第十三讲：弱序贯均衡的应用（二）

廉价话语 (Cheap Talk)

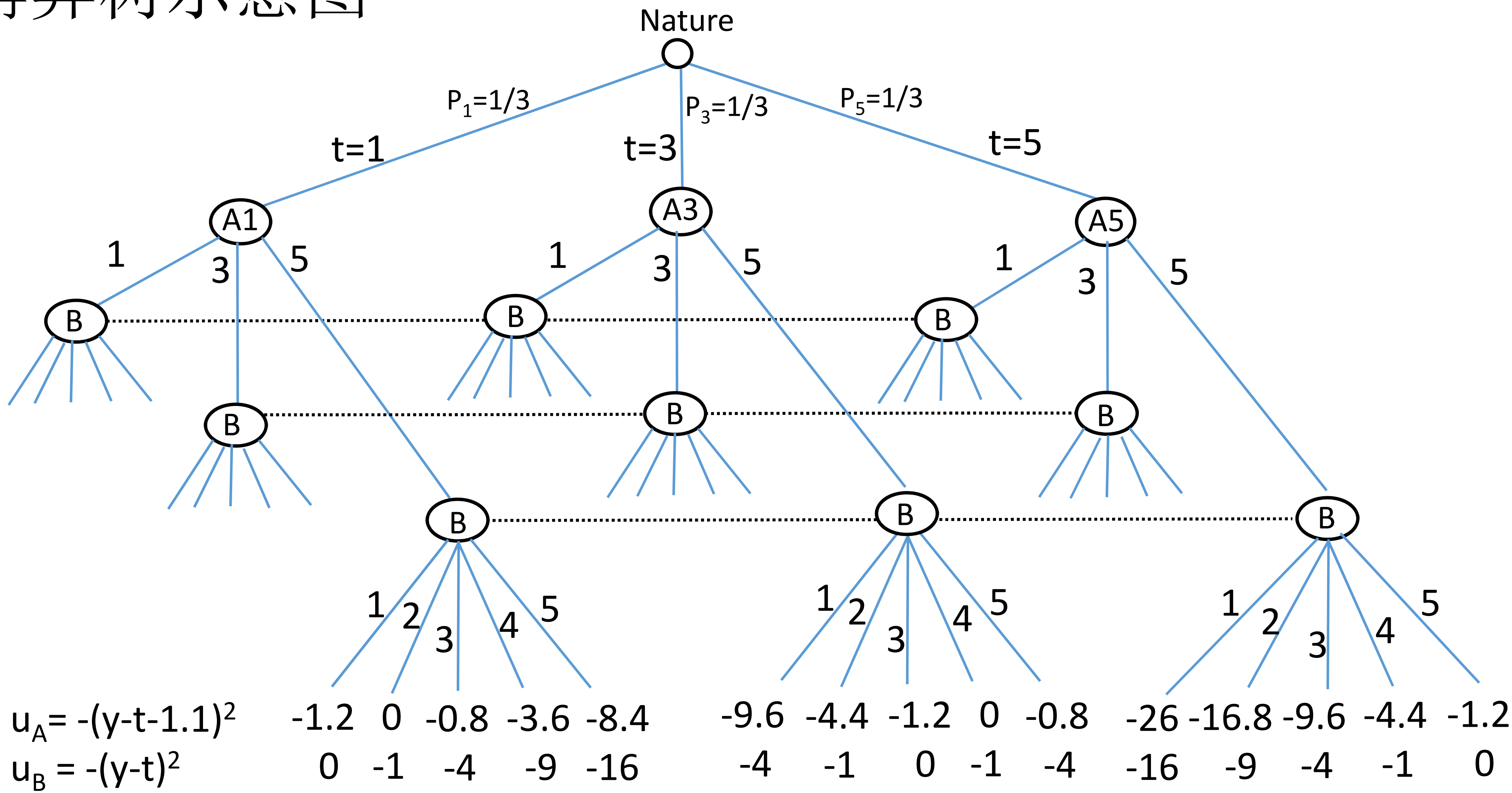
廉价话语 (Cheap Talk)

- 上一节课的信号博弈中，要实现信息传递，需要不同类型的博弈者在发送信号时有足够的成本的差异
- 当每种类型发送消息都是零成本时，能否实现信息的传递呢？
- 如果双方的利益有一定的重叠，那么有可能实现部分的信息传递

例一

- 两位朋友A和B先后进京“北漂”。A已住在朝阳区多年。B刚刚在海淀区找到工作，需要选择住在哪里。B首先希望上班路上不要花太多时间，其次离A比较近；A首先希望B住的离自己比较近，其次B上班不要花太多时间。B不了解北京的交通拥堵情况，询问A。A了解北京交通拥堵的真实情况。现在A要向B发一个消息m，B收到消息后选取居住地y。
- 具体而言：B可选的居住地 y 有五种可能{1，2，3，4，5}（1代表海淀区，5代表朝阳区，数值越大越远离海淀并靠近朝阳）
- 交通状况 t 有三种可能{1，3，5}（1代表极差，5代表极好）
- 公共前提：三种t的概率各是1/3；私人信息：A知道t的真实值，B不知
- B的效用是 $u_B = -(y-t)^2$（给定t，他最希望的是 y = t，y离t越近收益越高)
- A的效用是 $u_A= -(y-t-b)^2$（给定t，他最希望的是 y = t + b，y离t+b越近越好）
  - b代表了A的“bias”或者A和B利益的差距，这里为具体起见，不妨令b=1.1

博弈树示意图


Nature
P1=1/3
P3=1/3
P5=1/3
t=1
t=3
t=5
A1
A3
A5
B
1 2 3 4 5
uA= -(y-t-1.1)2
uB = -(y-t)2
-1.2 0 -0.8 -3.6 -8.4
0 -1 -4 -9 -16
-9.6 -4.4 -1.2 0 -0.8
-4 -1 0 -1 -4
-26 -16.8 -9.6 -4.4 -1.2
-16 -9 -4 -1 0

两个极端：讲真话和讲废话

- A讲真话**无法**构成均衡
  - 如果A的策略是讲真话：发送m=t（即A的每个类型发送自己的真实类型）
  - 那么均衡中B的信念为 t=m，最优反应是 y=m
  - 但是如果B的策略是选y=m，A的最优策略不是m=t，而是令m最接近t+b（例如当t=1时，A宁可发送m=3 而不是 m=1）
- A讲废话(babbling)的均衡
  - A可以选择无论真实的t的取值，总是发送某一个固定的消息m或随机发送m（例如以同样的概率随机发送1，3，5）
  - 给定A这样的策略，B的最优反应是**忽略**这个消息，总是根据公共前提概率来形成信念，并做出最优选择
  - 给定B的策略（忽略m），A的任何类型改变消息都无法改变自己的收益
  - 这是一个混同型的均衡，且无论b的取值，**总是**成立

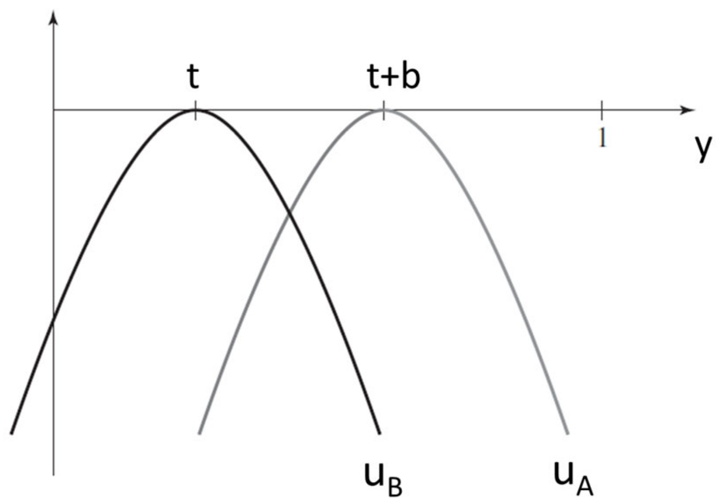
实现部分的信息传递的均衡是否可能？

- 考虑以下策略组合和信念系统
  - A的策略：如果t=1，发送m=1；如果t=3 or t=5，以同等概率(1/2)随机发送m=3 or 5
  - B的信念：如果m=1，相信t=1；如果m=3 or 5，相信t=3和t=5的概率各为 1/2
  - B的策略：如果m=1，选择y=1；如果m=3 or 5，选择y=4（因为t的期望是4）
- 是否构成弱序贯均衡？
  - **信念**是否合理：是的
  - 给定B的信念，B的**策略**是否最优：是的
  - 给定B的策略，**A的每一个类型**的**策略**是否最优
    - t=1：他最希望的是y=2.1；现策略导致y=1，发送其他导致y=4，现策略更好
    - t=3：他最希望的是y=4.1；现策略导致y=4，发送m=1导致y=1，现策略更好
    - t=5：他最希望的是y=6.1；现策略导致y=4，发送m=1导致y=1，现策略更好

- 在刚才的均衡中，A把某些情况（t=1）单列出来，发送一种信息，把其他的情况（t=3，t=5）混在一起，发送另一种信息，他发送的消息传递了**部分**信息
  - 如果A把t=5单列，而把t=3和t=1混在一起，这样能构成弱序贯均衡吗？（课下验证：不能）
- A之所以在某些情况下愿意发送真实的信息，是因为A的利益与B是有一定的一致性的，所以在“极端”情况下，A宁愿讲真话
- 如果A的偏好与B差别太大，那“廉价话语”无法传递哪怕是有限的信息
  - 本例中，如果b=3，那么即使在t=1的情况下，A也不愿意发送m=1（因为现在他最希望的是y=4），刚才的均衡不成立
- 廉价话语模型可应用于有某种利益一致性的博弈者间的互动
  - 咨询专家：例如领导与参谋，病人与医生，等等
  - 家人、朋友间

更一般的“廉价话语”模型（连续型）

- 博弈设定与前面相似，A了解客观状况t，可发送消息m，B接到m后采取行动y；这里 m 和 y 是[0, 1]上的**实数**
- 公共前提：t是**均匀分布**在[0, 1]区间上的随机变量
- B的收益是：$u_B = -(y-t)^2$
  - 对于B而言，y离t越近，收益越高
- A的收益是：$u_A = -(y-t-b)^2$
  - 对于A而言，y离t+b越近，收益越高

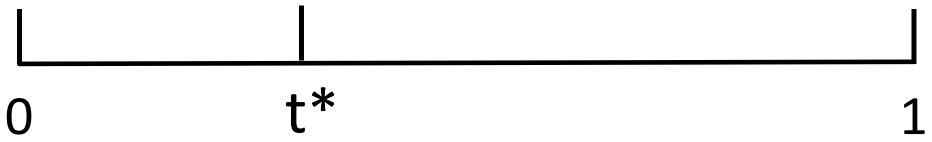


讲真话与讲废话

- A讲真话的均衡不存在
  - 给定A讲真话，发送m=t，那么B相信 t=m，最优反应是y=m
  - 但如果B的策略是y=m，A的最优策略就不是m=t，而是m=t+b
- A讲废话的均衡总是存在
  - 无论A了解到t的真实值是多少，他总是随机发送m∈[1, 0]
  - B总是忽略m，根据前提概率相信E(t)=1/2，从而选择y=1/2
    - 最小化 $E[(y-t)^2]$ 的一阶条件是y=E(t)，课后可自己核查
  - 无论b的取值，讲废话的均衡总是存在

有着部分信息传递的均衡

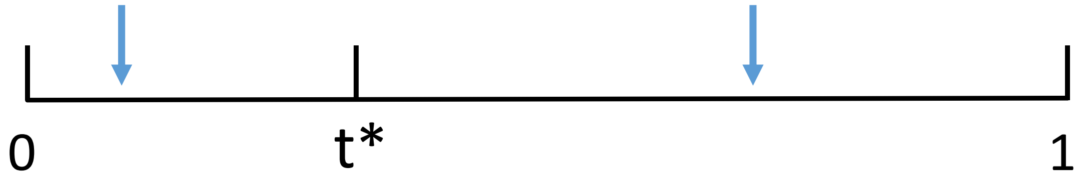
- A根据某个阈值t*发送（两种）消息：如果 $t \le t^*$，发送m=0，如果$t > t^*$，发送m=1



- B的信念
  - 如果收到m=0，认为t均匀分布在[0, t*]上
  - 如果m=1，认为t均匀分布在(t*, 1]上
  - 收到任何其他m，认为t=t*/2（也可规定此时持m=0时或m=1时的信念）
- B的策略
  - 如果收到m=0，选择 $y = t^*/2$
  - 如果m=1，选择 $y = (1+t^*)/2$
  - 任何其他m，选择$y = t^*/2$ （若持其他信念，可相应选择）

A: If $t \le t^*$, send m=0

A: If $t > t^*$, send m=1

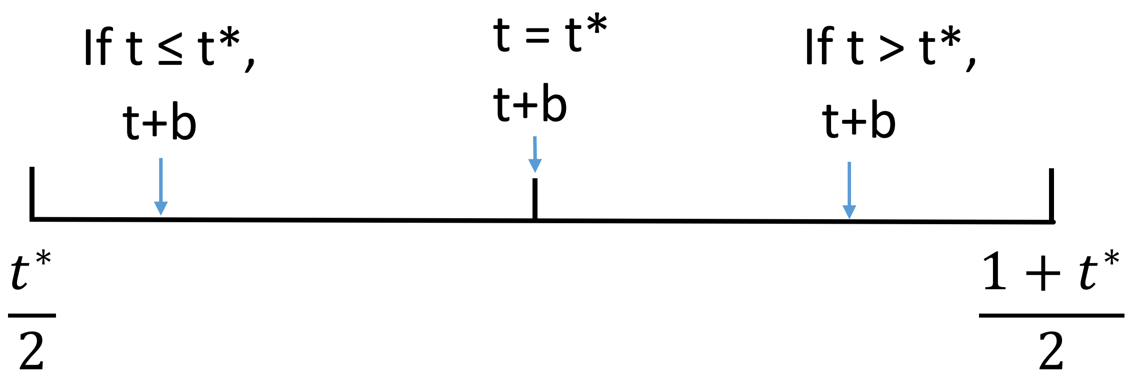


B: if m=0
believes $t \in [0, t^*]$
chooses $y = t^*/2$

B: if m=1
believes $t \in (t^*, 1]$
chooses $y = (1+t^*)/2$

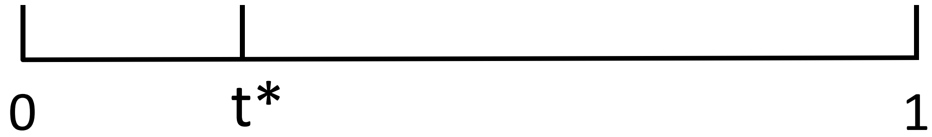
- 给定A的策略，B的信念和B的策略没有问题
- 给定B的策略，A的策略是否是他的最优选择？(需要$t^*=?$)
- A的策略要是他的最优选择，意味着
  - 当$t \le t^*$时，他偏好 $y = t^*/2$ 超过（大于等于）他偏好 $y = (1+t^*)/2$
  - 当$t > t^*$时，他偏好 $y = (1+t^*)/2$ 超过（大于等于）他偏好 $y = t^*/2$

- 对于A
  - 当t ≤ t*时，他偏好 y = t*/2 超过(≥)他偏好 y = (1+t*)/2
  - 当t > t*时，他偏好 y = (1+t*)/2 超过(≥)他偏好 y = t*/2
- 我们知道A的收益在t+b处最大，离t+b越近收益越大，越远越小
- 以上就意味着：t ≤ t*时，t+b离t*/2更近；t > t*时，t+b 离(1+t*)/2 更近
- 那么当 t=t*时，t+b 正好处在两者中间



- 即是说 $t^* + b = \frac{1}{2}(\frac{t^*}{2} + \frac{1+t^*}{2})$，可解出 t* = 1/2 - 2b

- 意味着，A可以采用阈限值 t* = 1/2 - 2b，根据t在t*左边或右边，发送两个不同信号

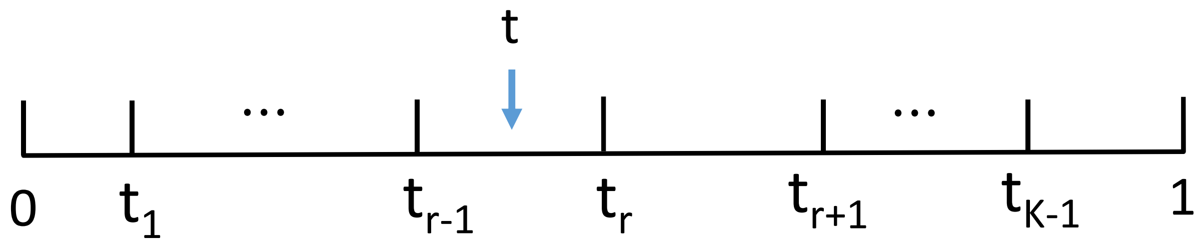


- 具体的t*值取决于b的值
  - 当b=1/16，t*=3/8；当b=1/8时，t*=1/4；等等

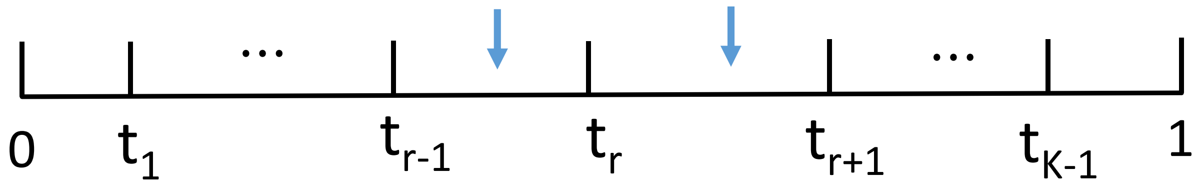
- 可以看到，要保证t*>0，b必须 < 1/4，即A和B的利益不能相差太远，这样的（实现了部分信息传递的）均衡才能成立

发送K个消息

- 是否还可以发送更多（更精确的）消息？
- A采用K-1个阈限值 $t_1 < t_2 < \cdots < t_{K-1}$将区间[0, 1]划分成K个区域



- A：当$t_{r-1} \le t < t_r$，发送m_r，（r = 1, …, K）
- B：当收到m_r，相信t均匀分布在$[t_{r-1}, t_r)$上，选择 $y = \frac{1}{2}(t_{r-1} + t_r)$
- 能否构成均衡？K可以取多大？
- B的信念和策略没有问题，A的策略成立的条件？



A：当$t_{r-1} \le t < t_r$，发送m_r

B：当收到m_r，相信t均匀分布在$[t_{r-1}, t_r)$上，选择$y = \frac{1}{2}(t_{r-1} + t_r)$

- A的以上策略要为最优，意味着当t在第r个区间上他宁愿发送m_r，而当t在第r+1个区间上他宁愿发送m_{r+1}，也就是说
  - 当$t_{r-1} \le t < t_r$，他偏好$y = \frac{1}{2}(t_{r-1} + t_r)$超过(≥)他偏好$y = \frac{1}{2}(t_r + t_{r+1})$；意味着 t+b 离前者更近
  - 当$t_r \le t < t_{r+1}$，他偏好$y = \frac{1}{2}(t_{r-1} + t_r)$不如(≤)他偏好$y = \frac{1}{2}(t_r + t_{r+1})$；意味着 t+b 离后者更近
  - 可知，当$t = t_r$，t+b 正好在两者中间，$t_r + b = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(t_{r-1} + t_r) + \frac{1}{2}(t_r + t_{r+1})]$
- 可以解出：$t_{r+1} - t_r = t_r - t_{r-1} + 4b$

- $t_{r+1} - t_r = t_r - t_{r-1} + 4b$，意味着第r+1个区间比第r个区间长4b
- 由所有区间总长度之和为1，可知

$$t_1 + (t_1 + 4b) + (t_1 + 8b) \ldots + (t_1 + (K-1)4b) = 1$$

$$Kt_1 + 4b(1 + 2 + \cdots + K - 1) = 1$$

$$Kt_1 + 2bK(K-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1-2bK(K-1)}{K}$$

- 显然，给定b，任何整数K只要满足 $2bK(K-1) < 1$，都可以建立起传送K个信息的均衡
- b越小，可以支持的K越大，可以传递的信息越精确
  - 要建立K=3的均衡，需要b < 1/12,
  - 想要构建K=6的均衡，需要b < 1/60…
- 即：双方的利益的一致性越高，可传递的信息越多（越精确）