第三讲：最优反应与纳什均衡（续）

-- 连续型策略；霍特林选举模型

回顾：通过最优反应法找出纳什均衡

- 纳什均衡
  - 对每个人而言，给定其他人的行动，自己的行动是最优的
- 最优反应法
  - 博弈者i，针对对方的每一种可能行动找出自己的最优应对(best response)
  - 即博弈者i的最优反应映射（函数）
  - 双方最优反应映射（函数）的交汇处，就是纳什均衡

定义：最优反应映射（函数）

- **最优反应映射**：给定其他博弈者的行动组合a_{-i}，博弈者i的最优行动的集合

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i |\, u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i}) \text{ for } \forall a_i' \in A_i\}$$

- 注意这里$B_i(a_{-i})$是一个**集合**
  - 针对每一个a_{-i}，可有多个最优反应
  - 如果 a_i是i 针对a_{-i}的一个最优反应，记为$a_i \in B_i(a_{-i})$
- 如果最优反应映射是单值的，称该映射为博弈者i 的**最优反应函数**，可写作$b_i(a_{-i})$
  - 当a_i是i 针对a_{-i}的最优反应，记为 $a_i = b_i(a_{-i})$

最优反应与纳什均衡

- 命题：一个行动组合 $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ 要构成纳什均衡，**当且仅当**该组合中每位博弈者的行动都是针对其他人在该组合中行动的最优反应，即

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

（当最优反应映射是函数时，可写作 $a_i^* = b_i(a_{-i}^*)$）

  – 证明：使用纳什均衡和最优反应的定义（略）

- 也就是说，纳什均衡是所有博弈者最优反应映射（函数）图像的交集（交点）

博弈者2

博弈者1		W	S
	W	10, 10	-5, 15
	S	15, -5	0, 0

博弈者1的最优反应函数B_1及图像

$B_1(W) = \{ S \}$

$B_1(S) = \{ S \}$

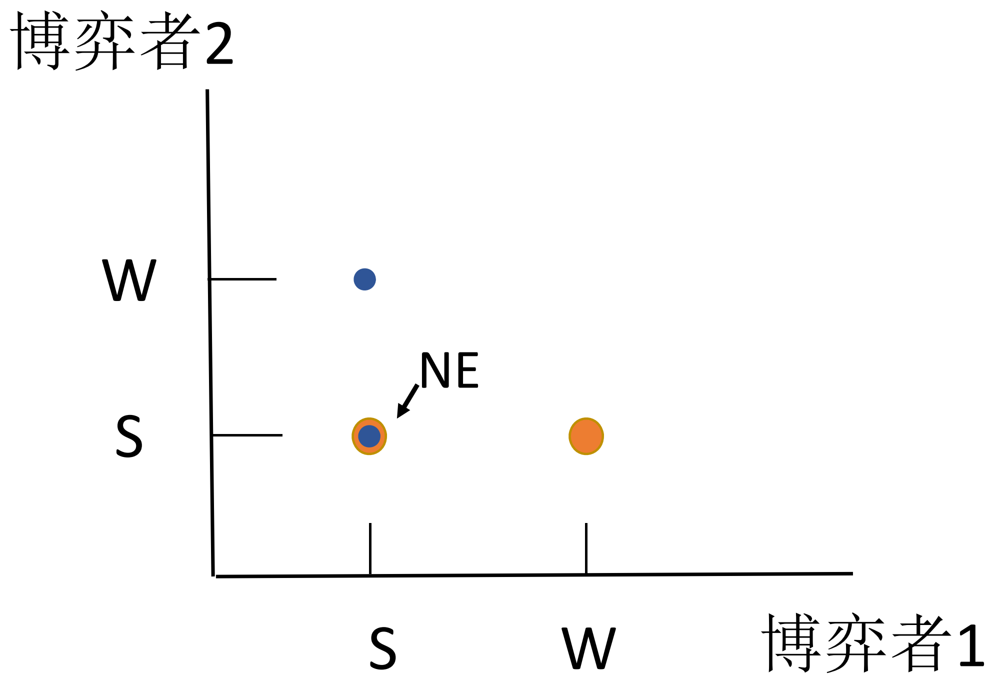
函数图像 {(**S**, W), (**S**, S)}

博弈者2的最优反应函数B_2及图像

$B_2(W) = \{ S \}$

$B_2(S) = \{ S \}$

函数图像 {(W, **S**), (S, **S**)}

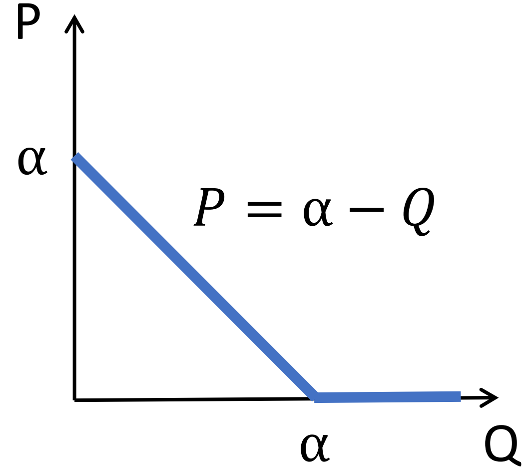


- 下面我们用最优反应法来分析策略是连续取值的博弈

例一：库诺特竞争 (Cournot Competition)

两家企业生产同一种产品。企业i可选择生产的数量为q_i，生产需付出的成本为 $c \cdot q_i$ 。两家的总产量为 $Q = q_1 + q_2$ 。市场对该产品的需求函数如下（ P是价格，α为常数且大于c）

$$P = \alpha - Q, \qquad \text{if } Q \le \alpha$$
$$(P = 0, \qquad \text{if } Q > \alpha\ )$$



需求函数

企业i的收益为：$\pi_i = P \cdot q_i - c \cdot q_i$

每个企业要决定自己生产的数量q_i

需求函数：$P = \alpha - Q, \quad \text{if } Q \le \alpha$
$(P = 0, \quad \text{if } Q > \alpha\,)$

总产量：$Q = q_1 + q_2$
企业i的收益：$\pi_i = P \cdot q_i - c \cdot q_i$

通过**最优反应法**寻找纳什均衡

企业1的收益：$\pi_1 = P \cdot q_1 - c \cdot q_1$

$$= (\alpha - q_1 - q_2) \cdot q_1 - c \cdot q_1$$

$$= (\alpha - c - q_2) \cdot q_1 - {q_1}^2 \qquad \text{if } Q \le \alpha$$

$$(\,\pi_1 = -c \cdot q_1 \qquad \text{if } Q > \alpha\,)$$

要最大化π_1，**一阶条件（目标函数的一阶导数为零）**

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = (\alpha - c - q_2) - 2q_1 = 0 \qquad \text{if } Q \le \alpha$$

企业1的最优反应函数：

$$q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2) \qquad when\ \ q_2 \le \alpha - c$$

$$q_1 = 0 \qquad when\ \ q_2 > \alpha - \mathrm{c}$$

$$(\,q_1 = 0 \qquad when\ \ q_2 > \alpha \Rightarrow Q > \alpha\,)$$

$b_1(q_2)$: $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)$ $when$ $q_2 \le \alpha - c$; $q_1 = 0$ when $q_2 > \alpha - c$

$b_2(q_1)$: $q_2 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1)$ $when$ $q_1 \le \alpha - c$; $q_2 = 0$ when $q_1 > \alpha - c$

纳什均衡点(q_1^*, q_2^*)满足

$$q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2^*)$$

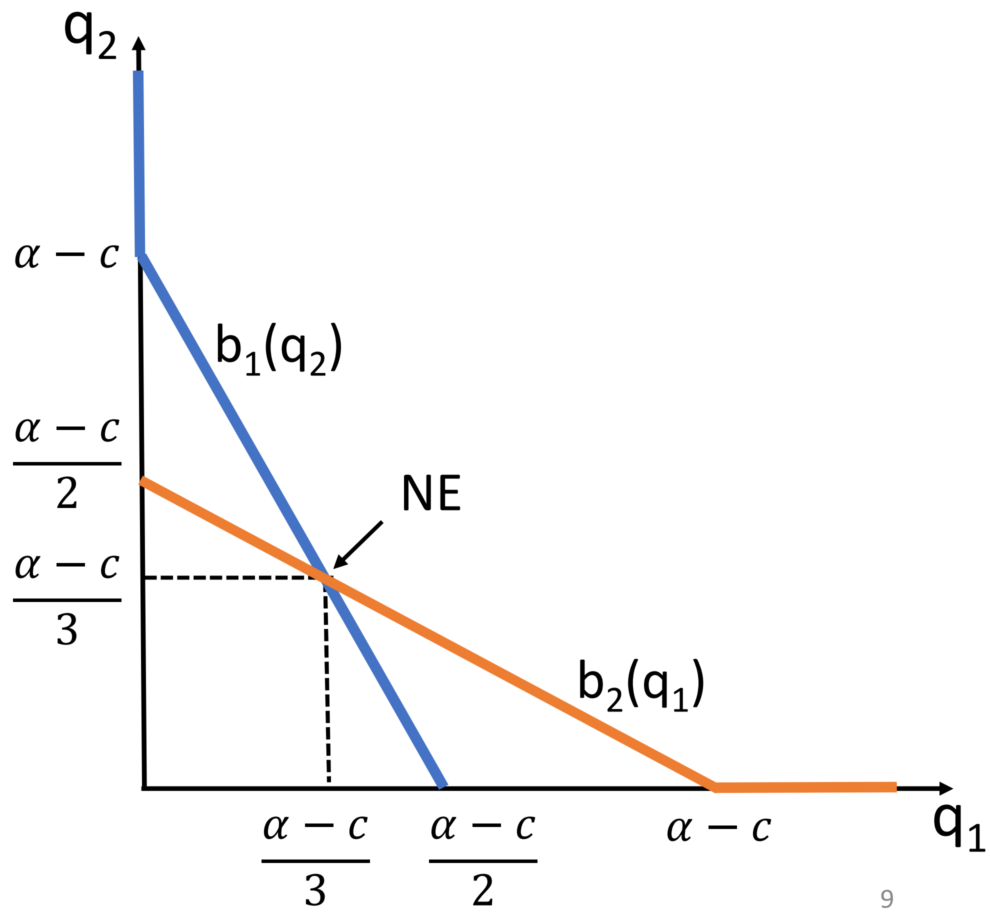
$$q_2^* = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1^*)$$

容易求出

NE：$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(\alpha - c)$

代回各自的效用函数可得出收益

Payoff：$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{9}(\alpha - c)^2$



库诺特竞争: 与垄断比较

两家竞争时的纳什均衡：

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(\alpha - c)$$

$$Q^* = \frac{2}{3}(\alpha - c)$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{9}(\alpha - c)^2$$

- 如果两家企业合并为一家公司，最优的产量及获得的利润是多少？

$$\begin{aligned}\Pi = \pi_1 + \pi_2 &= P(q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2) \\ &= P \cdot Q - cQ \\ &= (\alpha - Q)Q - cQ \\ &= (\alpha - c) \cdot Q - Q^2\end{aligned}$$

- 选择Q以最大化Π，一阶条件：$\frac{d\Pi}{dQ} = \alpha - c - 2Q = 0$
- 最优产量：$Q^* = \frac{1}{2}(\alpha - c)$，此时 $\Pi = \frac{1}{4}(\alpha - c)^2$
- 显然，独家垄断时，总产量比两家竞争时要低，总利润比两家竞争时要高
- 两家竞争的条件下，双方生产“过多”（这是企业间的“合作困境”）
  - 合作困境也可以对整个社会有利

例二：公共品博弈

- 两人共同生产一种公共品，每个人可选择投入的努力或资源为$x_i \geq 0$，生产函数是 $y = (x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}}$，每人的收益为 $u_i = y - x_i$，纳什均衡？
- 找1的最优反应函数：$\arg\max_{x_1} u_1$，$u_1 = (x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}} - x_1$

  一阶条件（目标函数的一阶导数为零）

  $$\frac{1}{2}(x_1 + x_2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

可得到1的最优反应函数：$x_1 = \frac{1}{4} - x_2$（$x_1 = 0 \text{ if } x_2 > \frac{1}{4}$）

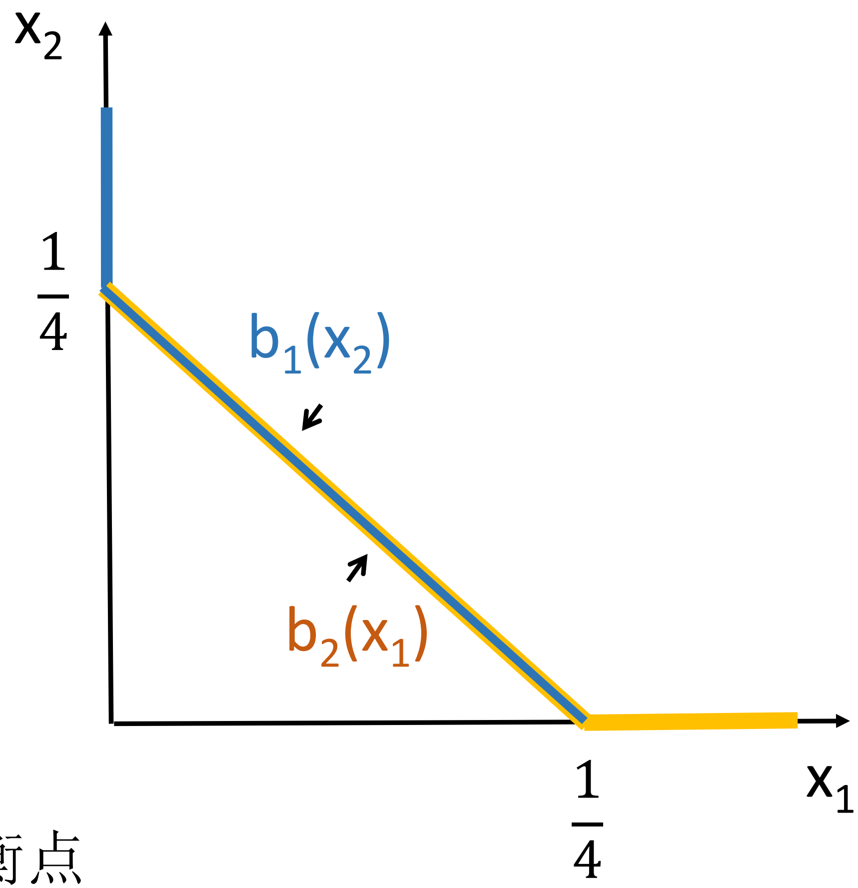
同理，2的最优反应函数：$x_2 = \frac{1}{4} - x_1$（$x_2 = 0 \text{ if } x_1 > \frac{1}{4}$）

例二：公共品博弈

- 最优反应函数

$$b_1(x_2): \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} - x_2 & \text{if } x_2 \le \frac{1}{4} \\ x_1 = 0 & \text{if } x_2 > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$b_2(x_1): \begin{cases} x_2 = \frac{1}{4} - x_1 & \text{if } x_1 \le \frac{1}{4} \\ x_2 = 0 & \text{if } x_1 > \frac{1}{4} \end{cases}$$



- 纳什均衡 (x_1^*, x_2^*)

  $x_1^* + x_2^* = 1/4$, $\quad x_1^*, x_2^* \in [0, \frac{1}{4}]$

  例如 (0, 1/4), (1/8, 1/8), … , (1/4, 0) 等均为均衡点

  这个特例中，有无穷多的均衡点

公共品博弈：纳什均衡并非社会最优

- 从全局的角度，令$U = u_1 + u_2 = 2(x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}} - (x_1 + x_2)$，

  令$X = x_1 + x_2$，　　　　　　$U = 2X^{\frac{1}{2}} - X$
- 社会最优选择，一阶条件：　$X^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$，即 $X = 1$
- 社会最优结果：总投入为1，总的收益为1
- 而在前面纳什均衡中：总投入为$x_1 + x_2 = 1/4$，总的收益为3/4
- 显然，在纳什均衡中双方的投入**不足**，结果并非社会最优
  - 这是各种公共品博弈的基本特征

问题的根源：外部性 (Externality)

- 个人的收益函数

$$u_1 = (x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}} - x_1$$
$$u_2 = (x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}} - x_2$$

- 对于个体1而言，他投入的x_1产生了两方面的影响：提高了自己的收益u_1，也提高了他人的收益u_2
- 但是他决策时考虑的仅仅是最大化u_1；即他只考虑了第一种影响，并不考虑第二种影响
- **外部性**：自己的行动所带来的对他人的影响，没有被决策者考虑在内的部分
- 外部性的存在是公共品博弈中纳什均衡无法达到帕累托最优的根本原因
- 如果这里每一位博弈者都考虑自己行动的全部后果，即试图最大化$u_1 + u_2$，那么就不再存在外部性，可以达到最优的选择

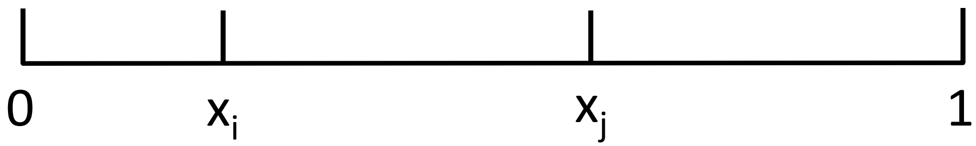
小结：寻找纳什均衡的方法

- 基于定义
  - 有时先猜测均衡在哪里，然后根据定义证明
- 最优反应法
  - 离散型博弈：“画圈法”
  - 连续型博弈
    - 根据每一位博弈者的收益函数，找出其最优反应函数（映射）
    - 所有博弈者最优反应函数（映射）的图像交点（集）
- 分析策略间占优关系（dominance）
  - 删去严格劣势策略可以简化博弈，有助于寻找纳什均衡

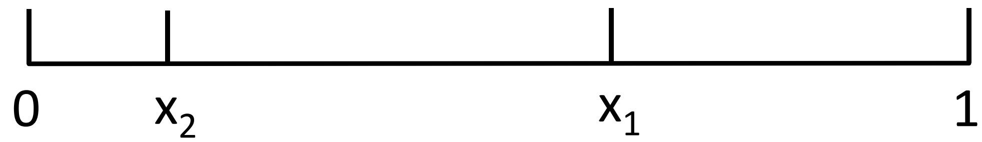
- 针对具体的博弈模型，灵活使用各种方法

Hotelling 竞选模型：两位候选人

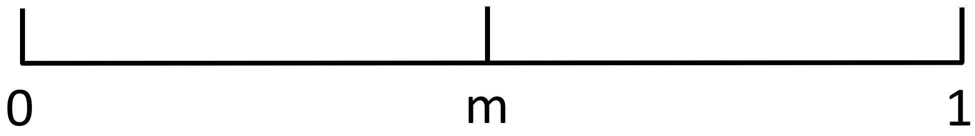
- 候选人可以在一个连续的政策空间内选择自己的竞选立场（政策主张）x_i:



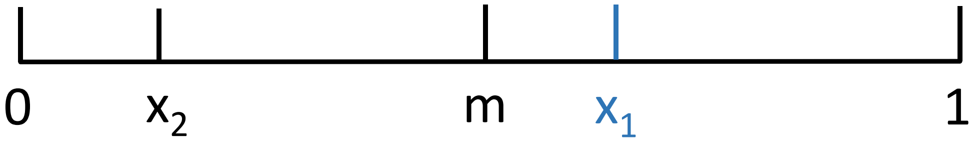
- 每一位选民都有自己最偏好的一个政策立场，离这个点越近的政策带给他的效用越大；所以每位选民投票给立场离自己偏好最近的候选人
- 为了简单起见，我们不妨进一步假设选民的政策偏好**均匀的**分布在[0,1]的空间上（后面的结论不依赖于这个假设，在任何分布形式下都成立），可想象每个点上都有一个选民
- 正好排在中间的选民，称为“中位数选民”(median voter)，立场为m
- 有两名候选人参选，得票多者当选，得票相同为“平局”(tie)。候选人的偏好是：当选 $\succ$ 平局 $\succ$ 落选。

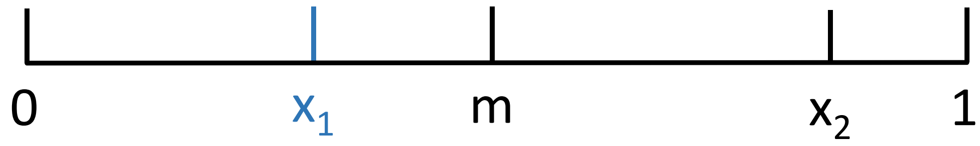


- 得票和选位的基本逻辑
  - 任何一个候选人可以独得“自己一侧”的选民，以及自己和对方之间的一半选民
  - 所以候选人力图扩大自己独占的这一侧的空间
  - 直观上看，候选人尽量往“中间”去



- 可以看出，最有利的点是？
  - m是一个特别有利的点，占住m可以保证至少拿到一半的选票
  - 一旦一方占据了m，另一方最优的反应只能是也占m
- (m, m) 是纳什均衡，可根据定义证明
- 还有其他的纳什均衡吗？
  - 任何其他的点(x_1, x_2)都不可能是纳什均衡，可以证明（课后思考）
- “中位数选民(median voter)”定理
  - 可帮助我们理解两党制情况下，两党向中间靠拢的现象
  - 但是注意这里使用的一些限制性前提假设，如政策空间是一维的、候选人只关心当选（没有自己的政治偏好）等等





我们也可以用最优反应法分析

- 最优反应的基本逻辑
  - 给定一个候选人的立场，另一个候选人只要选择比他更不极端、更靠近中位数m的立场就可以获胜
- 如果$x_2 < m$，那么1的最优反应是在x_2右侧，且比x_2离m更近

$$x_1 > x_2 \text{ 且 } x_1 - m < \mathrm{m} - x_2 \Rightarrow x_1 < 2m - x_2$$

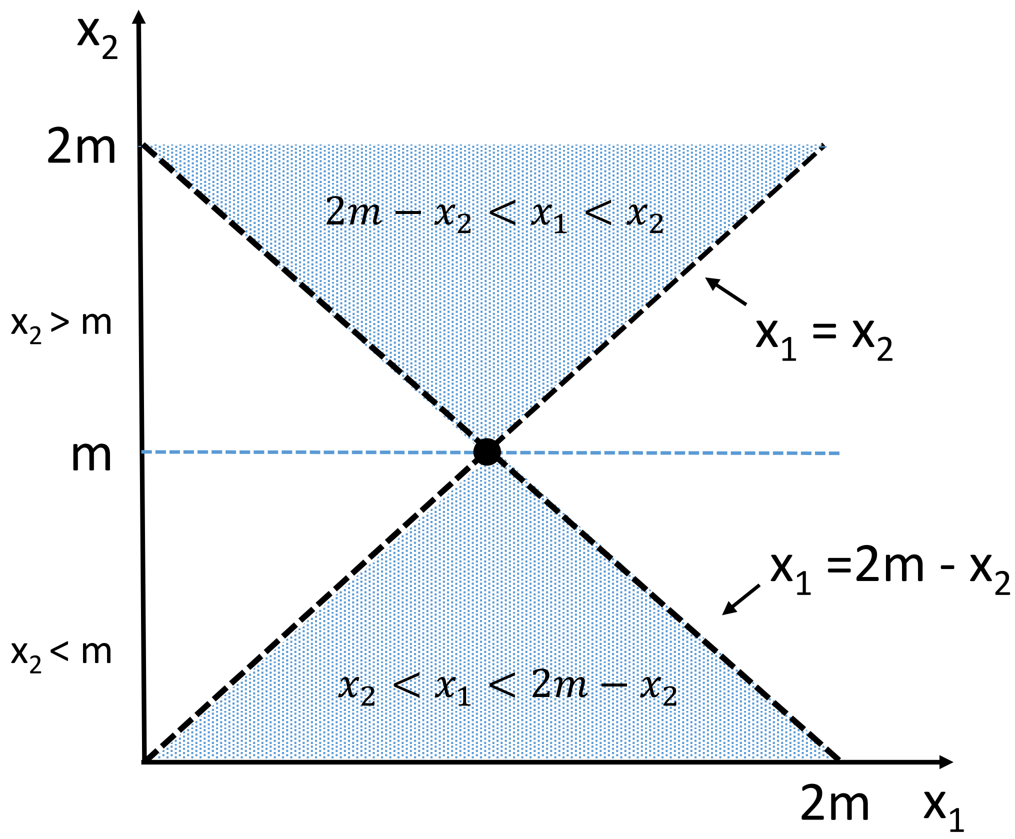
即：$x_2 < x_1 < 2m - x_2$

- 如果$x_2 > m$，那么1的最优反应是 $x_1 < x_2$ 且 $m - x_1 < x_2 - m$

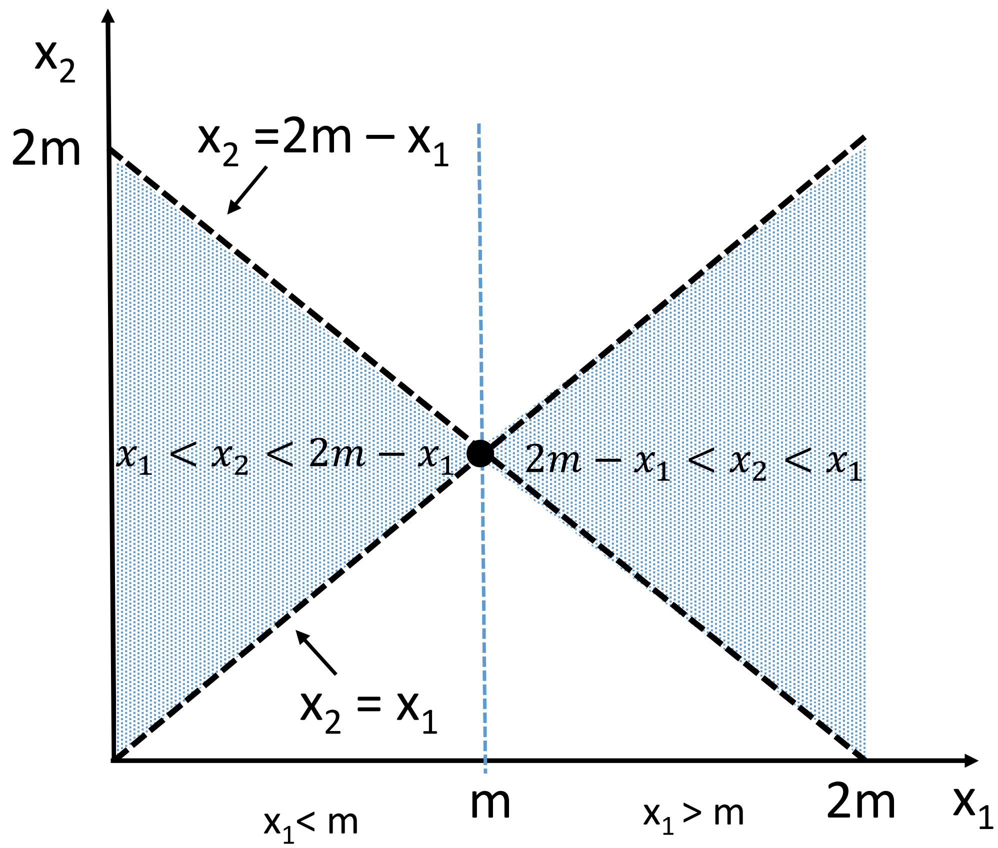
即：$2m - x_2 < x_1 < x_2$

- 如果$x_2 = m$，那么1的最优反应是 $x_1 = m$

博弈者1的最优反应映射：$B_1(x_2)$



博弈者2的最优反应映射：$B_2(x_1)$



- 两者交集：{(m, m)}

Hotelling 模型也是占优可解的

- 严格劣势策略？
  - 两个端点
  - 选m总是严格优于选端点（课下思考证明）
- 裁去端点之后，严格劣势策略？
  - 剩下的端点
- 不断裁剪…
- 只剩下中间的m

反复删除劣势策略与纳什均衡的关系

- **定理**：使用反复剔除**严格劣势策略**将博弈简化之后，所有原博弈的纳什均衡都仍然得以保留
  - 证明：略
- 显然，如果反复剔除严格劣势策略的可将博弈简化到唯一的行动组合，那么该行动组合是唯一的纳什均衡
- 并非所有的博弈都能以这种方法找出纳什均衡
  - 有的博弈并无严格劣势策略；或反复剔除严格劣势策略后不一定只留下唯一的行动组合
- 如果反复剔除弱劣势策略，有时也会帮助我们发现纳什均衡
  - 但是这个方法不能保证找出所有的纳什均衡

作业一

- 请查教学网，下周三（3月12日）课堂上提交