

Kopule - souhrn vybraných článků

Michal Mackanič

2014

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Definice kopule

Uvažujme náhodné veličiny X_1 a X_2 . Předpokládejme, že známe hodnotu náhodné proměnné X_1 , a že na základě této informace máme odhadnout hodnotu náhodné proměnné X_2 . Pro zodpovězení této otázky je klíčová znalost vztahu mezi náhodnými veličinami X_1 a X_2 .

Pokud mezi oběma náhodnými veličinami neexistuje žádný vztah, tj. jedná-li se o nezávislé náhodné veličiny, pak informace o hodnotě náhodné veličiny X_1 nám neříká nic o hodnotě náhodné veličiny X_2 . Naopak, platí-li $X_1 = X_2$, pak, známe-li X_1 , známe také X_2 . Vedle těchto dvou extrémní případů, existuje také řada jiných možností, např. $X_1 \leq X_2$.

Pro hlubší analýzu budeme potřebovat nástroj pro popis závislostí dvou náhodných veličin. Každá jednotlivá náhodná veličina je popsána svou kumulativní distribuční funkcí (cdf - cumulative distribution function) definovanou jako $F_i(x) := P(X_i \leq x)$. Nicméně tyto marginální distribuční funkce nám neříkají nic o společném “chování” uvažovaných náhodných veličin. K tomu je zapotřebí tzv. sdružená distribuční funkce. V případě nezávislosti je tato funkce definována jako

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$$

Pro úplný popis X_1 a X_2 tedy potřebujeme dvě “ingredience” - marginální distribuční funkci a vyjádření závislosti uvažovaných náhodných veličin. Otázkou zůstává, zda-li je možné rozložit libovolnou sdruženou distribuční funkci na marginální distribuční funkce a funkci, která vyjadřuje jejich závislost. Dle Sklarovy věty to možné je. Řešení problému spočívá v transformaci hodnot jednotlivých náhodných veličin na kvantily a následnému vyjádření jejich “závislosti” pomocí tzv. kopula funkce¹.

Definice 1.1 (Kopule) *Kopule je vícerozměrná kumulativní distribuční funkce, jejíž jednotlivá marginální rozdělení sledují rovnoměrné rozdělení $U[0, 1]$.*

¹Pro ilustraci uvažujme akcie A a B , pro které máme dispozici vývoj cen pro určité časové období. Nejprve pro každou jednotlivou akcii odhadneme na základě pozorovaných cen její distribuční funkci. Následně s pomocí distribuční funkce transformujeme každou cenu na odpovídající kvantil a_t resp. b_t . Každému datu t tak bude přiřazen kvantilový bod (a_t, b_t) . Posledním krokem je pak odhad kopula funkce, která pokud možno co nejlépe popíše “chování” těchto bodů z hlediska pravděpodobnosti jejich realizace.

Kopule je tedy funkcí, která mapuje z d -rozměrného prostoru $[0, 1]^d$ do jedno-rozměrného prostoru $[0, 1]$, neboli $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$.

V následujícím textu budeme pro kopuli používat notaci $C(u) = C(u_1, \dots, u_d)$. Skutečnost, že kopule C je distribuční funkcí, má za následek následující.

- Protože je distribuční funkce z definice rostoucí funkcí, je kopula funkce $C(u_1, \dots, u_d)$ taktéž rostoucí v každé náhodné veličině u_i .
- Marginální rozdělení náhodné veličiny u_i lze získat dosazením $u_i = 1$ pro všechna $j \neq i$. Toto marginální rozdělení sleduje rovnoměrné rozdělení $U[0, 1]$.

$$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$$

- Pro $a_i < b_i$ musí být pravděpodobnost $P(U_1 \in [a_1, b_1], \dots, U_d \in [a_d, b_d])$ nezáporná, což vede k tzv. trojúhelníkové nerovnosti

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{d,i_d}) \geq 0,$$

kde $u_{j,1} = a_j$ a $u_{j,2} = b_j$.

Každá funkce, která splňuje výše uvedené podmínky, je kopula funkcí. Dále platí, že je-li C d -rozměrnou kopula funkcí, pak $C(1, u_1, \dots, u_{d-1})$ je $d-1$ rozměrnou kopula funkcí. Proto se řada teoretických otázek může omezit pouze na problematiku dvourozměrné kopula funkce.

Jak již bylo řečeno, hlavní myšlenkou kopula funkce je “rozložit” vícerozměrné náhodné rozdělení na marginální distribuční funkce a funkci vyjadřující závislost kvantilů jednotlivých náhodných veličin. Klíčem k tomu je tzv. kvantilová transformace, která se často používá při simulování náhodných veličin. Pro distribuční funkci F definujeme obecnou inverzní funkci jako

$$F^{\leftarrow}(y) := \inf\{x : F(x) \geq y\}$$

Tvrzení 1.1 (Inverzní kumulativní distribuční funkce) *Jestliže náhodná veličina U sleduje uniformní rozdělení $U[0, 1]$ a F je kumulativní distribuční funkcí, pak*

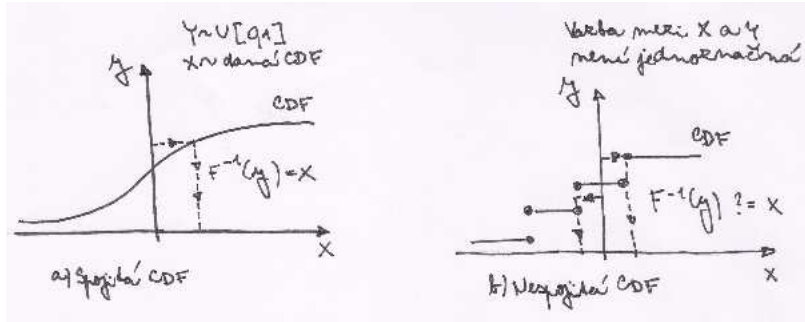
$$P(F^{\rightarrow}(U) \leq x) = F(x) \quad (1.1)$$

Obráceně, jestliže náhodná veličina Y má spojitou distribuční funkci F , pak platí

$$F(Y) \sim U[0, 1] \quad (1.2)$$

1.1.1 Sklarova věta

Libovolná distribuční funkce definovaná nad R^d v sobě implicitně zahrnuje kopula funkci. Toto tvrzení platí také naopak. Jestliže “spojíme” kopula funkci a marginální cdf, získáme vícerozměrné rozdělení. Toto tvrzení vyplývá z následující věty.



Obrázek 1.1: Inverze kumulativní distribuční funkce

Věta 1.1 (Sklarova věta) Uvažujme d -rozměrnou distribuční funkci F s marginálními distribučními funkcemi F_1, \dots, F_d . Pak existuje kopula funkce taková, že

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (1.3)$$

pro všechna x_i v $(-\infty, \infty)$, $i = 1, \dots, d$. Jestliže je F_i spojitá pro všechna $i = 1, \dots, d$, pak je C jedinečné. V opačném případě je C jedinečné pouze na $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_d)$, kde $\text{Ran}(F_i)$ označuje obor hodnot distribuční funkce F_i ².

Výše uvedené tvrzení platí i naopak. Uvažujme kopula funkci C a jednorozměrné distribuční funkce F_1, \dots, F_d . Pak F definovaná dle (1.3) je vícerozměrnou distribuční funkcí s marginálními distribučními funkcemi F_1, \dots, F_d .

S využitím vztahu $F_i \circ F_i^{\leftarrow}(y) \geq y$ získáváme

$$C(u) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)) \quad (1.4)$$

Zatímco (1.3) je zpravidla výchozím bodem pro simulaci, vztah (1.4) slouží spíše pro “oddělení” kopula funkce od vícerozměrné distribuční funkce.

1.1.2 Hustota pravděpodobnosti kopule

Dle definice je kopula funkce distribuční funkcí. Vzhledem k obtížné interpretaci kumulativní distribuční funkce se často používá hustota pravděpodobnosti (pdf - probability density function). Je však třeba zmínit, že ne všechny kopula funkce mají odpovídající hustotu pravděpodobnosti. Nicméně má-li kopula funkce diferenci požadovaného řádu, lze hustotu pravděpodobnosti vyjádřit jako

$$c(u) := \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1, \dots, \partial u_d}$$

Jestliže lze kopula funkci vyjádřenou ve tvaru (1.4) derivovat, což má za následek $F_i^{\leftarrow} = F_i^{-1}$, lze odpovídající hustotu pravděpodobnosti vyjádřit jako

$$c(u) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \cdots f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

²Např. pro hrací kostku je obor hodnot příslušné distribuční funkce definován jako $\{\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots, \frac{6}{6}\}$.

kde f označuje sdruženou hustotu pravděpodobnosti a $f_i, i = 1, \dots, d$ marginální hustotu pravděpodobnosti jednotlivých náhodných veličin.

Důkaz 1.1 *S využitím pravidla pro derivaci složené funkce (chain rule)*

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

a skutečností $F(F^{-1}(u)) = u$ a $\frac{du}{du} = 1$, lze snadno dokázat

$$\frac{dF(F^{-1}(u))}{du} = f(F^{-1}(u)) \frac{dF^{-1}(u)}{du} = 1$$

z čehož vyplývá

$$\frac{dF^{-1}(u)}{du} = \frac{1}{f(F^{-1}(u))}$$

Derivací dvourozměnné kopule funkce ve tvaru (1.4) tak získáme

$$\begin{aligned} \frac{dF(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{du_1 du_2} &= f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \frac{F_1^{-1}(u_1)}{du_1} \frac{F_2^{-1}(u_2)}{du_2} \\ &= \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) f_2(F_2^{-1}(u_2))} \end{aligned}$$

1.1.3 Podmíněné rozdělení

Uvažujme dvě uniformní náhodné veličiny U_1 a U_2 . Předpokládejme, že známe kopula funkci C a hodnotu náhodné veličiny U_1 . Cílem je odvodit podmíněné rozdělení, které lze použít pro odhad náhodné veličiny U_2 . Za předpokladu dostatečné regularity lze odvodit podmíněnou distribuční funkci.

$$\begin{aligned} P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P(U_2 \leq u_2, U \in (u_1 - \delta, u_1 + \delta])}{P(U_1 \in (u_1 - \delta, u_1 + \delta])} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + \delta, u_2) - C(u_1 - \delta, u_2)}{2\delta} = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \end{aligned}$$

Podmíněné distribuční funkce lze tedy odvodit derivací kopula funkce C dle u_1 . Odpovídající podmíněnou hustotu pravděpodobnosti lze získat následnou derivací dle u_2 .

1.1.4 Hraniční hodnoty kopule

Tvrzení 1.2 *Uvažujme náhodné veličiny X_1, \dots, X_d , jejichž závislost je definovaná kopula funkcí C . Nechť $T_i : R \rightarrow R, i = 1, \dots, d$ je striktně rostoucí funkcí. Pak je závislost náhodných veličin $T_1(X_1), \dots, T_d(X_d)$ definována toutéž kopula funkcí C .*

Jinými slovy, striktně rostoucí transformace nemění strukturu závislosti, což se na první pohled může zdát kontraintuitivní. Monotonní transformace totiž sice mění závislost mezi náhodnými veličinami, nicméně po očištění o vliv marginálních distribučních funkcí získáme shodnou strukturu závislosti definovanou kopula funkcí C .

Hoeffding a Fréchet nezávisle na sobě odvodili, že kopula funkce vždy leží v rámci určitých hraničních hodnot. Důvody lze nalézt při zkoumání extrémních případů závislosti. Uvažujme dvě náhodné veličiny U_1 a U_2 . Jestliže $U_1 = U_2$, pak hovoříme o tzv. komonotonických (comonotonic) náhodných veličinách a jejich kopula funkce je dána vztahem

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_1 \leq u_2) = \min(u_1, u_2) \quad (1.5)$$

Tento typ kopule získáme vždy, když $X_2 = T(X_1)$, kde T je monotonní transformace. V případě, kdy jsou U_1 a U_2 nezávislé, je kopula funkce rovna

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 \quad (1.6)$$

Dalším extrémní situací je $U_2 = 1 - U_1$, kdy hovoříme o tzv. kontramonotonických (countermonotonic) náhodných veličinách. Kopula funkce pro $1 - u_2 < u_1$ je

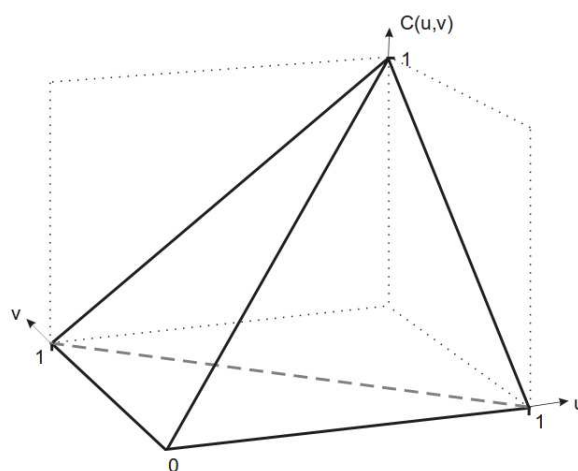
$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) = P(U_1 \leq u_1, 1 - U_1 \leq u_2) \\ &= P(U_1 \leq u_1, U_1 \geq 1 - u_2) = P(1 - u_2 \leq U_1 \leq u_1) \\ &= u_1 - (1 - u_2) = u_1 + u_2 - 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Výše uvedené lze rozšířit na vícerozměrné rozdělení. Ačkoliv komonotonická kopule existuje pro libovolnou dimenzi d , kontramonotonická kopule existuje pouze pro $d = 2^3$, nicméně hraniční hodnoty jsou platné i pro vyšší dimenze.

Věta 1.2 (Fréchet-Hoeffdingovy hraniční hodnoty) *Uvažujme kopula funkci $C(u) = C(u_1, \dots, u_d)$. Pak platí*

$$\max \left(\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right) \leq C(u) \leq \min(u_1, \dots, u_d)$$

³Uvažujme náhodné veličiny X_1 , X_2 a X_3 . Jako kontramonotonické zvolme páry (X_1, X_2) a (X_1, X_3) . Tato volba představuje omezení pro závislost mezi X_2 a X_3 . Jestliže se X_1 sníží, jak X_2 tak X_3 se musí zvýšit a tudíž nemohou být kontramonotonické.



Obrázek 1.2: Fréchet-Hoeffdingovy hraniční hodnoty - Každá kopula funkce leží uvnitř zobrazené pyramidy. Povrch daný spodní a zadní stěnou pyramidy (dolní hranice) představuje kontramonotonistickou kopula funkcí $C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$. Povrch daný přední stěnou pyramidy (horní hranice) pak představuje monotonistickou kopula funkcí $C(u, v) = \min(u, v)$.

Kapitola 2

Míra závislosti

2.1 Korelace

Korelace $\rho(X_1, X_2)$ mezi náhodnými veličinami X_1 a X_2 je definována jako

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_2)}}$$

kde

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])]$$

Korelace vyjadřuje míru lineární závislosti a nabývá hodnot z intervalu $[-1, 1]$. Jestliže jsou X_1 a X_2 nezávislé, pak $\rho(X_1, X_2) = 0$. Opačné tvrzení však neplatí - pokud je korelace rovna nula, neznamená to, že jsou X_1 a X_2 nezávislé. Pokud $|\rho(X_1, X_2)| = 1$ jsou X_1 a X_2 dokonale lineárně korelované, což znamená, že $X_2 = \alpha + \beta X_1$ téměř jistě pro některé $\alpha \in R$ a $\beta \neq 0$ ¹. Pro $\beta_1, \beta_2 > 0$ navíc platí

$$\rho(\alpha_1 + \beta_1 X_1, \alpha_2 + \beta_2 X_2) = \rho(X_1, X_2)$$

což znamená, že korelace je invariantní pro striktně rostoucí lineární transformaci. Nicméně je třeba zdůraznit, že korelace není invariantní pro nelineární striktně rostoucí transformaci $T: R \rightarrow R$. Pro dvě náhodné veličiny tedy obecně platí $\rho(T(X_1), T(X_2)) \neq \rho(X_1, X_2)$.

Omyl 2.1 *Sdružená distribuční funkce je jednoznačně definována pomocí marginálních distribučních funkcí a párových korelací.*

Toto tvrzení je platné pouze v případě vícerozměrných eliptických rozdělení. Kdyby toto tvrzení bylo platné obecně, nebylo by zapotřebí konceptu kopula funkce.

Příklad 2.1 *Uvažujme dvě náhodné veličiny představující zisk / ztrátu dvou portfolií. Předpokládejme, že obě rizika sledují standardní normální rozdělení a že jejich korelace je rovna nule. Zkonstruujme dva náhodné vektory v souladu s těmito předpoklady.*

¹V případě $\beta > 0$ hovoříme o pozitivní lineární korelaci. V případě $\beta < 0$ hovoříme o negativní lineární korelaci.

Uvažujme dvě modelové situace. Model 1 je standardní dvourozměrné normální rozdělení $X \sim N_2(0, I_2)$. V modelu 2 nezávislá náhodná veličina V s pravděpodobnostní funkcí $P(V = 1) = P(V = -1) = \frac{1}{2}$ použita při konstrukci nových náhodných veličin $(Y_1, Y_2) = (X_1, VX_1)$, kde X_1 je převzato z modelu 1. Marginální distribuční funkce náhodných veličin Y_1 a Y_2 sledují taktéž standardní normální rozdělení s nulovou korelací. Kopula funkce modelu 2 je

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \max(u_1 + u_2 - 1, 0) + \frac{1}{2} \min(u_1, u_2)$$

což je mix dvourozměrných kopula funkcí s Fréchetovou hraniční hodnotou. Náhodné veličiny Y_1 a Y_2 tedy nejsou nezávislé.

Omyl 2.2 Pro libovolné jednorozměrné distribuční funkce F_1 a F_2 a libovolnou korelaci ρ z intervalu $[-1, 1]$ je vždy možné zkonstruovat sdruženou distribuční funkci F s marginálními distribučními funkcemi F_1 a F_2 a korelací ρ .

Toto tvrzení je opět platné pouze pro eliptické pravděpodobnostní rozdělení. Tzv. dosažitelné korelace mohou tvořit podmnožinu intervalu $[-1, 1]$.

Tvrzení 2.1 Jestliže (X_1, X_2) sleduje sdruženou distribuční funkci F a marginální distribuční funkce F_1 a F_2 , pak je kovariance X_1 a X_2 , pokud je konečná, dána vztahem

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)) dx_1 dx_2 \quad (2.1)$$

Důkaz 2.1 Nechť (X_1, X_2) sleduje sdruženou distribuční funkci F a nechť $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ je její nezávislou kopií². Platí

$$\begin{aligned} E[(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2)] &= E[X_1 X_2 - X_1 \tilde{X}_2 - \tilde{X}_1 X_2 + \tilde{X}_1 \tilde{X}_2] \\ &= E[X_1 X_2] - E[X_1 \tilde{X}_2] + E[\tilde{X}_1 \tilde{X}_2] - E[\tilde{X}_1 X_2] \\ &= E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] + E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= 2\text{cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Nyní použijme identitu, která říká, že pro libovolné $a \in R$ a $b \in R$ platí $(a - b) = \int_{-\infty}^{\infty} (I_{\{b \leq x\}} - I_{\{a \leq x\}}) dx$, a aplikujeme ji na $(X_1 \tilde{X}_2)$ a $(X_2 - \tilde{X}_2)$. Získáme

$$\begin{aligned} 2\text{cov}(X_1, X_2) &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (I_{\{\tilde{X}_1 \leq x_1\}} - I_{\{X_1 \leq x_1\}}) (I_{\{\tilde{X}_2 \leq x_2\}} - I_{\{X_2 \leq x_2\}}) dx_1 dx_2 \right] \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) - P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2)) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Věta 2.1 (Dosažitelné korelace) Nechť je (X_1, X_2) náhodný vektor s marginálními distribučními funkcemi F_1 a F_2 , které mají nenulový konečný rozptyl³, a blíže nespecifikovanou sdruženou distribuční funkcí. Pak platí následující tvrzení

²Jedná se tedy o druhý pár, který sleduje sdruženou distribuční funkci F a který je nezávislý na (X_1, X_2) .

³Tj. předpokládáme, že $0 < D(X_1) < \infty$ a $0 < D(X_2) < \infty$.

1. Dosažitelné korelace formují uzavřený interval $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$, kde $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$.
2. Minimální korelace ρ_{\min} je dosažena pouze v případě kontramonotonicity X_1 a X_2 . Maximální korelace ρ_{\max} je dosaženo pouze jsou-li X_1 a X_2 komonotonické.
3. Krajních hodnot $\rho_{\min} = -1$ a $\rho_{\max} = 1$ lze dosáhnout pouze tehdy a jen tehdy jsou-li X_1 a $-X_2$ téhož typu⁴.

Důkaz 2.2 Začneme tvrzením (2) a identitou (2.1). Připomeňme si, že dvou-rozměrná kopula funkce je omezena hraničními podmínkami

$$\max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0) \leq F(x_1, x_2) \leq \min(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Pokud jsou F_1 a F_2 dané, je integrand v (2.1) maximalizován pro hraniční hodnotu $\min(F_1(x_1), F_2(x_2))$, tj. v případě komonotonické kopula funkce. Analogicky je integrand minimalizován v případě kontramonotonické kopula funkce $\max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0)$. Pro maximálně dosažitelnou korelaci platí $\rho_{\max} \geq 0$. Nicméně $\rho_{\max} = 0$ můžeme vyloučit, protože to by implikovalo $\min(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ pro všechna x_1 a x_2 . To by však vyžadovalo, aby F_1 a F_2 byly degenerované distribuční funkce s pravděpodobností koncentrovanou v jednu bodě. To je však vyloučeno předpokladem nenulového rozptylu. Podobnými argumenty lze prokázat $\rho < 0$. Jestliže pomocí $W(F_1, F_2)$ resp. $M(F_1, F_2)$ označíme Fréchetovu dolní resp. horní hraniční hodnotu, pak kopula funkce $\lambda W(F_1, F_2) + (1 - \lambda)M(F_1, F_2)$ pro $0 \leq \lambda \leq 1$ implikuje korelaci $\lambda\rho_{\min} + (1 - \lambda)\rho_{\max}$. Pro libovolné $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ tak získáváme $\lambda = \frac{\rho_{\max} - \rho}{\rho_{\max} - \rho_{\min}}$.

Tvrzení (3) je zřejmé, protože $\rho_{\min} = -1$ popř. $\rho_{\max} = 1$ pouze tehdy a jen tehdy je-li mezi X_1 a X_2 téměř jistě nelineární vztah.

Příklad 2.2 (Dosažitelná korelace pro lognormální náhodné veličiny)

Předpokládejme, že $\ln(X_1) \sim N(0, 1)$ a $\ln(X_2) \sim N(0, \sigma^2)$. Pro $\sigma \neq 1$ nejsou X_1 a X_2 shodného typu (ačkoliv $\ln(X_1)$ a $\ln(X_2)$ jsou), a proto dle bodu (3) výše uvedené věty platí $\rho_{\max} < 1$. Náhodné veličiny X_1 a $-X_2$ taktéž nejsou stejného typu, a proto opět platí $\rho_{\min} > -1$.

Definujme $Z \sim N(0, 1)$ a všimněme si, že pokud jsou X_1 a X_2 komonotické, pak $(X_1, X_2) =^d (e^Z, e^{\sigma Z})$. Je zřejmé, že $\rho_{\max} = \rho(e^Z, e^{\sigma Z})$. Analogicky lze dovést $\rho_{\min} = \rho(e^Z, e^{-\sigma Z})$. Analytickým řešením těchto dvou vztahů lze odvodit

$$\rho_{\min} = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{(e - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}}, \quad \rho_{\max} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{(e - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}}$$

Výše uvedený text lze z praktického hlediska shrnout do konstatování, že koncept korelace je bezobsažný, pokud není aplikován v kontextu řádně specifikovaného spojitého modelu.

⁴Dvě náhodné veličiny V a W jsou stejného typu, jestliže existují konstanty $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$ takové, že $V = aW + b$. Jinými slovy pravděpodobnostní rozdělení stejného typu lze získat jedno z druhého pomocí lokace a transformací měřítka.

2.2 Pořadová korelace

Pořadová korelace je měřítko závislosti, které je závislé pouze na dvourozměrné kopula funkci a nikoliv na marginálních distribučních funkcích. Připomeňme, že lineární korelace je závislá jak na kopula funkci, tak na marginálních distribučních funkcích. V praxi jsou jako měřítko pořadové korelace používány Kendallova a Spearmanova korelace.

2.2.1 Kendallova korelace

Kendallovu pořadovou korelaci je možné chápat jako měřítko shody pro dvourozměrné náhodné vektory. Dva body v R^2 označené jako (x_1, x_2) a $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ jsou ve shodě, jestliže $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$. Uvažujme dva náhodné vektory (X_1, X_2) a $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ z téhož pravděpodobnostního rozdělení. Jestliže má X_2 tendenci růst s X_1 , pak očekáváme, že četnost shody $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$ bude relativně vyšší než neshody $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$. Analogické tvrzení platí také naopak. Tato myšlenka stojí za Kendallovou pořadovou korelací, která je definována jako rozdíl odpovídajících pravděpodobností, tj.

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0\right) \quad (2.2)$$

nebo-li

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = E\left[\text{sign}\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2)\right)\right]$$

kde $\text{sign}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\text{sign}(x) = 0$ pro $x = 0$ a $\text{sign}(x) = 1$ pro $x > 0$.

Související funkce `CalcKendallTau.m` je k dispozici v adresáři `libs`.

2.2.2 Spearmanova korelace

Definice 2.1 Pro dvě náhodné veličiny X_1 a X_2 s marginálními distribučními funkcemi F_1 a F_2 je Spearmanova korelace definována jako

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2))$$

2.2.3 Vlastnosti pořadové korelace

Jak Kendallova tak Spearmanova korelace jsou symetrická měřítka závislosti, které nabývají hodnot z intervalu $[-1, 1]$. Pro nezávislé náhodné veličiny nabývají nulové hodnoty, nicméně, podobně jako u lineární korelace, nulová pořadová korelace neimplikuje nezávislé náhodné veličiny. Lze také dokázat, že pořadová korelace nabývá hodnoty 1 pro komonotonické náhodné veličiny a hodnoty -1 pro kontramonotonické náhodné veličiny.

Následující odstavec tvrdí, že pro spojitě marginální distribuční funkce, obě pořadové korelace závisí pouze na kopule funkci, a proto sdílejí její vlastnost invariance pro monotónně rostoucí transformaci.

Tvrzení 2.2 Předpokládejme, že X_1 a X_2 mají spojitě marginální distribuce a

jedinečnou kopula funkci C . Pořadové korelace jsou pak dány

$$\begin{aligned}\rho_\tau(X_1, X_2) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \\ \rho_S(X_1, X_2) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2\end{aligned}\quad (2.3)$$

Důkaz 2.3 Z (2.2) lze snadno odvodit, že Kendallovu korelaci lze také vyjádřit jako

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 2P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - 1$$

a ze vzájemné zaměnitelnosti párů (X_1, X_2) a $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ vyplývá

$$\begin{aligned}\rho_\tau(X_1, X_2) &= 4P(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2) - 1 \\ &= 4E(P(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2 | \tilde{X}_1, \tilde{X}_2)) - 1 \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) dF(x_1, x_2) - 1\end{aligned}\quad (2.4)$$

Protože X_1 a X_2 mají spojité marginální distribuční funkce, platí

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) dC(F_1(x_1), F_2(x_2)) - 1$$

z čehož po dosazení $u_1 := F_1(x_1)$ a $u_2 := F_2(x_2)$ vyplývá (2.3).

Pro odvození (2.4) je klíčové si uvědomit, že $F_i(X_i)$ sleduje uniformní rozdělení nad intervalem $[0, 1]$ s rozptylem $\frac{1}{12}$. To má za následek $\rho_S(X_1, X_2) = 12\text{cov}(F_1(X_1), F_2(X_2))$. Vztah (2.4) pak získáme přímou aplikací (2.1).

Omyl (1), který jsme zmiňovali v souvislosti s lineární korelací, je relevantní také pro pořadovou korelaci - marginální distribuční funkce a pořadová korelace plně nedefinují vícerozměrné pravděpodobnostní rozdělení. Možnost omylu (2) však v případě pořadové korelace odpadá - pro libovolné marginální distribuční funkce je možné definovat dvourozměrné pravděpodobnostní rozdělení, které má požadovanou pořadovou korelaci z intervalu $[-1, 1]$. Jedním ze způsobů jak toho docílit je výše představená kombinace kontramonotonické a komonotonické kopula funkce

$$F(x_1, x_2) = \lambda W(F_1(x_1), F_2(x_2)) + (1 - \lambda)M(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Náhodný pár (X_1, X_2) s touto kopula funkcí má pořadovou korelaci

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 1 - 2\lambda$$

2.2.4 Koeficienty závislosti v chvostech

Koeficienty závislosti v chvostech měří, jak jejich název napovídá, míru závislosti v chvostech dvourozměrného pravděpodobnostního rozdělení. Koeficienty, které si popíšeme v následujícím textu, jsou definovány jako limitní podmíněné pravděpodobnosti v chvostu definovaného extrémním kvantilem.

Definice 2.2 *Nechť X_1 a X_2 jsou náhodné veličiny s marginálními distribučními funkcemi F_1 a F_2 . Koeficient závislosti v horním chvostu je definován*

$$\lambda_u := \lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(q) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(q))$$

za předpokladu existence limitu $\lambda_u \in [0, 1]$. Je-li $\lambda_u \in (0, 1]$, říkáme o X_1 a X_2 , že vykazují závislost z horním chvostu; $\lambda_u = 0$ znamená, že X_1 a X_2 jsou v horním chvostu asymptoticky nezávislé. Analogicky koeficient závislosti v dolním chvostu je definován jako

$$\lambda_l := \lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q))$$

za předpokladu existence $\lambda_l \in [0, 1]$.

Pokud jsou distribuční funkce F_1 a F_2 spojitě, lze λ_u a λ_l vyjádřit pomocí kopula funkce jako

$$\lambda_l = \lambda_{q \rightarrow 0^+} \frac{P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q), X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q))}{P(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q))} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}$$

resp. jako

$$\lambda_u = \lambda_{q \rightarrow 1^-} \frac{P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(q), X_1 > F_1^{\leftarrow}(q))}{P(X_1 > F_1^{\leftarrow}(q))} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\hat{C}(1-q, 1-q)}{1-q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\hat{C}(q, q)}{q}$$

kde \hat{C} je tzv. kopula funkce přežití (survival copula) definovaná jako

$$\hat{C}(1-u_1, 1-u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$$

Pro radiálně symetrické kopula funkce platí $\lambda_l = \lambda_u$, protože v jejich případě $C = \hat{C}$.

Příklad 2.3 (Gumbelova kopulace funkce) *Gumbelova kopulace funkce je definována jako $C_\theta^{Gu} = e^{-((- \ln(u_1))^\theta + (- \ln(u_2))^\theta)^{1/\theta}}$, $1 \leq \theta < \infty$. Koeficient závislosti v horním chvostu je tedy dán vztahem*

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\hat{C}_\theta^{Gu}(1-q, 1-q)}{1-q} = 2 - \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{C_\theta^{Gu}(q, q) - 1}{q - 1}$$

S využitím L'Hospitalova pravidla a skutečnosti $C_\theta^{Gu}(u, u) = u^{2^{1/\theta}}$ lze dovést

$$\lambda_u = 2 - \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{dC_\theta^{Gu}(q, q)}{dq} = 2 - 2^{1/\theta}$$

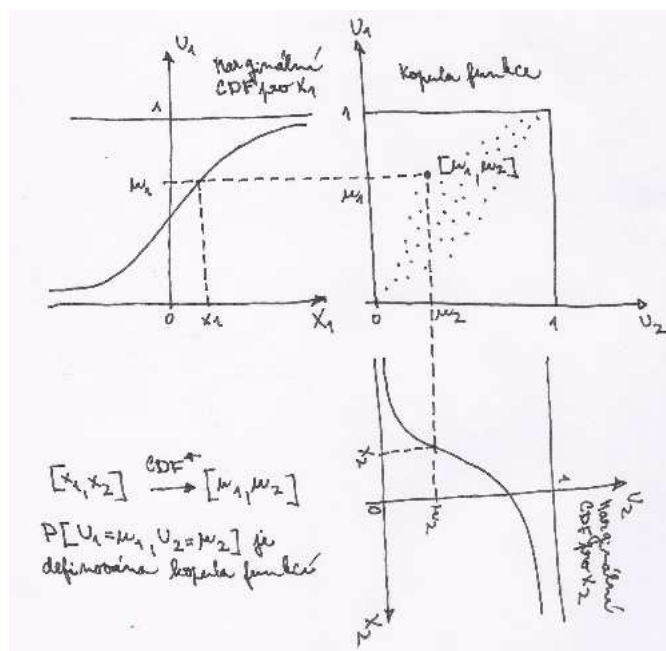
Pro $\theta > 1$ tedy Gumbelova kopula funkce vykazuje závislost v horním chvostu. Síla této závislosti se limitně blíží 1 s tím, jak $\theta \rightarrow \infty$. To v souladu s intuicí, protože pro $\theta \rightarrow \infty$ se Gumbelova kopula funkce stává komonotonickou kopula funkcí.

Kód pro výpočet závislosti v chvostech dvourozměrné kopula funkce je k dispozici v adresáři *Copulas* ve funkci *CopulaTailDependence*.

Kapitola 3

Odhad kopula funkce

Koncept kopule zahrnuje několik podkladových funkcí - marginální distribuční funkce jednotlivých náhodných veličin a kopula funkci, která popisuje závislost jejich kvantilů. Protože volba marginální funkce má skrze její implikované kvantily vliv na volbu kopula funkce, měly by se teoreticky obě odhadovat společně. To je však v praxi poměrně obtížné, a proto odhad zpravidla probíhá ve dvou krocích - v prvním kroku se odhadnou marginální distribuční funkce a ve druhém kroku se hledá kopula funkce, která nejlépe odpovídá kvantilům, které byly vypočteny na základě jednotlivých distribučních funkcí.



Obrázek 3.1: Koncept kopula funkce

3.1 Marginální distribuční funkce

Prvním krokem je odhad marginálních distribučních funkcí, z nichž následně odvodíme kvantily pro jednotlivá pozorování. Marginální distribuční funkce je možné odhadnout několika různými způsoby. Mezi nejběžnější patří následující.

- Nejjednodušším způsobem je aproximace pomocí empirické distribuční funkce. Nevýhodou tohoto přístupu je, že (a) odhadnutá distribuční funkce je nespojitá, což představuje problém při její inverzi a (b) z důvodu nedostatečného počtu extrémních pozorování nemusí správně odhadovat odlehlé kvantily.
- Další neparametrický způsob odhadu distribuční funkce spočívá ve využití jádrového vyhlazení (kernel smoothing) empirických dat. Tento přístup je tedy rozšířením předchozího. Distribuční funkce je, zjednodušeně řečeno, v jednotlivých bodech odhadu aproximována pomocí váženého průměru jednotlivých empirických kvantilů. Výhodou oproti předchozímu přístupu je hladká distribuční funkce, nicméně problém s odlehlými kvantily zůstává.
- Právě z důvodu problému s odlehlými kvantily je preferován parametrický odhad. V tomto případě se zvolí konkrétní pravděpodobnostní rozdělení, jehož parametry se následně odhadnou na základě empirických dat. Výhodou je hladká distribuční funkce, pro kterou máme zpravidla k dispozici funkční předpis. Na druhou stranu právě z důvodu volby pravděpodobnostního rozdělení zahrnuje tento postup určitou míru subjektivity.

Než se zaměříme na jednotlivé způsoby odhadu distribuční funkce, je třeba zdůraznit, že volba marginální distribuční funkce má dopad na výpočet hodnoty kvantilů a tím pádem také na následný odhad kopula funkce. Nevhodný způsob konstrukce marginální distribuční funkce tak může mít fatální důsledky.

3.1.1 Empirická distribuční funkce

Předpokládejme, že máme k dispozici určitý počet pozorovaných hodnot z realizace náhodné veličiny jako je např. logaritmická změna ceny konkrétní akcie obchodované na burze v průběhu určitého období.

Prvním krokem při konstrukci empirické distribuční funkce je rozdělení reálné osy (tj. v našem případě možného cenového rozpětí) na několik disjunktních intervalů. Jejich počet závisí na počtu pozorování, která máme k dispozici - čím více pozorování, tím více může být těchto intervalů. Každé pozorování přiřadíme s ohledem na jeho hodnotu právě jednomu z těchto intervalů.

Po té, co máme všechna pozorování přiřazena, spočítáme jejich relativní četnost pro jednotlivé intervalech. Délka intervalů nemusí být shodná - v ideálním případě by měla být nastavena tak, aby každý z nich obsahoval přibližně stejný počet pozorování. Tím omezíme velikost "schodů" empirické distribuční funkce při přechodu z jednoho intervalu do druhého.

Posledním krokem je postupné načítání relativních četností přes jednotlivé intervaly, čímž získáme empirickou distribuční funkci. Tato funkce je nespojitá, tj. vykazuje "schody" při přechodu z jednoho intervalu do druhého. Ačkoliv lze velikost těchto "schodů" omezit navýšením počtu pozorování (a s tím souvisejícím větším počtem možných intervalů) popř. vhodnou volbou intervalů

(viz. výše), zcela zbavit se jich nelze. Nespojitosť empirické distribuční funkce znamená, že neexistuje její inverzní funkce, což je třeba zohlednit při případné simulaci.

Je zřejmé, že kvalita empirické distribuční funkce je silně závislá na počtu pozorování. To platí zejména pro odlehle kvantily. Jestliže máme např. k dispozici 100 pozorování, nemůžeme na základě empirické distribuční funkce vznášet závěry ohledně kvantilu 0.1% a 99.9%. A právě tyto kvantily jsou hlavním předmětem zájmu při řízení finančních rizik, což snižuje použitelnost tohoto přístupu v praxi.

3.1.2 Jádrové vyhlazení

Popis metody

Jádrové vyhlazení je statistická technika pro odhad reálné funkce $f(X)$, $X \in R^d$ na základě empirických dat v případech, kdy není znám funkční předpis $f(x)$. Odhadovaná funkce je hladká, přičemž stupeň “vyhlazení” je dán jediným parametrem.

Nechť $K_{h_\lambda}(X_0, X)$ je jádro definované jako

$$K_{h_\lambda}(X_0, X) = D \left(\frac{\|X - X_0\|}{h_\lambda(X_0)} \right)$$

kde $X, X_0 \in R^d$, $h_\lambda(X_0)$ je parametr vyhlazení a $D(t)$ je kladná reálná funkce, jejíž hodnota klesá s rostoucím $\|X - X_0\|$, tj. vzdáleností mezi body X a X_0 . Nechť $\hat{Y}(X) : R^d \rightarrow R$ je spojitou funkcí proměnné X . Pak pro libovolné $X_0 \in R^d$ je Nadaraya-Watsonův vážený průměr založený na jádře definován jako

$$\hat{Y}(X_0) = \frac{\sum_{i=1}^N K_{h_\lambda}(X_0, X_i) Y(X_i)}{\sum_{i=1}^N K_{h_\lambda}(X_0, X_i)}$$

kde N je počet pozorování a $Y(X_i)$ je hodnota pozorování v bodě X_i .

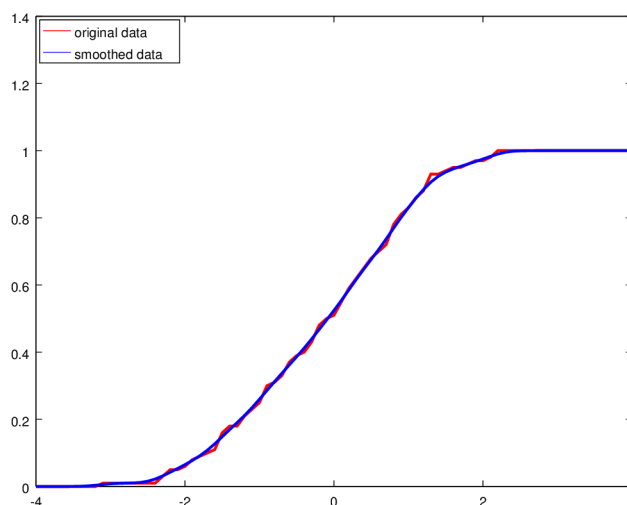
Existuje řada jader, nicméně nejčastěji používaným je Gausovo jádro. To je definováno jako

$$K_{h_\lambda}(X_0, X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h^2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\|X - X_0\|}{h} \right)^2}$$

kde parametr vyhlazení je zpravidla zvolen jako $h = 1.06\sigma_Y N^{-\frac{1}{5}}$ s σ_Y představující směrodatnou odchylku hodnot pozorování $Y(X_i)$.

Aplikace

Po té, co je na základě pozorování zkonstruována empirická distribuční funkce, lze na tuto funkci aplikovat jádrové vyhlazení. Výhodou jádrového vyhlazení je, že lze empirickou distribuční funkci tabularizovat na libovolně husté stupnici, čímž lze zásadním způsobem eliminovat problém “schodů”. Výsledná tabulka se následně používá pro inverzi distribuční funkce. Funkce *KernelSmoothing.m* jádrové vyhlazení je k dispozici v adresáři *libs*.



Obrázek 3.2: Vyhlazená empirická distribuční funkce

3.1.3 Volba pravděpodobnostního rozdělení

Ve finální teorii se velmi často používá vybraná rodina pravděpodobnostních rozdělení pro popis chování určitých finančních veličin. Nejpopulárnější je normální rozdělení, které se používá pro popis logaritmických změn cen akcií a měnových kurzů nebo absolutních změn úrokových sazeb a spreadů. Namísto normálního rozdělení se často používá také studentovo rozdělení, které je do určité míry schopné modelovat tlusté chvosty. Společnou nevýhodou normálního a studentova rozdělení je jejich symetrie kolem střední hodnoty, která není pro finanční data příliš typická.

Vedle těchto běžných rozdělení se používá také řada exotičtějších rozdělení. Jako příklad uvedme variance-gamma rozdělení, které vedle tlustých konců modeluje také skokové změny (např. náhlý propad cen), a proto se používá především pro modelování cen akcií. Dalším často používaným je také GEV (generalized extreme value) pravděpodobnostní rozdělení, které řeší problém tlustých chvostů a symetrie pravděpodobnostního rozdělení (avšak není schopné modelovat případné skokové změny ve finančních datech).

Prvním a zásadním krokem je tedy, s ohledem na charakter modelované finanční veličiny, vybrat vhodné pravděpodobnostní rozdělení. Druhým krokem je odhad parametrů zvoleného pravděpodobnostního rozdělení na datech, které máme k dispozici. Vždy je vhodné alespoň vizuálně porovnat odhadnuté pravděpodobnostní rozdělení s původními daty.

Normální rozdělení

Odhad parametrů v případě normálního rozdělení je triviální - stačí spočítat střední hodnotu μ resp. směrodatnou odchylku σ z dat dané finanční veličiny jako

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

resp.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N - 1}}$$

kde N představuje počet pozorování, která máme k dispozici.

Studentovo rozdělení

V případě studentova rozdělení je třeba odhadnout také počet stupňů volnosti. Navíc rozptyl je funkcí počtu stupňů volnosti, což odhad parametrů poněkud komplikuje. Na druhou stranu tento parametr umožňuje lepší podchycení případných tlustých chvostů, které jsou typické pro finanční data.

Uvažujme náhodnou veličinu X , pro kterou budeme odhadovat parametry studentova rozdělení. Narozdíl od normálního rozdělení se parametry studentova rozdělení odhadují iterativně. Před samotnou iterací je však třeba nejprve vypočítat počáteční odhad střední hodnoty $\mu_{ini} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$ a počáteční odhad rozptylu $\sigma_{ini}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^2}{N-1}$, kde x_i představuje hodnotu i -tého pozorování náhodné veličiny X a N celkový počet pozorování. Dále je třeba arbitrárně stanovit počáteční odhad pro počet stupňů volnosti ν_{ini} . Výpočet parametrů studentova rozdělení pak probíhá podle následujících kroků.

1. Předpokládejme, že pro t -tou iteraci je stanoven počet stupňů volnosti $\nu(t)$ - $\nu(1)$ je rovno počátečnímu odhadu ν_{ini} ; pro $t > 1$ je $\nu(t)$ výstupem předchozí iterace.
2. Krok E1

- (a) Vypočteme tzv. Mahalanobisovu vzdálenost pozorování x_i od μ vzhledem k rozptylu $\Psi(t)$ jako

$$\delta_i(t) = \frac{(x_i - \mu(t))^2}{\Psi(t)}$$

kde $\mu(1) = \mu_{ini}$ a $\Psi(1) = \sigma_{ini}^2$; pro $t > 1$ jsou $\mu(t)$ a $\Psi(t)$ výstupem předešlé iterace.

- (b) Mahalanobisova vzdálenost $\delta_i(t)$ je vstupem pro následný výpočet vah.

$$w_i(t) = \frac{\nu(t) + 1}{\nu(t) + \delta_i(t)}$$

- (c) S pomocí vah $w_i(t)$ vypočteme níže uvedené dostatečné statistiky.

$$S_\tau(t) = \sum_{i=1}^N w_i(t)$$

$$S_{\tau X}(t) = \sum_{i=1}^N w_i(t) x_i$$

$$S_{\tau X X}(t) = \sum_{i=1}^N w_i(t) x_i^2$$

3. Krok CM1

- (a) Zaktualizujeme odhad střední hodnoty.

$$\mu(t) = \frac{S_{\tau X}(t)}{S_{\tau}(t)}$$

- (b) Zaktualizujeme odhad rozptylu.

$$\Psi(t) = \frac{1}{N} \left(S_{\tau XX}(t+1) - \frac{1}{S_{\tau(t)} S_{\tau X}^2} \right)$$

4. Krok E2 - Přepočteme váhy
- $w_i(t)$
- a dostatečné statistiky
- $S_{\tau}(t)$
- ,
- $S_{\tau X}(t)$
- ,
- $S_{\tau XX}(t)$
- s ohledem na zaktualizovanou střední hodnotu
- $\mu(t)$
- a rozptyl
- $\Psi(t)$
- (viz. krok E1).

5. Krok CM2

- (a) Zaktualizujeme odhad počtu stupňů volnosti řešením rovnice

$$-\phi\left(\frac{v}{2}\right) + \ln\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\ln(w_i(t)) - w_i(t) \right)$$

pro v , kde $\phi(x) = \frac{d \ln(\Gamma(x))}{dx}$ je tzv. digamma funkce.

- (b) Přepočteme váhy s ohledem na zaktualizovaný odhad počtu stupňů volnosti.

$$w_i = \frac{v(t) + 1}{v(t) + \delta_i(t)}$$

6. Pokud změny parametrů
- $\mu(t)$
- ,
- $\nu(t)$
- a
- $\Psi(t)$
- oproti iteraci
- $t-1$
- překračují námi stanovené meze, pokračuje v iteraci přesunem na bod (1). V opačném případě považujeme odhad parametrů za dostatečně přesný a iteraci ukončíme.

Funkce *StudentFit.m* pro odhad parametrů studentova rozdělení je k dispozici v adresáři *libs*.

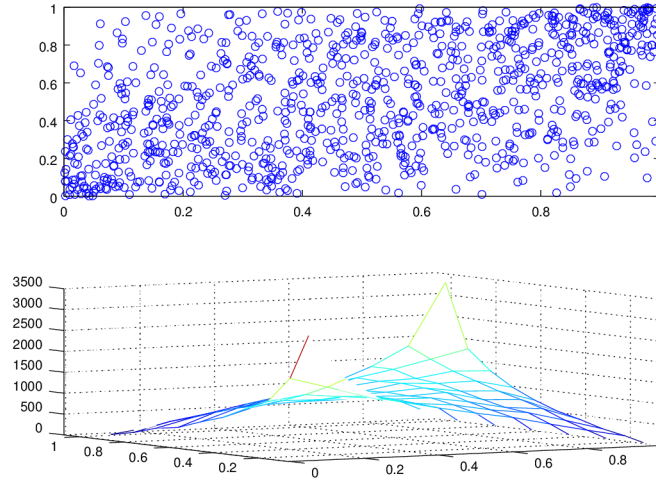
3.2 Kopula funkce

Po odhadu marginálních distribučních funkcí a převedení hodnot jednotlivých pozorování na kvantily je možné přistoupit k odhadu kopula funkce.

Stejně jako v případě marginální distribuční funkce je možné kopula funkci odhadnout empiricky a popř. tento empirický odhad dále jádrově vyhladit. Nicméně v praxi má odhad nejčastěji podobu odhadu parametrů konkrétní kopula funkce. V následujícím textu se budeme zabývat dvourozměrnou Gausovou, studentovou, Claytonovou, Frankovou a Gumbelovou kopula funkcí. To, která konkrétní kopula funkce je v daném případě nejvhodnější, se často posuzuje vizuálně.

3.2.1 Gausova kopula funkce

Gausova kopule je pro svou relativní jednoduchost nejčastěji používanou kopula funkcí.



Obrázek 3.3: Dvourozměrná Gausova kopula funkce s korelačním parametrem $\rho = 0.5$

Odhad parametrů

Gausova kopula je plně definována korelační maticí. Tu lze odhadnout pomocí Kendall pořadové korelace, kterou lze převést na klasickou korelaci ρ pomocí vztahu

$$\rho(X) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Z jednotlivých párových korelací pak lze sestavit kompletní korelační matici. Takto zkonstruovaná matice nemusí být nutně pozitivně semidefinitní (i když tomu tak v praxi obvykle bývá), a proto je vhodné provést kontrolu a matici případně upravit.

Související funkce *CalcKendallTau.m* je k dispozici v adresáři *libs*.

Funkce *FitGaussianCopula.m* pro odhad parametrů Gausovy kopula funkce je k dispozici v adresáři *Copulas*.

Simulace

Předpokládejme, že máme k dispozici korelační matici Σ , kterou jsme odhadli v předchozím kroku.

1. Pomocí Choleskyho dekompozice provedeme rozklad kovarianční matice na $\Sigma = \Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}$.
2. Vygenerujeme vektor $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)' \sim N(0, \Sigma)$ nezávislých standardních normálních veličin.
3. Vypočteme vektor $X = \Sigma^{1/2}Z$ korelovaných standardních normálních veličin, kde $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$.

4. Vypočteme $U = (\Phi(X_1), \Phi(X_2), \dots, \Phi(X_d))$, kde Φ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení. Náhodný vektor U sleduje Gausovu kopula funkci¹.

Související funkce *SimulGaussianCopula.m* je k dispozici v adresáři *Copulas*.

Asymptotická nezávislost ve chvostech

Nechť $(X_1, X_2) := (\Phi^{-1}(U_1), \Phi^{-1}(U_2))$ tak, že (X_1, X_2) sleduje dvourozměrné normální rozdělení se standardním normálním rozdělením jako marginální distribuční funkcí a korelací ρ . Koeficient závislosti v dolním chvostu této Gausovy kopula funkce je

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} P(\Phi^{-1}(U_2) \leq \Phi^{-1}(q) | \Phi^{-1}(U_1) = \Phi^{-1}(q)) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X_2 \leq x | X_1 = x) \end{aligned}$$

S využitím skutečnosti $X_2 | X_1 = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)^2$ lze odvodit

$$P(X_2 \leq x | X_1 = x) = \Phi\left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) = \Phi\left(\frac{x\sqrt{1 - \rho^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}\sqrt{1 + \rho}}\right) = \Phi\left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}}\right)$$

a proto

$$\lambda = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi\left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}}\right) = 0$$

za předpokladu $\rho < 1$. Gausova kopula funkce je tedy asymptoticky nezávislá v obou chvostech a to bez ohledu na to, jak vysokou korelaci ρ zvolíme.

Omezení

Ačkoliv je Gausova kopula funkce jednou z nejpoužívanějších, má řadu zásadních omezení.

Gausova kopula funkce patří do rodiny eliptických funkcí - jedná se tedy o symetrickou distribuční funkci. To znamená, že např. pravděpodobnost extrémního nárůstu cen akcií je shodná s pravděpodobností extrémně negativního poklesu. To je v rozporu s empirickým pozorováním, kdy pravděpodobnost extrémního poklesu je zpravidla výrazně vyšší než pravděpodobnost extrémního nárůstu.

¹Připomeňme, že Gausova kopula funkce je distribuční funkcí. Vektor U tak lze chápat jako náhodný výběr z této distribuční funkce. To je ostatně smyslem výše popsané simulace.

²Nechť X_1 a X_2 jsou dvě nezávislé náhodné veličiny, které sledují standardizované normální rozdělení. Definujme $\epsilon_1 = X_1$ a $\epsilon_2 = \rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} X_2$. Lze dokázat, že ϵ_1 a ϵ_2 jsou náhodné veličiny s korelací ρ , které sledují standardizované normální rozdělení. Platí

$$E[\epsilon_2 | \epsilon_1 = \epsilon^*] = E[\rho \epsilon^* + x_2 \sqrt{1 - \rho^2}] = \rho \epsilon^*$$

$$E[\epsilon_2^2 | \epsilon_1 = \epsilon^*] = E[(\rho \epsilon^*)^2 + 2\rho \epsilon^* x_2(1 - \rho^2) + (1 - \rho^2)x_2^2] = (\rho \epsilon^*)^2 + (1 - \rho^2)$$

což implikuje

$$\begin{aligned} D[\epsilon_2 | \epsilon_1 = \epsilon^*] &= E[\epsilon_2^2 | \epsilon_1 = \epsilon^*] - E[\epsilon_2 | \epsilon_1 = \epsilon^*]^2 \\ &= (\rho \epsilon^*)^2 + (1 - \rho^2) - (\rho \epsilon^*)^2 = 1 - \rho^2 \end{aligned}$$

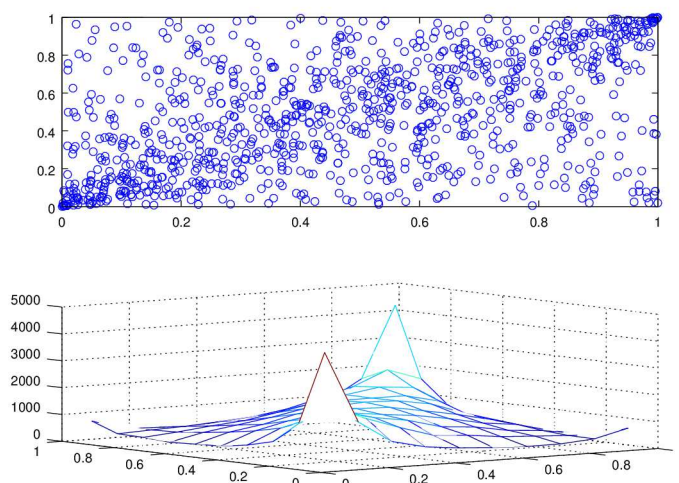
a proto $\epsilon_2 | \epsilon_1 = \epsilon^* \sim N(\rho \epsilon^*, 1 - \rho^2)$.

Notoricky známým nedostatkem normálního rozdělení je nedostatečné podchycení případných tlustých chvostů. Z empirických dat je zřejmé, že právě tlusté chvosty jsou typická pro finanční data.

Jak jsme ukázali výše, dalším zásadním nedostatkem je skutečnost, že korelace mezi jednotlivými náhodnými veličinami se v chvostech Gausovy kopula funkce asymptoticky blíží nule. Pokud je tedy předmětem našeho zájmu výpočet value-at-risk, který se opírá o kvantily 99% a vyšší, je Gausova kopula funkce nevhodná.

3.2.2 Studentova kopula funkce

Narozdíl od Gausovy kopula funkce umožňuje studentova kopula funkce částečně podchytit problematiku tlustých chvostů a to skrze parametr počet stupňů volnosti. Nicméně standardní studentova kopula funkce má pouze jeden takovýto parametr bez ohledu na dimenzi d . Podobně jako pro Gausovu kopula funkci jsou parametry studentovy kopula funkce relativně snadno odhadnutelné, což je jeden z hlavních důvodů její oblíbenosti v praxi.



Obrázek 3.4: Dvourozměrná studentova kopula funkce s korelačním parametrem $\rho = 0.5$ a počtem stupňů volnosti $\nu = 2$

Odhad parametrů

V případě studentovy kopula funkce je třeba odhadnout kromě korelační matice také počet stupňů volnosti. Stejně jako v případě Gausovy kopula funkce lze korelační matice odhadnout pomocí Kendall pořadové korelace. Počet stupňů volnosti lze odhadnout pomocí MLE maxilizační funkce

$$\max_{\nu} \sum_{i=1}^N \ln \left(c_{\nu, \Sigma}^t(u_i) \right)$$

kde u_i představuje vektor dimenze d obsahující kvantily i -tého pozorování, N představuje celkový počet pozorování a $c_{\nu,\Sigma}^t(u_i)$ je hustotu pravděpodobnosti studentovy kopula funkce definovanou jako

$$c_{\nu,\Sigma}^t(u_i) = \frac{f_{\nu,\Sigma}(t_v^{-1}(u_{i1}), t_v^{-1}(u_{i2}), \dots, t_v^{-1}(u_{id}))}{\prod_{j=1}^d f_{\nu}(t_v^{-1}(u_{ij}))}, \quad u \in (0, 1)^d$$

kde $f_{\nu,\Sigma}$ je sdružená hustota pravděpodobnosti d -rozměrného studentova rozdělení s ν stupni volnosti a korelační maticí Σ a f_{ν} je hustota pravděpodobnosti jednorozměrného studentova rozdělení s ν stupni volnosti.

Funkce *FitStudentCopula2.m* pro odhad parametrů studentovy kopula funkce je k dispozici v adresáři *Copulas*.

Simulace

Předpokládejme, že máme k dispozici korelační matici Σ a počet stupňů volnosti, které jsme odhadli v předchozím kroku.

1. Pomocí Choleskyho dekompozice provedeme rozklad kovarianční matice na $\Sigma = \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2}$.
2. Vygenerujeme vektor $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)' \sim N(0, \Sigma)$ nezávislých standardních normálních veličin.
3. Vypočteme vektor $X = \Sigma^{1/2} Z$ korelovaných standardních normálních veličin, kde $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$.
4. Vygenerujeme náhodnou veličinu Y z χ^2 pravděpodobnostního rozdělení s parametrem ν .
5. Vypočteme vektor $T = \left(\frac{X_1}{\nu/\sqrt{Y}}, \frac{X_2}{\nu/\sqrt{Y}}, \dots, \frac{X_d}{\nu/\sqrt{Y}} \right)$.
6. Vypočteme $U = (t_{\nu}^{cdf}(T_1), t_{\nu}^{cdf}(T_2), \dots, t_{\nu}^{cdf}(T_d))$, kde t_{ν}^{cdf} je distribuční funkce studentova rozdělení s ν stupni volnosti. Náhodný vektor U sleduje studentovu kopula funkci s korelační maticí Σ a ν stupni volnosti.

Související funkce *SimulStudentCopula.m* je k dispozici v adresáři *Copulas*.

Asymptotická závislost v chvostech

Uvažujme $(X_1, X_2) := (t_{\nu}^{-1}(U_1), t_{\nu}^{-1}(U_2))$, kde t_{ν} označuje distribuční funkci jednorozměrného studentova rozdělení s ν stupni volnosti. Proto $(X_1, X_2) \sim t_2(\nu, 0, P)$, kde P je korelační matice s prvkem ρ mimo hlavní diagonálu. Lze dovodit, že podmíněná pravděpodobnost pro $X_1 = x$ zdvourozměrného studentova rozdělení je

$$\left(\frac{v+1}{v+x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{X_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_{v+1}$$

Podobnou argumentací jako v případě Gausovy kopula funkce lze dokázat

$$\lambda = 2t_{v+1} \left(-\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$$

Za předpokladu $\rho > -1$ tedy studentova kopula funkce vykazuje závislost ve svém horním i dolním chvostu.

Omezení

Na studentovu kopula funkci lze pohlížet jako na zobecnění Gausovy kopula funkce. Přesto (anebo spíše právě proto) sdílí s Gausovou kopula funkcí řadu omezení.

Stejně jako Gausova kopula funkce patří studentova kopula funkce do rodiny eliptických funkcí a jedná se tedy o symetrickou distribuční funkci. Empirická data však hypotézu o symetrii příliš nepodporují. Tomuto problému se lze vyhnout pomocí tzv. sešikmené studentovy kopula funkce, která je rozšířením původního modelu. Odhad parametrů sešikmení je však časově poměrně náročný.

Thlusté chvosty jsou částečně podchyceny skrze počet stupňů volnosti. Nicméně základní studentova kopula funkce má pouze jeden takovýto parametr bez ohledu na svou dimenzi. Problém lze částečně obejít rozšířením modelu, kdy pro každou dimenzi definujeme vlastní počet stupňů volnosti - hovoříme o tzv. studentově kopula funkcí s vícero stupni volnosti. Kalibrace této kopula funkce je však časově náročná, a proto se v praxi příliš nepoužívá. Funkce *FitStudentMDoF.m* a *SimulStudentMDoF.m*, které slouží ke kalibraci resp. k simulaci tohoto typu kopula funkce jsou k dispozici v adresáři *Copulas*.

Na rozdíl od Gausovy kopula funkce se korelace v chvostech asymptoticky neblíží nule. To však neznamená, že modelová korelace odpovídá skutečné korelaci. Teoretickým řešením je sloučení dvou výše uvedených rozšíření v tzv. sešikmenou studentovu kopula funkci s vícero stupni volnosti, kdy skrze větší počet parametrů získáme potřebnou flexibilitu. V praxi však tento přístup naráží na problém s kalibrací, která je nestabilní a navíc velmi časově náročná.

3.2.3 Archimediánské kopula funkce

Obecná Archimediánská kopula funkce je definována jako

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \quad (3.1)$$

kde ϕ je klesající funkce, která mapuje z $[0, 1]$ do $[0, \infty]$ a splňuje $\phi(0) = \infty$ a $\phi(1) = 0$. Funkci ϕ nazýváme kopula generátorem. Z (2.1) vyplývá, že Archimediánské kopule jsou dvourozměrné. Existují také vícerozměrné varianty Archimediánských kopula funkcí, ty však nejsou předmětem tohoto textu. Do rodiny Archimediánských kopula funkcí patří Claytonova, Gumbelova a Frankova kopula funkce.

Claytonova kopula funkce

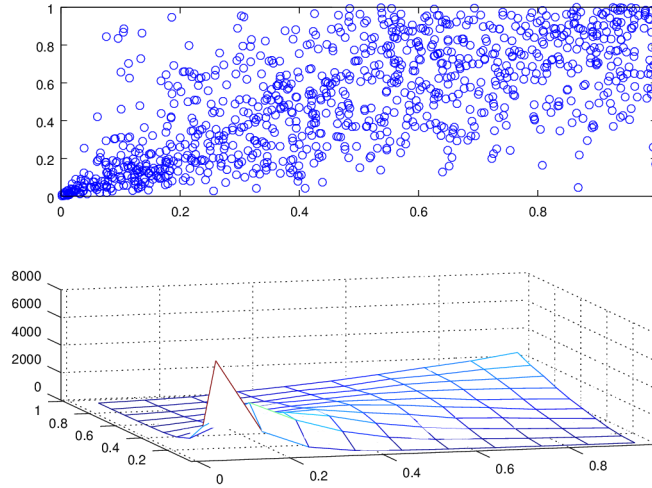
Dvourozměrná Claytonova kopula funkce má tvar

$$C_\theta(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad 0 < \theta < \infty$$

Pro $\theta \rightarrow 0$ získáme nezávislou kopula funkci; pro $\theta \rightarrow \infty$ získáme komonotonickou kopula funkci. Parametr θ tak měří sílu závislosti v rámci kopula funkce.

Pro kalibraci Claytonovy kopula funkce stačí odhadnout parametr θ . Mezi θ a Kendall pořadovou korelací ρ_τ existuje vztah

$$\rho_\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \quad (3.2)$$



Obrázek 3.5: Dvourozměrná Claytonova kopula funkce s parametrem $\theta = 2$

Prvním krokem kalibrace je tedy výpočet Kendall pořadové korelace (viz. výše), na který navazuje výpočet parametru θ pomocí inverze (2.2). Příslušná funkce *FitClaytonCopula.m* je k dispozici v adresáři *Copulas*.

Simulace z Claytonovy kopule probíhá v následujících krocích.

1. Vygenerujeme náhodnou veličinu $V \sim Ga(1/\theta, 1)$, kde $\theta > 0$ a $Ga(\alpha, \beta)$ je pravděpodobnostní rozdělení gamma s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

kde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, $\alpha > 0$. Distribuční funkce náhodné veličiny V má Laplace transformaci $\hat{G}(t) = (1 + t)^{-\frac{1}{\theta}}$.

2. Vygenerujeme nezávislé uniformní náhodné veličiny $X = (X_1, X_2)$.
3. Vypočteme $U = (\hat{G}(-\ln(X_1)/V), \hat{G}(-\ln(X_2)/V))$. Dvourozměrný náhodný vektor U je výběrem z Claytonovy kopula funkce.

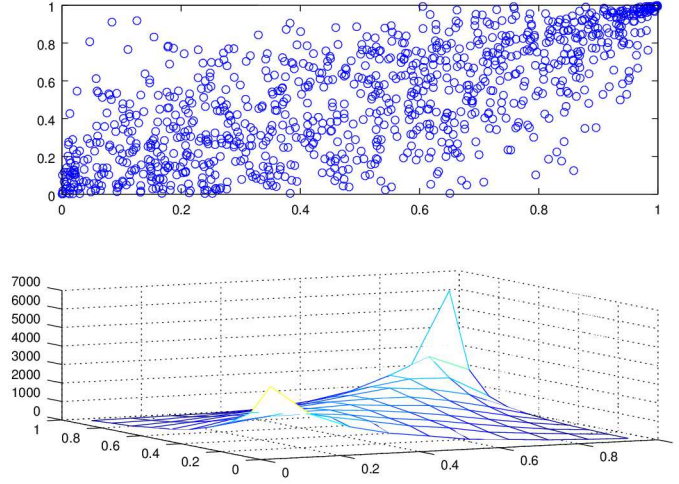
Funkci *SimulClaytonCopula.m* pro simulaci z Clayton kopula funkce naleznete v adresáři *Copulas*.

Gumbelova kopula funkce

Dvourozměrná Gumbelova kopula funkce má tvar

$$C_\theta(u_1, u_2) = e^{-((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}}, \quad 1 \leq \theta < \infty$$

Jestliže $\theta = 1$, získáme nezávislou kopula funkci; jestliže $\theta \rightarrow \infty$, získáme komonotonickou kopula funkci. Parametr θ tak stejně jako v případě Claytonovy kopula funkce vyjadřuje míru závislosti.



Obrázek 3.6: Dvourozměrná Gumbelova kopula funkce s parametrem $\theta = 2$

Gumbelova kopula funkce je plně definována parametrem θ . Stejně jako v případě Claytonovy kopula funkce existuje vztah mezi parametrem θ a Kendall pořadovou korelací ρ_τ .

$$\rho_\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

Pro kalibraci tedy nejprve stačí vypočítat Kendall pořadovou korelaci a z ní následně odvodit parametr θ . Potřebná funkce *FitGumbelCopula.m* je k dispozici v adresáři *Copulas*.

Simulace sleduje podobné kroky jako v případě Claytonovy kopula funkce.

1. Vygenerujeme stabilní náhodnou veličinu $V \sim St(1/\theta, 1, \gamma, 0)$, kde $\gamma = (\cos(\pi/2\theta))^\theta$ a $\theta > 0$. Distribuční funkce náhodné veličiny V má Laplace transformaci $\hat{G}(t) = e^{-t^{1/\theta}}$.
2. Vygenerujeme nezávislé uniformní náhodné veličiny $X = (X_1, X_2)$.
3. Vypočteme $U = (\hat{G}(-\ln(X_1)/V), \hat{G}(-\ln(X_2)/V))$. Dvourozměrný náhodný vektor U je výběrem z Gumbelovy kopula funkce.

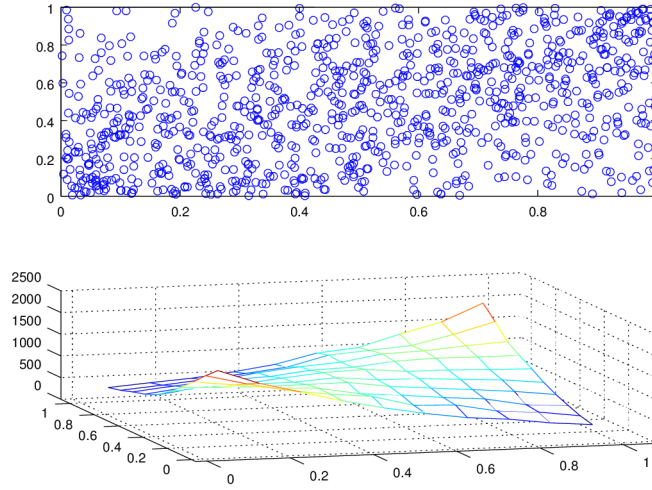
Frankova kopula funkce

Dvourozměrná Frankova kopula funkce má tvar

$$C_\theta(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad \theta \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Prvním krokem kalibrace Frankovy kopula funkce je výpočet Kendall pořadové korelace, ze které pomocí vztahu

$$\rho_\tau = 1 - 4\theta^{-1} (1 - D_1(\theta))$$



Obrázek 3.7: Dvourozměrná Frankova kopula funkce s parametrem $\theta = 2$

kde $D_1(\theta) = \theta^{-1} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt$ je Debye funkce. Parametr θ nelze z tohoto vztahu vyjádřit přímo, a proto je třeba vypočíst iterativně např. pomocí Newtonovy metody.

Simulace z Frankovy kopula funkce probíhá v následujících krocích.

1. Vygenerujeme diskrétní náhodnou veličinu V s pravděpodobnostní funkcí $p(k) = P(V = k) = \frac{(1 - e^{-\theta})^k}{k\theta}$ pro $k = 1, 2, \dots$ a $\theta > 0$. Laplace transformace odpovídající distribuční funkce má tvar $\hat{G}(t) = \frac{1}{\theta} \ln(e^{-t}(1 - e^{-\theta}) - 1)$.
2. Vygenerujeme nezávislé uniformní náhodné veličiny $X = (X_1, X_2)$.
3. Vypočteme $U = (\hat{G}(-\ln(X_1)/V), \hat{G}(-\ln(X_2)/V))$. Dvourozměrný náhodný vektor U je výběrem z Frankovy kopula funkce.

Kapitola 4

Použitá literatura

1. Coping with Copulas - Thorsten Schmidt; Department of Mathematics, University of Leipzig December 2006
2. The Estimation of Copulas: Theory and Practice; Arthur Charpentier, Jean-David Fermanian, Olivier Scaillet; September 2006
3. Quantitative Risk Management - Alexander J. McNeil, Rudiger Frey, Paul Embrechts; Princenton University Press 2005
4. The Bivariate Normal Copula - Christian Meyer, December 15, 2009
5. The t Copula and Related Copulas - Stefano Demarta, Alexander J. McNeil; Department of Mathematics, Federal Institute of Technology ETH Zentrum; May 2004
6. The t Copula with Multiple Parameters of Degree of Freedom: Bivariate Characteristics and Applications to Risk Management; Xiaolin Luo, Pavel V. Shevchenko; 28 May 2009
7. The Asymetric t-Copula with Individual Degress of Freedom; Christ Church; University of Oxford, 2012
8. Copula Modelling: An Introduction for Practitioners; Pravin K. Trivedi, David M. Zimmer; Foundantions and Trends in Econometrics 2005
9. ML Estimation of the t Distribution Using EM and its Extensions, ECM and ECME; Chuanhai Liu, Donald B. Rubin; Harvard University
10. Stable Distributions, Models for Heavy Tailed Data; John P. Nolan; Math/Stat Department of American University; July 28, 2014
11. SAS/ETS(R) 9.3 User's Guide - The Copula Procedure - Archimedian Copulas
12. Kendall tau rank correlation coefficient; Wikipedia
13. Kernel (statistics); Wikipedia
14. Kernel density estimation; Wikipedia
15. Kernel smoother; Wikipedia