Základy počítačové grafiky
Přednáška 3

Martin Němec

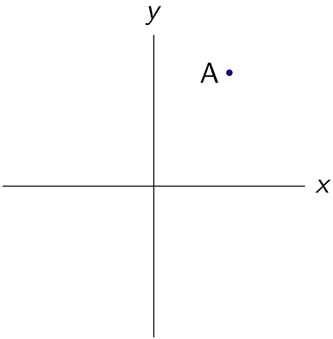
VŠB-TU Ostrava

2024

Transformace

Intuitivně chápeme, co jsou to transformace. Pokuste se to vysvětlit a nebojte se matematiky.

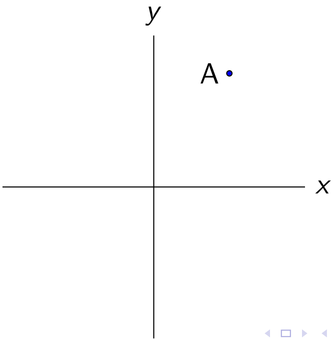
Budeme vycházet z Matematiky (Lineární algebra) i když se někdy vyhneme formálním popisům.



Skalár, bod

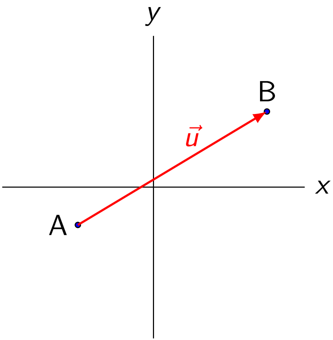
Skalár je veličina, která je definována pouze svou velikostí (ve fyzice to jsou např. hmotnost, objem, velikost atd.).

Bod základní bezrozměrný útvar, který reprezentujeme v prostoru pomoci trojice reálných čísel $A = [x, y, z]$. Tyto souřadnice udávají polohu v konkrétní souřadné soustavě. V různých souřadných soustavách může mít bod jiné souřadnice.



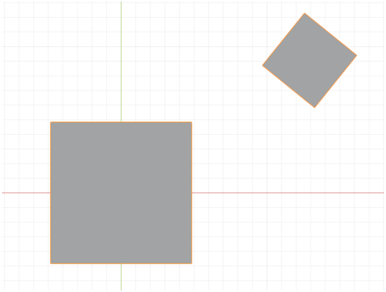
Vektor

Vektor reprezentuje zjednodušeně pohyb z jednoho bodu do druhého (ve fyzice třeba síla a skládání sil).
Souřadnice vektoru tvoří uspořádána n-tice čísel (složky vektoru).
Vektor značíme: $\vec{u} = (x, y, z)$.



- Má velikosti a směr;
- nemá pozici;
- definujeme $\vec{u} = B - A$;
- "jdi deset metru na jih".

- Transformace je zobrazení, které každému bodu A přiřadí jeho obraz, kterým je bod A'.
- V euklidovské geometrii je afinní transformace (afinita) taková geometrická transformace, která zachovává linie a rovnoběžnost (ale ne nutně vzdálenosti a úhly).
- Kartézský souřadný systém - osy jsou na sebe navzájem kolmé, se stejným měřítkem.



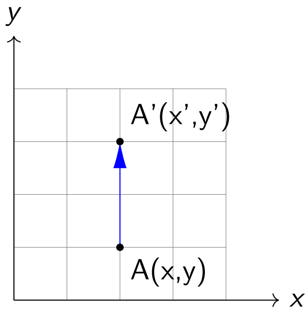
Translace

Posunutí - $T(\vec{d})$, bodu $A[x, y]$ o vzdálenost d_x a d_y na příslušných osách (délky lze zapsat vektorem $\vec{d}$) provedeme tak, že k jednotlivým souřadnicím bodu A přičteme příslušné hodnoty d_x a d_y.

$$\begin{aligned} x' &= x + d_x \, , \\ y' &= y + d_y \, , \end{aligned}$$

resp.

$$A' = A + \vec{d} \, .$$



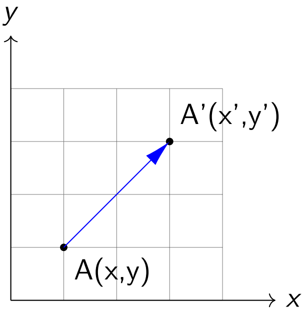
Změna měřítka

Změna měřítka - $S(\vec{s})$, mění velikost objektu v jednotlivých osách. Změny měřítka lze dosáhnout vynásobením každé souřadnice bodu $A[x, y]$ měřítkem pro jednotlivé osy s_x a s_y (lze popsat vektorem $\vec{s}$), čímž získáme transformované souřadnice bodu $A'[x', y']$.

$$\begin{aligned} x' &= s_x x\,, \\ y' &= s_y y\,, \end{aligned}$$

obecně

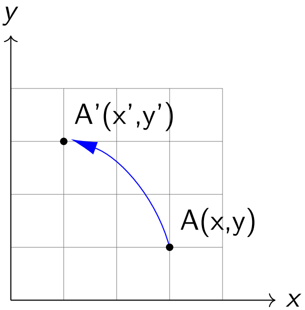
$$A' = \vec{s}A\,.$$



Rotace

Rotaci - $R(\vec{\alpha})$, o úhel α chápeme jako pohyb bodu po kružnici kolem středu rotace. Rotaci o daný úhel lze provádět ve směru hodinových ručiček nebo proti.

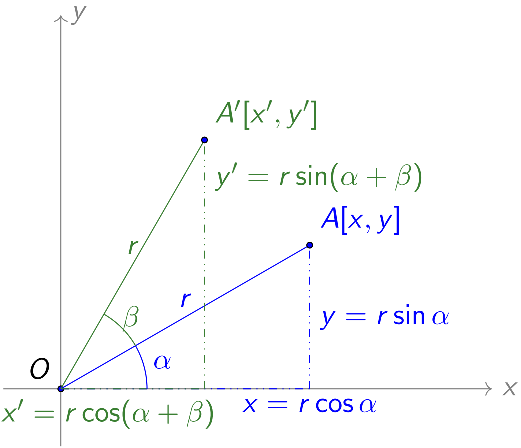
$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha)\,,\\
y' &= x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha)\,.
\end{aligned}
$$



$$R_{ccw}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

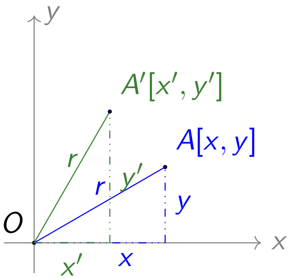
$$R_{cw}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Odvození rotace



Odvození rotace

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

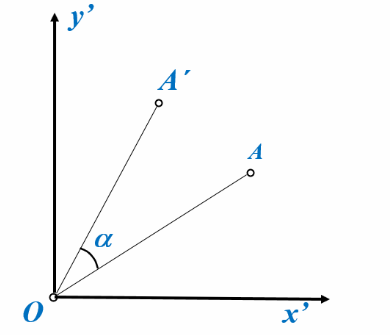


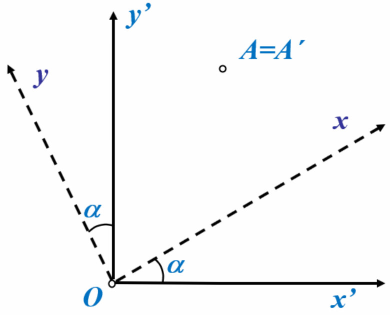
$$x' = r\cdot\cos(\alpha+\beta)$$
$$x' = r\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta)$$
$$x' = r\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta - r\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$x' = x\cdot\cos\beta - y\cdot\sin\beta$$

$$y' = r\cdot\sin(\alpha+\beta)$$
$$y' = r\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta)$$
$$y' = r\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta - r\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$y' = y\cdot\cos\beta + x\cdot\sin\beta$$

Odvození rotace

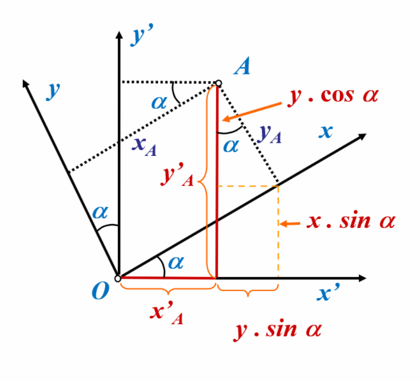
Dvě možnosti znázornění (rotace bodem vs. rotace souřadné soustavy).





Odvození rotace

Dvě možnosti znázornění (rotace bodem vs. rotace souřadné soustavy).



$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$
$$y' = y \cdot \cos\alpha + x \cdot \sin\alpha$$

Transformace a maticový zápis

Translace

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Rotace

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Změna měřítka

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Afinní transformace

Afinní zobrazení je geometrické zobrazení mezi afinními prostory, které zachovává kolinearitu (vlastnost množiny bodů, že leží na jedné přímce) a dělící poměr (tři kolineární body $|AC|/|BC|$).
Translace

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Rotace

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Změna měřítka

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Společně lze tedy všechny tři transformace zapsat jako

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

obecně

$$X' = \mathbf{A} \cdot X + \vec{d}$$

Pozor na variantu, kdy je bod reprezentován řádkovým vektorem:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x & d_y \end{bmatrix}$$

obecně

$$X' = X \cdot \mathbf{A} + \vec{d}$$

Jaký je vztah mezi oběma maticemi?

Rotace kolem obecného bodu

Pokud je středem rotace obecný bod S, musíme nejprve provést posunutí tak, aby byl bod S ve středu souřadné soustavy. Následně provést rotaci o daný úhel α. A ještě provést zpětné posunutí.

$$X' = (\mathbf{A} \cdot (X + \vec{d})) - \vec{d}$$

Pokud skládáme více transformací (nevíme dopředu jaké) platí obecně

$$\begin{aligned} X' &= \mathbf{A_1} \cdot X + \vec{d_1} \\ X'' &= \mathbf{A_2} \cdot X' + \vec{d_2} \\ &... \\ X^n &= \mathbf{A_n} \cdot X^{n-1} + \vec{d_n} \end{aligned}$$

resp.

$$X^n = \mathbf{A_n} \cdot (...(\mathbf{A_2} \cdot (\mathbf{A_1} \cdot X + \vec{d_1}) + \vec{d_2})...) + \vec{d_n}$$

Rotace v prostoru

Obecný zápis afinní transformace v prostoru.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

Translace i změna měřítka jsou jednoduché, jak je to s rotaci?

Rotace ve 3D

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogenní souřadný systém

Myšlenkou je reprezentace bodu v prostoru o jedna dimenzi větším.

- Rozšíření o jednu dimenzi (expanze z 2D do 3D, popř. z 3D do 4D).
- Bod $X[x, y]$ v homogenních souřadnicích $X_h[wx, wy, w]$, kde $w \neq 0$.
- Bod se souřadnicemi $A_h = (x_h, y_h, w)$ má kartézské souřadnice $A_k = [x_h/w, y_h/w]$.
- Nejčastěji volíme homogenní souřadnici $w = 1$.

Uspořádanou čtveřici $[x_h, y_h, z_h, w]$ nazveme pravoúhlé homogenní souřadnice bodu A v projektivním rozšíření E_3, jestliže pro souřadnice bodu A bude platit:

$$x = \frac{x_h}{w}, y = \frac{y_h}{w}, z = \frac{z_h}{w}$$

Homogenní souřadný systém

Srovnání zápisu translace, rotace a změny velikosti. Kde je výhoda?

Afinní prostor
Kartézský souřadný systém

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Projektivní prostor
Homogenní souřadný systém

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & d_x \\ a_{yx} & a_{yy} & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ w \end{bmatrix}$$

Převod bodu

Co se děje s bodem $A[2,2]$, když při převodu volíme jinou homogenní souřadnici?

- $A[2,2]$, $w = 1$ ... $A_h = [2,2,1]$
- $A[2,2]$, $w = 2$ ... $A_h = [4,4,2]$
- $A[2,2]$, $w = 1/2$ ... $A_h = [1,1,1/2]$
- $A[2,2]$, $w = 10$ ... $A_h = [20,20,10]$

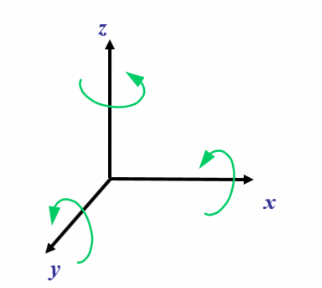
Translation

Matici translace v projektivním prostoru (homogenní souřadný systém) $T(a, b, c)$ zapisujeme jako:

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Rotation

Matice rotace v projektivním prostoru $R(\alpha)$:



$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scale

Změnu měřítka $S(a, b, c)$ v projektivním prostoru (homogenní souřadný systém) zapisujeme jako:

$$S(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Rotace kolem obecného bodu

Jak se změní rotace kolem obecného bodu v projektivním prostoru?

$$R_{(a,b)}(\alpha) = T(a,b)R(\alpha)T(-a,-b)\,.$$

To znamená

$$R_{(a,b)}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Příklad na rotaci

Zarotujte bodem $A = [5, 4]$ o úhel $\alpha = 90^\circ$ kolem bodu $C = [2, 3]$.

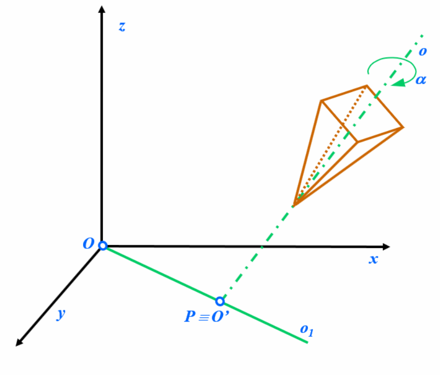
$$R_{(a,b)}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$R_{(a,b)}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A' = R_{(a,b)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zarotovaný bod A' má souřadnice $[1, 6]$.

Otočte objekt o úhel α okolo obecné osy o



Výsledná transformace $T = T_2 \cdot R_5 \cdot R_4 \cdot R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot T_1$

Nekonečno

Co se děje s bodem $A_h[2, 2, w]$, když budu měnit jenom homogenní souřadnici?

- $A[2, 2, 1]$, ... $A_k = [2, 2]$
- $A[2, 2, 1/10]$, $w = 2$ ... $A_k = [20, 20]$
- $A[2, 2, 1/100]$, $w = 1/2$ ... $A_h = [200, 200]$
- ...
- $A[2, 2, 0]$, $w = 10$ ... $A_h = [\infty, \infty]$

Dovolují popsat bod v nekonečnu?

Násobení matic

Násobení matic není komutativní (komutativita $X \cdot Y = Y \cdot X$), co to znamená?

Příklad:

- Bod $A[1,1]$ posuneme o $\vec{v}(1,0)$ a provedeme rotaci proti směru hodinových ručiček o 90°. Jaké má transformovaný bod souřadnice?
- Bod $A[1,1]$ zarotujeme proti směru hodinových ručiček o 90° a posuneme o $\vec{v}(1,0)$. Jaké má transformovaný bod souřadnice?

Hlavní výhoda?

Jakou hlavní výhodu přináší použití projektivního prostoru v počítačové grafice?

Transformace v OpenGL

Vytvoříme si matici 4x4 (transformaci) pomocí knihovny GLM (popřípadě sami).

```
// Construct identity matrix
glm::mat4 M = glm::mat4(1.0f);

M=glm::rotate(glm::mat4(1.0f),angle,glm::vec3(0, 1, 0));
M=glm::rotate(M, angle, glm::vec3(1, 0, 0));
M=glm::translate(glm::mat4(1), glm::vec3(0, 0, myView));
M=glm::scale(glm::mat4(1.0f), glm::vec3(0.5f));
```

Transformace v OpenGL

Upravíme vertex shader tak, že si uvnitř vytvoříme uniformní proměnnou, kam budeme naši matici posílat. A následně každý vrchol touto proměnnou vynásobíme. Pozor na správné násobení.

```
#version 330
layout(location=0) in vec3 vp;
uniform mat4 modelMatrix;
void main () {
   gl_Position = modelMatrix * vec4(vp,1.0);
}
```

glGetUniformLocation

Vrací hodnotu (integer) reprezentující pozici uniformní proměnné.

```
GLint glGetUniformLocation(program,  name);
//program -  id shader programu
//name - nazev promenne

//Priklad
GLint id = glGetUniformLocation(sid, "modelMatrix");
```

Nyní pošleme na uniformní proměnnou modelMatrix ve vertex shaderu matici M.

```
//Render
glUseProgram(programID);
glUniformMatrix4fv(id, 1, GL_FALSE, &M[0][0]);
//location, count, transpose, *value
```

Lokální souřadná soustava

Souřadné soustavy v OpenGL

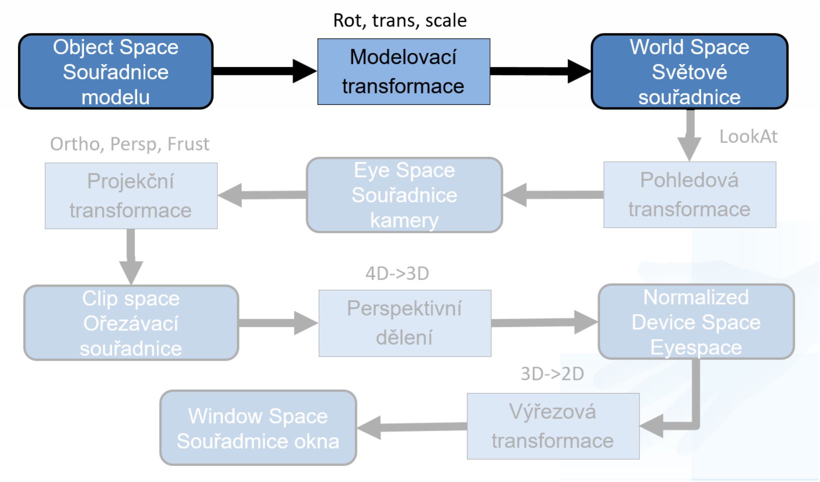
Lokální souřadná soustava - vyznačení středu souřadné soustavy.

Souřadné soustavy v OpenGL

Globální souřadná soustava - rozmístění modelů.

Globální souřadná soustava - provedení transformací.

Souřadné soustavy v OpenGL



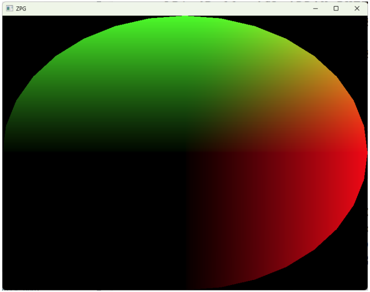
Další modely

```
//vertex buffer object (VBO)
GLuint VBO = 0;
glGenBuffers(1, &VBO); // generate the VBO
glBindBuffer(GL_ARRAY_BUFFER, VBO);
glBufferData(GL_ARRAY_BUFFER, sizeof(sphere), sphere, GL_ST

//Vertex Array Object (VAO)
GLuint VAO = 0;
glGenVertexArrays(1, &VAO); //generate the VAO
glBindVertexArray(VAO); //bind the VAO
glEnableVertexAttribArray(0); //enable vertex attributes
glEnableVertexAttribArray(1);
glBindBuffer(GL_ARRAY_BUFFER, VBO);
glVertexAttribPointer(0, 3, GL_FLOAT, GL_FALSE,
        6 * sizeof(float), (GLvoid*)0);
glVertexAttribPointer(1, 3, GL_FLOAT, GL_FALSE,
        6 * sizeof(float), (GLvoid*)(3 * sizeof(float)));
```

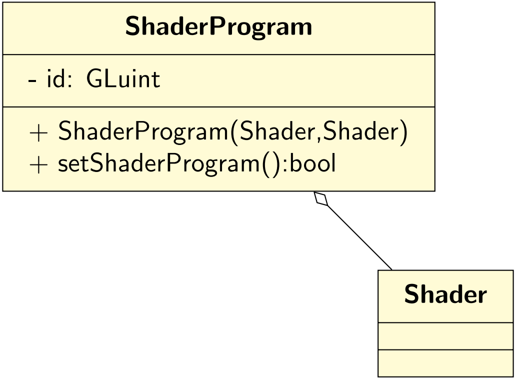
Souřadné soustavy v OpenGL

```
glEnable(GL_DEPTH_TEST);
while (!glfwWindowShouldClose(window)) {
        // clear color and depth buffer
        glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT);
        glUseProgram(shaderProgram);
        glBindVertexArray(VAO);
        // draw triangles
        glDrawArrays(GL_TRIANGLES, 0, 2880);
```

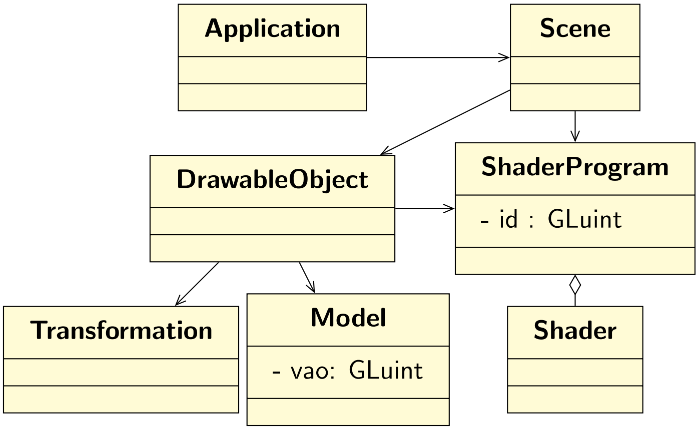


Projekt

```
while (!glfwWindowShouldClose(window)){
    glUseProgram(shaderProgram);
    glBindVertexArray(VAO);
    glDrawArrays(GL_TRIANGLES, 0, 3); //mode,first,count
}
```

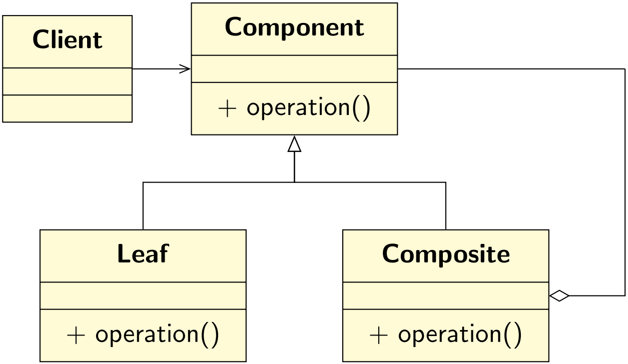


Projekt


Application
Scene
DrawableObject
ShaderProgram
- id : GLuint
Transformation
Model
- vao: GLuint
Shader

Composite Pattern

Snahou je přistupovat stejným způsobem ke složeným (kompozitní) a jednoduchým objektům. Příkladem je souborový systém, kde máme složky a jednotlivé soubory.



Dotazy?