

# 第二讲：最优反应与 纳什均衡

# 回顾：“占优可解”（Dominance Solvable）

- 有不只一种“解”的概念，从占优关系出发是一种
  - **劣势策略 (dominated strategy)**: 对于一个博弈者 $i$ ，如果她的策略 $b$ 和策略 $a$ 相比，无论对方如何行动， $b$ 的收益都不如 $a$ ，那么 $b$ 是该博弈者的一个劣势策略
- 如果每一个博弈者都是理性的，且这一点是公共信息 (public information)，那么
  - 一个博弈者肯定不会使用自己的（严格）劣势策略
  - 而其他博弈者也会预见到这一点
  - 所以我们可以把（严格）劣势策略从博弈中剔除，从而简化博弈

# 趣味博弈（选美竞赛）：占优可解

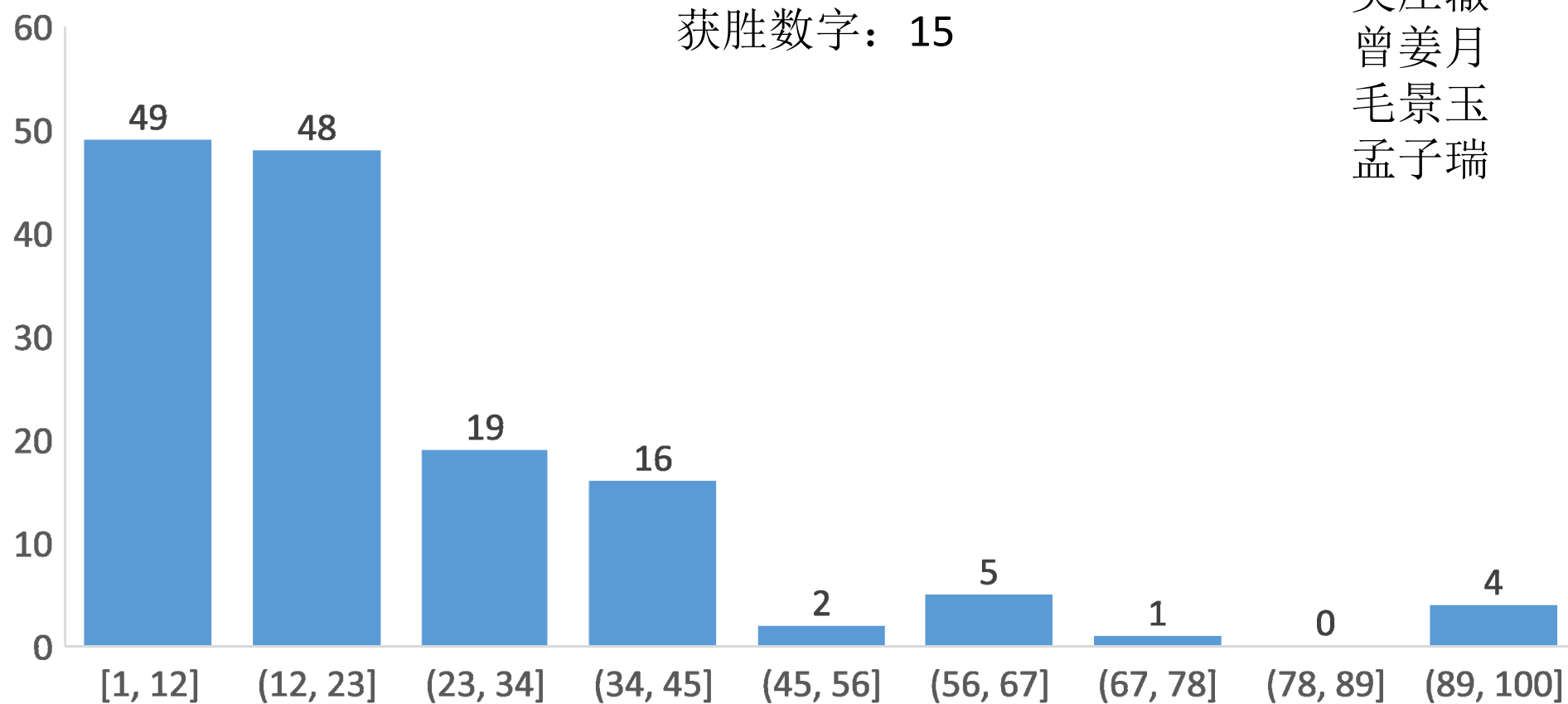
- 在1到100中选择，目标：尽量靠近均值的2/3
- 有没有劣势策略(dominated strategy)?
- 选100?
  - 即使其他人都选100，均值最大为100，我选100也不如选99（或98, ..., 67）
  - 如果有任何人选比100小的数，我选100更不如选99（或98, ..., 67）
  - 因此，无论其他人如何选择，我选100都不如99（或98, ..., 67），所以是“劣势策略”，理性的行动者不会选100
- 给定所有人都不会选100，再考虑99？
- 以此类推...
- 理论预测结果：大家都选1

# 实际结果

## 获胜者名单

何银稀  
刘沐心  
吴庄辙  
曾姜月  
毛景玉  
孟子瑞

平均值: 22.4  
平均值的三分之二: 14.9  
获胜数字: 15



- 历年的获胜数字：20，15，16，17，21，12，12，15，9，15（今年）
- 理论和实际结果有差别的原因
  - 我们自己不一定具备完全的理性；我们也不一定相信别人有完全的理性

# 博弈的“解”

- 从占优关系出发是一种分析路径
- 但是许多博弈中并没有占优策略或劣势策略

## 例：迎面驾驶

- 两人驾车相向而行，如果每一方都靠自己的右边（或都靠左边）行驶，可通行；如果一方靠左，一方靠右，则相撞

		驾驶者B	
		左边	右边
驾驶者A	左边	5, 5	-10, -10
	右边	-10, -10	5, 5

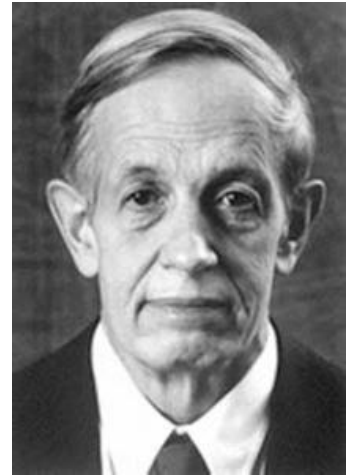
- 任何一方都没有劣势策略

# 均衡 (Equilibrium)

- 基本想法：均衡是一种稳定状态 (stable state)  
— 稳定意味着：没有人想要改变现状



# 纳什均衡（Nash Equilibrium）



- 在一个行动组合中，
- 如果从每一个博弈者的角度看，都满足
  - 给定其他人的行动选择，自己的行动选择已经是最优的
- 那么这个行动组合称为一个纳什均衡
- 这是一个**稳定态**：没有人有想要（单方面）改变自己的行动
  - 或者说，没有人能通过单方面改变自己的行动而提高自己的收益

# 纳什均衡

定义：

在一个行动组合  $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$  中，如果对于任意一名博弈者  $i$  来说，给定其他博弈者的行动  $a_{-i}^*$ ，他现在的行动  $a_i^*$  是他所有可选行动中最优的，也就是说

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*), \quad \text{for } \forall a_i \in A_i$$

那么该行动组合  $a^*$  是一个纳什均衡。

注意：这里要求的是 “ $\geq$ ”；如果是 “ $>$ ”，那么称为“严格纳什均衡”

## 例：迎面驾驶

		驾驶者B	
		左边	右边
驾驶者A	左边	5, 5	-10, -10
	右边	-10, -10	5, 5

- 如何找到纳什均衡？
- 一种办法：**根据定义**，逐一检验各个行动组合是否为纳什均衡
  - （左边，左边）是该博弈的一个纳什均衡
  - （右边，右边）也是该博弈的一个纳什均衡
  - 其他结果都不是
- 注意均衡是指某个行动组合，例如(左边，左边)，而不是收益组合(5, 5)

# 最优反应 (Best Response)

- 寻找纳什均衡的一般方法
  - 针对对方的每一个可能行动，找出自己的最优应对
  - 也就是找出自己的“最优反应函数”（或“最优反应映射”）
  - 双方最优反应函数（映射）的交点（集）即为纳什均衡

		驾驶者B	
		左边	右边
驾驶者A	左边	5, 5	-10, -10
	右边	-10, -10	5, 5

# 例：囚徒困境

		博弈者二	
		坦白	抗拒
博弈者一	坦白	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
	抗拒	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

- 每一方的最优反应：总是坦白
- （坦白，坦白）是纳什均衡；（抗拒，抗拒）不是纳什均衡
  - 可以根据定义去验证
- 困境：个体追求利益最大化的行为导致每个个体的利益受损

# 军备竞赛（霍布斯困境）

- 两国都宁愿将资源用于经济建设而不是军备竞赛；但是如果一方扩充军备，另一方不扩军，扩军的一方的占据了战略优势，不扩军的一方安全受到威胁。

	扩军	不扩军
扩军	$(-5, -5)$	$(5, -10)$
不扩军	$(-10, 5)$	$(1, 1)$

- 纳什均衡：（扩军，扩军）
- 也是一种囚徒困境；这也是霍布斯描述的“自然状态”中的困境

# 集体行动的困境

- 两个人一起工作，成果共享

	Work	Shirk
Work	10, 10	-5, 15
Shirk	15, -5	0, 0

- (Shirk, Shirk) 是纳什均衡，而 (Work, Work) 不是
- 也属于囚徒困境类型，体现出集体行动的内在困难
  - 每一个（理性自利的）个体都试图“搭便车”（free ride）
- 人民公社、“大锅饭”

# 社会困境 (Social Dilemma)

- 刚才所举的囚徒困境、军备竞赛、集体行动都属于“社会困境”（或称“合作困境”）类型的博弈
  - 各方合作是对每一方都更好的结果，但是无法构成均衡；博弈只具有非合作型的纳什均衡
  - 囚徒困境是其中一个特例：不合作是每一方的优势策略



- 是否所有的涉及合作的互动都是“社会困境”类型的问题？
  - 换言之，是否所有涉及合作的博弈都只有不合作型的纳什均衡？
- 并非如此
- 下面介绍另一类型：“协调博弈” (Coordination Games)

# 协调博弈(Coordination Games)

## 例一：迎面驾驶

		驾驶者B	
		左边	右边
驾驶者A	左边	$\textcircled{5}, \textcircled{5}$	-10, -10
	右边	-10, -10	$\textcircled{5}, \textcircled{5}$

- (左边，左边) 和 (右边，右边) 都是纳什均衡
  - 这两个均衡都是“好的”均衡，都是帕累托最优的
- 关键在于协调(coordination)，所以这类博弈被称为“协调博弈”
- 瑞典从靠左行驶改为靠右行驶（1967年9月3日）

## 协调博弈例二：猎鹿问题（Stag Hunt）

- 牡鹿较大，需要两人通力合作才能捕获，野兔较小，一个人自己就能捉到

	牡鹿	野兔
牡鹿	$(10, 10)$	$(0, 5)$
野兔	$(5, 0)$	$(5, 5)$

- （牡鹿，牡鹿）和（野兔，野兔）都是纳什均衡
- 显然，属于协调博弈，而不是囚徒困境
- 但是有的均衡明显比其他均衡要好
  - 直觉上，协调起来比较容易

## 协调博弈例三：“性别战争” (Battle of the Sexes)

- 丈夫喜欢看足球，妻子喜欢看歌剧；但是双方都喜欢和对方一起看超过自己一个人看

		妻子	
		足球	歌剧
丈夫	足球	5, 3	1, 1
	歌剧	-1, -1	3, 5

- 纳什均衡：（足球，足球）和（歌剧，歌剧）
- 是带有分配不平等问题协调博弈

# 纳什均衡作为博弈的“解”：问题与讨论

- 纳什均衡是博弈论中最基本和最广泛使用的解的概念
- 但是理性的博弈者选择纳什均衡是一种**必然**结果吗？
  - 理性博弈者追求的是效用最大化，所以“占优可解”（避免劣势策略）给出的结果具有一种逻辑上的必然性
  - 但是在没有占优关系的博弈中，博弈者为什么必然会使用纳什均衡中的策略？
  - **如果**一个博弈者**认为**其他人会使用纳什均衡中的策略，她的最优反应是也使用纳什均衡策略
  - 但是她为什么会有这种信念(belief)或预期？

# 纳什均衡作为博弈的“解”：问题与讨论

- 一种解释

- 是博弈者“试错”过程的结果；纳什均衡是一个“稳定态”  
（其他非纳什均衡的结果必然是不稳定的）
- 从这种观点出发，对于第一次进行的博弈或者无经验的博弈者，并没有理论上的必然性保证博弈结果一定是纳什均衡
- 这种思路下，严格的说，我们需要一种描述博弈者如何更新和调整自己策略的理论，才能预测博弈最终是否会达成纳什均衡
  - “学习”(learning) 和演化(evolution)的理论模型是目前博弈论研究的前沿领域之一，通常在高级课程中才介绍相关内容；本课将不会涉及

# 多重均衡(Multiple Equilibria)的问题

- 如果博弈具有多个纳什均衡，哪一个会成为博弈的实际结果？

## 谢林(Schelling): “聚焦点” (Focal Point)

- 博弈：两名外地网友约定明天中午12点要在北京见面，但是没有约好在具体在哪里。现在通讯中断，每个人独自选择前往一个地点。（双方见面的收益是100，未能见面的收益是0）
- 如果是你，你会试着去哪里碰面？
  - 天安门？颐和园？长城？
- 如果北京可用于见面的地点有 $n$ 个，那么该博弈有 $n$ 个均衡
- 具体结果是哪一个，取决于双方头脑中的“聚焦点”，该聚焦点往往是由文化和习俗等因素决定的



# 多重均衡(Multiple Equilibria)的问题

- “聚焦点”是一个有意思的角度，但是很多博弈中难以（客观）判断哪个点是“自然”的聚焦点
- “均衡选择”(equilibrium selection) 问题，是博弈论中一个仍在进一步研究和发展的重要领域
  - 这往往也需要一种关于博弈者如何不断修正和更新策略的动态的“学习”和“演化”模型