Algorytmiczna teoria grafów

dr Hanna Furmańczyk

5 stycznia 2017

Grafy Hamiltonowskie i półhamiltonowskie

Niech dany będzie spójny (multi)graf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest *hamiltonowski*, jeżli istnieje cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokłaadnie raz; taki cykl nazywamy *cyklem Hamiltona*.

.

Grafy Hamiltonowskie i półhamiltonowskie

Niech dany będzie spójny (multi)graf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest *hamiltonowski*, jeżli istnieje cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokłaadnie raz; taki cykl nazywamy *cyklem Hamiltona*.

Analogicznie, mówimy, że G jest *półhamiltonowski*, jeżeli zawiera ścieżkę przechodzącą przez każdy wierzchołek dokładnie raz; taką ścieżkę nazywamy *ścieżką Hamiltona*.

Legenda głosi, że kiedy sir Wiliam Hamilton(1805-1865) został wsadzony do więzienia za długi wymyślił grę w dookoła świata aby zdoby pieniądze i wyjść na wolność. Gra (a właściwie łamigłówka) polegaşa na tym, że wierzchołki dwunastościanu foremnego zostały poetykietowane nazwami stolic różnych państw świata i należało znaleźć trasę podróży dookoşa świata. W podróży należało odwiedzić każdą stolicę dokładnie raz i wrócić do punktu startowego. Wolno było poruszać się tylko po krawędziach. Gra nie odniosła sukcesu komercyjnego, ale dała początek dziedzinie teorii grafów, która do dnia dzisiejszego budzi żywe zainteresowanie.

Obserwacja: Wszystkie grafy pełne są hamiltonowskie.

Obserwacja: Wszystkie grafy pełne są hamiltonowskie.
Ważne: W przeciwieństwie do grafów Eulera nie znamy "przyzwoitego" warunku koniecznego i dostatecznego dla grafów Hamiltona.

Obserwacja: Wszystkie grafy pełne są hamiltonowskie.
Ważne: W przeciwieństwie do grafów Eulera nie znamy "przyzwoitego" warunku koniecznego i dostatecznego dla grafów Hamiltona.
Istnieją warunki dostateczne.

Twierdzenie - Ore 1960

Jeżeli dla każdych dwóch niesąsiednich wierzchołków grafu G suma ich stopni jest nie mniejsza niż ilość wszystkich wierzchołków w G, to G jest hamiltonowski.

Warunki dostateczne

Twierdzenie - Ore 1960

Jeżeli dla każdych dwóch niesąsiednich wierzchołków grafu G suma ich stopni jest nie mniejsza niż ilość wszystkich wierzchołków w G, to G jest hamiltonowski.

Dowód

slajdy D. Derenowiowski

Warunki dostateczne

Twierdzenie Diraca 1952

Graf prosty G o $n \geq 3$ wierzchołkach i $\delta(G) \geq n/2$ jest hamiltonowski.
$\delta(G)$ - minimalny stopień grafu G

Warunki dostateczne

Twierdzenie Diraca 1952

Graf prosty G o $n \geq 3$ wierzchołkach i $\delta(G) \geq n/2$ jest hamiltonowski.
$\delta(G)$ - minimalny stopień grafu G

Dowód

Z tw. Orego.

Podejście dokładne

Algorytm z nawrotami znajdowania drogi Hamiltona (o ile taka droga istnieje)

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem i pewnym wyróżnionym wierzchołkiem $v \in V$.

1. Wkładamy v na STOS.
2. Powtarzamy:
   1. Jeżeli u jest wierzchołkiem na wierzchu stosu, to szukamy wierzchołka w o najniższym możliwym numerze (najwcześniejszego przy ustalonym porządku wierzchołków grafu) sąsiedniego z u i nie występującego na STOSIE, jednakże przy założeniu, że wierzchołek w jest "większy" od wierzchołka zdjętego krok wcześniej ze STOSU (o ile był taki).
   2. Jeėli takie w znajdziemy, to wkładamy je na stos - jeżeli dotychczasowy STOS tworzy drogę Hamiltona, to KONIEC.
   3. Jeżeli takiego w nie znaleźliśmy, to zdejmujemy u ze stosu.

Problem stwierdzenia, czy w danym grafie $G = (V, E)$ istnieje droga Hamiltona, jest problemem NP-zupełnym, tzn. nie istnieje deterministyczny algorytm rozstrzygający ten problem w czasie wielomianowym, o ile $P \neq NP$.

Problem stwierdzenia, czy w danym grafie $G = (V, E)$ istnieje droga Hamiltona, jest problemem NP-zupełnym, tzn. nie istnieje deterministyczny algorytm rozstrzygający ten problem w czasie wielomianowym, o ile $P \neq NP$.

Zauważmy, że nie wyklucza to istnienia niewielomianowego algorytmu i właśnie przykładem takiego algorytmu jest omawiany wyżej algorytm z nawrotami.

Problem komiwojażera

Definicja, historia - slajdy dr hab. D.Dereniowski 1-2,5-9.