

## 作业四参考答案

1. 下面是一个囚徒困境的博弈，行动 C 代表合作，D 代表背叛。

		博弈者 2	
		C	D
博弈者 1	C	2, 2	-1, 3
	D	3, -1	0, 0

设想两名博弈者重复进行上面的博弈。未来收益的折扣系数(discount factor)是  $\delta$ :  $0 < \delta < 1$

考虑如下的“一报还一报”(Tit-for-Tat)策略：“在第一阶段使用 C；在以后的每个阶段，如果上一阶段对方使用的是 C，自己本阶段使用 C，如果上一阶段对方使用了 D，自己本阶段使用 D”（即总是重复上一阶段对方的行动）。当  $\delta$  的取值在什么范围，双方使用本策略是子博弈完善的纳什均衡？（提示：对以上 TFT 策略而言，每一阶段各方的行动都由上一阶段对方的行动完全决定的，所以可以把所有可能的历史分为四种，即上一阶段双方使用了 (C,C)，(C,D)，(D,C) 或 (D,D)。考虑在每一种情况之后，博弈者 1 是否有动力偏离指定策略。）

答案：

分为 (C,C)，(C,D)，(D,C)，(D,D) 之后四种情况讨论。

在 (C, C) 之后，策略指定本阶段 1 使用 C，2 也使用 C，在以后的阶段双方也会继续使用 (C,C)。此时 1 如果不偏离，收益为每一阶段 2，即平均收益为 2。1 如果一次性偏离，那么本阶段 (D, C)，导致下一阶段 (C,D)，再下一阶段 (D, C)，一直如此交替下去，1 的收益流为 3, -1, 3, -1, ……，打折后的总收益

$V = \frac{3-\delta}{1-\delta^2}$ ，平均收益  $u = \frac{3-\delta}{1+\delta}$ 。当  $\frac{3-\delta}{1+\delta} \leq 2$ ，即  $\delta \geq \frac{1}{3}$  时，1 没有动力偏离。

在 (C, D) 之后，按照策略要求，本阶段 1 应当使用 D，2 使用 C，下阶段 (C,D)，再下一阶段 (D,C)，如此交替下去。1 如果不偏离，收益流为 3, -1, 3, -1, ……，打折后的平均收益为  $\frac{3-\delta}{1+\delta}$ 。如果 1 一次性偏离，本阶段为 (C, C)，下一阶段双方按照策略会继续使用 (C, C)，如此一直延续下去，这样 1 的平均收益为 1。1 不偏离的条件是  $\frac{3-\delta}{1+\delta} \geq 2$ ，即  $\delta \leq \frac{1}{3}$ 。（注意这和上面得到的条件正好相反。所以只有当  $\delta = \frac{1}{3}$  才有可能成立。）。

在 (D, C) 之后，按照策略，1 应当在本阶段采用 C，而 2 使用 D，下一阶段

(D, C), 再下一阶段 (C, D), 如此交替下去。1 如果不偏离, 收益流为  $-1, 3, -1, 3, \dots$ , 打折后平均收益为  $\frac{-1+3\delta}{1+\delta}$ 。如果 1 一次性偏离, 本阶段 (D, D), 以后双方继续 (D, D), 1 的平均收益是 0。1 不偏离的条件是  $\frac{-1+3\delta}{1+\delta} \geq 0$ , 即  $\delta \geq \frac{1}{3}$ 。

在 (D, D) 的历史之后, 策略指定双方本阶段使用 (D, D), 下一阶段也是 (D, D), 一直延续下去。1 不偏离的话, 平均收益为 0。1 一次性偏离的话, 本阶段为 (C, D), 下一阶段为 (D, C), 如此交替下去, 1 的收益流为  $-1, 3, -1, 3, \dots$ , 打折后平均收益为  $\frac{-1+3\delta}{1+\delta}$ 。1 不偏离的条件是  $\frac{-1+3\delta}{1+\delta} \leq 0$ , 即  $\delta \leq \frac{1}{3}$ 。

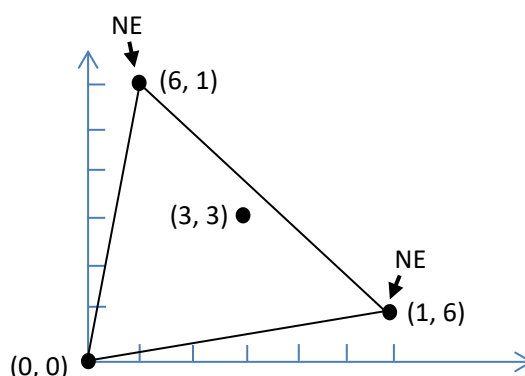
综合起来, 本博弈中, 只有当  $\delta = \frac{1}{3}$  时, TFT 是子博弈完善的。

2. 下面是一个鹰-鸽博弈

	Hawk	Dove
Hawk	0, 0	6, 1
Dove	1, 6	3, 3

设想博弈重复进行, 贴现系数  $0 < \delta < 1$ 。

- a. 画图表示该博弈的可行收益(feasible payoff)的集合, 并在图上标注出一次性博弈的纳什均衡收益点。



- b. 根据 Friedman 的无名氏定理, 我们知道哪些收益可以是重复博弈的均衡中的平均收益?

根据 Friedman 的无名氏定理, 优于纳什收益的可行收益可以成为均衡收益, 这在上图中为空集。但是我们知道重复纳什均衡本身是重复博弈的均衡, 所以两个纳什收益点本身, 即 (1,6) 和 (6,1), 可以成为均衡中的平均收益。

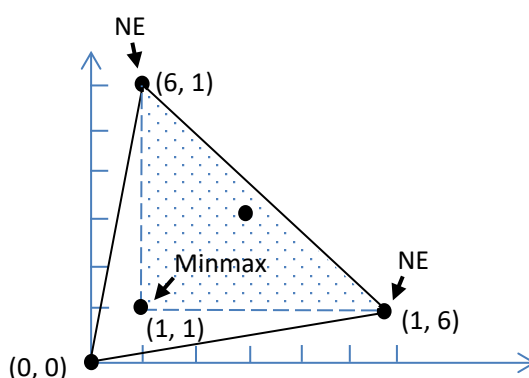
- c. 假设两名博弈者都使用以下触发策略: 第一阶段使用 Dove; 从第二阶段起, 如果之前没有任何人使用过 Hawk, 接着使用 Dove, 否则转入永远使用 Hawk。这

一策略组合是均衡吗？简要说明为什么。

该策略不是子博弈完善的。考虑一方使用了 Hawk 之后的决策点。双方永远使用 Hawk 不是后续博弈的一个纳什均衡。因为当对方的策略是永远使用 Hawk，博弈者 1 可以选择使用 Dove，获取的收益更大。

- d. 该阶段博弈的 minmax 收益对于博弈者 1 和 2 各是多少？在图上标注出 minmax 收益对应的点。

对于 1 而言，minmax 收益为 1，2 的 minmax 收益也是 1。



- e. 根据 Fudenberg & Maskin 的无名氏定理，我们知道哪些收益可以是重复博弈的均衡中的平均收益？

如上图所示，所有优于 minmax 点的可行收益（即阴影部分），都可以是均衡中的平均收益

- f. 试着构建一个均衡策略，其结果是双方一直使用 (Dove, Dove)，获得平均收益 (3,3)，并且指定一个能使该均衡成立的  $\delta$  值，（提示，能支持这样的均衡结果的策略可以有很多，构建一个即可。能支撑该均衡的  $\delta$  值只需指定一个足够大的即可。如果有能力找出  $\delta$  的区间当然更好。）

考虑以下策略：

在合作期：双方使用 (Dove, Dove)；

如果任意一人偏离合作期的指定路径，转入惩罚期；

在惩罚期，双方使用 (Hawk, Hawk)，延续 2 个阶段（如果你选的不是 2 个阶段，而是更多的惩罚阶段，均衡也可以成立，只是对  $\delta$  的要求不同）；

如果惩罚期内任意一人偏离，重新开始惩罚期；

惩罚期结束后，回到合作期。

我们从 1 的角度分析。

在合作期内，不偏离的收益是每个阶段 3。偏离的话，本阶段收益 6，下个阶段 0，再下个阶段 0，然后每个阶段 3。两者的差（不偏离的收益减去偏离的收益）为  $-3 + 3\delta + 3\delta^2$ 。当其大于 0，即当  $\delta^2 + \delta - 1 \geq 0$  时，即  $\delta \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ，1 不会偏离。

在惩罚期内第一阶段，给定 2 的策略，1 如果不偏离，本阶段收益 0，下阶段收益 0，然后每个阶段收益 3。1 如果偏离，本阶段收益 1，下个阶段收益 0，再下个阶段收益 0，然后每个阶段收益 3。两者差为  $-1 + 3\delta^2$ 。当  $\delta \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$  时，1 不会偏离。

在惩罚期内第二个阶段，在没有人偏离惩罚期策略的历史之后，1 如果不偏离，本阶段收益 0，下阶段开始每个阶段收益 3。1 如果偏离，本阶段收益 1，下一阶段收益 0，再下一阶段收益 0，然后每一阶段收益 3。我们注意到在这里 1 偏离的收益和上面（在惩罚期第一阶段）他偏离的收益一样（因为每次偏离的后果都是重新启动惩罚期）；而在这里他不偏离的收益比上面（在惩罚期第一阶段）他不偏离的收益还要大（因为惩罚期已经快要结束了）。所以，他如果在惩罚期第一个阶段没有动力偏离，那么在这里也没有动力偏离。

在惩罚期内的第二个阶段，如果前一阶段有人违背了惩罚期的策略，则需要重启惩罚期。这时 1 面临的和上面分析的惩罚期第一阶段完全一样。

综上所述，当  $\delta \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$  时，例如  $\delta = 0.7$ ，以上策略组合构成了子博弈完善均衡，该均衡中博弈者的平均收益为 (3, 3)。