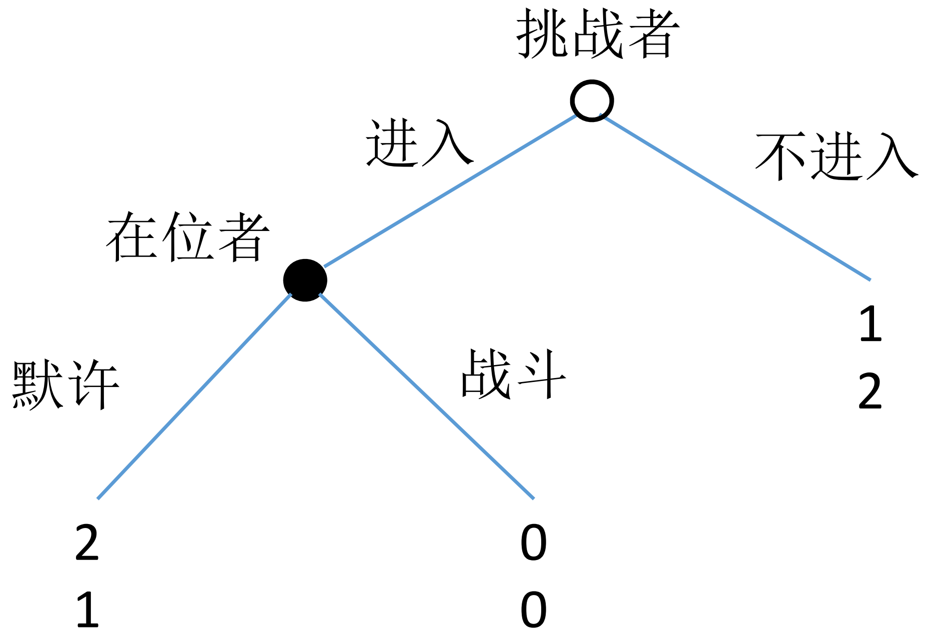
例：“挑战者”博弈

- 一位挑战者要决定是否进入一个领域。不进入则博弈结束。如果进入，已经占据该领域的博弈者（在位者 incumbent），要决定是默许还是与其战斗。



延展型博弈的要素

- 博弈者
- 节点(node)和历史(history)
  - 每一个节点对应一条独特的历史路径
  - 一个终端节点(terminal node)或终端历史代表了博弈的一种结果
- 博弈者函数
  - 在每一个节点（历史），该谁行动
- 偏好和收益
  - 定义在终端节点（终端历史）上；每一个终端节点代表了一种博弈的结果，博弈者获得相应收益

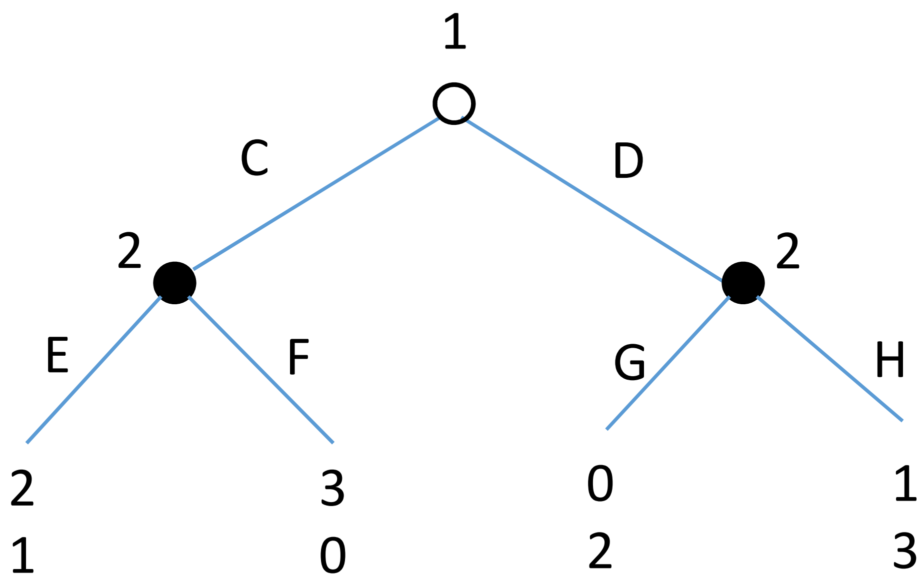


延展型博弈中的策略

- 在动态博弈里，博弈者的一个策略是指明了在**所有**属于她的决策节点上她会如何行动的一套**完整**方案
- 博弈者1：一个决策节点，两个可选策略：S_1={C, D}
- 博弈者2：两个需要决策的节点
  - 一个策略需覆盖所有节点

	历史C之后	历史D之后
策略一	E	G
策略二	E	H
策略三	F	G
策略四	F	H

  - 四个可选策略：S_2 = {EG, EH, FG, FH}

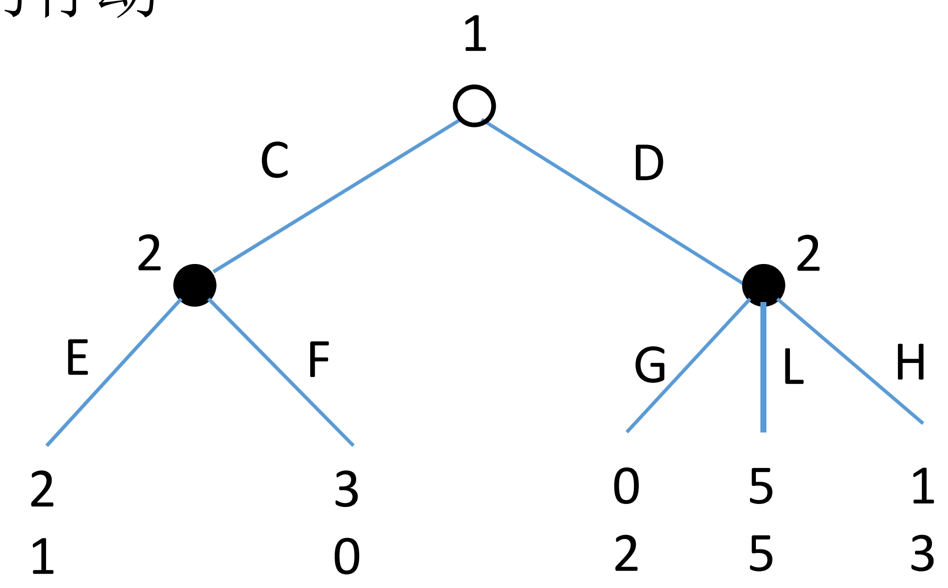


延展型博弈中的策略

- 如果博弈者2在历史D之后有三种可选的行动
  - 2在本博弈中共有多少种策略？
  - **六种**策略

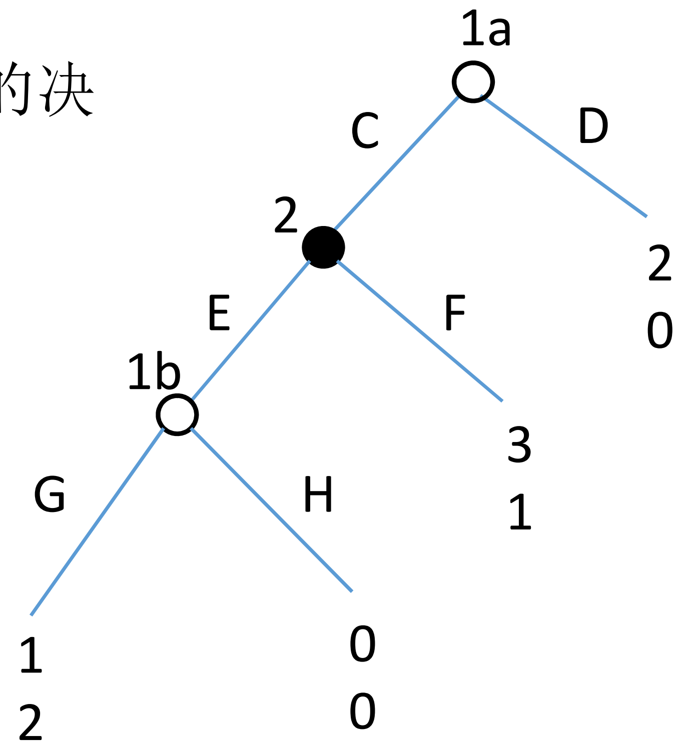
	历史C之后	历史D之后
策略一	E	G
策略二	E	L
策略三	E	H
策略四	F	G
策略五	F	L
策略六	F	H

  - 即： $S_2 = \{EG, EL, EH, FG, FL, FH\}$



延展型博弈中的策略

- 再次强调：博弈者的策略需要覆盖**所有**属于她的决策节点——包括那些“走不到”的节点
- 例：右图中的博弈者1
  - 两个决策节点，四个可能策略

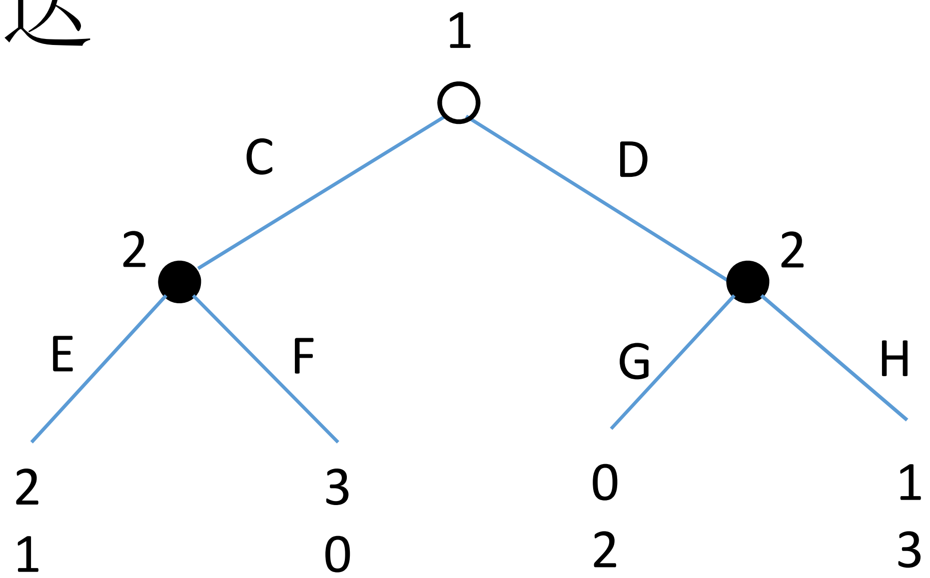


	历史Ø后	历史CE后
策略一	C	G
策略二	C	H
策略三	D	G
策略四	D	H

  - 注意，策略三、四也需要指明1在节点1b处的行动，尽管1在1a处选择了D之后，该节点不可能被走到
  - 因为1在一开始（1a处）的选择是否合理，取决于2在自己节点上的选择，而2的选择又受到1在1b处选择的影响

动态博弈的策略型表达

延展型



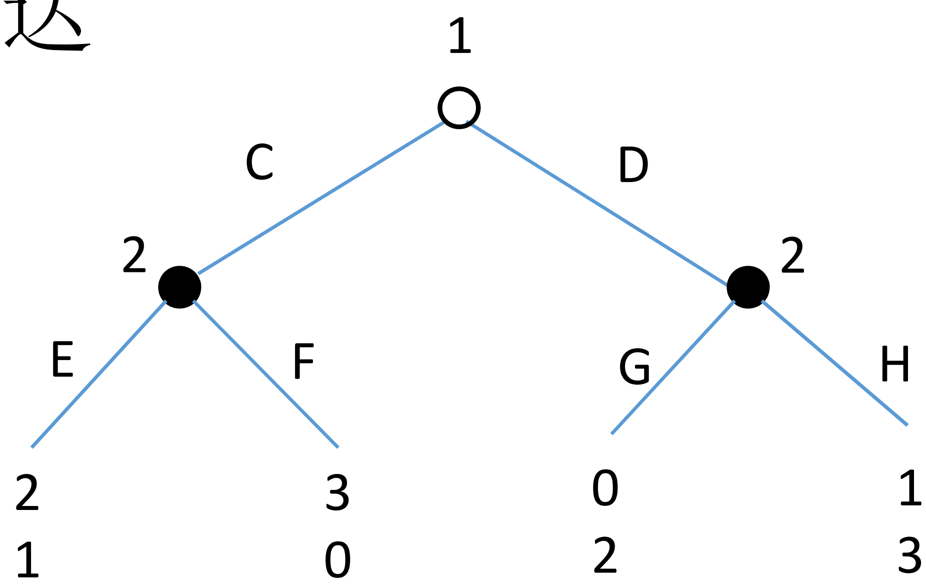
策略型（常型）

博弈者2

博弈者1		EG	EH	FG	FH
	C				
	D				

动态博弈的策略型表达

延展型



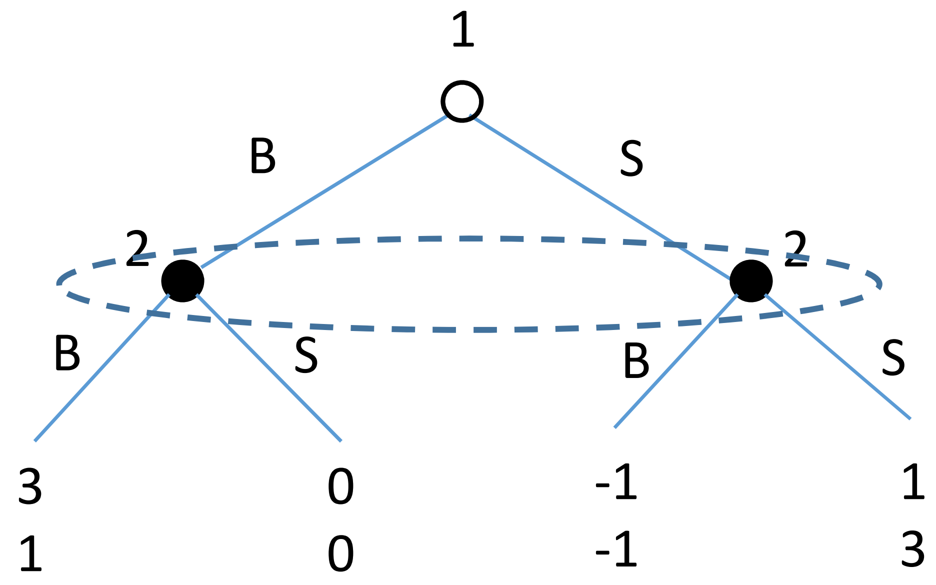
策略型（常型）

博弈者2

博弈者1		EG	EH	FG	FH
	C	2，1	2，1	3，0	3，0
	D	0，2	1，3	0，2	1，3

有“信息集”的动态博弈

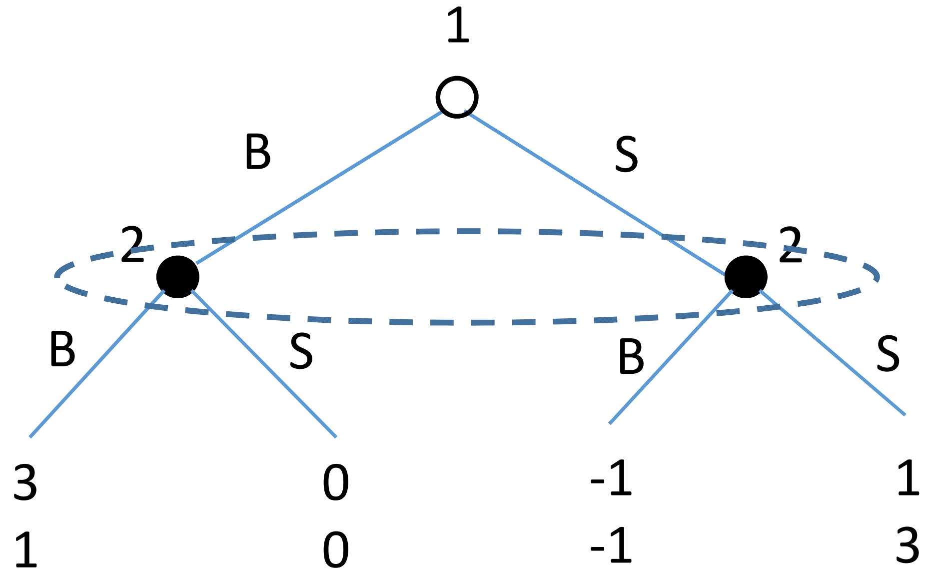
- 如果一个博弈者先行动，但是第二个博弈者不知道前者具体做了什么选择
- 例如，动态的“性别战争”
- 如果2不知道1究竟采取了什么行动，他不知道自己究竟是在左边还是右边的节点上
- 我们说这两个节点构成了属于2的一个“信息集”
- 信息集：博弈者i无法区别的自己的决策节点构成他的一个信息集
  - 一个独立的节点可以看作是一种特殊的信息集——“单点集”(singleton)



有“信息集”的动态博弈

- 我们把一个信息集看作是一个**单一**的决策位置
- 所以博弈者2在该处的策略只有两种：B 或 S（而不是BB，BS，SB，SS四种）
- 博弈的策略型

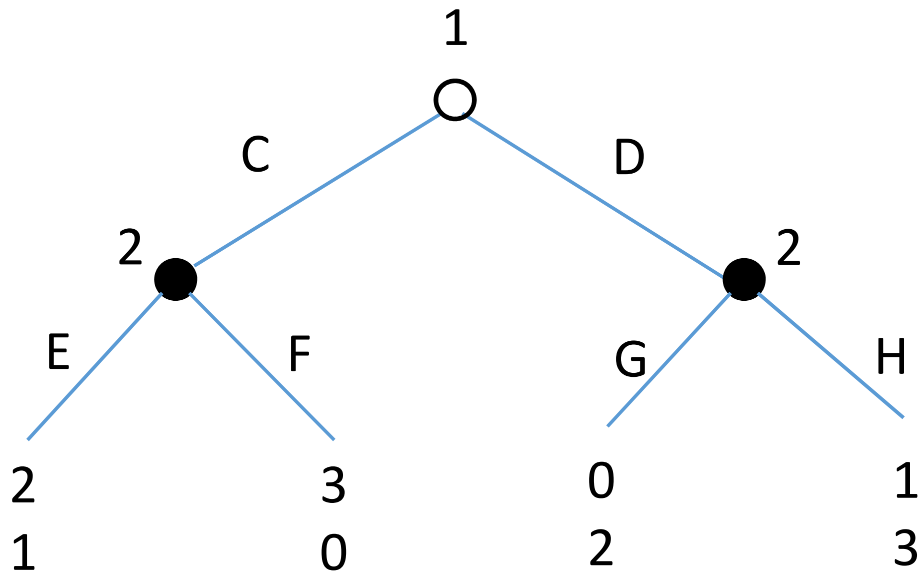
		博弈者2	
		B	S
博弈者1	B	3，1	0，0
	S	-1，-1	1，3



- 可以看到，这里的动态BOS博弈（1先行动，但是**2不知道1**的行动），和静态的BOS博弈（双方同时行动）是完全等价的
- 这提供了一种用延展型（博弈树）来表示同时型博弈的方法

动态博弈的纳什均衡

延展型



策略型
（常型）

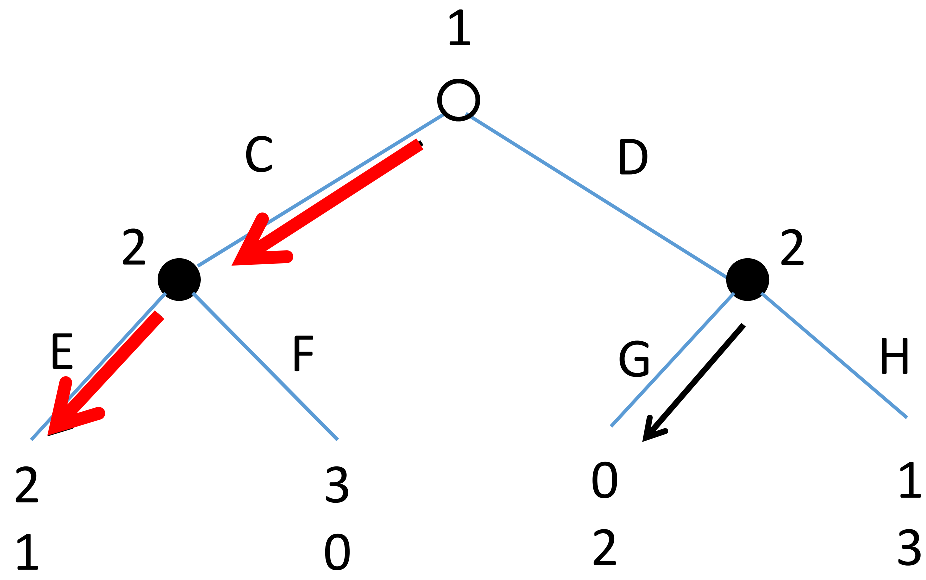
博弈者2

		EG	EH	FG	FH
博弈者1	C	2，1	2，1	3，0	3，0
	D	0，2	1，3	0，2	1，3

- 纳什均衡: (C, EG) 和 (C, EH)

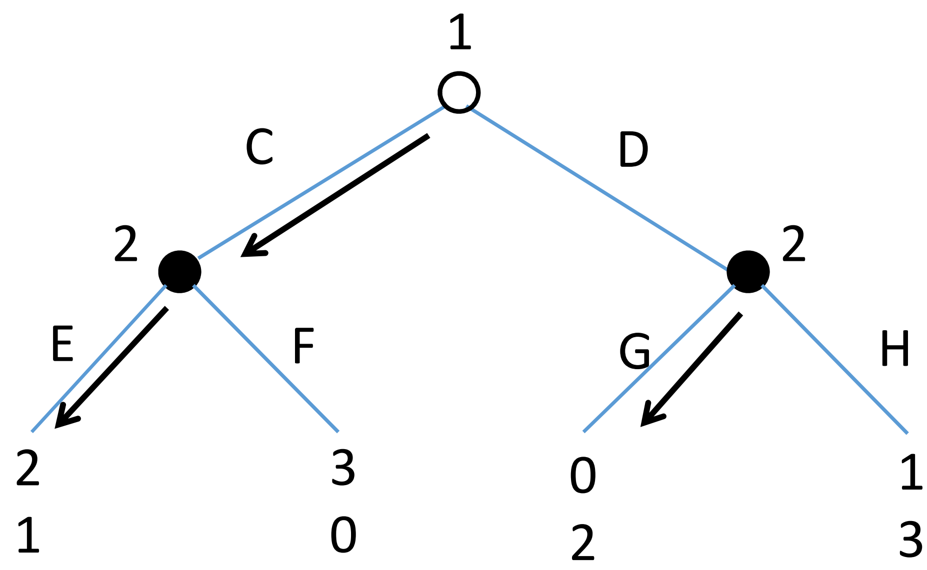
“路径”、“路径上的”与“路径外的”节点

- 博弈路径(path of play)
  - 给定一个策略组合，实际上会发生的博弈过程（从博弈起点直到最后到达的终端节点）
  - 例如（C, EG），产生的博弈路径如右图中红色箭头所示
  - 如果该策略组合是均衡，该路径又称为均衡路径



- 给定一个策略组合，节点可分为两种：“路径上的”(on the path) 与“路径外的”(off the path)
- 一个策略组合，规定了**所有**节点处的行为——既包含了在**路径上**的节点处博弈者的行为，也包含了**路径外的**节点处博弈者的行为

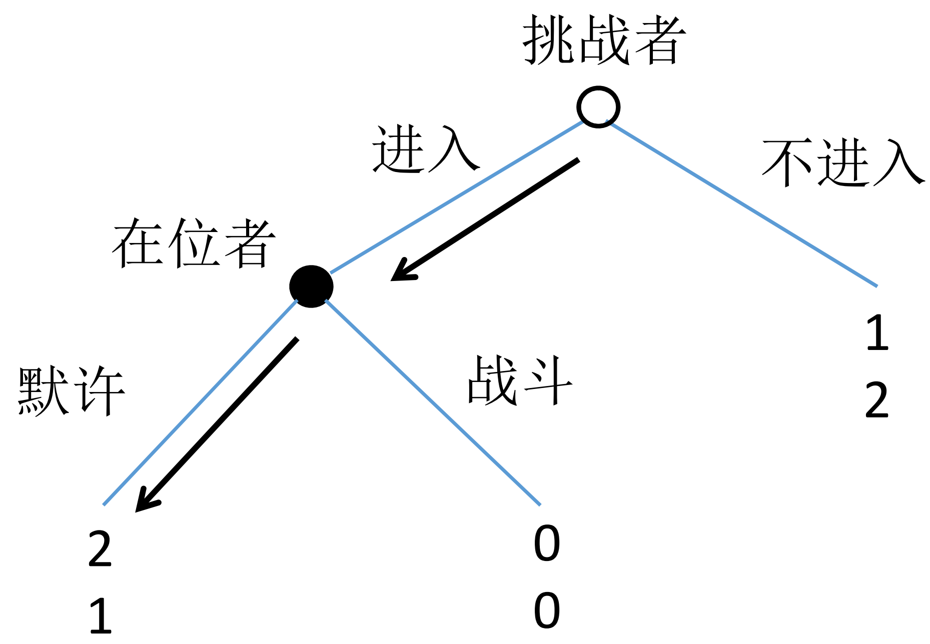
纳什均衡的不足（例一）



- 之前看到，该博弈有两个纳什均衡: (C, EG) 和 (C, EH)
- 但是(C, EG) 似乎有点问题
- 如果博弈真的进行到历史D之后的节点，2会选择G吗？
  - 在该处，2选择H才是最优的
- 为什么(C, EG)也是一个纳什均衡？
  - 纳什均衡要求，给定对方的选择，博弈者选择最优应对；但是**给定对方的选择，**博弈者在**路径外**的节点上的选择，对于收益结果是没有影响的
- 动态博弈中，纳什均衡对于博弈者在**路径外的节点**处选择的约束太弱

纳什均衡的不足（例二）

		在位者	
		默许	战斗
挑战者	进入	2，1	0，0
	不进入	1，2	1，2

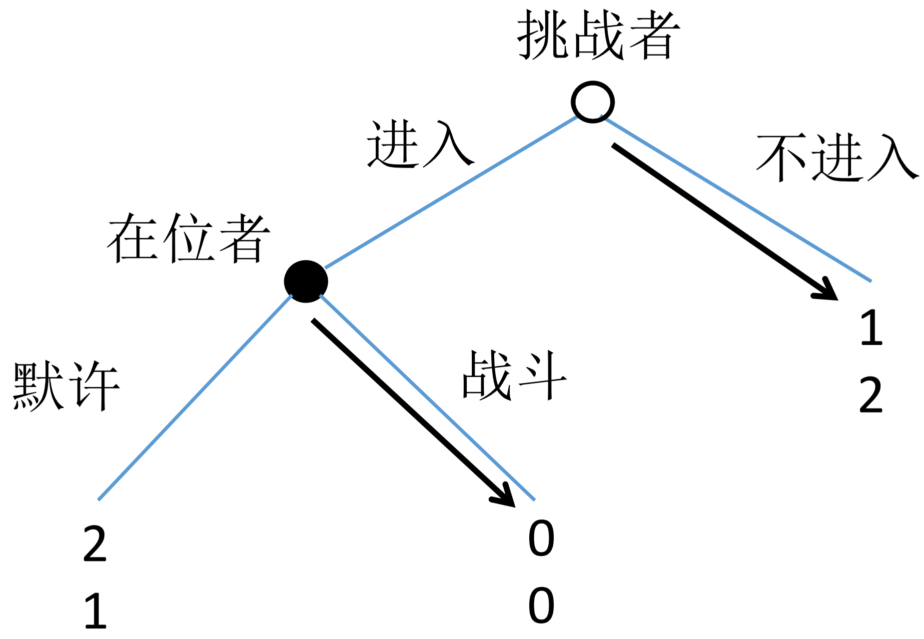


• 纳什均衡：（进入，默许）和（不进入，战斗）

纳什均衡的不足（例二）

在位者

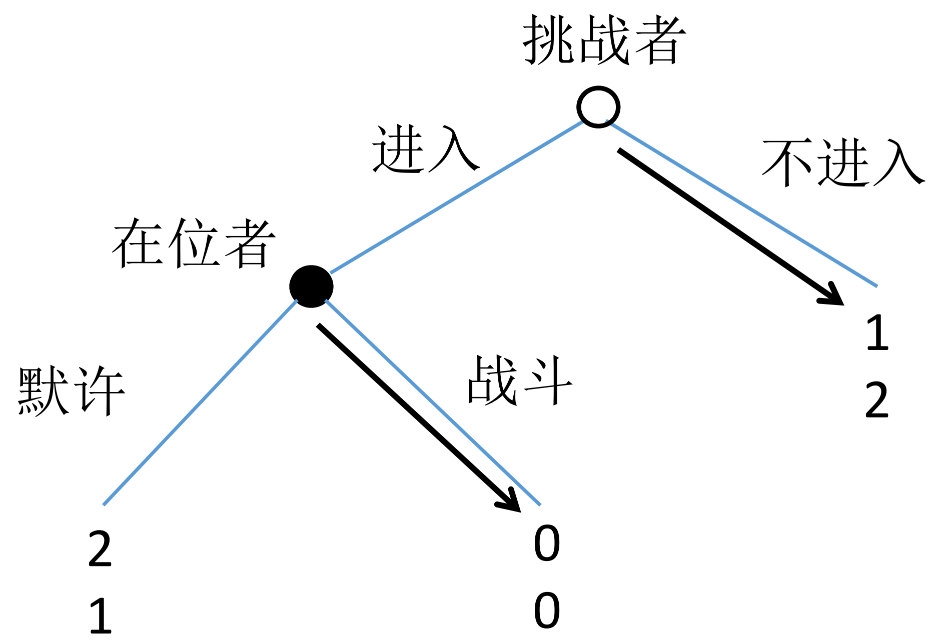
		默许	战斗
挑战者	进入	2，1	0，0
	不进入	1，2	1，2



- 纳什均衡：（进入，默许）和（不进入，战斗）

纳什均衡的不足（例二）

		在位者	
		默许	战斗
挑战者	进入	2，1	0，0
	不进入	1，2	1，2



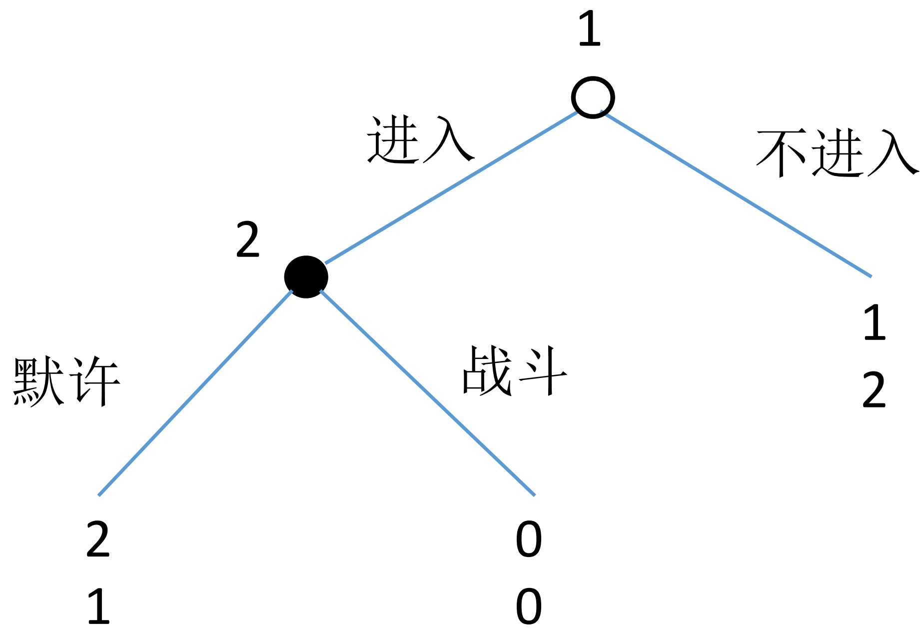
- 纳什均衡：（进入，默许）和（不进入，战斗）
- （不进入，战斗）是合理的均衡吗？
- 挑战者之所以不进入，是因为在位者威胁说他会选择战斗
- 但是这一威胁可信(credible)吗?
  - 如果挑战者进入，在位者的最优选择是默许
- 纳什均衡的概念由于对路径外节点处的选择缺乏足够约束，无法排除不可信的威胁或承诺，可能产生很有问题的均衡结果

序贯理性（Sequential Rationality）

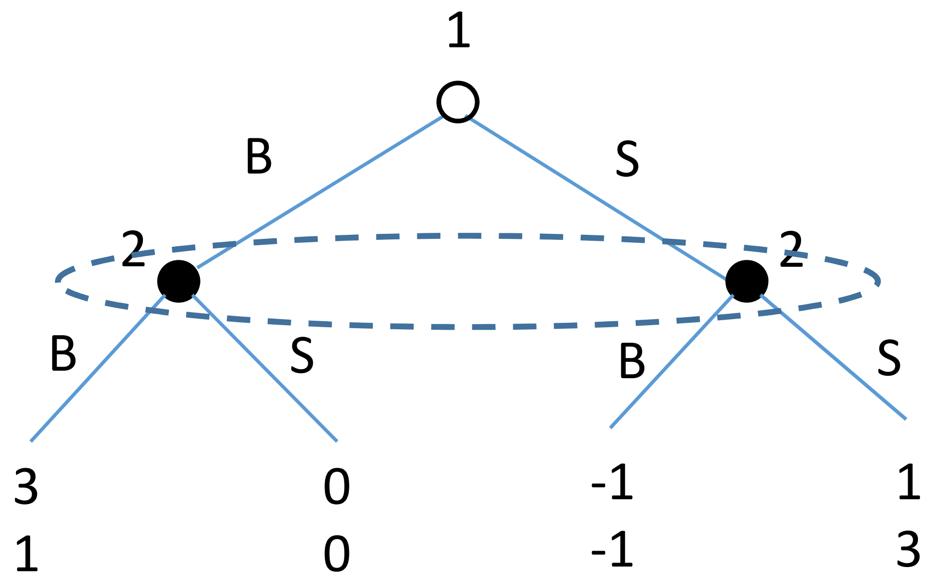
- 在动态博弈中，我们通常对均衡增加一个要求
- **序贯理性**
  - 给定其他人的策略，博弈者i在**每一个**需要她决策的节点上，她所作的决策都是（在从那一点开始往后的博弈里）最优的
- 在（信息完善的）动态博弈中，增加了这个要求而形成的均衡概念是“子博弈完善均衡”

子博弈完善均衡 (Subgame Perfect Equilibrium)

- 子博弈 (subgame)
  - 从任一非终端的节点开始，可以达到的余下的博弈
- 例：右边的博弈含有两个子博弈
  - 从空历史开始：博弈本身
  - 从历史“进入”后开始，余下的博弈
- 子博弈完善均衡(SPE or SPNE)
  - 定义：该策略组合在所有的子博弈中都构成纳什均衡
  - 换言之，在每一个决策节点上，考虑之后的子博弈，博弈者i所做出的选择都需要是最优的

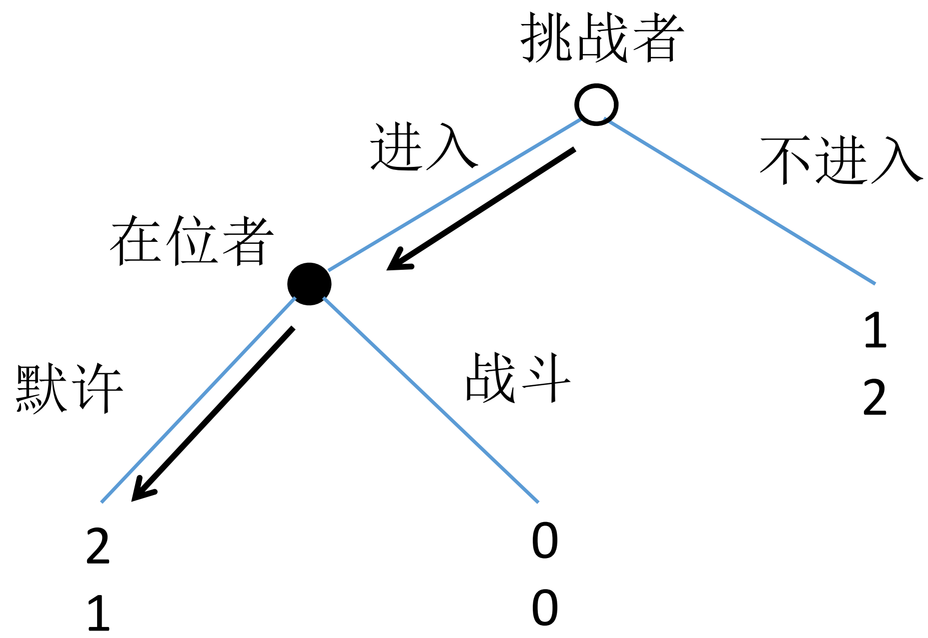


- 这里需要注意，子博弈只能从一个“单点集”开始
- 右边的博弈只含有一个子博弈
  - 就是整个博弈本身



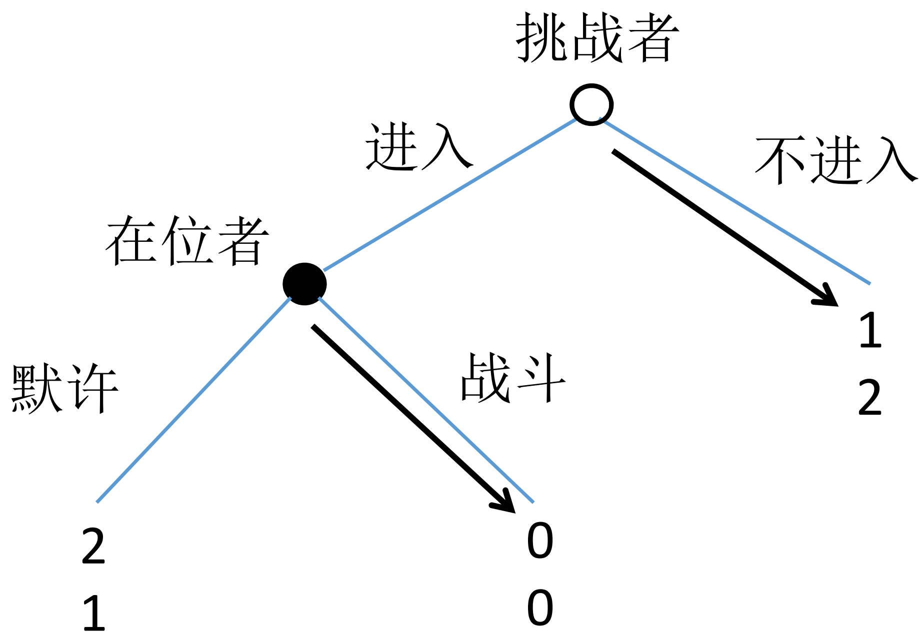
例：挑战者博弈的SPNE

- 如前，博弈的纳什均衡有两个
  - (进入，默许)和 (不进入，战斗)
- 可逐一进行子博弈完善的检测
  - (进入，默许)：是子博弈完善的



例：挑战者博弈的SPNE

- 如前，博弈的纳什均衡有两个
  - (进入，默许)和 (不进入，战斗)
- 可逐一进行子博弈完善的检测
  - (进入，默许)：**是**子博弈完善的
  - (不进入，战斗)：**不是**子博弈完善的
    - 如果博弈进入到需要2做选择的子博弈中，2选择战斗不是最优的
    - 战斗不是一个可信的威胁；因而被排除了



子博弈完善均衡

定义：一个给定的策略组合s*=($s_1^*, s_2^*, s_3^*, \ldots, s_n^*$)称为子博弈完善的纳什均衡，如果s*满足以下条件

对于任意博弈者i而言，给定其他人的策略，在每一个由轮到他决策的节点h开始的子博弈中，继续执行s_i^*是其最优的选择，即

$$u_i(O_h(s_i^*, s_{-i}^*)) \geq u_i(O_h(\mathrm{s}_i, s_{-i}^*)), \qquad s_i\text{是}i\text{的任意一个策略}$$

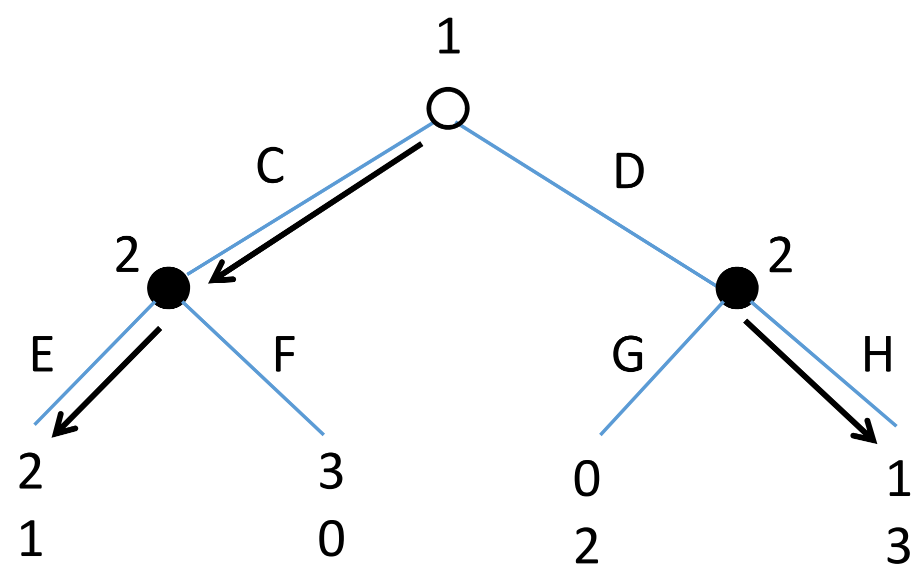
其中$O_h(\cdot)$是指从历史节点h开始，策略组合“·”导致的终端节点

子博弈完善均衡与纳什均衡

- 子博弈完善均衡首先是一个纳什均衡
  - 由于整个博弈也是其自身的一个子博弈，显然，子博弈完善均衡是整个博弈的一个纳什均衡
- 子博弈完善均衡满足了额外的“序贯理性”的要求，即博弈者在任何一点的决策，必须从该点来看（在从该点开始的子博奕中）是最优的
- 显然，一个博弈的子博弈完善均衡的集合是其纳什均衡的集合的子集

逆推归纳法 (Backward Induction)

- 如何找到博弈的子博弈完善均衡？
- 在**有限步骤**的博弈中，可用“逆推归纳法”
  - 从最后的决策节点开始，找出行动者的最优反应
  - 给定这些最优反应，找出前一轮中行动者的最优反应
  - 以此类推，直到最初
- 右边例子
  - (C，EH)是唯一的子博弈完善均衡



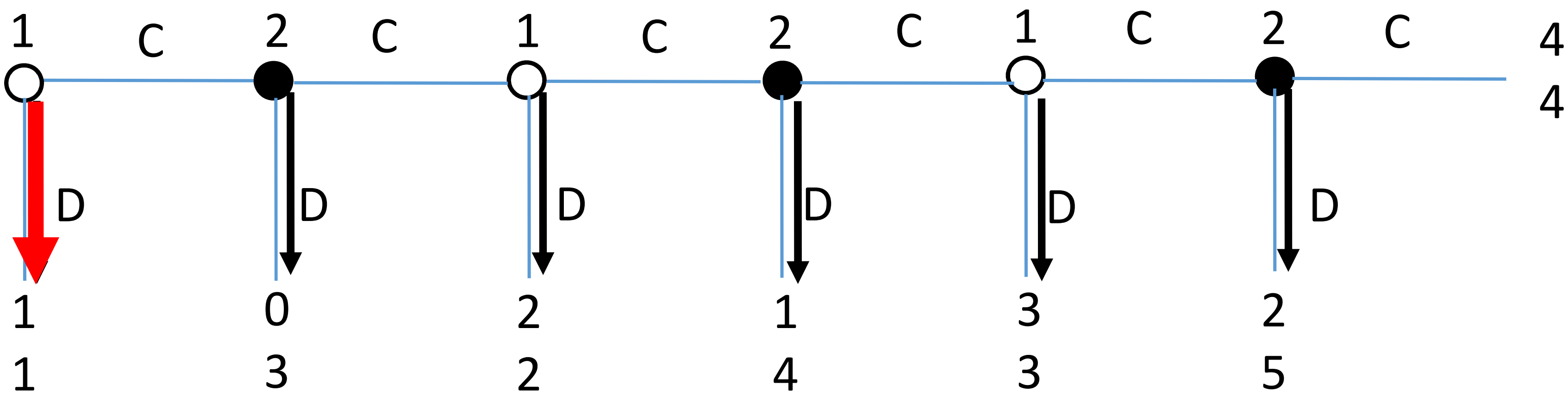
逆推归纳法与子博弈完善均衡

- **定理**：在（信息完善的）有限的延展型博弈（有限个博弈者、有限的行动、有限的步骤）中，逆推归纳法找出的均衡集即为子博弈完善均衡的集合
  - 证明略
- **定理**：在（信息完善的）有限的延展型博弈中，一定存在子博弈完善均衡
  - 证明略
- 所以，围棋作为有限的延展型博弈，存在子博弈完善均衡的策略组合
  - 也就意味着，（在规则排除了平局的前提下）要么黑棋存在必胜策略，要么白棋存在必胜策略

- 子博弈完善均衡和逆推归纳法是否对于博弈者的理性提出了太高的要求？
- 来看一个例子

蜈蚣博弈(The Centipede Game)

- 每一个博弈者都可以选择现在结束博弈，还是继续进入下一轮
- 对任一博弈者而言，选择现在结束的收益小于下一次轮到自己决策时再选结束的收益
- 但是每一个博弈者也有动力抢在对方前头结束博弈



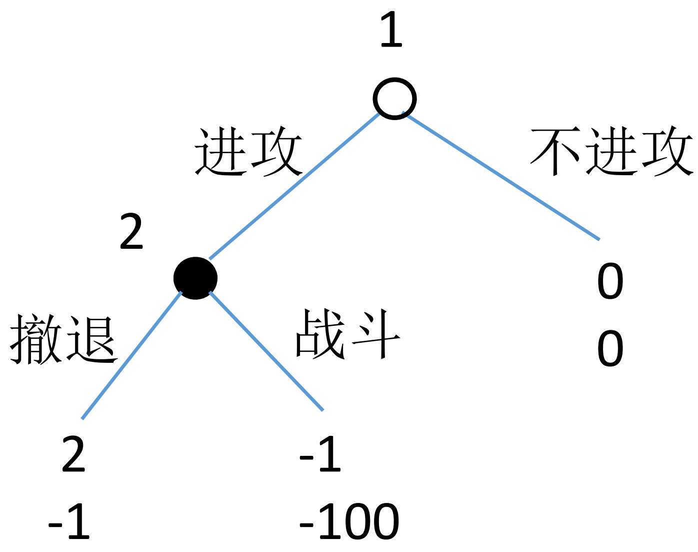
- 由逆推归纳法可见，子博弈完善均衡的结果是1在第一个节点选择立即结束
- SPNE: (DDD, DDD)

可信度的问题与承诺机制

- 子博弈完善均衡的概念凸显了承诺是否“可信”的问题
  - 在每个决策节点上，博弈者声称他会选择的行动必须是“可信的”(credible)
- 有时外部手段可以用以解决这个问题；可称为“承诺机制”(commitment devices)

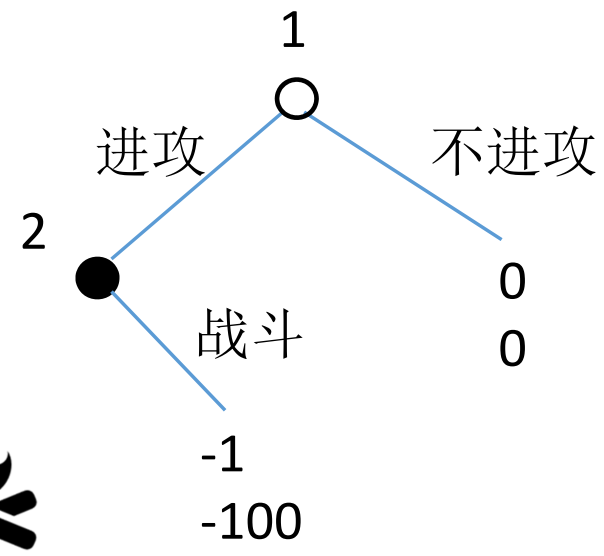
破釜沉舟(Burn the Bridge)

- SPNE：（进攻，撤退）
- 如果2能使1相信，2一定会战斗，那么1将选择不进攻，对2而言是最佳结果
- 问题在于，虽然2可以宣布自己会战斗，但是没有可信度



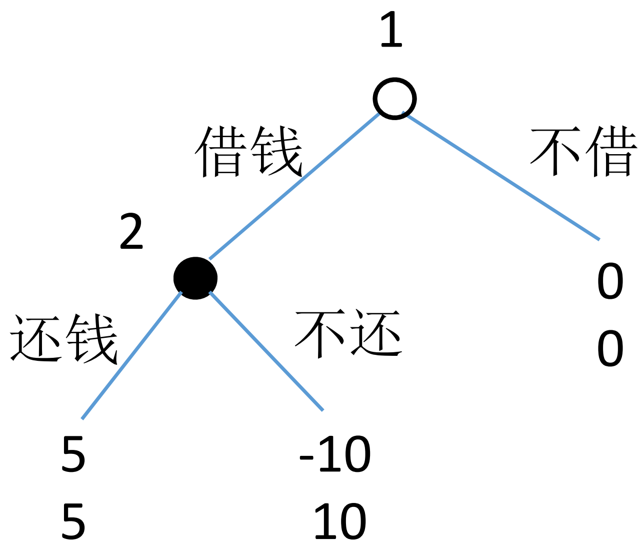
破釜沉舟(Burn the Bridge)

- SPNE：（进攻，撤退）
- 如果2能使1相信，2一定会战斗，那么1将选择不进攻，对2而言是最佳结果
- 问题在于，虽然2可以宣布自己会战斗，但是没有可信度
- 2可以采取其他外部手段，来强迫自己实现承诺
  – 比如烧毁撤退的桥梁、渡船
  – 是一种承诺机制 (commitment device)，造成了新的SPNE : (不进攻，战斗)
  – 需要对方获得该信息

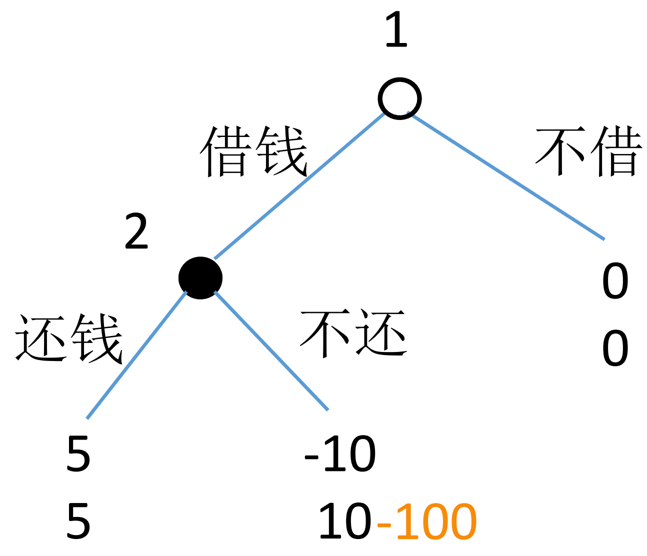


信任博弈

- SPNE: (不借，不还)
- 如果2能使得1相信他一定会还钱，1才会借钱给他，双方都获益
- 问题在于2的承诺是不可信的



信任博弈



- SPNE: (不借，不还)
- 如果2能使得1相信他一定会还钱，1才会借钱给他，双方都获益
- 问题在于2的承诺是不可信的
- 如果能有一个承诺机制，使得2不能不还钱，那么对双方都有好处
  – 比如：抵押、人质
  – 比如：订立法律契约，由独立的法院审理
  – 新的SPNE：（借钱，还钱）
- 诺斯用这个博弈来解释英国光荣革命之后，通过议会和司法独立限制了中央政府的权力，政府借贷能力反而大幅提高