HW2

Problem 1 Game of Public Goods

在行为博弈实验里开展的公共品博弈通常为以下形式。五名博弈者，各有初始资金 100 元。每位博弈者可选择将一定的金额 x_i投资到一个公共基金中，x_i可以是[0，100]区间上的任意实数。没有投入公共基金的资金保留在自己手中，归自己所有，但不会增值。投入公共基金的资金会增值成为原来的 3 倍（即投入总额 X,增值后成为 3X）。基金增值后，五人将平分其总金额（即每个人获得总额的 1/5,无论自己投入了多少）。

a． 在纳什均衡中，每人投入的金额是多少？

对于某一博弈者而言，其他四人投入金额的总和是重要的。设其他四人投入金额的总和为m，该博弈者投入的金额是x，则收益函数为u(x)=-x+0.6(x+m)=0.6m-0.4x。可知，无论m取何值，该参与者都在x=0时受益最大，因而每人投入的金额为0. 从纳什均衡的定义来看，该博弈者每投入1将获得0.6的受益，当其他博弈者的策略固定时，只要该博弈者减少投入，收益就会增大，因而纳什均衡只能是投入0.

b． 该投入水平是不是最优的？当每个人投入多少，能够使每一名参与者的收益达到最大？

显然该投入水平不是最优的。当每个人都投入100时，每一名参与者的收益都为200，此时收益最大。

c． 假如博弈规则增加一条规定：只有当所有博弈者投入的总金额大于等于 100 元时，投资才会成功，公共基金的金额会增长为原来的 3 倍；而如果投资总额小于 100 元，投资失败，公共基金的金将变为 0（即投入的金额全部损失）。请问，在这个新的公共品博弈中，纳什均衡有哪些？（提示：猜测可能的均衡点，再根据定义证明这些确实构成均衡；再证明其他投入方式不可能构成纳什均衡。）

猜测可能的纳什均衡点为：(1）每人投入0和（2）总投入为100且无人投入60以上。

证明：(1）每人投入0时，若某一博弈者增加投入，要么不足100全部失败，要么投入100获得60，均差于投入0时的受益；(2）总投入100且无人投入60以上，可以每人获得60的受益，此时若某一博弈者增加投入，增加的部分只会对该博弈者产生0.6倍的回报，若减少投入，则全体投资失败，此时即使减少投入至0，依然不大于收益60时的总收益。

其他投入方式的反证：(1）投入总量为0-100之间（不含）时，投资失败，此时博弈者将自己的投入降至0具有更高的收益；(2）投入总量为100且有人投入60以上时，投入60以上的博弈者获得的回报为60，他将投入降至0具有更高的收益；(3）投入总量大于100

时，某博弈者可以降低自己的投入但保持总投入量大于100，此时降低自己的投入只会降低0.6倍的回报，具有更高的收益。

Problem 2 Game of Public Goods with Competition

假设两个组参与挑战杯的竞赛，每组 5 人。每个人可选择投入的资源（努力程度）为 0 到 100 之间任意实数（包括 0 和 100）。每一组的研究成果取决于该组投入的总努力。投入努力总量较大的一组将获胜；获胜组所得的奖励是所投入资源总价值的 3 倍（即投入 X,获得 3X）；失败组所投入的资源则全部损失，价值为 0。如果两组投入总量相等则为平局，此时每组获得的奖励价值是所投入资源价值的 1.5 倍。无论胜、负还是平局，博弈结束时，每个组所获奖励的价值由该组内 5 名成员平等分享。（进行分析的时候注意，这里的决策者仍然是每一个个人，不是小组。）

a. 两组中每个人都投入 100，是否构成纳什均衡？简要证明。

是。此时任何一个人降低自己的投入都会导致失败，此时即使将投入降至0收益依然小于平局时的奖励，因而构成纳什均衡。

b. 两组中每个人都投入 0，是否构成纳什均衡？简要证明。

是。此时任何一个人增加投入会导致胜利，此时投入的3倍将平分给5人，投入者只能获得0.6倍的投入，收益更低，因而构成纳什均衡。

c. 请证明：在任何纳什均衡中，两个组各自的总投入一定是相等的。（提示：可以使用反证法，假设存在一个纳什均衡，其中两组的投入不等，那么较低组的每个人投入的努力一定是多少，再考虑较高组的情况。）

假设存在某一纳什均衡使两组投入不等，则较低组的人投入必为0，否则可降低自己的投入至0以提高收益；在此基础上，胜组中的某一人必可通过降低自己的投入（因1投入=0.6回报）来升高自己的收益，因而一定不构成纳什均衡。故原命题得证。

d. （稍难）本博弈的所有的纳什均衡有哪些？简要证明。（提示：基于上面 a,b,c 部分的结果，考虑是否存在除了 a,b 之外的其他努力水平的均衡。）

本解答中所指受益均为净收益。对于某一双方均总投入m的可能的均衡，考虑某一博弈者在其中投入了x：此时收益为0.3m-x；若博弈者增加投入dx，则收益变为0.6m-x-0.4dx；若减少投入dx，则收益变为dx-x。问题转化为：对任意dx，要求目前的受益更优。先考虑减少，那么减少后的受益最高应当是令dx=x，这样可以令收益为0，故第一个

条件是：x<0.3m；再考虑增加的情况，可以看到dx越小增加后的受益越高，故dx可以取极小的量而直接增加收益，不存在均衡。

综上，除了a和b中的情况，不存在其他的纳什均衡。

Problem 3 Hawk-Dove Game: Mixed Strategy

考察以下的"鹰-鸽"博弈：

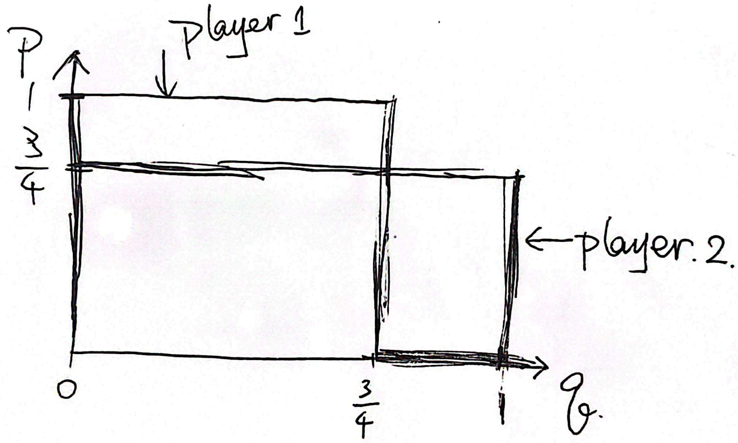
player1\player2	Hawk	Dove
Hawk	0, 0	6, 1
Dove	1, 6	3, 3

a. 记博弈者 1 使用 Hawk 的概率为 p, Dove 的概率为 1-p；博弈者 2 使用 Hawk 的概率为 q，Dove
的概率为 1-q。写出博弈者 1 的两个单纯策略各自的期望收益；以及博弈者 2 的两个单纯策略
的期望收益。

博弈者1：u(Hawk)=6(1-q); u(Dove)=q+3(1-q)。博弈者2与博弈者1完全相同。

b. 画图表示博弈者 1 和博弈者 2 的最优反应函数，并简要的给予文字解释。

事实上，比较上面的式子可以看出，另一方的Hawk概率为3/4时两策略期望收益相同，故画图如下



c. 本博弈的纳什均衡有哪几个（考虑混合策略和单纯策略）？

三个：(Hawk, Dove); (Dove, Hawk); ((3/4Hawk, 1/4Dove), (3/4Hawk, 1/4Dove)).

Problem 4 Number Game: Mixed Strategy

两名博弈者各自选择一个正整数，按以下规则决定胜负：如果一方的数比另一方的大，但不超过对方数的 3 倍，则大的一方获胜。如果一方的数超过（大于等于）另一方的 3 倍，则大的一方失败。如果双方的数正好相等，则为平局。（决出胜负后，负者付给胜者 1 元，如果打平，双方均不付钱。）

a. 简要证明这个博弈没有单纯策略的纳什均衡。

无论两个博弈者如何选，总有一个人是不赢的，此时他必可以通过改变自己的数字从而赢下比赛，故不存在单纯策略的纳什均衡。

b. 简要证明，每一方都以 1/3 的概率从 1、2、5 这三个数中随机选择，该策略组合构成一个纳什均衡。提示:使用课上讲到的混合博弈的纳什均衡的两个特征。可以试着画出博弈的收益矩阵一个局部，看看给定博弈者 2 的混合策略，博弈者 1 各个单纯策略的收益情况。尝试说明为什么给定 2 的策略，此时 1 的最优策略只可能是均等地混合使用 1、2、5。（在讨论中要注意按照规则博弈者 1 可以选择任意正整数，而不仅仅是 1、2、5。）

首先证明为什么除了1、2、5其他都无法选择：给定对方的1、2、5均等策略，对于3、4和所有大于5的数字，在博弈中输的概率都大于2/3，引入必定导致期望收益下降，为严格劣势策略，故不能选；在此基础上，1、2和5的期望收益相等。再考虑1、2、5混合概率不等的情况。此时考虑另一博弈者，他必定可以通过对应调整自己1、2、5的频率，使赢的概率变大，同样不是均衡。所以，均衡点只能是两人均均等选1、2、5.