Algorytmiczna teoria grafów

dr Hanna Furmańczyk

15 marca 2014

Najkrótsze ścieżki

Algorytm Dijkstry (dodatnie wagi!) - slajdy z ćwiczeń str. 142-144.

Grafy Euelrowskie i półeulerowskie

Niech dany będzie spójny multigraf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest eulerowski, jeśli istnieje łańcuch zamknięty zawierający każdą krawędź multigrafu; taki łańcuch nazywamy *cyklem Eulera*.

Grafy Euelrowskie i półeulerowskie

Niech dany będzie spójny multigraf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest eulerowski, jeśli istnieje łańcuch zamknięty zawierający każdą krawędź multigrafu; taki łańcuch nazywamy *cyklem Eulera*. Analogicznie, mówimy, że G jest *półeulerowski*, jeśli istnieje łańcuch zawierający każdą krawędź grafu; taki łańcuch nazywamy *łańcuchem Eulera*.

Grafy Euelrowskie i półeulerowskie

Niech dany będzie spójny multigraf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest eulerowski, jeśli istnieje łańcuch zamknięty zawierający każdą krawędź multigrafu; taki łańcuch nazywamy *cyklem Eulera*. Analogicznie, mówimy, że G jest *półeulerowski*, jeśli istnieje łańcuch zawierający każdą krawędź grafu; taki łańcuch nazywamy *łańcuchem Eulera*.

Twierdzenie

1. Spójny multigraf $G = (V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wierzchołek jest parzystego stopnia.
2. Spójny multigraf G jest półeulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy posiada co najwyżej dwa wierz- chołki nieparzystego stopnia, z czego jeden z nich jest początkiem łańcucha Eulera, a drugi jego końcem.

Algorytm Fleury'ego znajdowania cyklu Eulera (o ile taki cykl istnieje)

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym multigrafem o wszystkich wierzchołkach parzystego stopnia.

1. Zaczynamy od dowolnego wierzchołka $v \in V$.
2. Powtarzamy, aż przejdziemy wszystkie krawędzie:
    1. Jeżeli z bieżącego wierzchołka x odchodzi tylko jedna krawędź, to przechodzimy wzdłuż tej krawędzi do następnego wierzchołka i usuwamy tą krawędź wraz z wierzchołkiem x.
    2. W przeciwnym wypadku, jeżeli z x odchodzi więcej krawędzi, to wybieramy tę krawędź, której usunięcie nie rozspójnia nam grafu, i przechodzimy wzdłuż tej krawędzi do następnego wierzchołka, a następnie usuwamy tę krawędź z grafu.

Problem chińskiego listonosza

Dana jest sieć ulic oraz poczta. Aby listonosz dostarczył korespondencję musi przejść wzdłuż kżej ulicy co najmniej raz i powrócić do punktu wyjścia. Formułując problem w języku grafów, pytamy o najkrótszą zamkniętą marszrutę w grafie G utworzonym na podstawie sieci ulic, w którym wagi krawędzi odpowiadają długościom ulic.

Dana jest sieć ulic oraz poczta. Aby listonosz dostarczył korespondencję musi przejść wzdłuż kżej ulicy co najmniej raz i powrócić do punktu wyjścia. Formułując problem w języku grafów, pytamy o najkrótszą zamkniętą marszrutę w grafie G utworzonym na podstawie sieci ulic, w którym wagi krawędzi odpowiadają długościom ulic.

Rozwiązanie

Znany jest efektywny algorytm rozwiązujący ten problem. Rozważymy trzy przypadki - slajdy dr hab. D. Dereniowski 9-12.

Grafy Hamiltonowskie i półhamiltonowskie

Niech dany będzie spójny (multi)graf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest *hamiltonowski*, jeśli istnieje cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz; taki cykl nazywamy *cyklem Hamiltona*.

Grafy Hamiltonowskie i półhamiltonowskie

Niech dany będzie spójny (multi)graf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest *hamiltonowski*, jeśli istnieje cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz; taki cykl nazywamy *cyklem Hamiltona*.

Analogicznie, mówimy, że G jest *półhamiltonowski*, jeśli zawiera ścieżkę przechodzącą przez każdy wierzchołek dokładnie raz; taką ścieżkę nazywamy *ścieżką Hamiltona*.

Algorytm z nawrotami znajdowania drogi Hamiltona (o ile taka droga istnieje)

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem i pewnym wyróżnionym wierzchołkiem $v \in V$.

1. Wkładamy v na STOS.
2. Powtarzamy:
    1. Jeżeli u jest wierzchołkiem na wierzchu stosu, to szukamy wierzchołka w o najniższym możliwym numerze (najwcześniejszego przy ustalonym porządku wierzchołków grafu) sąsiedniego z u i nie występującego na STOSIE, jednakże przy założeniu, że wierzchołek w jest „większy” od wierzchołka zdjętego krok wcześniej ze STOSU (o ile był taki).
    2. Jeśli takie w znajdziemy, to wkładany je na stos — jeżeli dotychczasowy STOS tworzy drogę Hamiltona, to KONIEC.
    3. Jeżeli takiego w nie znaleźliśmy, to zdejmujemy u ze stosu.

Problem stwierdzenia, czy w danym grafie $G = (V, E)$ istnieje droga Hamiltona, jest problemem NP-zupełnym, tzn. nie istnieje deterministyczny algorytm rozstrzygający ten problem w czasie wielomianowym, o ile $P \neq NP$.

Problem stwierdzenia, czy w danym grafie $G = (V, E)$ istnieje droga Hamiltona, jest problemem NP-zupełnym, tzn. nie istnieje deterministyczny algorytm rozstrzygający ten problem w czasie wielomianowym, o ile $P \neq NP$.

Zauważmy, że nie wyklucza to istnienia niewielomianowego algorytmu i właśnie przykładem takiego algorytmu jest omawiany wyżej algorytm z nawrotami.

Definicja, historia - slajdy dr hab. D.Dereniowski 1-2,5-9.