第十讲：贝叶斯博弈应用

回顾

- 贝叶斯博弈：信息不完善的静态博弈
  - 博弈者，根据其掌握的**私人信息**，形成不同的**类型**
  - 各个类型的博弈者根据自己的**信念**（关于世界状态的概率判断）来选择能最大化自己期望收益的策略
  - 在贝叶斯均衡中，给定其他博弈者的策略，**每一种类型**的博弈者都使用了自己的最优策略
- 今天讨论的旁观者困境和拍卖模型都是贝叶斯博弈的应用

“旁观者困境”（Bystanders’ Dilemma）

- 姬蒂·吉诺维斯（Kitty Genovese）遇害案引发的关注和讨论
  - 1964年3月18号夜里，在纽约市内一家酒吧工作的Kitty Genovese下班回家时，在公寓楼外遇到袭击，前后约45分钟，最终身亡
  - 《纽约时报》事后报道说：当时目睹或听到了该袭击的邻居多达38人，但没有人出门相助，也没有人报警*
  - 事件引发了广泛讨论：这是反映了人们（纽约居民、美国人、现代人）变得越来越冷漠、不关心他人，只关心自己了吗？
  - 社会心理学和其他学科的学者对此开展了长期的研究和争论——是由于个体的冷漠，还是恰恰因为有很多的旁观者在场，反而导致任何一个人采取行动（报警）的可能性下降？

*这一报道后来被证明细节上并不准确，目击者没有那么多，也并不是完全无人报警

旁观者干预作为公共品(public good)

- 情境设定：某一个群体中，有一种公共品（例如目睹违法行为时报警）一旦生产出来，对所有人都具有正面价值，对个体i而言的价值为v_i；只要群体中的任何一个人采取了干预行动 a_i =1，该公共品就被生产出来（多个人采取行动和一个人行动的效果相同）；对于采取行动的个体而言，需付出成本是c
- 公共前提：v_i 是相互独立的随机变量，在$[v_{min}, v_{max}]$实数区间上取值， v_i服从同一个概率分布，其累积概率函数为 $F(x) = Prob(v_i \le x)$ ， F(x)是连续递增的
  - 这里更具体地设定，v_i 服从在[a, b]上的**均匀分布**：$F(x) = (x- a)/(b - a)$，$0<a<b$
- 私人信息：每个人知道自己的v_i的取值，但不知道其他人的v_j的取值
- 每个人可选择是否采取干预行动： a_i =0 or 1

- 这里博弈者i的类型：v_i （有无穷多种）
- 博弈者i的收益函数

  $u_i = 0$ if $a_i = 0$ for all i

  $u_i = v_i$ if $a_i = 0$ but for some $j \neq i$, $a_j = 1$

  $u_i = v_i - c$ if $a_i = 1$

- 如果这个博弈只有一个博弈者，他选 $a_i = 0$ 得到0，选 $a_i = 1$ 得到$v_i - c$ ；显然，只要$v_i \geq c$ ，他就会选$a_i = 1$
- 如果有n>1个博弈者呢？
- 每个人都采用策略 $a_i = 1$ 当且仅当 $v_i \geq c$，是不是贝叶斯均衡？
  - **不是**（因为我考虑到其他人有可能$v_j \geq c$ 从而选a_j=1，自己就不一定要这么选）
  - 给定其他人执行该策略，把其他人中至少有一个人$v_j \geq c$的概率称为P'
  - 我选$a_i = 0$ 的期望收益是$P' \cdot v_i + (1 - P') \cdot 0$
  - 我选$a_i = 1$ 的期望收益是 $v_i - c$
  - 我选$a_i = 1$ 的条件是$v_i - c \geq P' \cdot v_i$ → $v_i \geq c/(1 - P')$ （而不是$v_i \geq c$）

- 有没有对称型的均衡（每个人都按同一种策略行动）？
- 考虑这样的策略组合：每一种类型博弈者的策略为：$a_i = 1 \text{ iff } v_i \geq v^*$ ，这里的v*是一个阈限值——什么样的v*能使之构成均衡？
- 从i的角度看，如果其他人都采用该策略，那么其他人中有人选a_j=1的概率就等于其他人中至少有一个人的 $v_j \geq v^*$ 的概率，称之为P

$$P = 1 - \text{Prob}\left(v_j < v^*\right)^{n-1} = 1 - F(v^*)^{n-1}$$

i选择$a_i = 0$的收益是：$Pv_i + (1 - P)0 = (1 - F(v^*)^{n-1})v_i$

i选择$a_i = 1$的收益是： $v_i - c$

- 如果他的最优反应是$a_i = 1 \text{ iff } v_i \geq v^*$（按v*这个阈值来行动），就要求

当 $v_i < v^*$： $(1 - F(v^*)^{n-1})v_i \geq v_i - c \quad \rightarrow \quad v_i F(v^*)^{n-1} \leq c$

当 $v_i \geq v^*$： $(1 - F(v^*)^{n-1})v_i \leq v_i - c \quad \rightarrow \quad v_i F(v^*)^{n-1} \geq c$

- 可知： $v_i = v^*$ 时， $v_i F(v^*)^{n-1} = c$ ，即 $v^* F(v^*)^{n-1} = c$

- 也就是说，每个人都按照v^*这个阈值来行动可构成均衡，这里v^*满足

$$v^* F(v^*)^{n-1} = c \qquad [1]$$

- 可以看出：随着博弈者人数n的增加，个体采取行动的阈限值v^***提高**
  - 当博弈者人数为1时，只要$v_i \geq$ c，他就会选择$a_i = 1$，即$v^* =$ c
  - 当博弈者人数为n > 1时，可以看到，$v^* > c$
    - 因为 $F(v^*) < 1$，（只要 $v^* < v_{max}$）
  - 而且，随着n增大，v^*必然增大
    - 如果v^*保持不变或减小，等式[1]无法保持成立
- 也就意味着，随着n增加，每一个博弈者i采取行动$a_i = 1$的概率**下降**
- 随着n的增加，生产出公共品的概率？
  - 每个人采取行动的概率下降了，但是总人数增加了，那么至少有一位博弈者采取行动的概率是更高了还是更低了？

均衡中，每个人按照阈值v^*行动，而$v^* F(v^*)^{n-1} = c$ [1]

且我们知道，随着n增加， v^*也增大

- 均衡中，至少有一个人$v_i \geq v^*$从而采用a_i=1的概率，称为P^*

$$P^* = 1 - \text{Prob}(v_i < v^*)^n = 1 - F(v^*)^n \qquad [2]$$

- 从[1]可知 $F(v^*)^{n-1} = \frac{c}{v^*}$，代入[2]可得： $P^* = 1 - \frac{F(v^*) \cdot c}{v^*}$
- 当n增大时， $F(v^*)/v^*$ 如果随之增大，那就意味着P*会随之**下降**
  - 由于这里F是[a, b]上的均匀分布，F(x) = (x-a)/(b - a)，且 0<a<b
  - $F(v^*)/v^* = \frac{v^* - a}{(b-a) \cdot v^*} = \frac{1}{b-a} - \frac{a}{(b-a) \cdot v^*}$
  - 我们已知，随着n增加， v^*增加，所以 $F(v^*)/v^*$的值随着n的增大而增大
- 当然，如果v的概率分布是其他形式， $F(v^*)/v^*$ 有可能随着n的增大而减小，即P*会随n的增大而上升

旁观者困境与“责任的弥散”(Diffusion of Responsibility)

在一个“旁观者困境”中

- 即使当每一个个体的内在偏好v_i的分布没有改变，采取行动的成本c也没有改变的情况下，随着旁观者人数n的增加
  1. 每个人伸出援手的概率下降
  2. 至少有一个人伸出援手的概率也有可能下降
     – 这会不会发生取决于$F(v^*)/v^*$是否随着n的增大（v^*增大）而增大
- 直观上，当人数增加时，个体行动的责任更加弥散化，这种“责任的弥散”（diffusion of responsibility）有可能造成行动的困境

拍卖
Auction

拍卖（Auction）

- 当卖家不了解出售品对于买方的价值时，可以通过拍卖（来获取信息）
- 拍卖品的价值分为两种情况
  - 私人价值 (private value)
    - 拍卖品对于每一位竞拍者具有（不同的）个人价值，对每个人的价值是彼此独立的
    - 例: 纯粹为个人欣赏而购买的艺术品（不考虑转卖价格）
  - 共同价值(common value)
    - 拍卖品对于一位竞拍者的价值不独立于它对于其他人的价值
    - 纯粹共同价值(pure common value)：拍卖品具有某种“客观价值”（但每一位竞拍者不一定完全清楚该价值）
    - 例: 油田、通讯频道
- 我们主要讨论当拍卖品的价值为**私人价值**时的情况

拍卖的不同形式

1. “英式拍卖”（English auction）
   - 价格逐渐上升，直到其他所有人都退出竞争，剩下最后一位
2. “荷兰式拍卖”（Dutch auction）
   - 价格逐渐下降，直到有第一个人接受出价，中标
3. 第二价格密封投标（second price sealed bid）
   - 竞拍者各自密封投标，最高出价者中标，支付**第二高**的投标价格
   - （在私人价值的情况下），相当于**英式拍卖**
4. 第一价格密封投标（first price sealed bid)
   - 竞拍者各自密封投标，最高出价者中标，支付自己投标的价格（**最高价**）
   - 相当于**荷兰式拍卖**

第二价格密封投标 (Second Price Sealed Bid)

- 规则：最高出价者中标，支付**第二高**的投标价格
- 卖方有什么理由让竞拍者只支付第二高的价格？
  - 直观上：竞拍者可以更“放心”的提高报价
  - 也许更有利于竞拍者披露自己的真实类型
- 这里分析私人价值（private value）的情况

第二价格密封投标（私人价值）

- 竞拍者：1, 2, …, n
- 公共信息（Common Prior）：拍卖品对于每人的价值是 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，v_i 的取值为区间$[v_{min}, v_{max}]$上的实数，各个v_i的是相互独立的随机变量，其累积概率函数为 $F_i(x) = Prob(v_i \leq x)$
- 博弈者i知道自己的v_i，但是不知道其他人的v_j
- 博弈者i可能的**类型**（有无穷多）：v_i
- 博弈者i的**策略**：出价 $b_i(v_i)$
- 博弈者ｉ的**收益**
  - 如果i不是赢家，0
  - 如果i是赢家，v_i - h（h是除了i以外其他人报价中最高的，即“第二高”的报价）
  - 如果有m个同样的最高报价，每个赢家获得$(v_i\text{-}h)/m$

第二价格密封投标（私人价值）

- 贝叶斯均衡？
- 每一位博弈者拥有一种**优势策略**（dominant strategy）
  - 博弈者i的出价等于拍卖品对于自己的价值，$b_i = v_i$
- 基本证明思路
  - 令h代表其他博弈者中的最高出价
  - 如果h过高，超过拍卖品对于我的价值v_i，我不愿意出更高价赢得竞拍
  - 如果h低于拍卖品对于我的价值 v_i ，那么我出价 $b_i = v_i$ 就足以赢得竞拍；不需要出更高价，也不需要降低出价

证明 $b_i = v_i$是优势策略（1）

- 如果$h > v_i$
  - 我出价$b_i = v_i$ 无法获胜，收益为0
  - 我出价$b_i < v_i$也无法获胜，收益为0
  - 我出价$b_i > v_i$，该策略的期望收益 < 0，因为
    a) 可能获胜，但获胜的净收益 $v_i - h < 0$
    b) 可能平局，收益$(v_i - h)/m <0$
    c) 可能失败，收益 = 0

证明$b_i = v_i$是优势策略（2）

- 如果$h = v_i$
  - 我出价$b_i = v_i$获得平局，收益为 $(v_i - h)/m = 0$
  - 我出价$b_i < v_i$失败，收益为0
  - 我出价$b_i > v_i$获胜，收益 $v_i - h = 0$

证明$b_i = v_i$是优势策略（3）

- 如果h < v_i
  - 我出价$b_i = v_i$：获胜，收益为 v_i-h > 0
  - 我出价$b_i > v_i$：获胜，收益也同样为 v_i-h > 0
  - 我出价$b_i < v_i$：该策略的期望收益 < v_i-h，因为
    a) 可能获胜，收益为 v_i-h
       - 注意：降低报价并没有提高我获胜时的收益
    b) 可能平局，收益为 (v_i-h)/m；
    c) 也可能失败，收益为0

小结：第二价格密封投标（私人价值）

- 每个博弈者报价$b_i=v_i$，构成了一个贝叶斯纳什均衡
  - 每个人使用的是自己的（弱）优势策略
  - 无论有多少竞拍者，也无论每个v_i的分布形式是怎样的，该均衡都成立
  - 每个人的策略披露了拍卖品对于他的真实价值：truth-revealing
  - 均衡中，赢得拍卖的人是拍卖品对其价值最高的人，且收益为正（非负）；资源分配结果是社会最优
- 补充说明：也存在其他的贝叶斯纳什均衡
  - 比如估值第二高的人（或任何人）出顶价v_{max}（高于所有人的v_i），其他人出价0（为什么构成均衡，请课下思考）
  - 不如上一个均衡“合理”：其他博弈者使用的是劣势策略（为什么出价0是劣势策略，请课下思考）
  - 所以我们通常聚焦在$b_i=v_i$这一均衡上

第一价格密封投标（私人价值）

- 规则：最高出价者中标，支付自己的投标价格（即**最高**价格）
  - 胜者的收益是 $v_i - b_i$
- 显然，这种拍卖中，报价$b_i = v_i$带来收益一定为0；该策略是（弱）**劣势**策略（不如出价$b_i < v_i$）
- 博弈者i面对的取舍问题(trade-off)
  - 令h = 其他人最高的投标价格，i的期望收益是：$Prob(b_i>h)\cdot(v_i-b_i)$
  - 提高叫价b_i， 获胜概率$Prob(b_i>h)$增加，但是获胜后收益(v_i-b_i)减少；降低叫价b_i，则相反
  - 这里，最优的策略取决于所有个体的v的具体随机分布形式

例：第一价格两人竞拍（均匀分布）

- 公共前提：v_1和v_2是独立、**均匀分布**在[0,1]区间上的随机变量
- 私人信息：每个人知道自己的v_i
- 可证明如下策略构成一个贝叶斯纳什均衡：每个人的出价为 $b_i = \frac{1}{2} v_i$

证明

- 从1的角度看（自己的v_1是已知常数，对方的v_2 是随机变量）
  - 给定2的策略$b_2 = \frac{1}{2} v_2$，由于v_2均匀分布在[0,1]，所以b_2均匀分布在[0, $\frac{1}{2}$]上
  - 如果1选择$b_1 > 1/2$，1肯定获胜，其收益为$v_1 - b_1$
  - 如果1选择$b_1 \leq 1/2$，其期望收益为

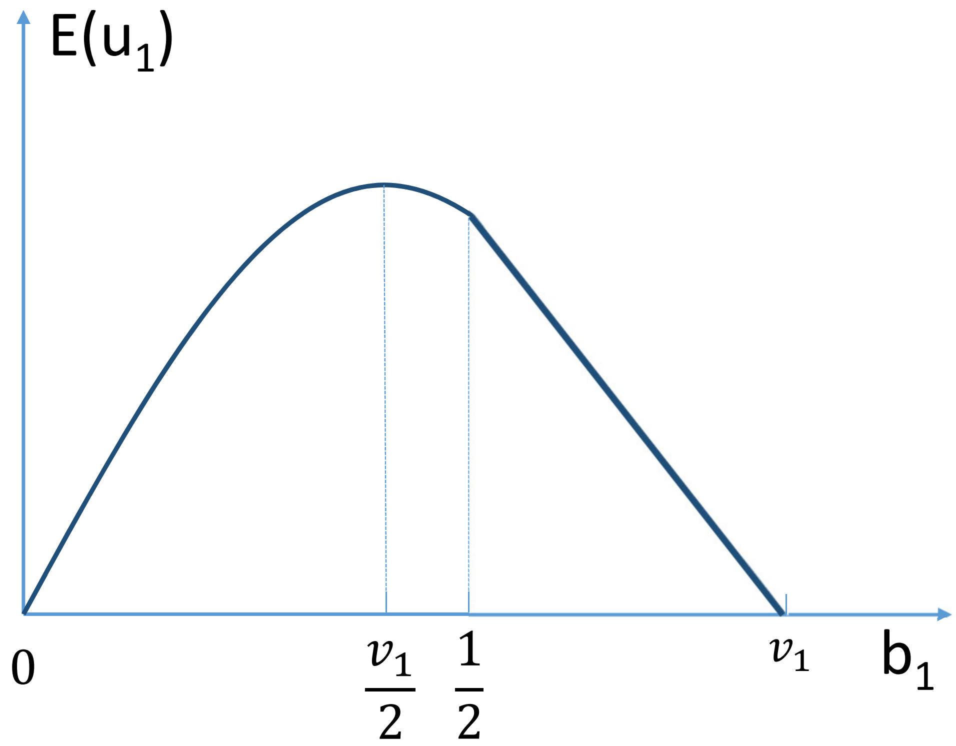
0

$$\Pr(b_1 > b_2)(v_1 - b_1) + \Pr(b_1 < b_2) \cdot 0 + \Pr(b_1 = b_2)(v_1 - b_1)/2$$

$$= \Pr(b_2 < b_1)(v_1 - b_1) = \Pr\left(\frac{1}{2} v_2 < b_1\right)(v_1 - b_1) = \Pr(v_2 < 2b_1)(v_1 - b_1)$$

$$= 2b_1(v_1 - b_1)$$

- 综上所述，1的期望收益
  - 如果$b_1 > \frac{1}{2}$，$\mathrm{E}(u_1) = v_1 - b_1$
  - 如果$b_1 \le \frac{1}{2}$，$\mathrm{E}(u_1) = 2b_1(v_1 - b_1)$
- 如右图
- 最大值在曲线部分，即$2b_1(v_1 - b_1)$部分
  - 根据一阶条件，解出极值点：$b_1 = \frac{1}{2}v_1$
- 与此对称，博弈者2的最优策略也是如此
- 所以，$(\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_2)$是贝叶斯纳什均衡



- 更一般的：如有n个竞拍者 (v_i 独立均匀分布在[0,1])，存在均衡 $b_i = \frac{n-1}{n}v_i$
  （需要用到较多概率论知识，不要求掌握）
- 这里的出价策略构成贝叶斯均衡（但不是优势策略）
- 在均衡中，赢得拍卖的仍是是v_i最大的买家，资源分配是社会最优

收入等价(Revenue Equivalence)

- 收入等价定理：卖方的收入（即赢得竞拍者付出的价格）的期望值，在第一价格拍卖和第二价格拍卖中是相等的
  - 证明需要用到较多的概率论知识，我们不具体介绍
- 直观上
  - 在第二价格的拍卖中，赢家报的价格是最高的估值，但付的只是第二高的估值
  - 在第一价格的拍卖中，赢家报的价格是第二高的估值（的期望），付出的也是该价格

作弊问题

- 第二价格拍卖似乎具有很多优点
  - 每个人的优势策略很直观；不依赖于对于他人估值的概率判断；出价直接披露了真实信息
- 为什么现实中并不是绝大多数的拍卖都是第二价格拍卖呢？
- 一个可能的原因：作弊的可能性更大
  - 买方作弊：一个人出超高价，其他人都出低价，胜者只支付低价
    - 为什么第一价格拍卖中不容易出现这种作弊？
  - 卖方作弊：虚构（或者找帮手叫出）较高的出价，以抬高胜者所支付的价格
    - 为什么第一价格拍卖中不容易出现这种作弊？

- 作业五请查教学网，下下周三（五月13号）课上交