Algorytmiczna teoria grafów

Nieklasyczne kolorowanie wierzchołków i krawędzi grafu

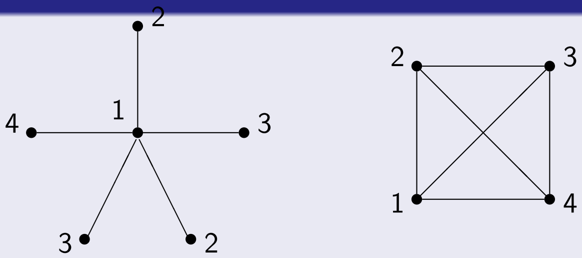
dr Hanna Furmańczyk

20 stycznia 2017

Kolorowanie sprawiedliwe; Meyer 1973

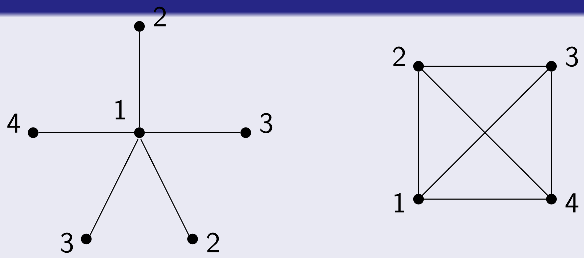
Jeżeli wierzchołki grafu G można podzielić na k takich zbiorów niezależnych $V_1, \dots, V_k$ takich, że $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ dla wszystkich $i, j = 1, \dots, k$, to mówimy, że G jest *sprawiedliwie k-kolorowalny*. Najmniejsza liczba k, dla której graf G jest sprawiedliwie k-kolorowalny jest *sprawiedliwą liczbą chromatyczną* grafu i oznaczamy ją symbolem $\chi_=(G)$.
Analogicznie definiujemy *sprawiedliwy indeks chromatyczny*, $\chi'_=(G)$.

Przykład



Rysunek: Sprawiedliwe pokolorowanie gwiazdy S_6 i grafu pełnego K_4.

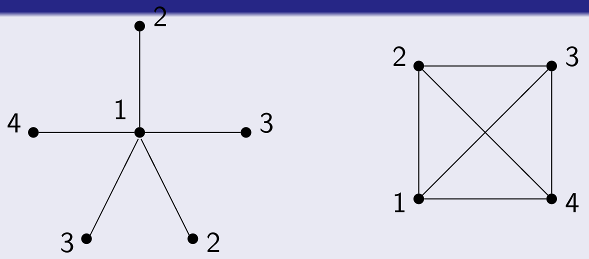
Przykład



Rysunek: Sprawiedliwe pokolorowanie gwiazdy S_6 i grafu pełnego K_4.

$$\chi_=(G) \geq \chi(G)$$

Przykład

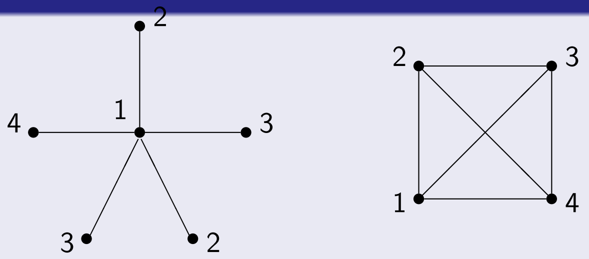


Rysunek: Sprawiedliwe pokolorowanie gwiazdy S_6 i grafu pełnego K_4.

$$\chi_=(G) \geq \chi(G)$$

Różnica $\chi_=(G) - \chi(G)$ może być dowolnie duża, np.

Przykład



Rysunek: Sprawiedliwe pokolorowanie gwiazdy S_6 i grafu pełnego K_4.

$$\chi_=(G) \geq \chi(G)$$

Różnica $\chi_=(G) - \chi(G)$ może być dowolnie duża, np. dla gwiazd.

Tw. Hajnal-Szemeredi, 1970

$$\chi_{=}(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Tw. Hajnal-Szemeredi, 1970

$$\chi_=(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Hipoteza ECC

Dla każdego spójnego grafu G różnego od grafu pełnego i nieparzystego cyklu zachodzi: $\chi_=(G) \leq \Delta(G)$.

Tw. Hajnal-Szemeredi, 1970

$$\chi_=(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Hipoteza ECC

Dla każdego spójnego grafu G różnego od grafu pełnego i nieparzystego cyklu zachodzi: $\chi_=(G) \leq \Delta(G)$.

hipoteza udowodniona dla wielu klas grafów, brak dowodu w przypadku ogólnym

Twierdzenie

G: n wierzchołkowy graf prosty o liczbie stabilności (niezależności) $\alpha(G)$ (moc największego zbioru niezależnego), $v \in V(G)$. Wówczas

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G - (N(v) \cup \{v\})) + 2} \right\rceil \le \chi_=(G).$$

Kolorowanie sprawiedliwe - oszacowanie dolne

Twierdzenie

G: n wierzchołkowy graf prosty o liczbie stabilności (niezależności) $\alpha(G)$ (moc największego zbioru niezależnego), $v \in V(G)$. Wówczas

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G-(N(v)\cup\{v\}))+2} \right\rceil \leq \chi_=(G).$$

Dowód

Kolorowanie sprawiedliwe - oszacowanie dolne

Twierdzenie

G: n wierzchołkowy graf prosty o liczbie stabilności (niezależności) $\alpha(G)$ (moc największego zbioru niezależnego), $v \in V(G)$. Wówczas

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G-(N(v)\cup\{v\}))+2} \right\rceil \leq \chi_{=}(G).$$

Dowód

- liczba wierzchołków pokolorowana tym samym kolorem co v nie przekracza $\alpha(G-(N(v)\cup\{v\}))+1$,

Kolorowanie sprawiedliwe - oszacowanie dolne

Twierdzenie

G: n wierzchołkowy graf prosty o liczbie stabilności (niezależności) $\alpha(G)$ (moc największego zbioru niezależnego), $v \in V(G)$.
Wówczas

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G - (N(v) \cup \{v\})) + 2} \right\rceil \leq \chi_{=}(G).$$

Dowód

- liczba wierzchołków pokolorowana tym samym kolorem co v nie przekracza $\alpha(G - (N(v) \cup \{v\})) + 1$,
- kolorowanie ma być sprawiedliwe, więc każdego innego koloru możemy użyć co najwyżej $\alpha(G - (N(v) \cup \{v\})) + 2$ razy.

Kolorowanie ograniczone

Graf G ma p-ograniczone k-kolorowanie, jeżeli zbiór jego wierzchołków (krawędzi) można pokolorować k kolorami w taki sposób, że każdy kolor jest użyty nie więcej niż p razy.
$\chi_p(G), \chi'_p(G)$

Przykład

Kolorowanie zwarte - tylko krawędzie!

Slajdy Dereniowski: 274-275.

Kolorowanie sumacyjne

Slajdy Dereniowski: 271.

Definicja

Niech C bęzie zbiorem kolorów, dla każdego $v \in V(G)$, niech $L : V(G) \to 2^C$ będzie funkcją przypisującą każdemu wierzchołkowi $v \in V(G)$ listę dozwolonych kolorów $L(v) \subseteq C$. Jeżeli istnieje funkcja $f : V(G) \to C$ taka, że $f(v) \in L(v)$ dla każdego $v \in V(G)$ oraz $f(u) \neq f(v)$ dla $u, v \in E(G)$, wtedy G nazywa się *L-kolorowalnym*.

Kolorowanie listowe

Definicja

Niech C bęzie zbiorem kolorów, dla każdego $v \in V(G)$, niech $L : V(G) \to 2^C$ będzie funkcją przypisującą każdemu wierzchołkowi $v \in V(G)$ listę dozwolonych kolorów $L(v) \subseteq C$. Jeżeli istnieje funkcja $f : V(G) \to C$ taka, że $f(v) \in L(v)$ dla każdego $v \in V(G)$ oraz $f(u) \neq f(v)$ dla $u, v \in E(G)$, wtedy G nazywa się *L-kolorowalnym*.

Jeżeli wszystkie listy są zbiorami $\{1, 2, ..., \chi(G)\}$, to kolorowanie listowe staje się kolorowaniem w zwykłym sensie.

Kolorowanie listowe

Definicja

Jeżeli k jest liczbą naturalną, funkcja L jest taka, że $|L(v)| = k$ dla każdego $v \in V(G)$, a graf G ma właściwe pokolorowanie listowe, wtedy mówi się, że G jest k-wybieralny, oraz definiuje się liczbę wyboru, $ch(G)$ jako najmniejsze k takie, że G ma poprawne pokolorowanie listowe niezależnie od tego jakie listy zostaną przypisane jego wierzchołkom.

Definicja

Jeżeli k jest liczbą naturalną, funkcja L jest taka, że $|L(v)| = k$ dla każdego $v \in V(G)$, a graf G ma właściwe pokolorowanie listowe, wtedy mówi się, że G jest k-wybieralny, oraz definiuje się liczbę wyboru, $ch(G)$ jako najmniejsze k takie, że G ma poprawne pokolorowanie listowe niezależnie od tego jakie listy zostaną przypisane jego wierzchołkom.

Proste własności

$\chi(G) \leq ch(G)$

Definicja

Jeżeli k jest liczbą naturalną, funkcja L jest taka, że $|L(v)| = k$ dla każdego $v \in V(G)$, a graf G ma właściwe pokolorowanie listowe, wtedy mówi się, że G jest k-wybieralny, oraz definiuje się liczbę wyboru, $ch(G)$ jako najmniejsze k takie, że G ma poprawne pokolorowanie listowe niezależnie od tego jakie listy zostaną przypisane jego wierzchołkom.

Proste własności

$\chi(G) \leq ch(G)$
$ch(G) \leq \Delta(G) + 1$