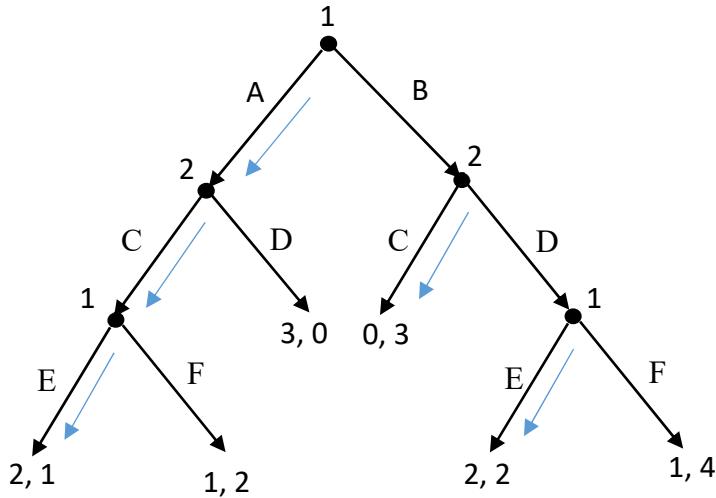


社会博弈论 2023 春季

期末考试参考答案

回答下面各题。总分 100 分。时间 110 分钟。

1. (22 分)



a. 逆推归纳法找出博弈的子博弈完善均衡。(6 分)

(AEE, CC)

b. 如果当博弈者 1 首先行动之后, 博弈者 2 不知道 1 究竟采取了什么行动, 即上图中 2 的两个决策节点属于她的同一个信息集, 其他均不变, 请写出这个新博弈的策略型(收益矩阵)。(8 分)

	C	D
AEE	2, 1	3, 0
AEF	2, 1	3, 0
AFE	1, 2	3, 0
AFF	1, 2	3, 0
BEE	0, 3	2, 2
BEF	0, 3	1, 4
BFE	0, 3	2, 2
BFF	0, 3	1, 4

c. 找出这个新博弈的纳什均衡。 (4 分)

两个纳什均衡： (AEE, C) 、 (AEF, C)

d. 新博弈中，哪一个纳什均衡，配上 2 的什么信念，可以构成弱序贯均衡？ (4 分)

(AEE, C) , 配上 2 的信念：1 选的是 A, 可以构成弱序贯均衡。

(另外一个 (AEF, C) 肯定不行，因为在右下角的那个 1 的决策节点，他选择 F 不是最优的。)

1. (16 分) 考虑一个三人博弈。博弈者 1 可以选 U 或 D, 博弈者 2 可选 L 或 R, 博弈者 3 可以选 W 或 E。下面给出了博弈的收益矩阵。

博弈者 3 选：W

		博弈者 2	
		L	R
博弈者 1	U	3, 2, 1	4, 0, 2
	D	2, 0, 0	3, 3, 2

博弈者 3 选：E

		博弈者 2	
		L	R
博弈者 1	U	1, 2, 1	1, 0, 1
	D	2, 0, 1	2, 3, 2

a. 找出本博弈单纯策略的纳什均衡。 (4 分)

如上图： (U, L, W) 和 (D, R, E)

b. 找出本博弈混合策略的纳什均衡(提示：先试着写出每一方的每一种单纯策略的收益，然后利用混合策略成立的条件)。 (12 分)

令 1 的混合概率是 $p, 1-p$; 2 的混合概率是 $q, 1-q$; 3 的混合概率是 $r, 1-r$. (这一步 2 分)

考虑 1 的两个单纯策略收益： (每个单纯策略收益各 1 分)

$$U(q, r) = (3q+4(1-q))r + 1(1-r) = (4-q)r+1-r = 1+3r-qr$$

$$D(q, r) = (2q+3(1-q))r + 2(1-r) = (3-q)r+2-2r = 2+r-qr$$

1 要使用混合策略，要求 U 和 D 的收益相等，即 $1+3r-qr = 2+r-qr \rightarrow r=1/2$ (1 分)

考虑 2 的两个单纯策略收益： (每个单纯策略收益各 1 分)

$$L(p, r) = (2p+0)r + (2p+0)(1-r) = 2p$$

$$R(p, r) = (0+3(1-p))r + (0+3(1-p))(1-r) = 3-3p$$

2 要使用混合策略需要二者相等，即 $2p=3-3p \rightarrow p=3/5$ (1 分)

考虑 3 的两个单纯策略收益：（每个单纯策略收益各 1 分）

$$W(p, q) = (1p+0)q + 2(1-q) = pq + 2 - 2q = 2 - 2q + pq$$

$$E(p, q) = 1q + (p+2)(1-p)(1-q) = q + (2-p)(1-q) = q + 2 - 2q - p + pq = 2 - q - p + pq$$

3 要使用混合策略要求二者相等，即 $2 - 2q + pq = 2 - p - q + pq \Rightarrow -2q = -p - q \Rightarrow p = q$ ，根据前面 $p = 3/5$ ，可知 $q = 3/5$ （1 分）

综合起来， $(p=3/5, q=3/5, r=1/2)$ 是一个混合策略的均衡。（1 分）

3. (20 分) 考虑一个非对称的公共品博弈（又称“智猪博弈”），其策略型如下

		博弈者 2	
		W	S
博弈者 1	W	1, 5	-1, 9
	S	4, 4	0, 0

a. 如果该博弈进行一次，单纯策略的纳什均衡有哪些？（2 分）

(S, W)

b. 该博弈有没有混合策略的纳什均衡？如有，请找出。如果没有，请说明理由。（4 分）

没有。（2 分）

因为 1 的 W 策略是严格劣势策略，所以任何均衡中 1 只会选 S。给定 1 选 S，2 的最优反应是 W。没有混合策略的均衡。（2 分）

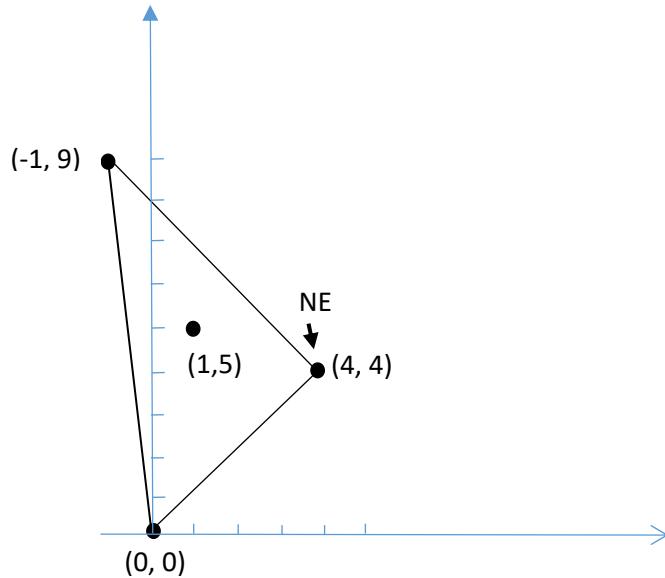
c. 如果该博弈重复有限次，在这个重复博弈里，是否存在子博弈完善均衡，其中第一阶段双方的策略不是 (S, W) ？如果存在，请构建这样一个均衡。如果不存在，请说明理由。（这里我们不考虑打折。）（4 分）

不存在。（2 分）

可用逆推归纳法。最后一个阶段，双方的策略只可能是 (S, W) ，给定这一点，倒数第二阶段也同样。直到第一阶段。（2 分）

现在考虑将以上博弈进行无限重复形成的一个新博弈，其中博弈者的时间折扣 (time discounting) 系数为 δ ， $0 < \delta < 1$ 。

d. 请画出该重复博弈的可行收益 (feasible payoffs) 的集合。 (4 分)



e. 该博弈中是否存在这样的子博弈完善均衡，其结果是双方的平均收益为 $(1, 5)$ ？如果存在，请构建这样一个均衡，并给出所需要的 δ 值。如果不存在，请说明理由。 (6 分)

存在。(2分)。(博弈的 minmax 收益为 $(0, 4)$ ，所以任何优于这一点的收益都可以成为均衡收益。不过答案中不需指出 minmax，回答存在即可。)

策略分为合作期和惩罚期。合作期双方策略为 (W, W) 。如果任意一方偏离，那么进入惩罚期，惩罚期双方策略为 (S, S) 。惩罚期持续 4 阶段，结束后回到合作期。惩罚期内如果任意一方偏离，惩罚期重新开始。这里可以设定 $\delta=0.9$ 即可。

(可简单说明理由：由于合作期双方策略是 (W, W) ，博弈者 1 如果偏离，可以获得的最高的一次性净利润是 $4-1=3$ 。博弈者 2 偏离的最高一次性净收益是 $9-5=4$ 。由于惩罚期内的收益是 $(0, 0)$ ，比起合作期的收益 $(1, 5)$ ，1 每期的净损失是 1，2 每期的净损失是 5。所以需要至少惩罚 4 个时期才能保证 1 没有动力偏离(2 也没有动力偏离)。惩罚 4 期，1 的净损失为 $\delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4$ ，要使之大于 3，可以令 $\delta=0.9$ 。(也可以惩罚更长的时间。根据设定的惩罚期的长度，选择相应的 δ ，使得惩罚期内的净损失大于等于 3 即可，当惩罚期非常长， δ 只需要大于 $3/4$ 即可。)

4. (22 分) 考虑以下问题。博弈者 1 和 2 之间可以开展的博弈有两种，分别称为博弈 A 和博弈 B。策略型如下。

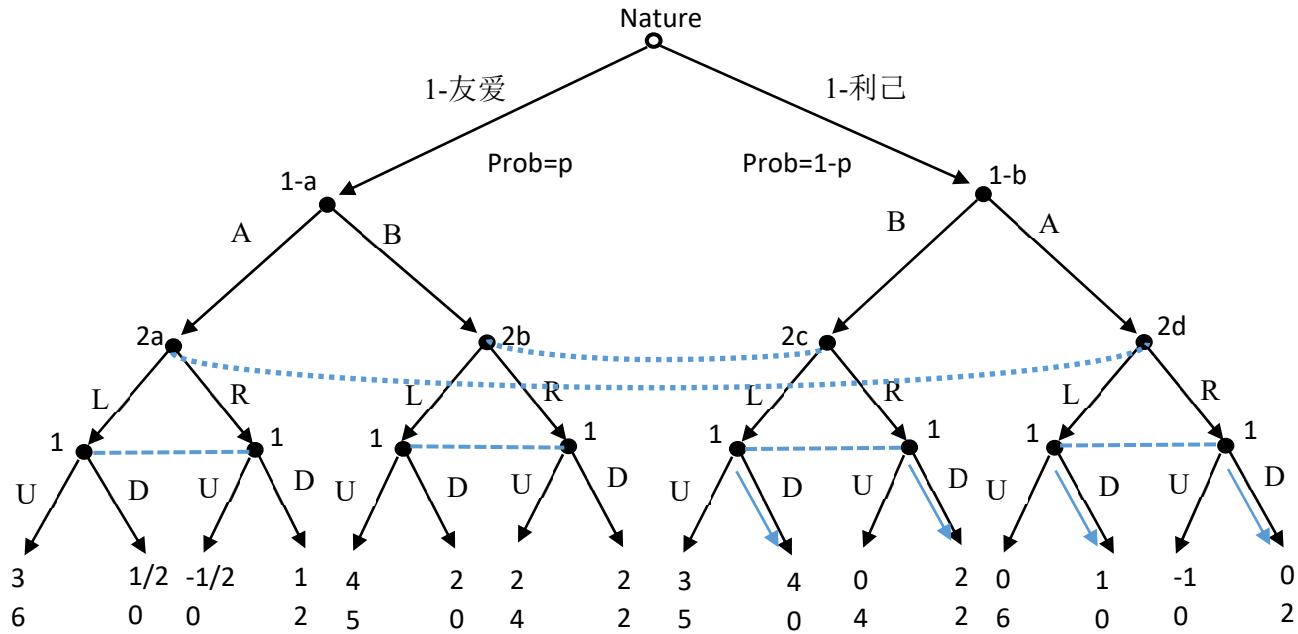
		A 博弈		B 博弈		
		博弈者 2		博弈者 2		
		L	R	L	R	
博弈者 1 利己型	U	0, 6	-1, 0	博弈者 1 利己型	3, 5	0, 4
	D	1, 0	0, 2		4, 0	2, 2

博弈者 2 只有一种偏好结构，他在每种情况下的收益就是上图所示的“原始收益”。而博弈者 1 有两种可能的偏好结构，“自利型”和“友爱型”。对于自利型的 1 而言，他的收益就是上图中的原始收益。而对于友爱型的 1 而言，他在每一种情境（策略组合）中的真正收益都是自己的原始收益加上对方的原始收益，再除以 2（因为他同等地爱自己和对方）。

- a. 对于 1 的友爱型，请清楚写出他与博弈者 2 开展 A 博弈和 B 博弈的收益矩阵各是怎样的。（4 分）

		A 博弈		B 博弈		
		博弈者 2		博弈者 2		
		L	R	L	R	
博弈者 1 友爱型	U	3, 6	-1/2, 0	博弈者 1 友爱型	4, 5	2, 4
	D	1/2, 0	1, 2		2, 0	2, 2

b. 考虑以下的序贯博弈。“自然”首先行动，以 p 和 $1-p$ 的概率决定博弈者 1 是友爱型还是自利型。 $p=1/2$, 是公共信息。博弈者 1 知道自己的偏好类型，但博弈者 2 不知道 1 的类型。先由博弈者 1 选择是进行 A 博弈还是 B 博弈。接下来博弈者 2 和他开展被选中的博弈。请画出整个博弈的延展型（博弈树）。(提示：同时型博弈可以表示为某一方先行动，而另一方不知道他的选择的延展型。) (6 分)



c. 如果博弈者 1 的友爱型选择 A 博弈，自利型选择 B 博弈；博弈者 2 在 A 博弈中相信对方是友爱性并选择 L，在 B 博弈中相信对方是利己型并选择 R；博弈者 1 的友爱型在 A 博弈和 B 博弈中都选 U，利己型则在两个博弈中都选 D；这样的策略组合加信念系统是否构成弱序贯均衡？如果是，请清晰的给出验证，如果不是，请说明理由。 (4 分)

是的。(1分)

首先，给定 1 的策略，2 的信念是合理的。(0.5 分)

给定 2 的信念和 1 的策略，2 在博弈 A 中 ($\{2a, 2d\}$ 信息集上) 相信自己在 $2a$ ，选 L 得到 6，选 R 只能得到 0，所以选 L。2 在博弈 B 中 ($\{2b, 2c\}$ 信息集上) 相信自己在 $2c$ ，选 R 得到 2，选 L 得到 0，所以选 R。(1 分)

给定 2 的选择，1 的友爱型在博弈 A 中选 U 获得 3，选 D 只能得到 $1/2$ ，选 U 最优；在博弈 B 中选 U 获得 2，选 D 获得 2，可以选 U。1 的自利型在博弈 A 和 B 中的优势策略都是 D，所以选 D。(0.5 分)

再考虑 1 在第一步的选择。1 的友爱型如果选 A 博弈得 3，选 B 博弈得 2，所以选 A 博弈。而 1 的自利型选 A 博弈得 1，选 B 博弈得 2，所以选 B 博弈。(1 分)

整个均衡成立。

- d. 如果博弈者 1 的友爱型选择 B 博弈；自利型选择 A 博弈；博弈者 2 在 B 博弈中相信对方是友爱型并选择 L，在 A 博弈中相信对方是利己型并选择 R；博弈者 1 的友爱型在 A 博弈中选 D，在 B 博弈中选 U，利己型则在两个博弈中都选 D；这是否构成弱序贯均衡？如果是，请清晰的给出验证，如果不是，请说明理由。（4 分）

不是。（2 分）

给定 2 的选择和 1 在 A、B 博弈中的选择，1 的自利型选择 A 博弈的收益是 0，他如果改选 B 博弈，他的收益是 4.（2 分）

- e. 如果博弈者 1 的两个类型都选择 B 博弈；博弈者 2 在 A、B 两个博弈中都相信对方是友爱型的概率是 p，并都选择 L；博弈者 1 的友爱型在 A、B 博弈中都选 U，利己型则在两个博弈中都选 D；这是否构成弱序贯均衡？如果是，请清晰的给出验证，并找出所需的 p 值。如果不是，请说明理由。（4 分）

可以构成均衡。（1 分）

给定 1 的选择，2 在 B 博弈中的信念是合理的，在 A 博弈中的信念由于不再路径上，不受约束，也是合理的。（0.5 分）

在 B 博弈中，2 相信自己在 2b 的概率是 p，在 2c 的概率是 1-p。她选 R 的期望收益是 $4p+2(1-p) = 2p+2$ ，选择 L 的期望收益是 $5p+0 = 5p$ ，当 $2p+2 \leq 5p$ ，即 $p \geq 2/3$ ，她选择 L 最优。（0.5 分）

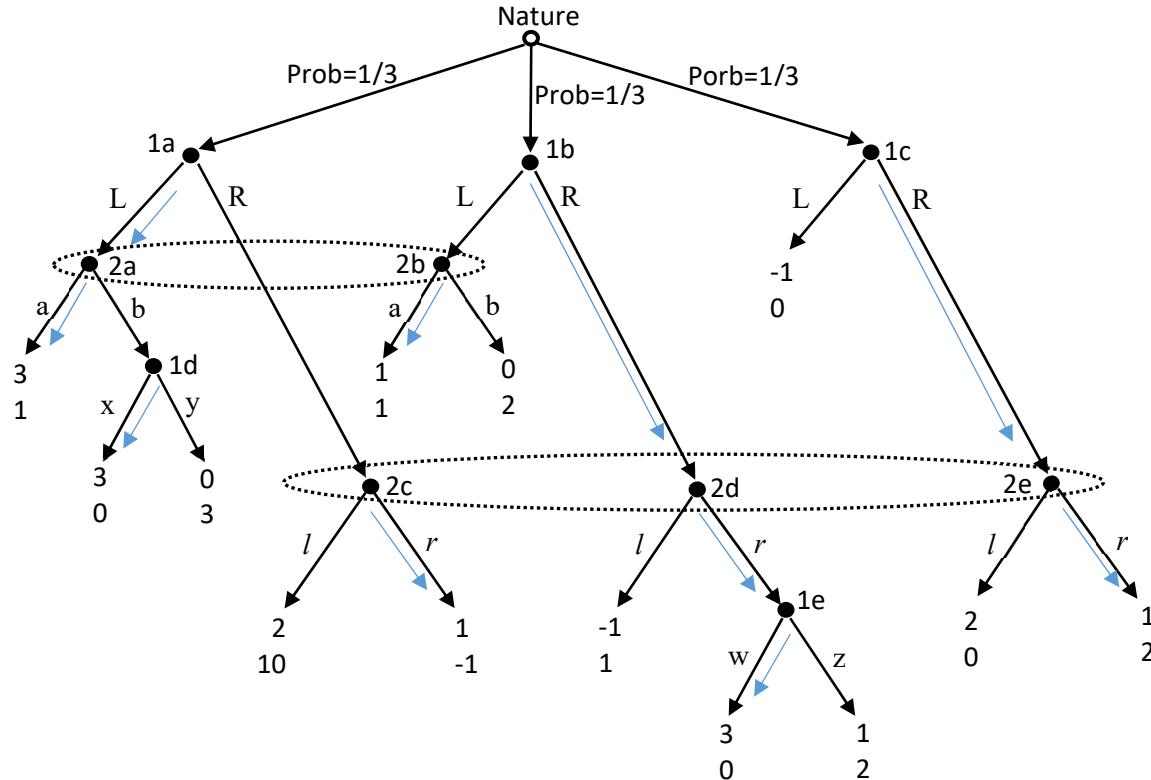
在 A 博弈中，2 相信自己在 2a 的概率是 p，在 2d 的概率是 1-p。她选 R 的期望收益是 $0+2(1-p) = 2-2p$ ，选择 L 的期望收益是 $6p+0 = 6p$ ，当 $6p \geq 2-2p$ ，即 $p \geq 1/4$ 时，她选择 L 最优。（0.5 分）

给定 2 的选择，1 的友爱型在 A 中的最优反应是 U，在 B 中的最优反应也是 U。1 的自利型在 A 和 B 中的最优反应都是 D。（0.5 分）

1 的友爱型最开始选博弈 A 的收益是 3，博弈 B 的收益是 4，所以选 B。1 的自利型选博弈 A 的收益是 1，博弈 B 的收益是 4，所以也选 B。（0.5 分）

可见，当 $p \geq 2/3$ （也就 $\geq 1/4$ ）时，该均衡成立。（0.5 分）

5. (20 分) 考查如下的一个 2 人博弈。其中每个信息集（决策节点）标注了该处轮到哪个博弈者（1 或 2）决策。由于每个博弈者拥有不止一个信息集（决策节点），所以每个节点处还用字母加以区别。（例如，1a, 1b 是轮到博弈者 1 决策的两个不同节点。）



- a. 使用逆推归纳法，确定以下决策节点上博弈者的最优选择：1d, 1e (2 分)

分别选 x 和 w。 (各 1 分)

基于上面的结果，进一步回答下面的问题

- b. 如果三种类型的博弈者 1 都使用 L (1a, 1b, 1c 三处都选 L) , 是否存在相应的弱序贯均衡? 如果存在，请找出该均衡的策略组合和相应的信念系统。如果不存在，请清晰的说明理由。 (4 分)

不存在。 (2 分)

因为 1c 必然选 R: 他如果选 L 只能得到 -1, 而选 R 可以得到 2 或 1, 肯定比 -1 要好。 (2 分)

【如果分析 2 在 {2a, 2b} 的信念必然是 $1/2, 1/2$, 那么他此时选 a 的期望收益是 1, 选 b 的期望收益是 $0*1/2+2*1/2=1$. 即 2 可以选 a 或 b 或混合策略。这样往下分析就复杂了。但是最终还是要回到 1c 不可能选 L 这一点上来。】

- c. 如果三种类型的博弈者 1 都使用 R，是否存在相应的弱序贯均衡？如果存在，请找出该均衡的策略组合和相应的信念系统。如果不存在，请清晰说明理由。（4 分）

不存在。（1 分）

如果 1 使用 R，那么 2 在 {2c, 2d, 2e} 信息集上的信念必然是各个点均为 $1/3$ ，他在该信息集上选 L 的期望收益是 $1/3 * (10+1+0) = 11/3$ ，选 r 的期望收益是 $1/3 * (-1+0+2) = 1/3$ ，2 会选 L。（2 分）

给定 2 选 L，1a 不可能选 R，因为选 R 他得到 2，而如果他选 L，他肯定得到 3. (1b 也不可能选 R，因为选 R 他接下来得到 -1，而选 L 他得到 1 或 0，肯定比 -1 好。)

也可以不分析 2 的选择就直接指出，1a 不可能选 R，因为他选 L 肯定得到 3，他选 R 只能得到 2 或 1。（1 分）

- d. 如果 1a 使用 L，1b 和 1c 使用 R，是否存在相应的弱序贯均衡？如果存在，请找出该均衡的策略组合和相应的信念系统。如果不存在，请清晰说明理由。（4 分）

存在。1a 使用 L，1b 和 1c 使用 R；2 在 {2a, 2b} 上相信自己在 2a，并使用 a，在 {2c, 2d, 2e} 上相信自己在 2b、2c 的概率各是 $1/2$ ，并使用 r。1d 选 x，1e 选 w。（1 分）

信念：给定 1 的选择，2 在两个信息集上的信念都是合理的。（0.5 分）

给定 2 的信念，2 在 {2a, 2b} 上相信自己在 2a，他使用 a 获得 1，使用 b 获得 0，使用 a 最优。2 在 {2c, 2d, 2e} 上相信自己在 2b、2c 的概率各是 $1/2$ ，他使用 r 的期望收益是 $0*1/2+2*1/2=1$ ，他使用 l 的期望收益是 $1*1/2+0*1/2=1/2$ ，使用 r 最优。（1.5 分）

给定 2 的选择，1a 选 L 得到 3，选 R 得到 1，选 L 最优；1b 选 L 得到 1，选 R 得到 3，选 R 最优；1c 选 L 得到 -1，选 R 得到 1，选 R 最优。（1 分）

可见是弱序贯均衡。

- e. 是否存在这样的弱序贯均衡，其中 2 在 {2a, 2b} 这个信息集上采用的是混合策略？如果存在，请找出该均衡和相应的信念系统。如果不存在，请清晰地说明理由。（6 分）

不存在。（2 分）

如果 2 在 {2a, 2b} 这个信息集上采用的是混合策略，那么这意味着他选 a 和 b 的收益是相等的。令他的信念为在 2a 处为 p，2b 处为 $1-p$ ，他选 a 的期望收益是 1，选 b 的期望收益是 $0*p+2*(1-p)=2-2p$ 。二者相等意味着 $2-2p=1$ ，即 $p=1/2$ 。（2 分）

但由于 1a 总是选 L 优于选 R（选 L 肯定得到 3，选 R 只能得到 2 或 1），所以，要使 $p=1/2$ ，1b 必须选择 L。（1 分）

又考虑到 1c 总是选 R 优于选 L（选 R 肯定得到 -1，选 L 可以得到 2 或 1），这就意味着此时 2 在 {2c, 2d, 2e} 上的信念是他在 1c，他会选 r。（0.5 分）

给定 2 在 {2c, 2d, 2e} 上选 r, 1b 选 R 的收益是 3, 一定超过他选 L 的期望收益 (2 和 1 的某种加权平均)。1b 不可能选 L, 矛盾。 (0.5 分)