

## 非线性试验数据的拟合方法

李广龙, 魏政君, 上官文斌

(华南理工大学 机械与汽车工程学院, 广东 广州 510641)

**摘 要:**针对目前数据拟合在试验记录与分析中的应用较为广泛,以最小二乘法为基础,以 MATLAB 软件为辅助工具,研究分段线性函数的方法在非线形分布数据进行拟合的应用。经过拟合得到的分段线性函数物理意义明确,而且利用分段线性函数可以简化计算,使试验数据分析更为简便、快捷。该数据拟合方法与解决问题的思路可为非线性试验数据的拟合提供参考。

**关键词:**非线性数据点;分段线性函数;拟合;MATLAB

**中图分类号:**TB 11 **文献标志码:**A

## A Method for Fitting Nonlinear Experimental Data

LI Guanglong, WEI Zhengjun, SHANGGUAN Wenbin

(School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

**Abstract:** In the analysis of experiment data, the data fitting is widely applied, but sometimes the fitting process is very complicated. In order to simplify the analysis process, introduce a fitting method for nonlinear data. The method is based on the least squares method to fit the nonlinear data with piecewise linear functions, and using the MATLAB software as toolbox. The constant in the piecewise linear functions has clear meanings. Use the fitted piecewise linear functions as substitute for nonlinear data, the analysis for the experiment data is more simple and efficient. The data fitting method and the idea of solving the problem are provided, and the results provide a reference for the fitting of nonlinear experimental data.

**Key words:** nonlinear data, piecewise linear functions, fitting, MATLAB

许多科学与工程结果的产生都来自于对试验的记录与分析<sup>[1]</sup>。试验记录的数据,通常是指试验中所得到的数据点,例如在速度与位移的试验中,所测得的速度与位移的关系将被表示为一个个的数据点。目前,在大多数情况下,数据的测试与储存都是通过计算机进行的,一旦数据已知,科学、工程从业者会将其以不同的方式运用。通常,数据点将会被通过数学运算变为有普遍性的方程,从而得到数据之间的相互关系。

在科学和工程试验中,所得到的数据点如果大致呈直线分布,这种情况较好处理;但在大多数情况下,其是非线性分布的,如文献[2]中悬置的静刚度随着载荷的变化而变化,测试到的力—位移数据点为非线性分布,则数据的处理量较大,计算较为复杂,且非线性曲线中各个点的物理意义不是很明确。

本文针对将非线性数据点进行分段线性处理的问题,研究采用分段线性函数,利用最小二乘法<sup>[3]</sup>,拟合非线性函数的基本思路。利用 MATLAB 软件,研究用分段线性函数拟合非线性函数的方法。

## 1 线性数据拟合的 2 种方法

假设由试验得到的数据点为  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 其大致呈线性分布,但不全处于同一条直线上。设数据点大致满足的线性方程(拟合模型)为  $y$

$= kx + b$ 。由于数据点不全处于同一条直线上,在  $x$  相同时,  $y$  所对应值与通过线性方程计算得到的值之间存在一定的残差,该残差可用下式表示:

$$\delta = \sum_{i=1}^n |y_i - kx_i - b| \quad (1)$$

为后续求导计算方便,笔者使用残差的平方和来衡量该残差,残差的平方和定义为:

$$E = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2 \quad (2)$$

由极值关系<sup>[4]</sup>可知,当  $E$  取最小值时,  $E$  对  $k$  和  $b$  的导数应等于 0。现分别对  $k$  与  $b$  进行求导,并令其值等于 0。

$$\frac{dE}{dk} = -2 \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - k \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dE}{db} = -2 \left( \sum_{i=1}^n y_i - k \sum_{i=1}^n x_i - nb \right) = 0 \quad (4)$$

由式 3 和式 4 得:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = k \sum_{i=1}^n x_i + nb \quad (6)$$

求解式 5 和式 6,得到:

$$k = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (7)$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)(\sum_{i=1}^n x_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (8)$$

同样,可通过矩阵形式来解决该问题。假设拟合模型经过每个数据点,则有:

$$y_i = kx_i + b \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

将上式写成矩阵形式为:

$$Y = X \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} \quad (10)$$

式 10 中,

$$Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T,$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

由式 10 可知,只有  $k$  与  $b$  这 2 个未知数,却有  $n$  个方程。根据矩阵与其转置相乘的特点,笔者产生了减少方程数量的想法。由式 10 两边同乘  $X$  的转置矩阵,得:

$$X^T Y = X^T X \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} \quad (11)$$

则:

$$\begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} (X^T Y) \quad (12)$$

假设有 8 个数据点(见表 1),应用 MATLAB 软件求解式 12,得到  $k=2.96, b=1.12$ ;求解式 7 和式 8,同样得到  $k=2.96, b=1.12$ 。线性拟合线段和数据点的关系如图 1 所示。

表 1 数据点

数据点编号	数据点坐标	数据点编号	数据点坐标
1	(-4, -12)	5	(1, 5)
2	(-3, -7)	6	(2, 6)
3	(-2, -5)	7	(3, 11)
4	(-1, -1)	8	(4, 12)

## 2 利用分段线性函数拟合非线性数据的方法

对于呈非线性分布的数据来说,用线性方程来

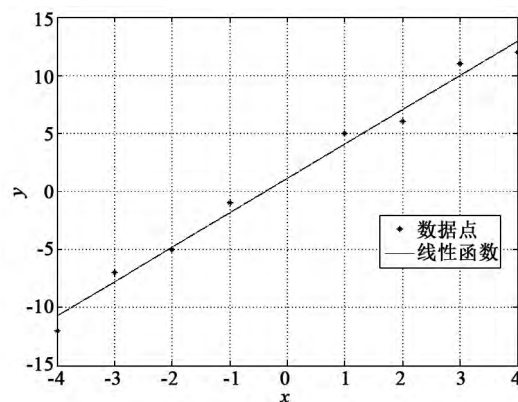


图 1 拟合方程与数据点(残差平方和为 6.811 2)

拟合非线性数据,得出的结果,其偏差大。对于非线性数据,可视为一段段的线性函数组合而成,因此,笔者在此研究了利用分段函数来拟合非线性数据。

设试验得到的数据点如图 2 所示,图中的  $x$  与  $y$  表示为  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ 。

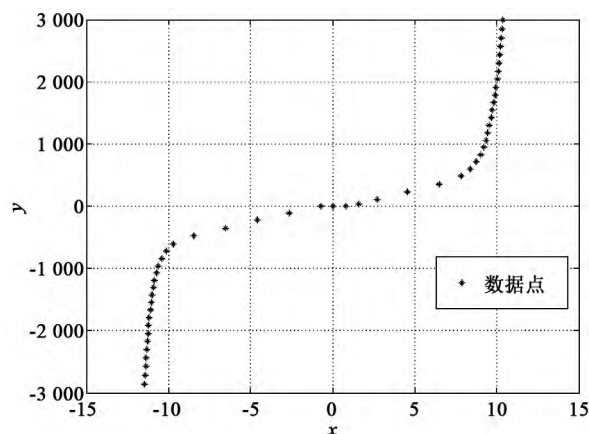


图 2 非线性数据点

已知数据点经过原点,现用 5 段分段线性函数(见图 3)来拟合图 2 中的数据点,图 3 中的分段函数为:

$$y_i = \begin{cases} k_1 x_i + (k_2 - k_1)a + (k_3 - k_2)b & (x_i < a) \\ k_2 x_i + (k_3 - k_2)b & (a \leq x_i < b) \\ k_3 x_i & (b \leq x_i < c) \\ k_4 x_i + (k_5 - k_4)c & (c \leq x_i < d) \\ k_5 x_i + (k_6 - k_5)d + (k_7 - k_6)c & (d \leq x_i) \end{cases} \quad (13)$$

利用求极值的方法来解决该问题为常规思路,但计算过程复杂。笔者在此应用 MATLAB 软件中的 fmincon 函数,来求解式 13 中的变量  $k_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$  与  $a, b, c, d$  的值。

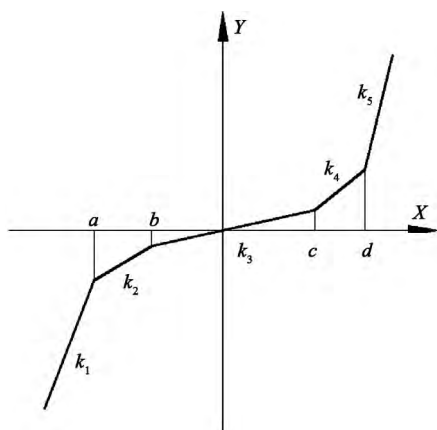


图 3 5 段分段线性函数

MATLAB 工具箱中的  $fmincon$  函数<sup>[5]</sup>, 是一种求解有约束的优化问题函数。现设目标函数为各个数据点的残差平方和, 由式 2 和式 14, 可得到:

$$E_i = \begin{cases} [y_i - k_1 x_i - (k_2 - k_1)a - (k_3 - k_2)b]^2 & (x_i < a) \\ [y_i - k_2 x_i - (k_3 - k_2)b]^2 & (a \leq x_i < b) \\ (y_i - k_3 x_i)^2 & (b \leq x_i < c) \\ [y_i - k_4 x_i - (k_3 - k_4)c]^2 & (c \leq x_i < d) \\ [y_i - k_5 x_i - (k_4 - k_5)d - (k_3 - k_4)c]^2 & (d \leq x_i) \end{cases} \quad (14)$$

将式 14 变成 MATLAB 软件中的目标函数, 该函数具有  $k_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$  与  $a, b, c, d$  等 9 个变量, 根据  $fmincon$  函数的使用要求, 还需获得函数约束条件, 由式 14 与图 2、图 3, 可得到其约束条件为:

$$\begin{cases} k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 > 0 \\ a \leq b \leq c \leq d \\ a, b < 0 \\ c, d > 0 \\ x_{\min} \leq a < 0 \\ 0 < d \leq x_{\max} \end{cases} \quad (15)$$

式中,  $x_{\max}$  为数据点中  $x$  的最大值;  $x_{\min}$  为数据点中  $x$  的最小值。

对图 2 中的数据, 根据 MATLAB 软件中的  $fmincon$  函数的语法编写程序, 计算得到的参数为:  $k_1 = 2\ 937, k_2 = 474, k_3 = 54, k_4 = 59, k_5 = 2\ 213, a = -10.9, b = -9.6, c = 8.3, d = 9.6$ 。

5 段分段线性函数与数据点的关系如图 4 所示。通过同样方法, 可用 3 段分段线性函数对曲线进行拟合, 也可以用 7 段乃至更多段进行曲线拟合, 若用 3 段分段线性函数来拟合图 2 中的数据点, 可得到  $k_1 = 2\ 746, k_2 = 76.8, k_3 = 1\ 861, a = -10.7, b = 9.2$ 。3 段分段线性函数与数据点的关系如图 5 所示。

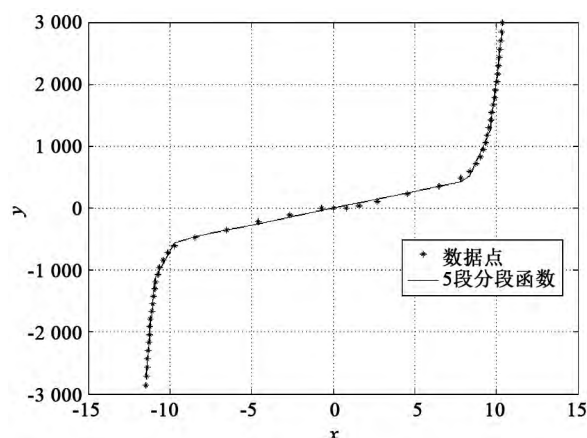


图 4 5 段分段线性函数与数据点的关系  
(残差平方和为 229 330)

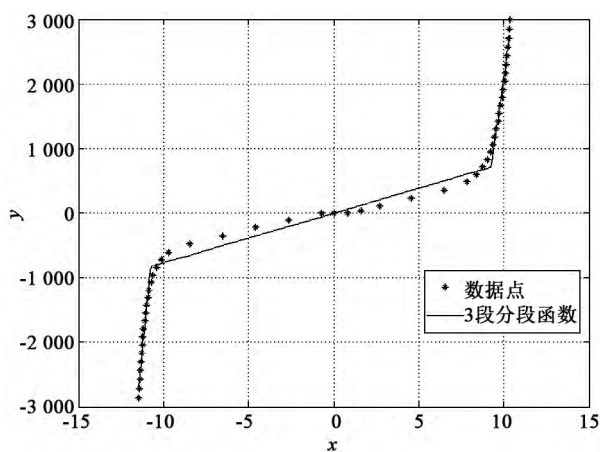


图 5 3 段分段线性函数与数据点的关系  
(残差平方和为 697 788)

对比图 4 和图 5 可知, 5 段分段线性函数所得的残差平方和远小于 3 段分段线性函数所得的残差平方和, 故运用 5 段分段线性函数的拟合效果较好。一般来说, 在工程应用上, 5 段拟合足够满足基本需求。

### 3 结语

本文研究了通过线性函数或分段线性函数拟合数据的方法, 推导了用线性函数拟合线性数据点、用分段函数拟合非线性数据点的计算方法。本文的数据拟合方法与解决问题的思路, 为非线性试验数据的拟合提供了参考。

### 参考文献

- [1] Amos G, Vish S. Numerical methods for engineers and scientists[M]. America: Wiley, 2011.
- [2] 刘祖斌, 刘英杰. 发动机悬置设计中的动、静刚度参数研究[J]. 汽车技术, 2008(6): 21-23.

# 基于有限元法的锅炉给水泵转子系统分析

程道俊,代 珣,张江涛

(中国电建集团上海能源装备有限公司,上海 201316)

**摘 要:**为了研究多级锅炉给水泵转子系统应力应变以及干态和湿态下临界转速,通过 ANSYS 软件中的 Workbench 组件对给水泵转子系统进行应力应变分析,同时采用 APDL 组件对给水泵的转子系统分别进行干态和湿态的对比计算。通过上述数值计算,获得了转子系统的应力应变以及干态和湿态下的临界转速,可以看出,在转子系统装配中叶轮的装配位置上径向变化较大,对比显示湿态下转子系统的临界转速比干态下临界转速大幅提高,更符合真实状态;预估了在湿态下临界转速数值结果。所采用的针对某型锅炉给水泵的应力应变及临界转速的研究方法,可为同类的给水泵产品转子系统的研究提供参考。

**关键词:**锅炉给水泵;应力应变;临界转速;数值计算

**中图分类号:**TH 31 **文献标志码:**A

## Analysis of the Rotor System of Boiler Feed Water Pump based on Finite Element Method

CHENG Daojun, DAI Xun, ZHANG Jiangtao

(Power China SPEM Limited Company, Shanghai 201316, China)

**Abstract:** In order to study multi-stage boiler feed pump rotor system stress and strain with critical speed under the dry and wet state, the software ANSYS Workbench components of feedwater pump rotor system of stress and strain analysis is done, at the same time, the APDL module of feedwater pump rotor system is dry and wet state of contrast is calculated. By the numerical calculation, the rotor system should be in stress and strain, and the dry and wet state of critical speed can be seen in the rotor assembly assembling position of the impeller radial variation, and it is larger in the wet state of rotor system critical speed than dry state under the critical rotation speed, which is more in line with the true state. Results are estimated in the wet critical speed. The research method of the stress and strain and the critical speed of the feed pump of a certain type boiler can provide the reference for research of the rotor system of the same kind of feed pump.

**Key words:** boiler feed pump, stress and strain, critical speed, numerical calculation

对于锅炉给水泵而言,保持转子部件的轴偏心率在安全范围以内是保证整个给水泵机组运行可靠性和使用寿命的重要前提<sup>[1]</sup>。对于泵的转子系统而言,随着转速的增加,轴沿着径向方向的振幅会不断增加,甚至会造成整泵出现共振现象,这时保证泵的临界转速大于转子最高转速的 25% 非常有必要。通常是通过增加轴径来提高轴的刚度,这种方法虽然有一定的可行性;但这样增加了转子部件的质量,在泵运行中增加了电动机的负荷,从而增加了给水泵的成本。

本研究以某型高温高压锅炉给水泵(见图 1)为

对象。整泵以径向滑动轴承支承,这样的长轴在高速运行中径向振幅一旦过大,就会导致轴抱死,在停机过程中,叶轮在径向上与径向导叶发生干涉,将直接导致导叶损坏。这种情况对泵组的安全运行极其不利<sup>[2]</sup>。

本文运用 ANSYS 软件中的 Workbench,以及 APDL 组件,通过数值计算的方法,在保证准确原则的前提下简化模型,计算转子系统的应力应变,以及干态和湿态下转子系统的临界转速,可为类似给水泵产品转子系统的研究提供参考。

[3] 田垠,刘宗田. 最小二乘法分段直线拟合[J]. 计算机科学,2012(S1):482-484.

[4] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 6 版. 北京:高等教育出版社,2010.

[5] 周智峰,张明. 基于 MATLAB 的最优化问题求解通用程序的实现[J]. 计算机科学,2004(6):29-32.

作者简介:李广龙(1982-),男,实验师,主要从事汽车性能测试、汽车实验台架设计等方面的研究。

收稿日期:2016-03-29

责任编辑 郑练