

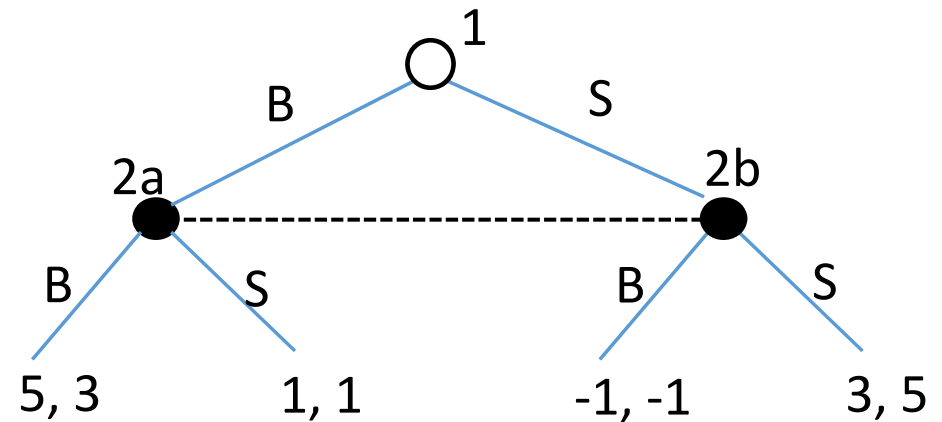
第十一讲：信息不完善的 动态博弈（一）

——弱序贯均衡的概念

信息不完善的动态博弈

- 要分析信息不完善的动态博弈，有两个问题需要解决
 1. 信息不完善
 - 博弈者不完全了解“自然”或其他博弈者在之前步骤中所选择的行动
 - 之前我们引入了“信息集”的概念，现在需要发展一种系统地分析博弈者在信息集上如何决策的方法
 2. 动态博弈（序贯博弈）
 - 纳什均衡的概念“太弱”，对路径外的信息集上决策者的行为缺乏约束
 - 之前通过增加“序贯理性”的要求，形成了“子博弈完善均衡”的概念；现在需要进一步推广，使之能应用于有信息集的动态博弈
- 在此基础上，引入新的均衡概念
 - 本课中使用的是“弱序贯均衡” (weak sequential equilibrium)

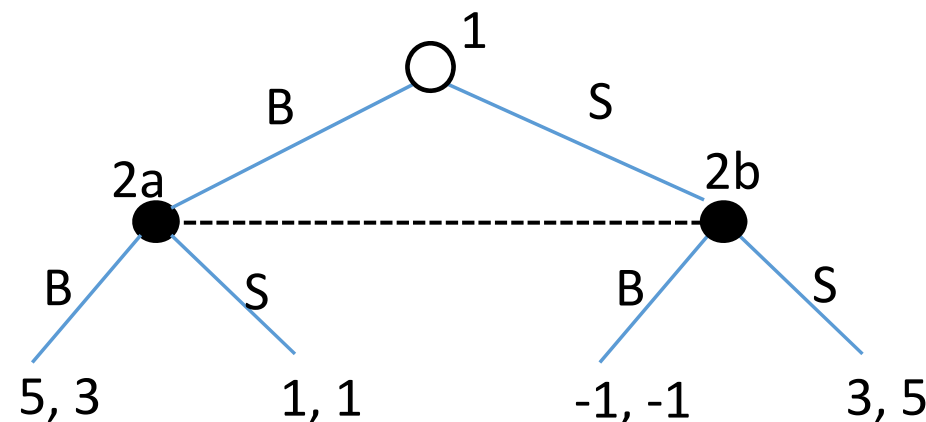
信息集



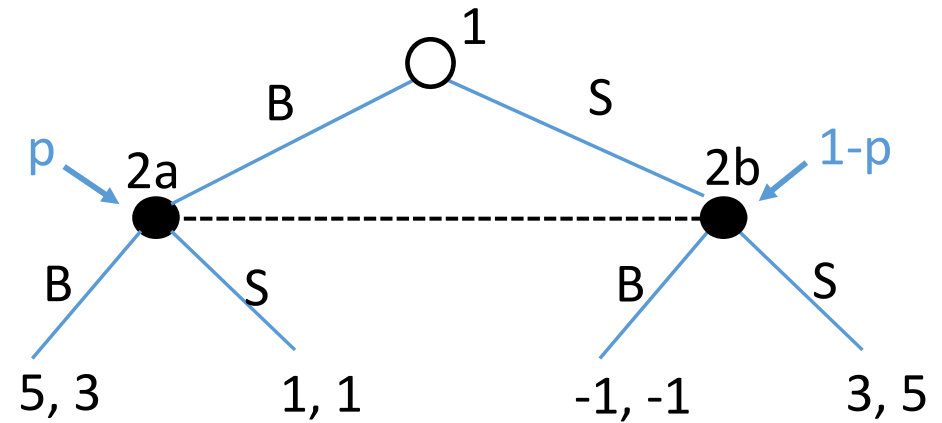
- 博弈者*i*无法区别的自己的若干决策节点构成她的一个信息集
 - 一个信息集内的每一个节点上，*i*拥有的行动选项必须是相同的
 - 一个独立的决策节点，也可以看作是一个只包含它自身的信息集，称作单点集(singleton)
- *i*在决定策略时，把整个信息集作为一个**统一的**决策位置
 - 一旦*i*在信息集上选择了某种行动，意味着在该信息集内的**每个节点上***i*都采取**同样的**行动

根据“信念”进行决策

- 问题：在一个信息集内的不同节点上*i*的最优行动可能是不同的，那么在整個信息集上*i*应该如何选择？
- 原则：根据自己的**信念**，选择能最大化自己期望收益的行动
 - 在每一个信息集上，决策者都需要对自己处在信息集内每一个具体节点上的概率有一个判断——称为她在该信息集上持有的**信念**
 - 基于该信念，她选择对于自己最优（最大化期望收益）的决策

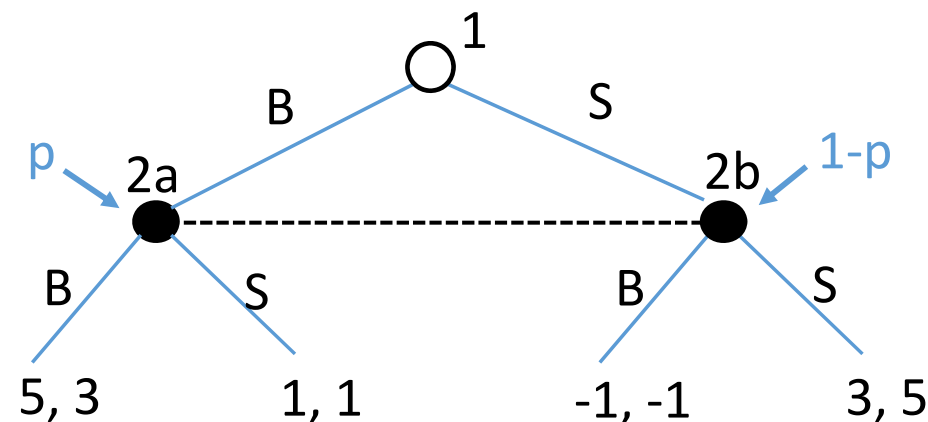


根据“信念”进行决策



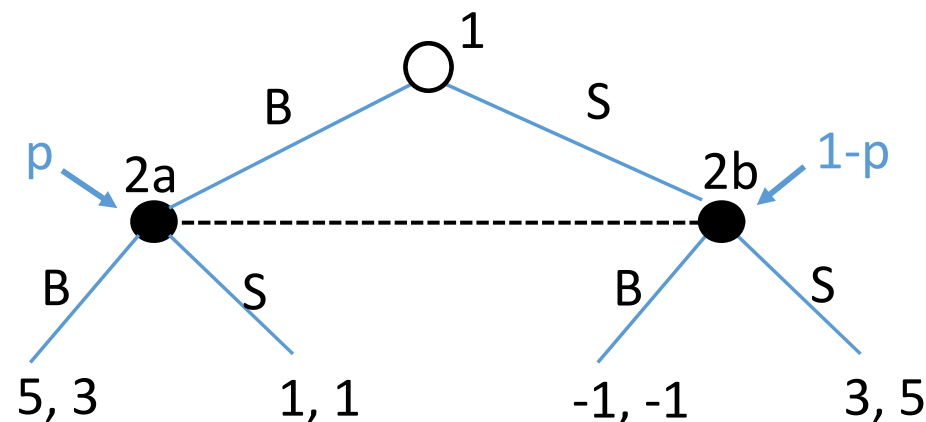
- 例如右上的例子里，令2的信念是他在2a的概率是 p ，在2b的概率是 $1-p$
 - 那么他选B的期望收益是： $3p - 1(1-p) = 4p-1$
 - 选S的收益是： $1p + 5(1-p) = 5-4p$
 - 根据他具体的信念（ p 值），可以决定哪种选择最优

什么样的信念是合理的？



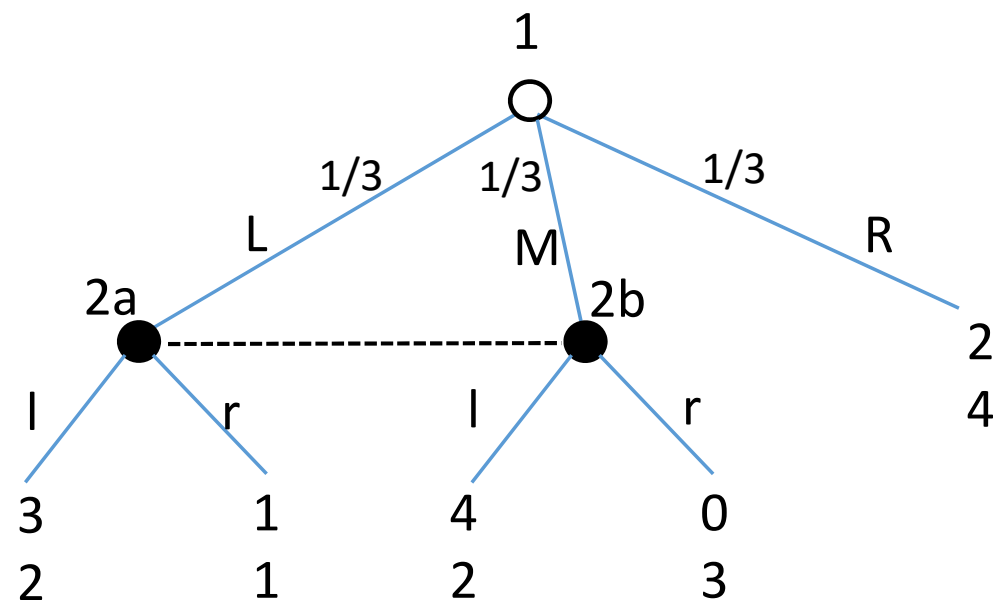
- 信念由什么决定（博弈者可以持有什么样的信念）？
- 原则：在均衡中，我们要求每个人信念都与现实是一致的，或者说正确地反映了现实——要与自然以及所有博弈者的实际行动（概率）一致

信念的合理性



- 例如，在右上的例子里
 - 如果均衡中，1的策略是B，那么2的信念必须是自己在2a；如果1的策略是S，那么2的信念必须是自己在2b
 - 如果1使用的是混合策略，用B的概率是 r ，S的概率是 $1-r$ ，那么2的信念是自己在2a的概率是 r ，在2b的概率是 $1-r$
 - 如果首先行动的不是1，而是“自然”，以 r 和 $1-r$ 的概率分别往左边和右边行动，那么2的信念也应该与此相一致

信念的合理性



- 如果1的策略是以 $1/3$ 的概率随机使用L、M、R
- 2在自己信息集上合理的信念是什么？
- 基本原则：合理的信念要符合贝叶斯法则

贝叶斯法则

- 基于条件概率公式

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ 意味着 } P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

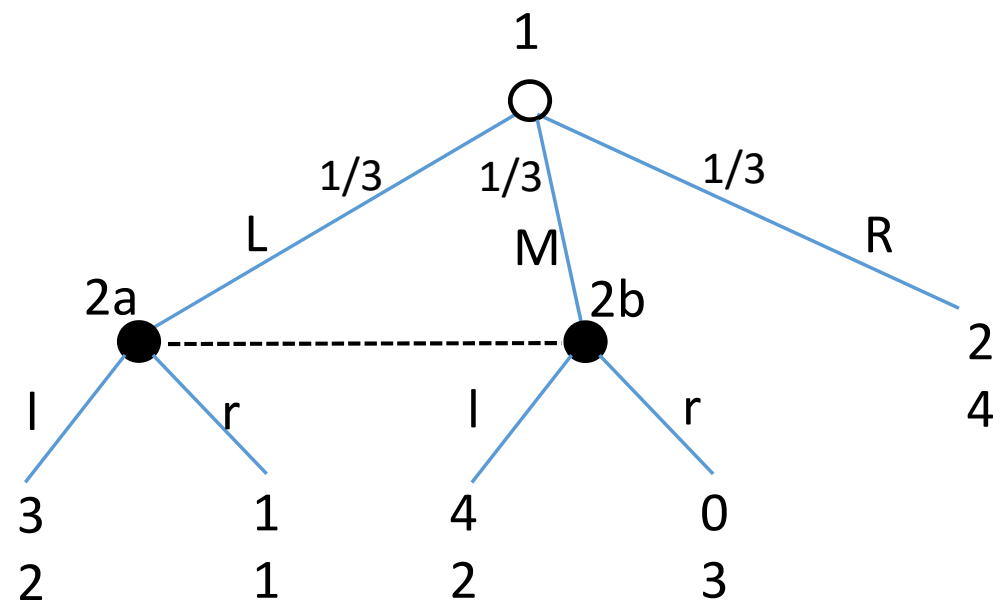
- 得出贝叶斯法则

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- 如果事件A由若干互斥的事件构成, 即 $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 可进一步写成

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)}$$

信念的合理性：符合 贝叶斯法则

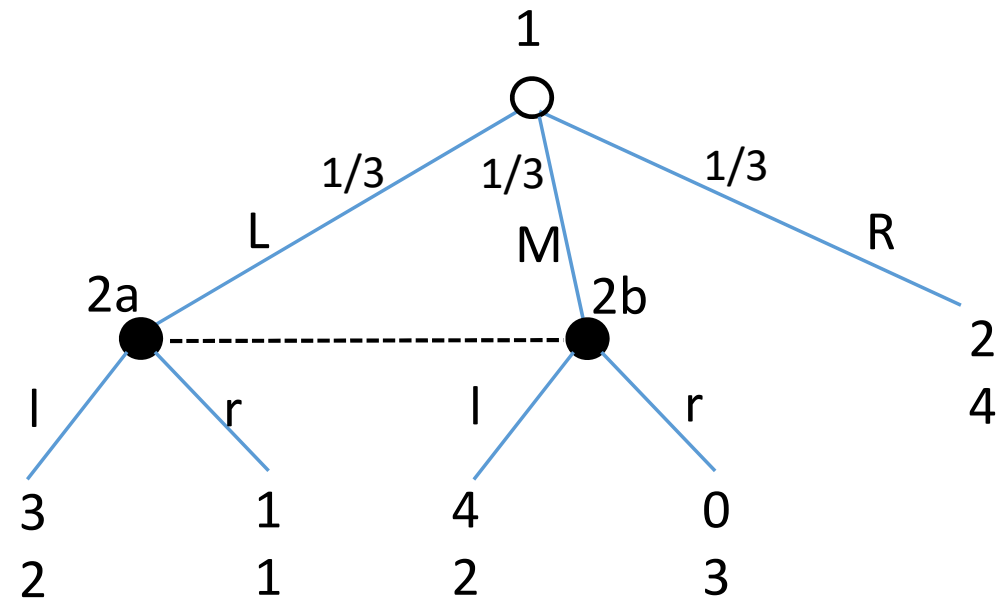


- 给定策略组合 s ，已知到达了信息集 I_i 的前提下，到达其中具体某一个节点 $h^* \in I_i$ 的条件概率，根据贝叶斯法则

$$P(h^* | I_i) = \frac{P(h^*)}{P(I_i)} = \frac{P(h^*)}{\sum_{h \in I_i} P(h)} \quad \text{【1】}$$

即“到达该点的概率” ÷ “到达该点所属信息集的概率”（后者等于到达其中每个节点概率之和）

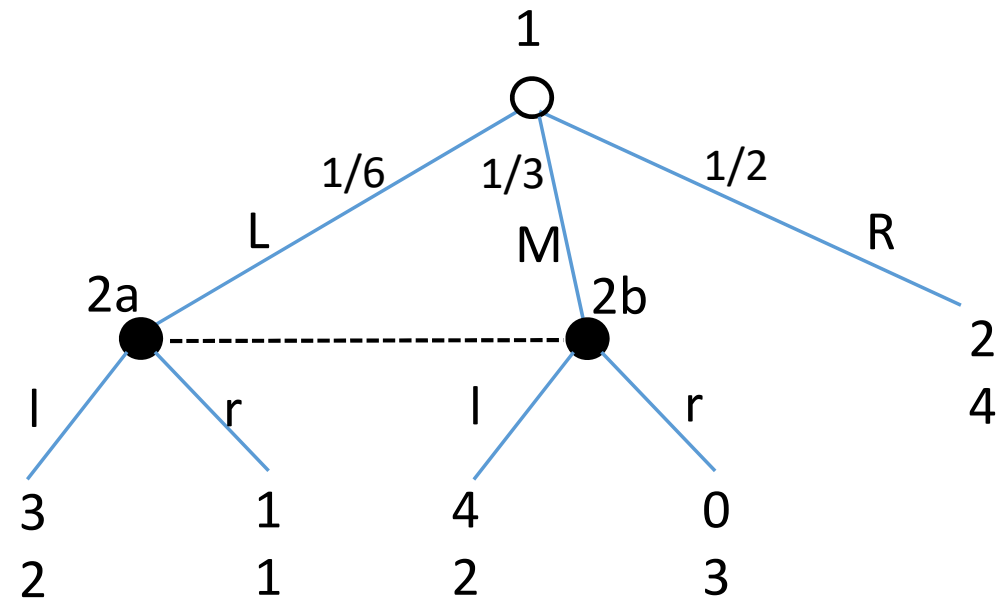
信念的合理性：符合 贝叶斯法则



- 如果1的策略是以1/3的概率随机使用L、M、R
- 2在自己信息集上合理的信念是

$$\text{Prob}(2a | 2a \text{ or } 2b) = \frac{\text{Prob}(2a)}{\text{Prob}(2a \text{ or } 2b)} = \frac{1/3}{1/3 + 1/3} = 1/2$$

信念的合理性：符合贝叶斯法则

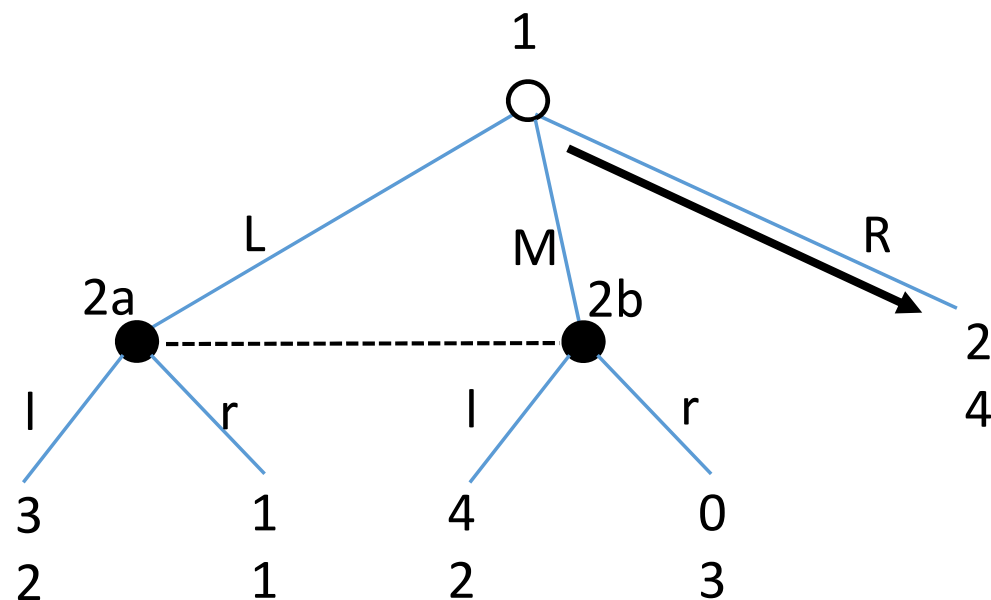


- 如果1的策略是以1/6、1/3、1/2 的概率随机使用L、M、R
- 2在自己信息集上合理的信念是

$$\text{Prob}(2a | 2a \text{ or } 2b) = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = 1/3$$

路径外信息集上的信念

- 如果1的策略是R，2在她的信息集上应该持有什么样的信念？
- 换言之，在一个策略组合中，如果某个信息集是在“路径外”的（即无法达到的），博弈者在该处应持有什么样的信念？
- 此时，贝叶斯公式中的分母为零，无法使用
- 弱序贯均衡 (Weak Sequential Equilibrium) 的要求：博弈者在该处可以持有**任意**信念
 - 存在其他的均衡概念，对路径外信息集上的信念的要求更严格

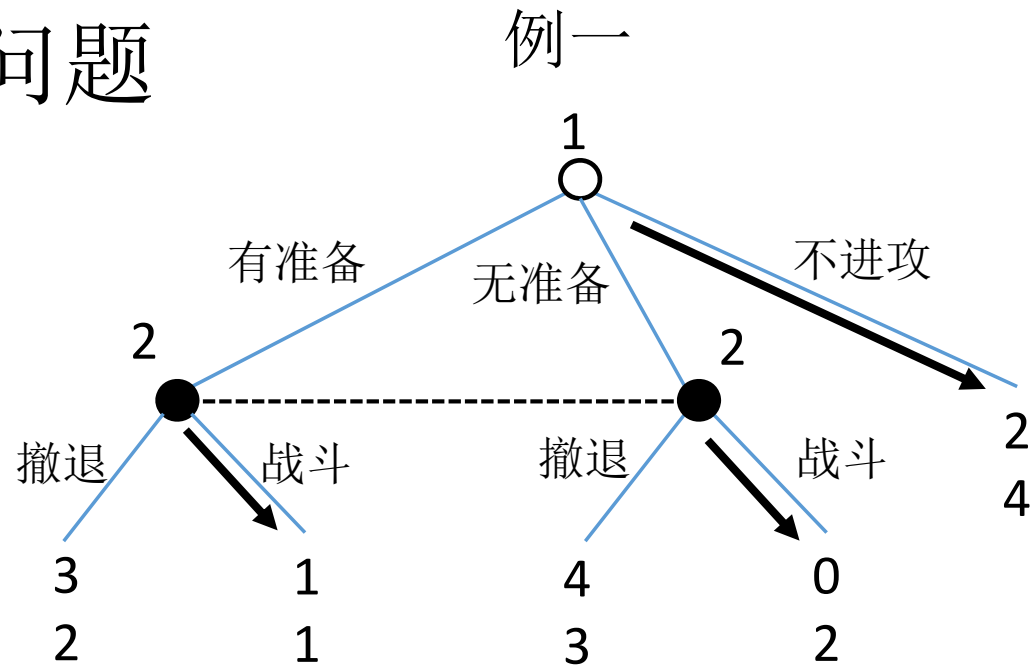


序贯理性

- 动态博弈中，如之前所讨论，纳什均衡的概念太弱，需增加“序贯理性”这一要求
 - 序贯理性：在每一个决策位置上，决策者的选择（向后续的博弈方向看）都是最优的
- 之前信息完善的动态博弈中，这形成了“子博弈完善均衡”的概念
 - 博弈者在每一个决策节点上都做出了最优的选择
- 在信息不完善的动态博弈中，我们也要求均衡满足“序贯理性”
 - 博弈者在每一个信息集上都做出了最优的选择
 - 可看作是“子博弈完善”的一种推广

信息不完善下的序贯理性问题

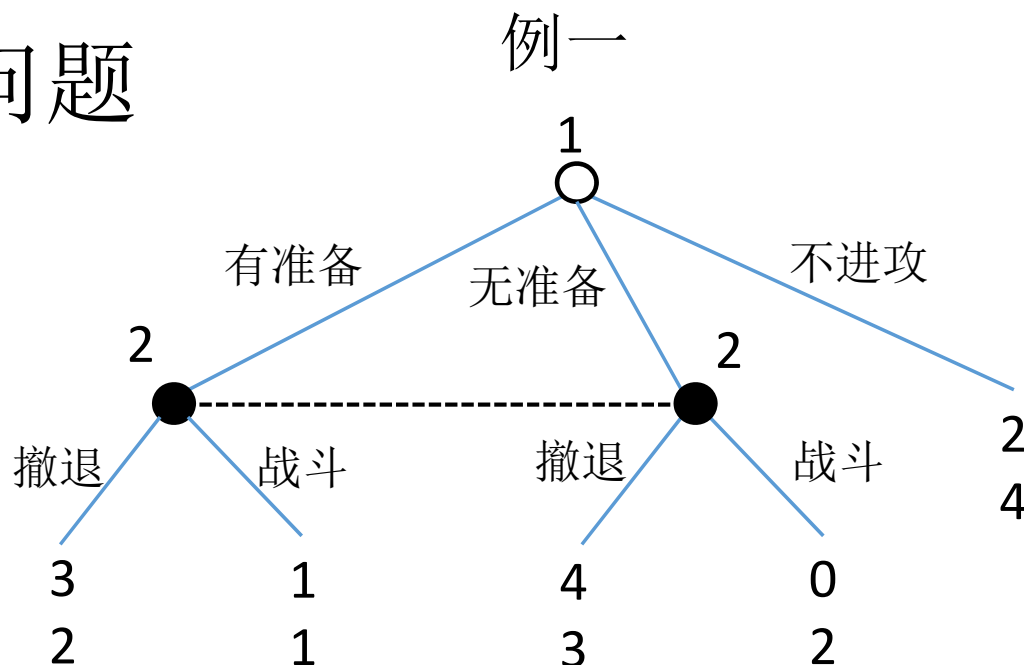
- 挑战者博弈的变体
 - 1可以选择有准备的进攻、无准备的进攻、或者不进攻
 - 当1进攻时，2不知道1有无准备
 - 2需要选择是撤退还是战斗
- 纳什均衡：两个
 - (无准备，撤退) 和 (不进攻，战斗)
- (不进攻，战斗)不太“合理”
 - 如果博弈进行到2的信息集，2的最优选择是撤退，无论他相信自己在哪一个节点上
 - 2选择“战斗”是“不可信”的威胁



	撤退	战斗
有准备	3, 2	1, 1
无准备	4, 3	0, 2
不进攻	2, 4	2, 4

信息不完善下的序贯理性问题

- 用子博弈完善均衡的概念排除该结果？
- 但是这里除了整个博弈外，没有其他可定义的子博弈
 - 子博弈必须从一个单独的决策节点，即单点集（singleton）开始
- 后续博弈(continuation game)：从一个信息集开始直到博弈结束
 - 可以看作广义上的“子博弈”
- 序贯理性：在每一个需要决策的信息集上，考虑其后续博弈，博弈者都采取了最优的策略



小结：均衡 = 信念处处合理、策略处处最优

- 小结起来，我们对信息不完善的动态博弈的均衡有两个核心要求
 1. 因为信息不完善，博弈者在信息集上需要按照自己的信念做出最优选择；我们要求**信念必须合理**（与现实一致）
 - 信念必须与自然及其他博弈者的行动（概率）一致
 2. 因为是动态博弈，我们要求均衡满足**序贯理性**，即博弈者在每一个信息集上做的选择都是最优的
- 所以，这里均衡概念，不仅仅是一个策略组合，还包括每个博弈者在每一个信息集上的信念
 - 策略组合加上信念系统，Osborne 书中称为一个“assessment”
- 不仅策略必须处处最优，信念也必须处处合理，整套方案才构成均衡

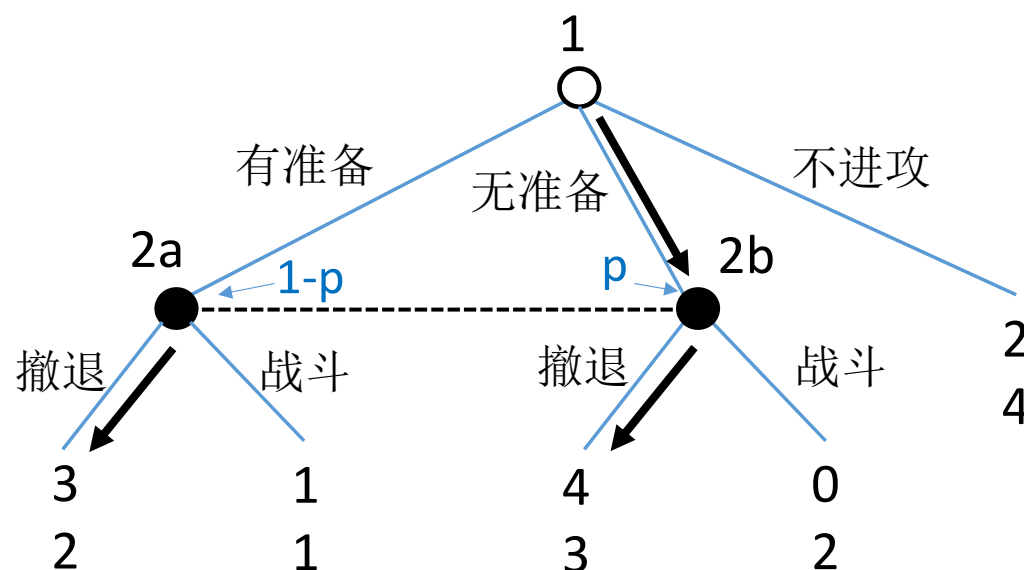
弱序贯均衡（Weak Sequential Equilibrium）

- 定义：一个策略组合加上信念系统，满足如下条件则构成弱序贯均衡（又称弱贝叶斯完善均衡）
 1. 信念合理（又称“一致性”）
 - 在路径上的信息集上，信念必须服从贝叶斯法则（前面的公式[1]）
 - 在路径外的信息集上，可以持有任意信念
 2. 策略最优——符合序贯理性
 - 给定信念，每一位博弈者在每个信息集上（考虑其后续博弈）都做出了最优的选择
- 注意弱序贯均衡首先必然是纳什均衡
 - 就好像子博弈完善均衡首先是纳什均衡
 - 有时可以通过先找出纳什均衡，再看其中哪些能构成弱序贯均衡

弱序贯均衡：例一

可以先找出纳什均衡，然后根据定义来筛选

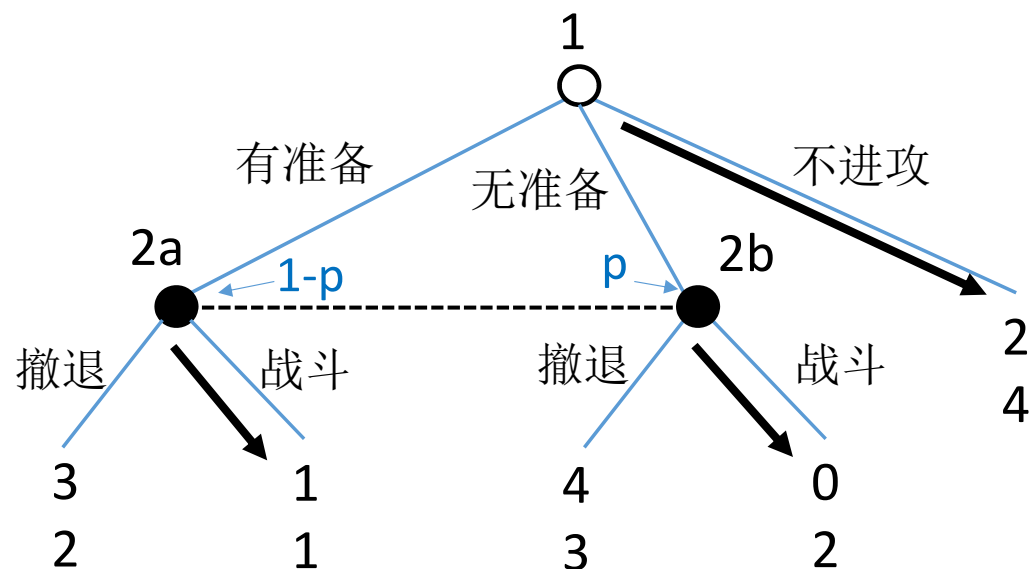
- 纳什均衡有两个：（无准备进攻，撤退）、（不进攻，战斗）
- 先看（无准备，撤退），令2的信念为 $P(2b)=p$ ， $P(2a)=1-p$
 - 根据信念合理性的要求， $p=1$
 - 当 $p=1$ 时，2在自己信息集上的最优反应是撤退
 - 给定2会选撤退，1的最优反应是无准备进攻
 - 所以，（无准备，撤退）且2的信念为 $p=1$ ，这构成了弱序贯均衡



	撤退	战斗
有准备	3, 2	1, 1
无准备	4, 3	0, 2
不进攻	2, 4	2, 4

存在两个纳什均衡

弱序贯均衡：例一



- 再看（不进攻，战斗），令2的信念为 $P(2b)=p$,

$$P(2a)=1-p$$

- 给定1的策略是不进攻，2的信息集在路径外，2可以拥有任意信念
- 但是考察2在自己信息集上的最优反应：无论2拥有什么样的信念，她的最优选择都是选撤退
- 所以无法构成均衡

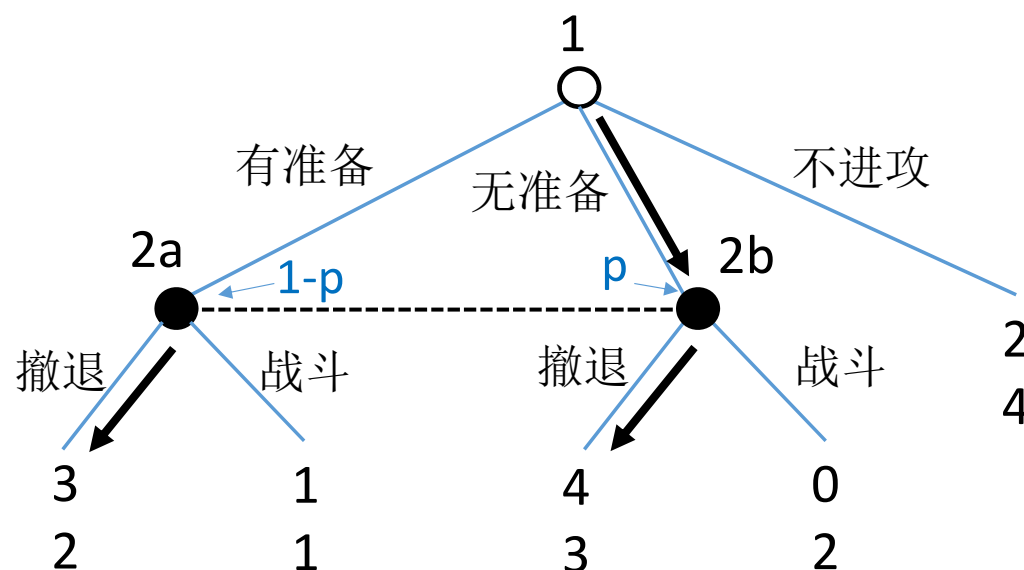
	撤退	战斗
有准备	3, 2	1, 1
无准备	4, 3	0, 2
不进攻	2, 4	2, 4

存在两个纳什均衡

弱序贯均衡：例一

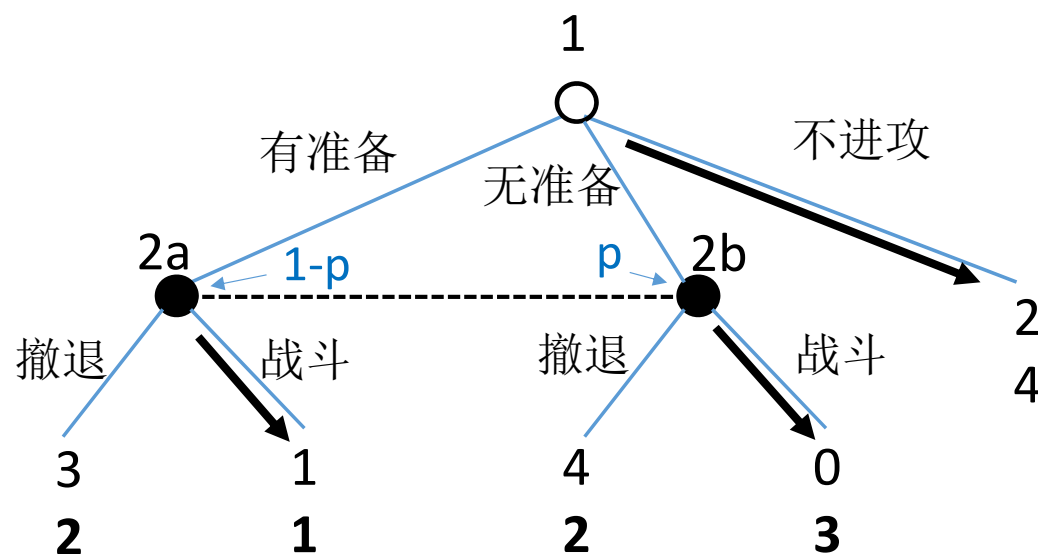
也可用逆推归纳法分析

- 2在他的信息集上会如何选？
 - 无论2的信念是什么，他都会选择撤退
- 给定2选撤退，那么1的最优选择是
 - 无准备的进攻
- 验证一下：（无准备，撤退）且 $p=1$
 - 信念的合理性：没问题
 - 各方选择的最优性：没问题



弱序贯均衡：例二

- 可以先找出纳什均衡（单纯策略）
 - (不进攻，战斗)
- 能否（配合相应的信念）构成弱序贯均衡？
 - 2 撤退收益是 2，战斗收益是 $1(1-p) + 3p = 1+2p$ ；可知，当 $p \geq 1/2$ ，战斗
 - 构建均衡：(不进攻，战斗)，2在其信息集上的信念为 $p=1$ （或任意 $p \geq 1/2$ ）
- 验证一下
 - 检查信念的合理性：2信息集不在博弈路径上，该处信念不受任何限制
 - 检查策略的最优性：给定2的信念 $p=1$ ，2选战斗是最优的；给定2选战斗，1选不进攻也是最优的

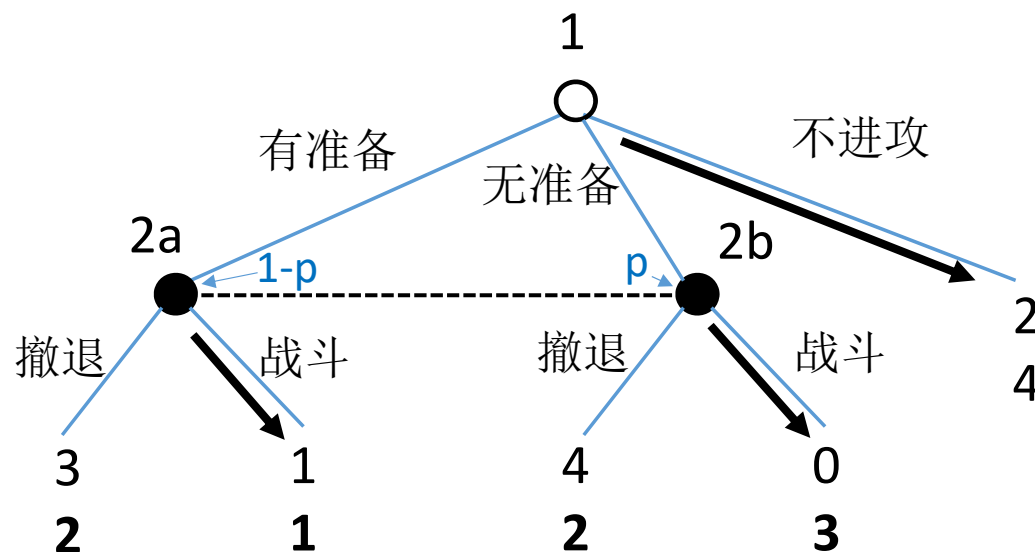


	撤退	战斗
有准备	3, 2	1, 1
无准备	4, 2	0, 3
不进攻	2, 4	2, 4

弱序贯均衡：例二

也可以用逆推归纳法

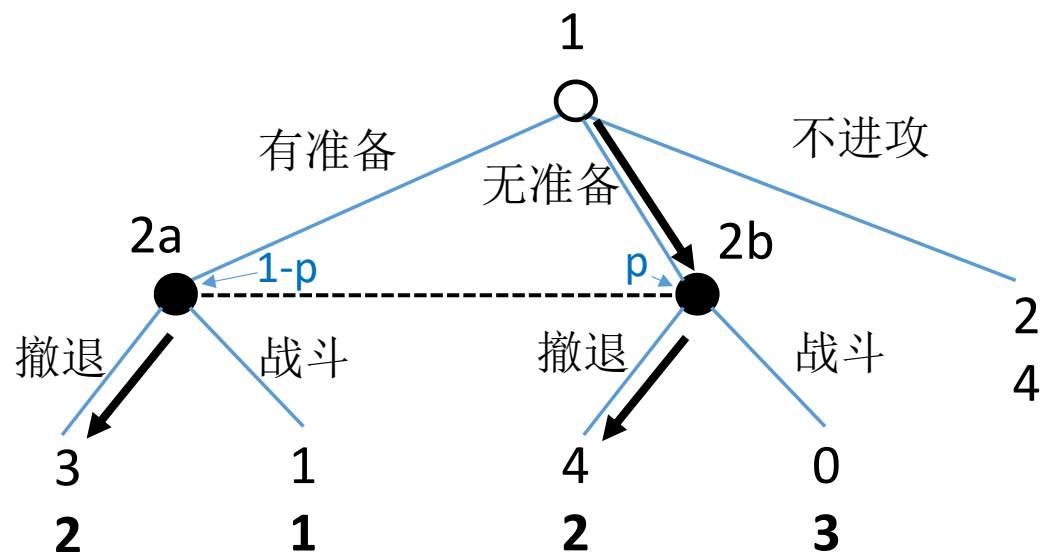
- 2在他的信息集上会如何选？
 - 撤退的期望收益：2
 - 战斗的期望收益： $1(1-p)+3p=1+2p$
 - 当 $p \geq 1/2$ 时，2战斗； $p \leq 1/2$ ，2撤退
- 如果2选战斗（2的信念为 $p \geq 1/2$ ）
 - 1的最优策略是不进攻；此时，2的信念可以成立
 - 可构成弱序贯均衡：(不进攻，战斗)，2的信念为 $p \geq 1/2$



弱序贯均衡：例二

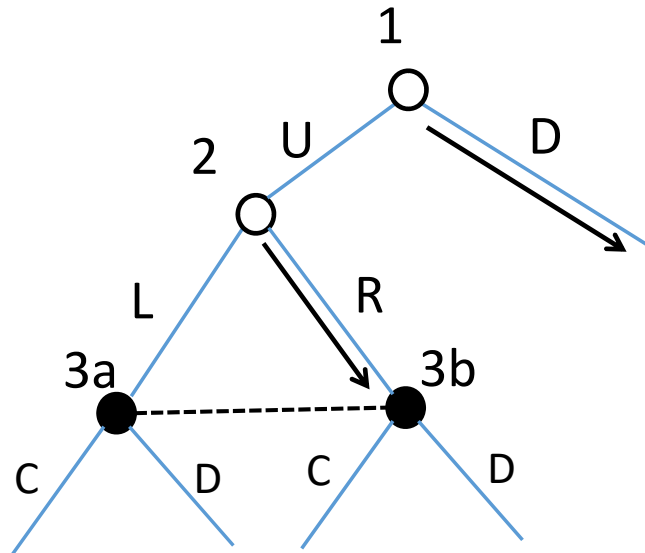
也可以用逆推归纳法

- 2在他的信息集上会如何选？
 - 撤退的期望收益：2
 - 战斗的期望收益： $1(1-p)+3p=1+2p$
 - 当 $p \geq 1/2$ 时，2战斗； $p \leq 1/2$ ，2撤退
- 如果2选战斗（2的信念为 $p \geq 1/2$ ）
 - 1的最优策略是不进攻；此时，2的信念可以成立
 - 可构成弱序贯均衡：(不进攻，战斗)，2的信念为 $p \geq 1/2$
- 如果2选撤退（2的信念为 $p \leq 1/2$ ）
 - 1的最优策略是无准备的进攻；此时，2的信念需要为 $p=1$ ，无法成立
 - 无法构成均衡
- 所以，只有一个弱序贯均衡，和前面分析的结果相同



信息不完善的动态博弈中的几种均衡概念

- 弱序贯均衡 (weak sequential equilibrium)
 - 路径外的信息集上的信念不受任何限制
 - 又称弱贝叶斯完善均衡 (weak perfect Bayesian equilibrium)
- 对路径外信息集上的信念的完全不加约束，这是否太宽松了？
- 贝叶斯完善均衡 (perfect Bayesian equilibrium)*
 - 即使在路径外的信息集上的信念，只要可能，必须受贝叶斯法则约束



- 如果1的策略是D，2的策略是R，3在她的信息集上应该持有什么样的信念？
- 弱序贯均衡（弱贝叶斯完善均衡）的要求：给定1, 2的策略，由于3的信息集不在博弈路径上，3在此处可以有任意信念
- 贝叶斯完善均衡的要求：给定1, 2的策略，3在自己的信息集上与此一致的信念必须是 $\text{Prob}(3b | 3a \text{ or } 3b) = 1$

信息不完善的动态博弈中的几种均衡概念

- 弱序贯均衡 (weak sequential equilibrium)
 - 又称弱贝叶斯完善均衡 (weak perfect Bayesian equilibrium)
 - 不在博弈路径上的信息集上的信念不受限制
- 对路径外信息集上的信念的完全不加约束，这是否太宽松了？
- 贝叶斯完善均衡 (perfect Bayesian equilibrium)*
 - 即使不在博弈路径上的信息集上的信念，只要可能，必须受贝叶斯法则约束
- 序贯均衡 (sequential equilibrium)*
 - 假设博弈者以极小的概率偏离现在的策略，根据贝叶斯法则确定每个人的信念；随着偏离概率趋近于零，信念趋近的极限为合理信念

*对于这两者我们课上不作要求，有兴趣可以参考Tadelis, 2013, *Game Theory: An Introduction*, chapter 15