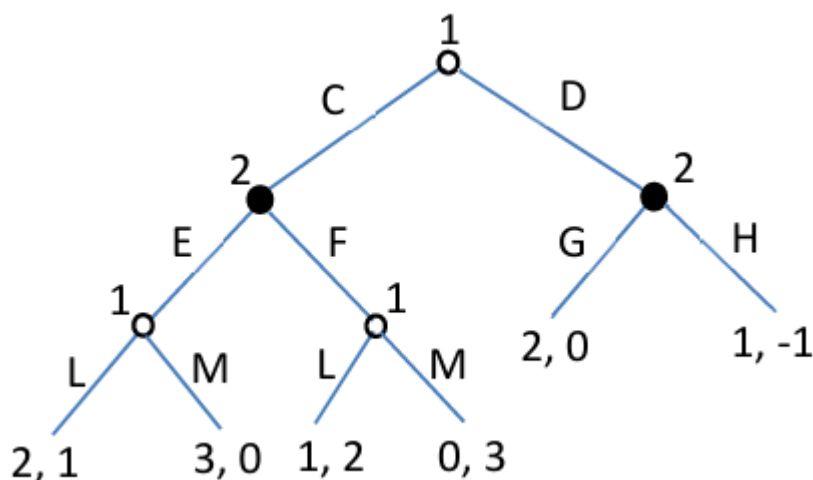


# HW3

## Problem 1 classical dynamic game

考虑如下博弈



a. 写出该博弈的策略型表达，注明博弈者的策略，并找出所有的纳什均衡。

博弈者1：C-LL, C-LM, C-ML, C-MM, D-LL, D-ML, D-LM, D-MM；

博弈者2：EG, EH, FG, FH.

所有的纳什均衡包括：(C-LL, FH); (C-ML, FH); (D-\*, FG)。

b. 该博弈含有几个子博弈？画图表示。

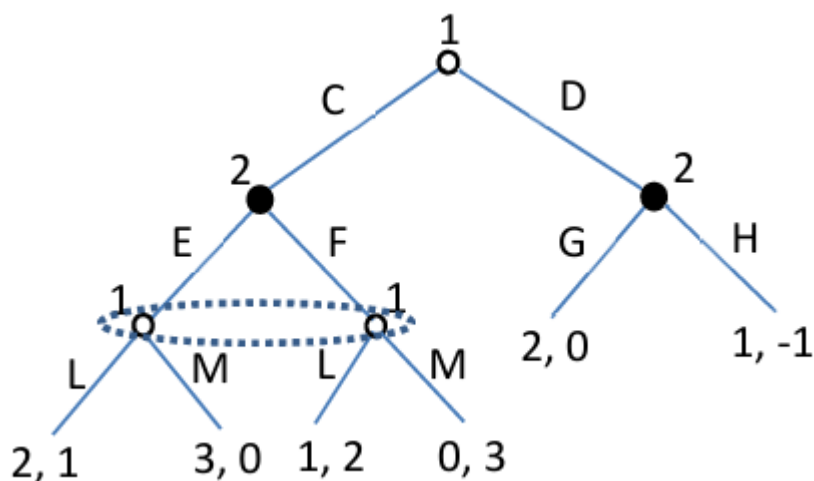
5个子博弈：本身；历史C之后的子博弈；历史E之后的子博弈；历史F之后的子博弈；历史D之后的子博弈。

c. 该博弈的子博弈完善均衡有哪些？

逆推：在EF历史后，1的决策必然为ML；进而C历史后2的决策必然为F，此时受益为(1,2)；D历史后的2的决策必然为G，此时收益为(2,0)；故1的决策为D。子博弈完善均衡只有一个，即(D-ML, FG)。

## Problem 2 addition of an information set

如果在以上博弈里，2行动之后，1并不知道他具体采取了什么行动。也就是说，1的最后两个决策节点构成了一个信息集，如下图所示



a. 写出这个新博弈的策略型，并找出所有的纳什均衡。

博弈者1：CL, CM, DL, DM;

博弈者2：EG, EH, FG, FH;

纳什均衡：(CL, FH); (D\*, FG)。

b. 这个博弈里有几个子博弈？画图表示。

3个子博弈：本身；历史C之后的子博弈；历史D之后的子博弈。

c. 该博弈里的子博弈完善均衡有哪些？

(DL, FG)。

## Problem 3 King Solomon's game

有两个女人争夺一个孩子，她们都声称孩子是自己的。智慧的所罗门王设计了一个博弈机制来解决这个问题，规则如下。

第一个女人可以先选择是放弃还是坚持自己的主张。如果放弃，孩子归对方，博弈结束。如果坚持，那么进入下一轮，由第二个女人选择放弃或坚持。如果放弃，孩子归对方，博弈结束。如果坚持，她必须提出一个代价 $x$ 。所罗门王考虑到双方拥有的财富可能不等，所以用进宫做婢女服役若干年作为代价，即她必须提出服役 $x$ 年作为获得孩子的代价（ $x$ 为正整数）。然后第三轮又轮到第一个女人选择放弃或坚持。她如果放弃，对方获得孩子并

付出刚才所提出的代价 $x$ （即进宫服役 $x$ 年），而她自己则会受到服役1年的惩罚。她如果坚持，她得到孩子但要付出刚才对方所提出的代价 $x$ （即进宫服役 $x$ 年），而对方受到服役1年的惩罚。

我们设定，进宫服役每一年对两位女子的效用是-1；对真母亲而言，获得孩子的效用是 $a$ ，失去孩子的效用是 $-a$ ；对于假母亲而言，获得孩子的效用是 $b$ ，失去孩子的效用是 $-b$ 。这里的 $a$ 远大于 $b$ （不妨令 $a > b+1$ ）。以上效用以及谁是真母亲对两个女人来说是公共信息。

a. 如果第一个女人是真正的母亲，那么子博弈完善均衡中，双方的策略是怎样的？简要解释其中的理由。结果是谁得到这个孩子？有人服役吗？

使用逆推求子博弈完善均衡。

考虑第一个女人的最后一次选择。当 $-a-1 \leq a-x$ 时，第一个女人选择获得孩子，此时 $x \leq 2a-1$ ；此时考虑第二个女人，她若不要孩子则收益为 $(a, -b)$ ，要孩子则收益为 $(a-x, -b-1)$ ，故必定选择不要孩子。此时第一个女人选择获得孩子。当 $x > 2a-1$ 时第一个女人选择不要孩子，此时第二个女人要孩子的受益为 $b-x < b-2a-1 < -b$ ，第二个女人依然不要孩子。最终第一个女人获得孩子，无人服役。

b. 如果第二个女人是真正的母亲，那么子博弈完善均衡中，双方策略是怎样的？简要解释其中的理由。结果谁得到这个孩子？有人服役吗？

$-b-1 \leq b-x$ ，即 $x \leq 2b+1$ 时，第一个女人将选择获得孩子，此时必有 $-a > -a-1$ ，因而第二个女人会放弃孩子，第一个女人会得到孩子，收益为 $(b, -a)$ 。

$a-x < a$ ，即 $x > 2a$ 时，第二个女人将放弃孩子，此时第一个女人依然会得到孩子，收益为 $(b, -a)$ 。

$2b+1 < x \leq 2a$ 时，最后一轮第一个女人将放弃孩子，第二个女人将得到孩子，在此基础上第一个女人将直接放弃孩子，收益为 $(-b, a)$ 。

考虑到 $x$ 由第二个女人提出，对于她而言总可以通过调整 $x$ 到第三种情况以增加自己的收益，最终的均衡将是第二个女人拿到孩子，无人服役。

## Problem 4 You get what you pay for

4. 买瓜得瓜 (You get what you pay for)。考虑如下的委托—代理模型。委托人先提出报酬结构, 然后代理人选择自己的投入水平, 以生产出结果  $y$ 。代理人需要投入两种要素:  $x_1$  和  $x_2$ , 相应的成本为  $c = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ , 产出的实际结果是  $y = x_1 + 2x_2$ 。但是委托人既无法观察到  $x_1$  和  $x_2$ , 也无法直接观察到真实的  $y$ , 只能观察到关于  $y$  的某种测量指标。他有两种测量指标可供选择。第一种是  $y' = x_1 + x_2$ 。第二种是  $y'' = x_1 + 2x_2 + \varepsilon$ , 这里的  $\varepsilon$  是正态分布的随机变量, 均值为 0。可以把第一种测量指标  $y'$  看作是客观指标, 精确但片面; 第二种测量指标  $y''$  可看作主观指标, 全面但是有较多的噪音。委托人提出的报酬形式是  $w = s + b\hat{y}$ , 其中  $s \geq 0, b \geq 0$ , 而  $\hat{y}$  是他选取的对产出的测量指标 (可以是  $y'$  或者  $y''$ )。博弈按如下步骤进行: 委托人先提出  $s$ 、 $b$  和所选的测量指标  $\hat{y}$ , 然后代理人选择自己的投入水平  $x_1$  和  $x_2$ , 之后双方获得各自的收益: 其中委托人的收益是  $u_1 = y - w$ ; 代理人的收益是  $u_2 = w - c$ 。

- a. 如果委托人选用客观测量指标  $y'$ , 在此前提下, 博弈的子博弈完善均衡是什么? 双方各自的收益是多少?
  - b. 如果委托人选用主观测量指标  $y''$ , 在此前提下, 博弈的子博弈完善均衡是什么? 双方各自的收益是多少?
  - c. 比较这两个结果, 哪一种指标下博弈的结果对双方而言更好? 在该指标下, 激励的强度, 即  $b$  的大小, 与另一种情况下相比, 是较高还是较低? (这个模型告诉我们, 指标并不总是越精确越好, 激励强度也并不总是越高越好!)
- a. 如果选择  $y' = x_1 + x_2$ , 则代理人的收益为  $u_2 = s + b(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ , 其最大值在  $x_1 = x_2 = b$  处取得为  $s + b^2$ 。此时委托人的收益为  $u_1 = b + 2b - s - b(b + b) = 3b - s - 2b^2$ , 为了委托人自身收益最大, 他将设为  $s = 0$ ,  $b = 3/4$ 。此时委托人收益为  $9/8$ , 代理人的收益为  $9/16$ 。
  - b. 如果选择  $y'' = x_1 + 2x_2 + \varepsilon$ , 则代理人的收益为  $s + b(x_1 + 2x_2 + \varepsilon) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ , 最大值在  $x_1 = b, x_2 = 2b$  处取得为  $s + b\varepsilon + 5/2b^2$ 。此时委托人的收益为  $u_1 = b + 4b - s - b(b + 2b + \varepsilon) = 5b - s - 5b^2 - b\varepsilon$ , 为了委托人自身收益最大, 他将设为  $s = 0$ ,  $b = 1/2$ 。此时委托人收益为  $5/4$ 。代理人的收益为  $5/8$ 。这个模型中的随机项仅以一次项出现, 求平均时完全消失, 不影响最终结果。
  - c. 第二种主观测量指标下博弈结果更好。此时激励强度低于第一种。