1 Przepływy w sieciach - zadania

1. Wyznacz maksymalny przepływ dla podanej sieci [sieci zostaną podane na zajęciach]

2. Podaj przykład sieci, w której wartość maksymalnego przepływu jest równa 10, a liczba iteracji algorytmu Forda-Fulkersona przy pewnym niekorzystnym w wyborze ścieżek powiększających jest większa niż 10.

3. Pokazać, jak można wyznaczyć maksymalny przepływ w sieci, w której nie tylko łuki, ale także wierzchołki mają ograniczoną przepustowość.

4. W problemie maksymalnego przepływu z wieloma źródłami i ujściami mamy daną sieć przepływową G, zbiór źródeł $s_1, \ldots, s_m$ oraz zbiór ujść $t_1, \ldots, t_n$ i chcemy wyznaczyć maksymalny sumaryczny przepływ ze źródeł $s_1, \ldots, s_m$ do ujść $t_1, \ldots, t_n$. Zaproponuj efektywny algorytm rozwiązujący ten problem.

2 Zastosowania problemu maksymalnego przepływu - częściowo na wykładzie.

1. Problem reprezentantów (Hall [1956]) Wejście: Miasto ma r mieszkańców $R_1, R_2, \ldots, R_r$; q klubów $C_1, C_2, \ldots, C_q$ i p partii politycznych $P_1, P_2, \ldots, P_p$. Każdy mieszkaniec jest członkiem co najmniej jednego klubu i może należeć do co najwyżej jednej partii politycznej. Znana jest przynależność każdego z mieszkańców zarówno do klubów jak i partii politycznej. Każdy klub musi nominować jednego ze swoich członków do reprezentowania tego klubu w radzie miejskiej. W radzie tej może zasiadać co najwyżej u_k członków należących do partii P_k, aby rada ta spełniała warunek politycznie zrównoważonej.

   Wyjście: Odpowiedź na pytanie: Czy możliwy jest taki wybór reprezentantów klubów do rady miejskiej, aby była ona politycznie zrównoważona.

2. Crazy Painter

   W zadaniu mamy daną prostokątną planszę złożoną z kwadratów 1x1. Niektóre pola tej planszy są zabronione. Naszym celem jest pomalowanie wszystkich pól dozwolonych minimalnym kosztem. Możemy wykonywać 3 czynności: pomalowanie pojedynczego pola (koszt operacji wynosi x), pomalowanie poziomego paska pól dozwolonych (koszt h), pomalowanie pionowego paska pól dozwolonych (koszt v). Nie możemy malować pól zabronionych, jednakże pole dozwolone może być malowane wielokrotnie.

3. Generowanie ustalonego przepływu (Berge i Ghouila-Houri [1962])

   Wejście: Graf zorientowany $G = (V, E, u)$ z nieujemnymi wagami. Dla każdego wierzchołka $i \in V$ ustalona jest wartość $b(i) \in Z$ taka, że $\sum_{i \in V} b(i) = 0$.

   Wyjście: Funkcja $f : E \to Z^+ \cup \{0\}$ taka, że

$$\sum_{\{j:(i,j)\in E\}} f_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in E\}} f_{ji} = b(i)$$

   gdzie: 0 f_{ij} u_{ij} dla wszystkich krawędzi $(i, j) \in E$, o ile taka funkcja istnieje.

4. Harmonogram przydziału średniego personelu medycznego w szpitalu (Khan i Lewis [1987])

   Wejście: Aby zracjonalizować zatrudnienie pielęgniarek w szpitalu ustalono minimalną i maksymalną liczbę pielęgniarek potrzebnych na każdej zmianie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, w każdym z oddziałów szpitalnych $o_1, o_2, \ldots, o_m$. Oznaczmy przez d_{ij} dolny limit pielęgniarek pracujących na zmianie z_i w oddziale o_j, a przez g_{ij} górny limit pielęgniarek pracujących na zmianie z_i w oddziale o_j. Limity liczb pielęgniarek pracujących na danym oddziale i danej zmianie muszą być zawsze zachowane, aby poziom świadczonych przez szpital usług medycznych był odpowiedni. Znana jest również minimalna liczba pielęgniarek, które muszą być zatrudnione w poszczególnych oddziałach (na wszystkich zmianach) i minimalna liczba pielęgniarek pracujących na poszczególnych zmianach (we wszystkich oddziałach łącznie).

Wyjście: Administracja szpitala chce sprawdzić, czy przy minimalnym poziomie zatrudnienia pielęgniarek na poszczególnych zmianach i w poszczególnych oddziałach będą zachowane limity we wszystkich oddziałach na każdej zmianie.

5. Problemy transportowe [badania operacyjne]

   W pięciu miastach $M_1 - M_5$ znajdują się zapasy towaru w ilościach podanych w zestawieniu. Towar ten powinien być przetransportowany do pięciu miast $M_6 - M_{10}$, których zapotrzebowanie na towar jest podane. Znane są przepustowości połączeń, z których można korzystać do przewiezienia towaru. Należy zaplanować przewiezienie towaru w taki sposób, by zaspokoi potrzeby odbiorców albo - jeśli pełne zaspokojenie nie jest możliwe - łączna ilość przewiezionego towaru była możliwie duża.

		M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
		220	190	220	170	450
M_1	270	0	0	0	90	230
M_2	240	0	140	190	0	0
M_3	90	40	0	0	90	0
M_4	240	0	80	0	0	190
M_5	410	230	0	50	0	180

3 Zadanie implementacyjne - termin 7.01.2016

1. Napisz program, który znajduje wartość maksymalnego przepływu oraz minimalny przekrój dla podanej sieci przepływowej. Program powinien być wrażliwy na podanie sieci bez drogi między startem a ujściem. Dla poprawnej sieci program powinien zwracać wartość maksymalnego przepływu.

   - wprowadzenie do programu sieci, znalezienie wartości maksymalnego przekroju - 9 pkt
   - znalezienie ścieżek powiększających metodą cechowania wierzchołków - 9 pkt
   - wyznaczenie minimalnego przekroju (zbiór łuków) - 9 pkt