Interní modely kreditního rizika

Michael K. Ong

1998

Obsah

Kapitola 1

Modelování kreditního rizika

1.1 Dekompozice kreditního rizika

Faktorů, které ovlivňují kreditní riziko je mnoho, nicméně jak v praxi tak v teorii se kreditní riziko nejčastěji člení na následující komponenty.

- pravděpodobnost defaultu - Pravděpodobnost, že dlužník nebude schopen včas a v plné výši uhradit své závazky.
- míra náhrady - Míra náhrady vyjadřuje procentní část nominální hodnoty pohledávky, kterou lze získat zpět od dlužníka v případě jeho defaultu.
- kreditní migrace - Pravděpodobnost, že se kreditní kvalita dlužního zhorší popř. zlepší.

V následujícím textu si přiblížíme jednotlivé komponenty kreditního rizika.

1.2 Riziko defaultu

Rizikem defaultu rozumíme riziko, že společnost nebude schopna dostát svým smluvním závazkům. Míru tohoto rizika pak nazýváme pravděpodobností defaultu. K defaultu však zpravidla nedochází náhle, nýbrž postupně, kdy se finanční zdraví společnosti v průběhu času zhoršuje. Tuto změnu kreditní kvality, ať už k horšímu či lepšímu, nazýváme kreditní migrací a odpovídající pravděpodobnosti pak migračními pravděpodobnostmi. Kreditní kvalita dlužníka je zpravidla vyjádřena tzv. ratingem. Migrační pravděpodobnosti (včetně pravděpodobnosti defaultu) pak definují tzv. migrační matici.

Migrační pravděpodobnosti mohou být založeny na

- empirických datech, tj. vychází z defaultních událostí a změn ratingu, které byly pozorovány v minulosti,
- nebo na modelovém přístupu, který vychází z Mertonovy opční teorie.

1.2.1 Měření pravděpodobnosti defaultu - empirická metoda

Standard & Poor's je agentura, které zveřejňuje rating pro klíčové společnosti. Vzhledem k délce svého působení na trhu má k dispozici množství historických dat. Standard & Poor's pak pravidelně zveřejňuje migrační matice založené na těchto historických datech. Např. ve své zprávě z roku 1997 zvolila jako výchozí rok 1981, tj. pokryla časový úsek 15 let. Postup konstrukce jí zveřejněné migrační matice je následující. Standard & Poor's přiřadila rating každé ze společností ve výchozím vzorku z roku 1981. V roce 1982 pak každé společnosti zaktualizovala rating, vyřadila ty společnosti, které v daném roce zdefaultovaly, a případně zahrnula do vzorku společnosti nové. Pro každou ratingovou skupinu vypočetla pravděpodobnost defaultu. Tímto způsobem pokračovala z roku na rok až do roku 1997. Na závěr z takto získaných ročních migračních pravděpodobností vypočetla průměrné migrační pravděpodobnosti za celé 15ti leté období. Podobné studie zveřejňují také ostatní ratingové agentury jako jsou např. Moody's nebo Fitch.

Slabé místo výše popsaného přístupu spočívá v jeho statičnosti. Je zřejmé, že se migrační pravděpodobnosti mění v čase v závislosti na hospodářském cyklu. Zprůměrování ročních pravděpodobností však tento faktor odstraní. Logickým řešením se zdá nevztahovat tyto pravděpodobnosti k víceletému období a namísto toho používat pouze pravděpodobnosti jednoleté. Nevýhodou jednoletých pravděpodobností je však jejich vysoká nestabilita a to zejména v případě vyšších ratingů, kdy je migrace popř. default velmi ojedinělým úkazem. Dalším problém spočívá v tom, že ratingové agentury pokrývají pouze nejvýznamnější společnosti. Jádro úvěrového portfolia bank však tvoří společnosti, které ratingovými agenturami monitorovány nejsou.

1.2.2 Měření pravděpodobnosti defaultu - opční teorie

Ratingové stupně používané ratingovými agenturami jsou relativně "hrubé", tj. pravděpodobnosti defaultu a migrace se mohou i rámci jednoho ratingu značně lišit[1]. Navíc, jak bylo zmíněno výše, je interval spolehlivosti empirických pravděpodobností poměrně široký. Tyto důvody vedly, navzdory intuitivnosti empirických pravděpodobností, k teoretickému modelu, který je založen na Mertonově opční teorii z roku 1974. Hlavní myšlenkou modelu je, že default je primárně dán

- tržní hodnotou aktiv společnosti,
- výší závazků společnosti a
- závislostí tržní hodnoty aktiv na tržních změnách.

Riziko defaultu společnosti se tak zvyšuje s tím, jak se tržní hodnota aktiv blíží účetní hodnotě závazků. V okamžiku, kdy hodnota tržních aktiv není dostatečná ve vztahu k závazkům, společnost vyhlásí default. Na hodnotu společnosti je tedy možno pohlížet skrze opční teorii.

[1] Typicky např. napříč geografickou lokací popř. odvětvím, ve kterém společnosti podnikají.

1.2.3 Empirický vs teoretický přístup

Výstupem teoretického přístupu založeného na Mertonově opčním modelu je tzv. očekávaná frekvence defaultu (expected frequency default - EDF). V praxi je však poměrně složité namapovat očekávanou frekvenci defaultu na jednotlivé ratingové skupiny. Důvodem je významný rozdíl v migračních pravděpodobnostech založených modelovém a empirickém přístupu. Ačkoliv zatím nikdo nenabídl jednoznačné vysvětlení, existuje několiv možných důvodů.

- Ratingové agentury aktualizují ratingy společností se zpožděním.
- Hodnoty pravděpodobností defaultu přiřazených ratingovými agenturami jsou v rámci ratingové skupiny zpravidla koncentrovány okolo mediánu, který odpovídá EDF, přičemž variace dílčích EDF ve skupině je vysoká. Průměrná historická pravděpodobnost defaultu tak nadhodnocuje pravděpodobnost defaultu typické společnosti díky rozdílu mezi střední hodnotou a mediánem defaultních pravděpodobností.
- Jestliže jsou jak pravděpodobnost setrvání v ratingové skupině tak pravděpodobnost defaultu vysoké, pak jsou pravděpodobnosti přechodu do jiných ratingových skupin příliš malé. Proto se tyto pravděpodonosti na empirických datech nemusí dostatečně projevit.

1.3 Modely kreditního rizika

Již jsme zmínili, že teoretický přístup je založen na Mertonově opčním modelu z roku 1974. V praxi pak existuje několik variant tohoto modelu.

1.3.1 Modely založené na hodnotě společnosti

Na závazky společnosti je možné pohlížet jako na podmíněný nárok, jehož podkladem jsou aktiva společnosti. Defaultní událost v této skupině modelů je pak dána vývojem aktiv v čase ve vztahu k závazkům společnosti. Za předpokladu splnění určitých zjednodušujících předpokladu pak lze pravděpodobnost defaultu relativně snadno vypočíst (viz. příloha A).

Nejslabším místem těchto modelů je odhad aktiv, pro které neexistuje tržní cena. To má za následek to, že model je závislý na vstupech, které mohou být do značné míry subjektivní. Naopak výhodou je skutečnost, že nejsou zapotřebí informace o ratingu. Metodu lze tedy používat i v případě menších společností, pro které není k dispozici veřejně přístupný rating. To však má na druhou stranu za následek nekonsistenci mezi takto vypočtenými pravděpodobnostmi defaultu vypočtenými a pravděpodobnostmi defaultu založenými na rantingu.

Představiteli těchto modelů jsou Merton (1974), Black a Cox (1976) a komerční model společnosti KMV.

1.3.2 Modely založené na míře náhrady

V rámci těchto modelů nastane default v případě, kdy hodnota aktiv společnosti prolomí určitou exogenně stanovenou hranici, přičemž se předpokládá, že uhrazena je pouze část závazků. Tato skupina modelů se od předchozí liší tím, že se cash-flow, které generují závazky společnosti, podmiňuje skutečností, zda-li v době výplaty cash-flow došlo k defaultu či nikoliv. Stejně jako předchozí, ani tato skupina modelů není závislá na veřejně dostupném ratingu.

Představiteli těchto modelů jsou Hull a White (1995) a Longstaff a Schwartz (1992).

1.3.3 Modely založené na okamžitém riziku defaultu

Tato rodina modelů kombinuje dva předchozí přístupy - předpokládá částečnou úhradu závazků v případě defaultu, nicméně okamžik defaultu je modelován exogenně a defaultní proces je nezávislý na kapitálové struktuře firmy. Nosnou myšlenkou modelu je, že od okamžiku, kdy hodnota aktiv identické firmy financované pouze vlastním kapitálem prolomí určitou hranici, může default uvažované firmy nastat kdykoliv - odtud pojem "okamžité riziko defaultu".

Představiteli těchto modelů jsou Litterman a Iben (1991), Jarrow a Turnbull (1995), Schonbucher (1996) a Jarrow, Lando a Turnbull (1997).

1.4 Hodnota rizikového dluhu

V příloze C je podrobně vysvětleno oceňování rizikového dluhu. Přístup je založen na modelu okamžitého rizika defaultu, který v roce 1997 představili Jarrow, Lando a Turnbull. Hodnota rizikového dluhu $v(t,T)$ vyjádřená pomocí bezrizikového dluhu $p(t,T)$ je

$$v(t,T) = p(t,T)[\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t(\tau^* > T)] \tag{1.1}$$

kde t představuje okamžik ocenění, T splatnost dluhu a náhodná veličina τ^* okamžik defaultu. $\tilde{Q}_t(\tau^* > T)$ je pravděpodobnost, že k defaultu společnosti dojde až v čase po T. V případě defaultu dojde k úhradě pouze části závazku - tato míra náhrady je reprezentována řeckým písmenem $0 < \delta < 1$.

Předpokládejme, že defaultní proces S může nabývat pouze dvou hodnot - $\overline{D}$, která značí přežití a D, která značí default společnosti. Pak lze rovnici (1.1) chápat jako současnou hodnotu očekávané výplaty ve výši

$$\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t(\tau^* > T) = \tilde{E}_t\left[\delta 1_{\{\tau^* \leq T\}} + 1_{\{\tau^* > T\}}\right] \tag{1.2}$$

která se skládá z jisté části ve výši δ a nejisté části $(1-\delta)\tilde{Q}_t(\tau^* > T)$.

1.5 Kreditní migrace

V předchozím textu jsme o defaultním procesu uvažovali jako o dvoustavovém - default vs. přežití společnosti. V praxi však defaultu zpravidla předchází zhoršení finančního zdraví společnosti. V souvislosti s tímto jevem pak hovoříme o tzv. vícestavovém defaultním procesu a kreditní migraci. Kreditní migrace pak zahrnuje tři situace.

- zhoršení finančního zdraví
- zachování finančního zdraví
- zlepšení finančního zdraví

Finanční zdraví společnosti zpravidla vyjadřujeme pomocí ratingu. Ten může být jak z externích zdrojů (např. od Standard & Poor's) nebo jej může stanovit sama banka na základě svých metod. Pravděpodobnosti kreditní migrace pak shrnuje migrační matice. Migrační matice může být jednoletá, kdy jsou pravděpodobnosti migrace vztaženy k časovému intervalu jednoho roku, popř. víceletá, kdy pravděpodobnosti migrace pokrývají časový interval několika let. Migrační matice může být založena na empirických datech popř. na teoretickém modelu.

OBRÁZEK - migrační matice

V předchozím textu byla pravděpodobnostní míra $\tilde{Q}_t(\tau^* > T)$ interpretována jako dvoustavový proces. Tento koncept lze snadno rozšířit pro případ vícestavového procesu.

1.5.1 Očekávaná ztráta

Jaká je výše ztráty, kterou věřitel utrpí v případě defaultu? Odpověď na tuto otázku lze získat z rovnice (1.1).

$$\begin{aligned} v(t,T) &= p(t,T)[\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t(\tau^* > T)] \\ &= p(t,T)[\delta + (1-\delta)(1-\tilde{Q}_t(\tau^* \leq T))] \\ &= p(t,T)[1-(1-\delta)\tilde{Q}_t(\tau^* \leq T)] \end{aligned} \tag{1.3}$$

To je ekvivalentní s

$$p(t,T) - v(t,T) = p(t,T)(1-\delta)\tilde{Q}_t(\tau^* \leq T) \tag{1.4}$$

Levá strana výše uvedené rovnice představuje ztrátu věřitele v případě defaultu. Pravou stranu této rovnice proto nazýváme očekávanou ztrátou (expected loss - EL).

$$EL = p(t,T)(1-\delta)\tilde{Q}_t(\tau^* \leq T) \tag{1.5}$$

1.5.2 Podmíněná ztráta

V případě defaultu je splacena pouze část závazků. V předchozím textu jsme tuto část vyjádřovali pomocí δ. V praxi se však často ptáme kolik bychom v případě defaultu ztratili. Je zřejmé, že tuto ztrátu lze vyjádřit pomocí $1-\delta$, čímž se dostáváme k pojmu podmíněná ztráta (loss given default - LGD).

$$LGD \equiv 1 - \delta \tag{1.6}$$

Očekávanou ztrátu tak lze vyjádřit jako

$$EL = p(t,T) \times LGD \times \tilde{Q}_t(\tau^* \leq T) \tag{1.7}$$

V případě vícestavového defaultního procesu je definování očekávané ztráty poněkud problematické. Pravděpodobnost defaultu je třeba rozšířit o pravděpodobnosti migrace do ostatních ratingových skupin. Pravděpodobnost realizace cash-flow se pro jednotlivé ratingové skupiny liší. Ztráta popř. zisk z titulu změny kreditního ratingu je pak dána změnou této pravděpodobnosti. To činí výpočet očekávané ztráty komplikovanější.

1.5.3 Dekompozice rizikové části závazku

Očekávané cash-flow ze závazku je rovno $(1-LGD)+LGD\times\tilde{Q}_t(\tau^*>T)$, což se shoduje s rovnicí (1.4). To znamená, že cash-flow podmíněného závazku, který generuje $1-LGD$ v případě defaultu a 1 v případě přežití, lze rozložit na dvě části

- bezrizikovou část ve výši $1-LGD$ a
- rizikovou část ve výši LGD.

1.6 Příloha A - Mertonův model

Merton je považován za jednoho z otců opční teorie. Všechny známější teoretické kreditní modely současnosti vycházejí z Mertonova modelu, který byl publikován v roce 1974. V následujícím textu nastíníme hlavní myšlenky tohoto modelu.

Uvažujme zjednodušený model firmy, jejíž aktiva mají v současnosti tržní hodnotu V_0. Hodnota aktiv V_t v čase t má charakter náhodné veličiny. Předpokládejme, že infinitezimální výnosy aktiv sledují normální rozdělení s trendem μ a směrodatnou odchylkou σ, tj. dynamika hodnoty aktiv sleduje geometrický Brownův pohyb daný rovnicí

$$\frac{dV_t}{v_t}=\mu dt+\sigma dz \tag{1.8}$$

To znamená, že hodnota aktiv společnosti v čase t je lognormálně rozdělena a dána vztahem

$$V_t=V_o e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}Z_t} \tag{1.9}$$

Očekávaná hodnota aktiv je pak rovna $E[V_t]=V_0e^{\mu t}$.

Další nosným bodem modelu je Modigliani-Millerův teorém (1958), dle kterého je na trzích, kde neexistují daně, transakční náklady a informační asymetrie, hodnota společnosti nezávislá na její kapitálové struktuře. Hodnota společnosti je v těchto idealizovaných podmínkách dána prostým součtem hodnoty aktiv a závazků. To znamená, že pasiva společnosti lze modelovat pouze pomocí vlastního jmění S_t a diskontního dluhopisu s nominální hodnotou F a splatností v čase T.

Jestliže je konečná hodnota aktiv V_T v čase T větší než nominální hodnota diskontního dluhopisu F, budou závazky společnosti plně splaceny. V opačném případě nastane default a věřitel obdrží veškerá aktiva společnosti. Hodnota společnosti v čase T z pohledu akcionářů je tedy

$$S_T=max[V_T-F,0] \tag{1.10}$$

což je kupní opce na aktiva společnosti s realizační cenou rovnou účetní hodnotě závazků. Jestliže jsou aktiva společnosti obchodovalená popř. alespoň replikovatelná, lze hodnotu aktiv S_τ v čase τ vyjádřit s pomocí známé Black-Scholes rovnice jako

$$S_T=V_0N(d_1)-Fe^{r\tau}N(d_2) \tag{1.11}$$

kde

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{V_0}{Fe^{-r\tau}}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

a

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Hodnota závazků je tedy rovna

$$D = V_0 - S_\tau = V_0 N(-d_1) - Fe^{-r\tau} N(d_2) \tag{1.12}$$

což implikuje výnosovou míru

$$r_D = -\frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{D}{F}\right) \tag{1.13}$$

a kreditní spread

$$s = r_D - r \tag{1.14}$$

Mertonův model předpokládá, že hodnota vlastního jmění společnosti je dána trhem.

1.7 Příloha B - Pravděpodobnost defaultu, bod defaultu a vzdálenost od defaultu

Následující obrázek je shrnutím přílohy A, ve které jsme představili Mertonův model.

OBRÁZEK - Mertonův model

Křivka představuje rozdělení hodnoty aktiv společnosti v čase T. Připomeňme, že nominální hodnota závazků je F. Jestliže je hodnota aktiv V_T v čase T vyšší než F, pak jsou závazky společnosti plně splaceny. V opačném případě získají věřitelé veškerá aktiva společnosti. Pravděpodobnost defaultu je tedy dána tmavým regionem pod hodnotou F. Matematicky lze pravděpodobnost defaultu vyjádřit jako

$$Q = P[V_T \leq F] \tag{1.15}$$

Společnost KMV, která vyvíjí a prodává model řízení kreditního rizika založeného na Mertonově modelu, však na základě historických pozorování zjistila, že pravděpodobnost defaultu společnosti vzroste v okamžiku, kdy hodnota jejich aktiv dosáhne určité kritické úrovně, která se nachází mezi hodnotou celkových a krátkodobých závazků. Jinými slovy "proražení" hranice dané hodnotou celkodobých závazků nemusí nutně končit defaultem společnosti. Tímto se dostáváme ke konceptu bodu defaultu (default point - DPT).

Bod defaultu je metodologií společnosti KMV definován jako součet krátkodobých závazků (short-term debt - STD) a polovinou dlouhodobých závazků (long-term debt - LTD).

$$DPT = STD + 0.5 \times LDT \tag{1.16}$$

Vzdálenost od defaultu (distance to default - DD) je pak definována jako rozdíl mezi střední hodnotou aktiv společnosti $E[V_H]$ v rozhodném čase H a bodem defaultu normalizovaného pomocí směrodatné odchylky budoucích výnosů aktiv σ.

$$DD \equiv \frac{E[V_H] - DPT}{\sigma} \tag{1.17}$$

Vzdálenost od defaultu tedy představuje počet směrodatných odchylek, které dělí $E[V_H]$ od DPT.

1.7.1 Pravděpodobnost defaultu

Kdybychom znali pravděpodobnostní rozdělení hodnoty aktiv v čase H, pak by pravděpodobnost defaultu odpovídala pravděpodobnosti, že hodnota V_H v čase H klesne pod DPT_H. Pravděpodobnost defaultu tak můžeme zapsat ve tvaru

$$Q = P[V_H \leq DPT_H] \tag{1.18}$$

V případě rizikově neutrální pravděpodobnostní míry je očekávaný výnos všech cenných papírů roven bezrizikové úrokové míře r, a proto je rizikově neutrální pravděpodobnost defaultu definovaná předešlou rovnicí rovna

$$\begin{aligned} Q &= P[V_H \leq DPT_H] \\ &= P\left[\ln V_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) H + \sigma\sqrt{H} Z_H \leq \ln DPT_H\right] \\ &= P\left[Z_H \leq -\frac{\ln(V_0/DPT_H) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{H}}\right] \\ &= N(-d_2^*) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Při upravách jsme využili logaritmu (1.9) a skutečnosti, že Z_H pochází z normovaného normálního rozdělení a kde

$$d_2^* = \frac{\ln(V_0/DPT_H) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{H}} \tag{1.20}$$

je vzdálenost od defaultu[2]. Všimněme si, že d_2^* je podobné d_2 v rovnici (1.11) s tím rozdílem, že F je nahrazeno DPT_H a r je nahrazeno μ. Tato podobnost není náhodná, ale je dána vztahem mezi rizikově neutrální a skutečnou pravděpodobností. Skutečná pravděpodobnost používá očekávaný výnos aktiva μ pro modelování trendu, zatímco rizikově neutrální pravděpodobnost používá bezrizikové úrokové míry r. V Mertonově modelu (a také v modelu společnosti KMV) se pravděpodobností defaultu rozumí skutečná pravděpodobnost - v přechozím textu jsme ji označovali pojmem očekávaná frekvence defaultu (expected default frequency - EDF). Proto platí

$$EDF \equiv N(-d_2^*) \tag{1.21}$$

Crouhy a Mark (1998) dokázali vztah

$$-d_2 + \frac{(\mu - r)\sqrt{H}}{\sigma} = -d_2^* \tag{1.22}$$

čímž získáváme

$$\begin{aligned} Q = N(-d_2^*) &= N\left(-d_2 + \frac{(\mu - r)\sqrt{H}}{\sigma}\right) \\ &= N\left(N^{-1}(EDF) + \frac{(\mu - r)\sqrt{H}}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{1.23}$$

[2]Takto definovaná vzdálenost od defaultu se liší od prvotní definice dané rovnicí (1.17). Původní definice totiž nebrala v potaz skutečnost, že hodnota aktiv společnosti sleduje lognornální a nikoliv normální rozdělení.

Protože $\mu \geq r$, platí $Q \geq EDF$, a proto je rizikově neutrální pravděpodobnost defaultu (po očištění o cenu rizika) vyšší než skutečná pravděpodobnost defaultu. Společnost KMV odhaduje rizikově neutrální EDF s využitím dat z dluhopisového trhu pomocí funkce

$$Q = N(N^{-1}(EDF) + \rho S H^{\theta}) \tag{1.24}$$

kde ρ je korelace mezi výnosovou mírou aktiv a výnosovou mírou dluhopisového trhu a S označuje Sharpův poměr a θ je časový parametr, který však v praxi není roven $\frac{1}{2}$. Aplikované pravděpodobnostní rozdělení také není normální.

Příklad 1.1 *Pro zjednošení uvažujme skutečnou pravděpodobnostní míru. Dále uvažujme firmu, která je charakterizována následovně*

- *rozhodný časový okamžik H je roven jednomu roku*
- *současná hodnota aktiv společnosti je $V_0 = 1\ 000\ USD$*
- *očekávaná roční výnosová míra aktiv společnosti je $\mu = 0.20$*
- *roční směrodatná odchylka aktiv společnosti je $\sigma = 0.25$*
- *krátkodobé závazky společnosti jsou $STD = 400\ USD$*
- *dlouhodobé závazky společnosti jsou $LTD = 400\ USD$*

Bod defaultu je tedy roven

$$DPT_H = STD + \frac{1}{2}LTD = 600$$

a vzdálenost od defaultu je pak

$$DD = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{DPT_H}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)H}{\sigma\sqrt{H}} = 2.72$$

Očekávanou frekvenci defaultu lze tedy vypočíst jako

$$EDF = N(-DD) = 0.0033 \tag{1.25}$$

Uvažovaná společnost je tedy od defaultu vzdálena 2.72 směrodatné odchylky a skutečná pravděpodobnost defaultu je 0.3%.

1.8 Příloha C - Matematický úvod

1.8.1 Formality

Uvažujme modelovou ekonomiku s konečným časovým horizontem τ. Nechť je $p(t, T)$ cena jednotkového bezrizikového diskontního dluhopisu v čase t se splatností v čase T, kde $0 \leq t \leq T \leq \tau$. Bezrizikovou úrokovou sazbu v čase t označme jako $r(t)$. Předpokládejme, že existuje účet peněžního trhu, který zhodnocuje finanční prostředky bezrizikovou úrokovou sazbou a označme jej jako

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} \tag{1.26}$$

Za předpokladu kompletních trhů a neexistence arbitráže odpovídají ceny jednotkových bezrizikových diskontních dluhopisů očekávané současné hodnotě jistého dolaru v čase T, tj.

$$p(t,T) = \tilde{E}_t \left[\frac{B(t)}{B(T)} \right] \tag{1.27}$$

kde střední hodnota odpovídá jedinečné ekvivalentní martingalové míře $\tilde{Q}$.

1.8.2 Míra náhrady

Nechť $v(t,T)$ vyjadřuje cenu v čase t jednotkového rizikového diskontníhu dluhopisu splatného v čase T. Jestliže emitent zdefaultuje v čase T, získá majitel dluhopisu δ dolaru, kde $0 \leq \delta \leq 1$. O δ pak hovoříme jako o míře náhrady. Předpokládejme, že default nastane v náhodný okamžik τ^*. Pak je hodnota jednotkového rizikového diskontního dluhopisu rovna

$$v(t,T) = \tilde{E}_t \left[\frac{B(t)}{B(T)} \left(\delta 1_{\{\tau^* \leq T\}} + 1_{\{\tau^* > T\}} \right) \right] \tag{1.28}$$

kde

$$1_{\{\tau^* \leq T\}} = \begin{cases} 1, & \tau^* \leq T \\ 0, & \tau^* > T \end{cases} \tag{1.29}$$

Hodnotu rizikového diskontního dluhopisu tak lze interpretovat jako očekávání dle ekvivalentní míry $\tilde{Q}$ pro dva možné stavy S defaultního procesu, kde

$$S = \begin{cases} \overline{D} - \textit{přežití} \\ D - \textit{default} \end{cases} \tag{1.30}$$

1.8.3 Dekompozice rizikového závazku

Rizikový závazek $v(t,T)$ lze vyjádřit v závislosti na hodnotě náhodné veličiny $S = \{\overline{D}, D\}$.

$$v(t,T) = \begin{cases} v(t,T,D) \to \frac{B(t)}{B(T)} \left(\delta 1_{\{\tau^* \leq T\}} \right) \\ v(t,T,\overline{D}) \to \frac{B(t)}{B(T)} \left(1_{\{\tau^* > T\}} \right) \end{cases} \tag{1.31}$$

Jestliže předpokládáme, že proces bezrizikové úrokové sazby $r(t)$ a defaultní proces reprezentovaný náhodnou veličinou τ^* jsou vzájemně statisticky nezávislé pro $\tilde{Q}$, pak platí

$$\begin{aligned} v(t,T) = \tilde{E}_t \left[\frac{B(t)}{B(T)} \right] \tilde{E}_t \left[\delta 1_{\{\tau^* \leq T\}} + 1_{\{\tau^* > T\}} \right] \\ = p(t,T)[\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t(\tau^* > T)] \end{aligned} \tag{1.32}$$

kde $\tilde{Q}(\tau^* > T)$ je pravděpodobnost pro $\tilde{Q}$, že k defaultu dojde po čase T.

1.9 Příloha D - Vícestavový defaultní proces

Rozdělení času defaultu lze modelovat jako diskrétní časově homogenní Markovský řetězec v prostoru $\Omega = \{1, 2, 3, ..., K\}$, kde 1 představuje rating AAA a

K default. Jarrow, Lando a Turnbull (1997) zkonstruovali pravděpodobnost, že k defaultu dojde po čase T, jako

$$\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T) = \sum_{j \neq k} \tilde{q}_{ij}(t,T) = 1 - \tilde{q}_{iK}(t,T) \tag{1.33}$$

kde index i značí aktuální rating společnosti. Martigalové transakční pravděpodobnosti $\tilde{q}_{ij}$ jsou definovány jako

$$\tilde{q}_{ij}(t,t+1) = \pi_i(t) q_{ij} \quad \forall i \neq j \tag{1.34}$$

kde q_{ij} jsou empirické transakční pravděpodobnosti udávané ratingovými společnostmi a $\pi_i(t)$ představuje rizikovou prémii definovanou deterministickou funkcí času takovou, že platí

$$\tilde{q}_{ij}(t,t+1) \geq 0 \quad \forall i \neq j \tag{1.35}$$

a

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{K} \tilde{q}_{ij}(t,t+1) \leq 1 \quad pro\ i = 1,2,...,K \tag{1.36}$$

V maticovém vyjádření lze výše uvedené výrazy zkrátit na

$$\tilde{Q}_{t,t+1} - I = \Pi(t)(Q - I) \tag{1.37}$$

kde I je $K \times K$ jednotková matice a riziková prémie je

$$\Pi(t) = diag\{\pi_j(t), ..., \pi_{K-1}(t)\} \tag{1.38}$$

je $K \times K$ diagonální matice. Q je již zmiňovaná empirická transiční matice.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & \cdots & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & \cdots & q_{2K} \\ \vdots & & & & \vdots \\ q_{K-1,1} & q_{K-1,2} & \cdots & \cdots & q_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.39}$$

Kapitola 2

Portfolio a očekávaná ztráta

2.1 Očekávaná ztráta

Očekávanou ztrátu (expected loss - EL) jsme v předchozím textu definovali jako

$$EL = \textit{expozice vůči dlužníkovi v čase } T \times \textit{ztráta v případě defaultu} \times \textit{pravděpodobnost defaultu před splatností v čase } T$$

Je zřejmé, že skutečná ztráta se může od té očekávané lišit na obě strany[1]. A právě tato odchylka, tzv. neočekávaná ztráta, je z pohledu risk managementu klíčová veličina - banka musí disponovat dostatečným kapitálem, aby tuto případnou neočekávanou ztrátu pokryla.

2.2 Expozice vůči dlužníkovi

Označme hodnotu bankovního aktiva v čase t_0 jako V_0. Toto aktivum se skládá ze dvou základních částí - (a) čerpání (outstandings - OS)[2] a (b) příslib čerpání (commitments - COM)[3].

$$V_0 = OS + COM \tag{2.1}$$

V případě defaultu klienta přijde banka o celou část čerpání. Ztráta z titulu příslibu čerpání je pouze částečná a odvíjí se od ratingu klienta. Obecně platí, že se zhoršujícím se ratingem roste míra, v jaké klient využívá příslibu čerpání.

2.3 Upravená expozice

Opět uvažujme bankovní aktivum, jehož hodnota v čase t_0 je rovna V_0. V případě, že před rozhodným okamžikem t_H nedojde k defaultu, zůstává jeho hodnota rovna V_0. Jestliže však před t_H dojde k defaultu, pak lze očekávat, že klient použije také část příslibu čerpání. Proto můžeme hodnotu aktiva V_1 v čase t_1

[1] Ve většině případů banka ztrátu neutrpí vůbec.

[2] Klasickým příkladem jsou již poskytnuté úvěry.

[3] Nejběžnějším příkladem jsou kontokorentní účet a nejrůznější záruky a garance poskytnuté bankou ve prospěch klienta, které mohou být čerpány v budoucnu.

rozdělit na rizikovou a bezrizikou část.

$$V_1 = \begin{cases} OS + \alpha \times COM & \textit{riziková čast} \\ (1-\alpha) \times COM & \textit{bezriziková část} \end{cases} \tag{2.2}$$

kde α představuje procentní využití příslibu čerpání, tzv. využití v případě defaultu (usage given default - UGD). Z historických pozorování je patrné, že hodnota α prudce narůstá s tím, jak se klient blíží defaultu. Ačkoliv by se teoreticky α mělo modelovat stochasticky, v praxi se používá pro jeho odhad deterministická funkce založená na ratingu klienta na konci rozhodného období.

Je zřejmé, že potenciální ztrátu z titulu defaultu klienta zde představuje riziková část V_1, kterou označujeme jako upravenou expozici (adjusted exposure - AE). Očekávanou ztrátu tak můžeme vyjádřit jako

$$EL = AE \times LGD \times P_{default} \tag{2.3}$$

2.4 Ztráta v případě defaultu a riziková část V_1

Připomeňme, že upravená expozice je rizikovou částí V_1. Jestliže k defaultu dojde před t_H, je předmětem ztráty pouze riziková část V_1. Hodnota aktiva v držení banky je pak rovna

$$V_1(1 - LGD) + (V_0 - V_1) = V_0 - V_1 \times LGD \tag{2.4}$$

kde $(V_0 - V_1)$ je rovno $(1-\alpha) \times COM$ a představuje tak bezrizikovou část aktiva.

2.5 Matematické odvození očekávané ztráty

Nechť $\tilde{L}$ představuje náhodnou veličinu označující procentní výši ztráty se střední hodnotou $E[\tilde{L}] \equiv LGD$. Pravděpodobnost defaultu před t_H označme jako $\tilde{Q}_t(\tau^* \leq t_H)$. Pro střední hodnotu $\tilde{Q}_t(\tau^* \leq t_H)$ platí $E[\tilde{Q}_t(\tau^* \leq t_H)] \equiv EDF$.

V čase t_H mohou z pohledu hodnoty aktiva nastat dvě situace a to $\tilde{V}_{H|D}$ a $\tilde{V}_{H|\overline{D}}$, kde D značí default a $\overline{D}$ přežití. Očekávanou ztrátu v čase t_H tak lze vyjádřit jako

$$EL_H = E[\tilde{V}_{H|\overline{D}}] - E[V_H] = V_0 - E[\tilde{Q}(V_1(1-\tilde{L}) + (V_0 - V_1)) + (1-\tilde{Q})V_0] \tag{2.5}$$

což lze po úpravách vyjádřit jako

$$EL_H = V_1 \times LGD \times EDF \tag{2.6}$$

neboli

$$EL_H = AE \times LGD \times EDF \tag{2.7}$$

Příklad 2.1 *Předpokládejme aktivum s následujícími charakteristikami: COM = 10 000 000 USD, OS = 5 000 000 USD, UGD = 65%, EDF = 0.15% a LGD = 50%. Prvním krokem je výpočet upravené expozice.*

$$AE = OS + (COM - OS) \times UGD = 8\ 250\ 000 \tag{2.8}$$

Očekávanou ztrátu pak lze snadno vypočíst jako

$$EL = AE \times EDF \times LGD = 6\ 188\ USD \tag{2.9}$$

Kapitola 3

Neočekávaná ztráta

V předchozí kapitole jsme očekávanou ztrátu definovali jako

$$EL = AE \times LGD \times EDF \tag{3.1}$$

Z logiky věci je pak zřejmé, že banka by měla držet rezervy ve výši očekávané ztráty. Jak jsme však zmínili v přechozím textu, existuje vedle očekávané ztráty také ztráta neočekávaná. Skutečná ztráta se totiž může od té očekávané lišit a to jak v kladném tak záporném slova smyslu. Banka musí být kapitálově vybavena i pro případ těchto nečekaných výkyvů. Základní rozdíl mezi očekávanou a neočekávanou ztrátou je tedy ten, že očekávané ztráty jsou kryty rezervami, kdežto neočekávané ztráty kapitálem banky.

Neočekávaná ztráta má charakter náhodné veličiny, a proto má také pravděpodobnostní rozdělení. Pro praktické účely však definujeme neočekávanou ztrátu pomocí směrodatné odchylky aktiva v čase t_H.

$$UL_H \equiv \sqrt{D[V_H]} = E[V_H^2] - E[V_H]^2 \tag{3.2}$$

V následujícím textu index H vynecháme, i když se budeme implicitně odkazovat na hodnoty v čase t_H.

V příloze A je dokázáno, že neočekávaná ztráta rizikového aktiva je dána vztahem

$$UL = V_1 \times \sqrt{EDF \times \sigma_{LGD}^2 + LGD \times \sigma_{EDF}^2} \tag{3.3}$$

neboli

$$UL = AE \times \sqrt{EDF \times \sigma_{LGD}^2 + LGD \times \sigma_{EDF}^2} \tag{3.4}$$

kde za předpokladu dvoustavového modelu (tj. default / přežití) je σ_{EDF}^2 definováno jako

$$\sigma_{EDF}^2 = EDF \times (1 - EDF) \tag{3.5}$$

Z výše uvedené rovnice je patrné, že kdyby neexistovala nejistota ohledně očekávané míry defaultu, tj. $\sigma_{EDF}^2 = 0$, a ztráty v případě defaultu, tj. $\sigma_{LGD}^2 = 0$, pak by neočekávaná ztráta byla rovna nule.

Příklad 3.1 *Vraťme se k předešlému příkladu, kde AE = 8 250 000 USD, LGD = 50% a EDF = 0.15%. Dále předpokládejme, že σ_{LGD} = 25%. Prvním krokem je výpočet σ_{EDF}^2, které je ve dvoustavovém modelu rovno*

$$\sigma_{EDF}^2 = EDF \times (1 - EDF) = 0.0015 \times (1 - 0.0015) = 0.0015 \tag{3.6}$$

Neočekávaná ztráta je pak rovna

$$\begin{aligned} UL &= AE \times \sqrt{EDF \times \sigma_{LGD}^2 + LGD^2 \times \sigma_{EDF}^2} \\ &= 8\ 250\ 000 \times \sqrt{0.0015 \times 0.25 + 0.50^2 \times 0.0015} = 178\ 511 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Neočekávaná ztráta je tedy 178 511 USD. Pro porovnání připomeňme, že očekávaná ztráta byla pouhých 6 188 USD.

3.1 Příloha A - Odvození neočekávané ztráty

Předpokládejme, že náhodná veličina $\tilde{L}$ sleduje pravděpodobnostní rozdělení $f(\tilde{L})$. Je zřejmé, že platí následující.

$$\int f(\tilde{L})d\tilde{L} = 1 \tag{3.8}$$

$$E[\tilde{L}] \equiv \int \tilde{L}f(\tilde{L})d\tilde{L} = LGD \tag{3.9}$$

$$E[\tilde{L}^2] \equiv \int \tilde{L}^2 f(\tilde{L})d\tilde{L} = \sigma_{\tilde{L}}^2 + LGD^2 \tag{3.10}$$

S využitím těchto vztahů a předpokladu o nezávislosti defaultního procesu a ztrátové veličiny $\tilde{L}$ lze odvodit

$$\begin{aligned} E[V_H] &= (1 - EDF)V_0 + EDF \int f(\tilde{L})[V_0 - V_1 \times \tilde{L}]d\tilde{L} \\ &= (1 - EDF)V_0 + EDF[V_0 - V_1 \times LGD] \\ &= V_0 - EDF \times V_1 \times LGD \end{aligned} \tag{3.11}$$

Analogicky platí

$$\begin{aligned} E[V_H^2] &= (1 - EDF)V_0^2 + EDF \int f(\tilde{L})[V_0 - V_1 \times \tilde{L}]^2 d\tilde{L} \\ &= (1 - EDF)V_0^2 + EDF \int f(\tilde{L})[V_0^2 - 2V_0V_1\tilde{L} + V_1^2\tilde{L}^2]d\tilde{L} \\ &= (1 - EDF)V_0^2 + EDF \left[V_0^2 - 2V_0V_1LGD + V_1^2(\sigma_{\tilde{L}}^2 + LGD^2)\right] \\ &= V_0^2 - 2 \times EDF \times V_0 \times V_1 \times LGD + EDF \times V_1^2 \left(\sigma_{\tilde{L}}^2 + LGD^2\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Rozptyl konečné hodnoty aktiva V_H je tedy roven

$$\begin{aligned} D[V_H] &= E[V_H^2] - E[V_H]^2 \\ &= V_1^2 \left[EDF \times \sigma_{\tilde{L}}^2 + LGD^2(EDF - EDF^2)\right] \\ &\equiv V_1^2 \left[EDF \times \sigma_{\tilde{L}}^2 + LGD^2 \times \sigma_{EDF}^2\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

kde jsme využili skutečnosti, že pro dvoustavový defaultní model platí

$$\sigma_{EDF}^2 = EDF(1 - EDF) \tag{3.14}$$

Směrodatná odchylka konečné hodnoty úvěrového aktiva je tedy

$$\sigma_{V_H} = V_1 \times \sqrt{EDF \times \sigma_{\tilde{L}}^2 + LGD^2\tilde{\sigma}_{EDF}^2} \tag{3.15}$$

Kapitola 4

Kreditní ztráta v potrfoliu

Kreditní riziko nelze, narozdíl od tržního rizika zajistit. Jedniným nástrojem na redukci kreditního rizika tak zůstává diverzifikace.

4.1 Očekávaná vs neočekávaná ztráta

Připomeňme, že v případě jednoho úvěrového aktiva lze očekávanou ztrátu vyjádřit jako

$$EL = AE \times LGD \times EDF$$

a neočekávanou ztrátu jako

$$UL = AE \times \sqrt{EDF \times \sigma_{LGD}^2 + LGD^2 \times \sigma_{EDF}^2}$$

Kdybychom do stejného grafu vykreslili očekávanou a neočekávanou ztrátu, zjistili bychom, že s klesající kvalitou úvěru (tj. s rostoucím EDF)

- očekávaná ztráta roste lineárně a
- neočekávaná ztráta roste nelineárně a v porovnání s očekávanou ztrátou mnohem rychleji

OBRÁZEK

4.1.1 Očekávaná ztráta portfolia

Z pohledu očekávané ztráty portfolia je lhostejné, zda-li dvě úvěrová aktiva náleží stejnému či dvěma rozdílným dlužníkům. Očekávaná ztráta portfolia je prostým součetem dílčích očekávaných ztrát[1].

$$EL_P = \sum_i EL_i = \sum_i (AE_i \times LGD_i \times EDF_i)$$

[1]V následujícím textu jsou EL a UL vztaženy k AE, tj. $EL^* = \frac{EL}{AE}$ a $UL^* = \frac{UL}{AE}$.

4.1.2 Neočekávaná ztráta portfolia

V případě neočekávané ztráty je výpočet poněkud komplikovanější. Jestliže ρ_{ij} je korelace defaultu mezi úvěrovými aktivy i a j, pak lze tuto ztrátu vyjádřit jako

$$UL_P = [\rho_{ij} UL_i UL_j]^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

kde

$$UL_i = AE_i \times \sqrt{EDF_i \times \sigma^2_{LGD(i)} + LGD_i^2 \times \sigma^2_{EDF(i)}}$$

Z důvodu diverzifikace pak platí

$$UL_P << \sum_i UL_i$$

4.1.3 Riziková kontribuce

Riziková kontribuce i-tého aktiva k neočekávané ztrátě v rámci portfolia je definována jako

$$RC_i \equiv UL_i \frac{\partial UL_P}{\partial UL_i}$$

Jestliže aplikujeme derivaci na (4.1), získáme

$$RC_i = \frac{UL_i \sum_j UL_j \rho_{ij}}{UL_p}$$

4.1.4 Nediversifikovatelné riziko

Riziková kontribuce je mírou nediverzifikovatelného rizika úvěrového aktiva. Tato kontribuce totiž vyjadřuje výši kreditního rizika, kterého se nelze zbavit umístěním úvěrového aktiva do portfolia. Lze totiž dokázat, že

$$UL_P = \sum_i RC_i$$

Příklad 4.1 *Uvažujme dvě úvěrová aktiva s následujícími charakteristikami. Nechť je první úvěrové aktivum definováno parametry* $COM_1 = 10\ 000\ 000\ USD, OS_1 = 5\ 000\ 000\ USD, UGD_1 = 65\%, EDF_1 = 0.15\%, LGD_1 = 50\%, \sigma_{LGD_1} = 25\%$ *a druhé úvěrové aktivum parametry* $COM_2 = 2\ 000\ 000\ USD, OS_2 = 1\ 500\ 000\ USD, UGD_2 = 48\%, EDF_2 = 4.85\%, LGD_2 = 35\%, \sigma_{LGD_2} = 24\%$. *Předpokládejme, že korelace defaultu mezi oběma úvěrovými aktivy je* $\rho = 3\%$.

Vypočtěme expozici v případě defaultu

$$AE_1 = OS_1 + (COM_1 - OS_1) \times UGD_1 = 8\ 250\ 000\ USD$$
$$AE_2 = OS_2 + (COM_2 - OS_2) \times UGD_2 = 1\ 740\ 000\ USD$$

směrodatnou odchylku defaultu

$$\sigma_{EDF_1} = \sqrt{EDF_1 \times (1 - EDF_1)} = 3.87\%$$
$$\sigma_{EDF_2} = \sqrt{EDF_2 \times (1 - EDF_2)} = 21.48\%$$

dílčí očekávanou ztrátu

$$EL_1 = AE_1 \times EDF_1 \times LGD_1 = 6\ 188\ USD$$
$$EL_2 = AE_2 \times EDF_2 \times LGD_2 = 29\ 537\ USD$$

a dílčí neočekávanou neočekávanou ztrátu

$$UL_1 = AE_1 \times \sqrt{EDF_1 \times \sigma^2_{LGD_1} + LGD_1^2 \times \sigma^2_{EDF_1}} = 178\ 511\ USD$$
$$UL_2 = AE_2 \times \sqrt{EDF_2 \times \sigma^2_{LGD_2} + LGD_2^2 \times \sigma^2_{EDF_2}} = 159\ 916\ USD$$

Očekávaná ztráta portfolia je tedy rovna

$$EL_P = EL_1 + EL_2 = 35\ 724\ USD$$

a neočekávaná ztráta pak

$$UL_P = \sqrt{UL_1^2 + UL_2^2 + 2 \times \rho \times UL_1 \times UL_2} = 243\ 212\ USD$$

což je méně než prostý součet 338 427 USD. Rizikové kontribuce jsou pak

$$RC_1 = \frac{UL_1 \times (UL_1 + UL_2 \times \rho)}{UL_P} = 134\ 543\ USD$$
$$RC_2 = \frac{UL_2 \times (UL_2 + UL_1 \times \rho)}{UL_P} = 108\ 669\ USD$$

4.2 Příloha A - Odvození rizikové kontribuce

Derivací (3.1) lze snadno dokázat

$$RC_k = UL_k \frac{\partial UL_P}{\partial UL_k} = UL_k \times \frac{1}{2UL_P}\left[2UL_k + 2\sum_{i \neq k} UL_i \rho_{ik}\right]$$
$$= \frac{UL_k}{UL_p}\left[UL_k + \sum_i UL_i \rho_{ik} - UL_k \rho_{kk}\right] = \frac{UL_k}{UL_p}\left[UL_k(1-\rho_{kk}) + \sum_i UL_i \rho_{ik}\right]$$
$$= \frac{UL_k}{UL_P}\left[\sum_i UL_i \rho_{ik}\right]$$

V praxi může být počet párových korelací ρ_{ik} neúnosný, a proto je vhodné jejich počet zredukovat přiřazením jednotlivých úvěrových aktiv odvětvím. Korelace pak budou definovány nikoliv na úrovni úvěrových aktiv ale na úrovni těchto odvětví. Uvažujme dvě odvětví α a β. Výše uvedená rovnice pak přejde do tvaru

$$RC_k = \frac{UL_k}{UL_P}\left[UL_{k\in\alpha}(1-\rho_{\alpha\alpha}) + \sum_\beta \sum_{j\in\beta} UL_j \rho_{\alpha\beta}\right]$$
$$= \frac{UL_k}{UL_P}\left[\sum_\beta \sum_{j\in\beta} UL_j \rho_{\alpha\beta}\right]$$

Kapitola 5

Korelace defaultu

Neočekávanou ztrátu portfolia jsme v minulé kapitole vypočetli pomocí vzorce

$$UL_P = \left[\sum_i \sum_j \rho_{ij} UL_i UL_j \right]$$

kde ρ_{ij} byla tzv. korelace defaultu úvěrových aktiv[1]. Je třeba zdůraznit, že se nejedná o párovou korelaci aktiv společností i a j reprezentovaných např. cenou jejich akcií. Korelace defaultu je nejobtížněji kvatifikovatelný parametr v rámci řízení kreditních rizik - nelze ho měřit přímo, musí být vypočten.

Uvažujme dvě úvěrová aktiva i a j. Lze dokázat, že korelaci defaultu těchto dvou aktiv lze vypočíst na základě vztahu

$$\rho_{ij} = \frac{P(D_i \cdot D_j) - EDF_i \cdot EDF_j}{\sqrt{EDF_i(1 - EDF_i)}\sqrt{EDF_j(1 - EDF_j)}} \tag{5.1}$$

kde $P(D_i \cdot D_j) = EDF_i + EDF_j - P(D_i + D_j)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že alespoň jeden dlužník zdefaultuje. Vzhledem k tomu, že sdružená pravděpodobnost defaultu $P(D_i \cdot D_j)$ není známa, je konkrétní podoba této pravděpodobnostní funkce stanovena předpokladem. V praxi je nejčastěji používáno sdružené normální rozdělení.

Příklad 5.1 *Uvažujme akcie s korelací $\rho = 0.19$ emitované dlužníky A a B. Předpokládejme, že $P(D_a \cdot D_b)$ těchto dvou dlužníků sleduje sdružené dvourozměrné normální rozdělení. Dále předpokládejme, že pravděpodobnosti defaultu jsou $EDF_a = 0.0062$ a $EDF_b = 0.0025$ a že volatility uvažovaných akcií jsou $S_a = 0.3$ a $S_b = 0.6$.*

Nejprve z pravděpodobnosti defaultu vypočtěme odpovídající kvantil normálního rozdělení.

$$D_a := \Phi(EDF_a, 0, S_a) = -0.75$$
$$D_b := \Phi(EDF_b, 0, S_b) = -1.404$$

[1] Poskytnutý úvěr je z pohledu banky aktivem, odtud pojem "úvěrové aktivum".

Sdruženou pravděpodobnost defaultu lze vypočíst jako

$$P(D_i \cdot D_j) := \int_{-10}^{D_b}\int_{-10}^{D_a} \frac{1}{2\pi S_a S_b \sqrt{1-\rho^2}} \times$$
$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x}{S_a}\right)^2 - 2\rho\frac{xy}{S_a S_b}\right] + \left(\frac{y}{S_b}\right)^2} dxdy = 6.504 \times 10^{-5}$$

Korelace defaultu je tak rovna

$$\rho_{ab} = \frac{P(D_i \cdot D_j) - EDF_a EDF_b}{\sqrt{EDF_a(1-EDF_a)}\sqrt{EDF_b(1-EDF_b)}} = 0.013$$

Korelace defaultu je tedy o řád nižší než korelace aktiv.

Z výše uvedené rovnice je zřejmé, že ρ_{ij} je invariantní pro x/S_a a y/S_b. Proto lze od volatilit abstrahovat a integrál omezit na jednotkové dvourozměné rozdělení.

5.1 Vlastnosti korelací defaultu

Praxe i akademický výzkum naznačují následující vlastnosti korelace defaultu.

- Korelace defaultu jsou obecně nízké a mají tendenci růst s tím, jak se zvyšuje rating dlužníků.
- Korelace defaultu v čase zpočátku rostou a následně opět klesají.
- Korelace defaultu je zpravidla výrazně nižší než korelace mezi aktivy dlužníků. Tento bod potvrdil i náš příklad s korelací aktiv 0.19 a korelací defaultu 0.013.
- Často se sektáváme s mýtem, že korelace defaultu je v rozmezí 1% až 5%. Průměrná korelace defaultu je však nižší. Na druhou stranu korelace v rámci jedné odvětvové skupiny je zpravidla výrazně vyšší.
- Dalším mýtem je, že korelace defaultu v rámci jedné odvětvové skupiny je rovna 100%. To by znamenalo, že pokud zdefaultu jeden dlužník, pak automaticky zdefaultují všichni dlužníci v rámci skupiny, což je pochopitelně nesmysl.

5.2 Odhad korelace aktiv

Korelace aktiv se obvykle vyjadřuje pomocí korelace výnosů akcií emitovaných danými dlužníky. Problém nastává v situaci, kdy cena akcie není kotována na trhu. V tomto případě se zpravidla použije odvětvový index. Tím však lze podchytit pouze část volatility, tzv. systematické riziko. Zbývající část volatility, která je dána konkrétní situací dlužníka, označujeme jako specifické (nebo také idiosynkratické) riziko.

Uvažujme dlužníky A resp. B, které lze indexovat pomocí odvětví α resp. β s korelací $\rho_{\alpha\beta}$. Předpokládejme, že výnosnost aktiv dlužníka A, r^A, je váženým průměrem výnosu odvětví, r_α, a specifického výnosu $\hat{r}_A$.

$$r^A = \omega)1^A r_\alpha + \omega_2^A \hat{r}^A$$

Podobně výnosnost aktiv dlužníka B lze vyjádřit jako

$$r^B = \omega)1^B r_\alpha + \omega_2^B \hat{r}^B$$

Přepokládejme, že specifické části výnosnosti aktiv jsou nezávislé, tj. $\rho_{\hat{r}^A,\hat{r}^B} = 0$. Korelace aktiv dlužníků A a B je pak

$$\rho(A, B) = \omega_1^A \omega_1^B \rho_{\alpha\beta}$$

Specifické riziko se obecně považuje za funkci velikosti společnosti - čím větší společnost, tím nižší specifické riziko. JP Morgan CreditManager používá pro odhad váhy specifického rizika následující logistickou křivku

$$\omega_2^{A/B} = \frac{1}{2(1 + Assets^\gamma e^\lambda)}$$

kde $Assets$ představuje celkový objem aktiv společnosti vyjádřený v dolarech a parametry jsou odhadnuty na $\gamma = 0.4884$ a $\lambda = -12.4739$.

Příklad 5.2 *Uvažujme společnosti A a B s aktivy ve výši 100 MUSD. Váha specifického rizika odhadnutá pomocí výše uvedené rovnice je 48.5%. Váha systematického rizika je tak rovna 51.5% a výsledná korelace aktiv je tak rovna*

$$\rho(A, B) = 51.5\% \times 51.5\% \times \rho_{\alpha\beta}$$

5.3 Modelování korelací aktiv pomocí faktorového modelu

Uvažujme společnosti Toyota a General Motors. Protože obě společnosti působí v automobilovém průmyslu, je zřejmé, že hodnota jejich aktiv bude vzájemně korelovaná. Logaritmickou změnu ceny aktiv je tak možné vyjádřit pomocí regrese

$$r = \beta\Theta + \varepsilon \tag{5.2}$$

Proměnná Θ v je našem případě představována akciovým indexem automobilového průmyslu, ale může zahrnovat více faktorů. V takovém případě se jedná o syntetický index, který je dán vztahem

$$\Theta = \sum_{k=i}^{K} w_k \psi_k \tag{5.3}$$

kde w_k předavuje váhu k-tého dílčího indexu v rámci dlužníka a ψ_k pak představují jednotlivé indexy. Typickým příkladem je situace, kdy aktivity společnosti zahrnují několik odvětví nebo když je společnost svázána s určitým regionem[2].

Výše uvedená konstrukce nám umožňuje zásadním způsobem snížit počet párových korelací. Uvažujme portfolio obsahující 1 000 dlužníků. Výsledná korelační matice by obsahovala téměř půl miliónu párových korelací. Jestliže však každému dlužníkovi přiřadíme jedno z deseti odvětví a jeden z pěti regionů, zredukuje se počet párových korelací na pouhých 105.

[2]Hospodářský vývoj v regionu pak zpravidla modelujeme pomocí reprezentativního akciového indexu daného regionu.

Riziko dlužníka pak lze definovat jako

$$D[r] = \beta^2 D[\Theta] + D[\varepsilon] \tag{5.4}$$

Část $\beta D[\Theta]$ se nazývá systematickým rizikem, část $D[\varepsilon]$ pak specifickým resp. idiosynkratickým rizikem. Systematické riziko je dáno externími faktory a je společné všem dlužníkům v rámci skupiny definované parametrem Θ[3]. Systematické riziko představuje tu část rizika, které se nepodařilo vysvětlit pomocí Θ, a které je vlastní tak konkrétnímu dlužníkovi.

5.4 Příloha A - Odvození korelace defaultu

Nechť D_i a D_j představují default dlužníků i a j před stanoveným časovým horizontem. Definujme

$$P(D_i) = EDF_i$$
$$P(D_j) = EDF_j$$

S pomocí kovariance a směrodatných dochylek lze korelaci vyjádřit jako

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Za předpokladu dvoustavového modelu jsou směrodatné odchylky definovány jako

$$\sigma_i = \sqrt{EDF_i(1 - EDF_i)}$$
$$\sigma_j = \sqrt{EDF_j(1 - EDF_j)}$$

Kovariance je pak rovna

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = E[D_i \cdot D_j] - E[D_i]E[D_j] = P(D_i \cdot D_j) - P(D_i)P(D_j) \\ = P(D_i \cdot D_j) - EDF_i EDF_j \end{aligned}$$

čímž se dostáváme ke vztahu

$$\rho_{ij} = \frac{P(D_i \cdot D_j) - EDF_i EDF_j}{\sqrt{EDF_i(1 - EDF_j)}\sqrt{EDF_j(1 - EDF_j)}}$$

5.5 Příloha B - Korelace sdružených kreditních migrací

Mějme osm kreditních stavů AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC a D. Vraťme se zpět k Mertonově modelu. Předpokládejme, že každý z kreditních stavů je charakterizován určitým rozpětím hodnoty aktiv společnosti. Situaci ilustruje následující obrázek pro dlužníka, který se aktuálně nachází v kreditní skupině

[3]Připomeňme, že se u jednotlivých dlužníků liší parametr expozice β, a proto se také liší výše systematického rizika. Korelace systematického rizika mezi jednotlivými dlužníky v rámci skupiny je však rovna jedné.

BB. Předpokládáme, že výnosnost aktiv sleduje normální rozdělení OBRÁZEK Např. pravděpodobnost přesunu dlužníka do kreditní skupiny CCC je tak dána

$$P[CCC] = P[Z_D < R < Z_{CCC}] = N(Z_{CCC}) - N(Z_D)$$

Kvantily Z_D, Z_{CCC}, ..., Z_{AAA} jsou stanoveny tak, aby jim odpovídající plocha části pravděpodobnostního rozdělení odpovídala migrační matici. Např. je-li pravděpodobnost defaultu rovna 0.18%, pak je Z_D dáno

$$Z_D = N^{-1}[P[default]] = N^{-1}[0.0018] = -2.912$$

Tímto způsobem je pravděpodobnostní rozdělení "rozřezáno"na jednotlivé kreditní regiony. OBRÁZEK OBRÁZEK Pokusme se odvodit sdruženou pravděpodobnost kreditních migrací dlužníka A a B. S její pomocí je možné kvantifikovat pravděpodobnost, že se dlužník A přesune z kreditní skupiny BBB do skupiny AA a zároveň dlužník B zůstane v kreditní skupině AA. Podobně jako v případě dvoustavového modelu předpokládejme, že tuto sdruženou pravděpodobnost lze modelovat pomocí dvourozměrného normálního rozdělení, tj.

$$f(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}$$

kde ρ představuje korelaci aktiv mezi oběma dlužníky a kterou lze odhadnout pomocí

$$\rho = \alpha \times corr(ind_1, ind_2)$$

kde ind_1 a ind_2 představují odvětvové indexy, do kterých náleží dlužnící A a B a koeficient α slouží k redukci korelace v případě, kdy oba dlužníci náleží do téhož odvětví.

Příklad 5.3 *Přepodkládejme, že korelace mezi aktivy je $\rho = 30\%$. Jaká je pravděpodobnost, že se dlužník A přesune ze kreditní skupiny BBB do skupiny AA a dlužník B zůstane v kreditní skupině A?*

$$P_{23} - P_2P_3 = \int_{2.696}^{3.54} \int_{-1.51}^{1.98} f(x, y, \rho) dxdy - 0.0033 \times 0.9105 = -1.41 \times 10^{-4}$$

Hodnoty integračních mezí byly převzaty z výše uvedených tabulek.

Kapitola 6

Pravděpodobnostní rozdělení rizika defaultu

Pro řízení kreditního rizika je klíčový odhad extrémním ztrát. Vyjádřit pravděpodobnost a výši těchto ztrát analyticky je však téměř nemožné. Proto se pro modelování těchto extrémních ztrát používá metoda Monte-Carlo. Tím se však dostáváme k dalšímu problému. Protože nás obecně zajímají kvantily přesahující 99%, je zapotřebí velkého množství simulací, abychom dosáhli stability odhadu. V praxi se proto často nejprve provede simulace Monte-Carlo s omezeným počtem simulací a následně se do takto získaných požadovaných kvantilů "fituje" vybrané pravděpodobnostní rozdělení. Výběr tohoto pravděpodobnostního rozdělení je však značné subjektivní. Obecně však panuje silná shoda na tom, že toto pravděpodobnostní rozdělení nemá být normální. Je třeba si uvědomit, že při výběru konkrétního pravděpodobnostního rozdělení není důležitá shoda mezi v okolí jeho střední hodnoty ale v jeho chvostě.

6.1 Beta rozdělení

Poměrně oblíbeným pravděpodobnostním rozdělením pro odhad extrémních ztrát je tzv. beta rozdělení, jehož pravděpodobnostní funkce má tvar

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 \quad \textit{v ostatních případech} \end{cases} \tag{6.1}$$

kde střední hodnota resp. rozptyl jsou definovány jako

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \tag{6.2}$$

resp.

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{6.3}$$

V předchozím textu jsme odvodili očekávanou ztrátu (střední hodnota) a neočekávanou ztrátu (směrodatnou odchylku). Vzhledem k tomu, že beta rozdělení je dvouparametrické, mohli bychom odhadnout jeho dva parametry pomocí výše uvedených rovnic. Jak však již bylo zmíněno, naším cílem je dosáhnout maximální shody pro extrémní ztráty. Proto parametry beta rozdělení odhadujeme na vysokých kvantilech získaných simulací Monte-Carlo[1]. Je zřejmé, že takto získané parametry nebudou odpovídat očekávané a neočekávané ztrátě.

6.2 Inverzní normální rozdělení

Jiným oblíbeným pravděpodobnostním rozdělení pro "fitování" extrémních kreditních ztrát je inverzní normální rozdělení. Toto rozdělení je použito společností KMV ale také v prvním pilíři Basel II.

$$Q(x,p,\rho) \equiv N\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(\rho)\right)\right] \tag{6.4}$$

kde x je náhodná veličina ze standardizovaného normálního rozdělení, $p > 0$ a $\rho < 1$.

[1]Samotný odhad je možné provést minimalizací statistiky $\chi^2 \equiv sum_i \left[\frac{y_i-\beta(x_i)}{y_i}\right]^2$.

Kapitola 7

Simulace Monte-Carlo

Postup při simulaci kreditních ztrát metodou Monte-Carlo je následující.

1. Prvním krokem je odhad pravděpodobností defaultu PD, expozice v okamžiku defaultu AE a podmíněné ztráty LGD pro uvažované portfolio.

2. Následně odhadneme korelace aktiv mezi jednotlivými dlužníky.

3. Vygenerujeme set nezávislých náhodných čísel ze standardizovaného normálního rozdělení. Tyto náhodné veličiny zkorelujeme pomocí korelační matice odhadnuté v předchozím kroku (např. pomocí Cholesky dekompozice).

4. Pro každého dlužníka vypočteme bod defaultu na základě jeho pravděpodobnosti defaultu.

5. Porovnáme bod defaultu s nasimulovanými náhodnými veličinami a rozhodneme, zda-li došlo k defaultu.

6. Jestliže došlo k defaultu, simulujeme podmíněnou ztrátu jako náhodnou veličinu lgd. K tomu je zapotřebí znalost nejen střední hodnoty podmíněné ztráty LGD ale také jejího rozptylu σ_{LGD}.

7. Následně u dlužníků v defaultu vypočteme ztrátu jako $AE \times lgd$.

8. Posledním krokem je výpočet celkové ztráty, která je součtem dílčích ztrát přes všechny dlužníky. Opakováním kroků 3 až 7 získáme požadovaný počet simulací.

Typický výsledek simulace zachycuje následující obrázek.
OBRÁZEK

7.1 Matematika za simulací Monte-Carlo

V následujícím textu se zaměříme na body 3 až 7.

7.1.1 Generování náhodných veličin

Pro každého z N dlužníků v rámci potrfolia vygenerujeme náhodné číslo ze standardizovaného normálního rozdělení.

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \dots \epsilon_N \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

kde ϵ_i $N(0,1)$ pro všechna i. Abychom získali vektor vzájemně korelovaných náhodných veličin, je třeba provést transformaci

$$\epsilon'_u = \sum_{p=1}^{N} m_{up}\epsilon_p$$

což lze maticově vyjádřit jako

$$\epsilon' = M\epsilon \tag{7.2}$$

Úkolem je tedy nalézt vhodnou transformační matici M, s jejíž pomocí jsme schopni převést vektor ϵ na vektor ϵ', který bude náhodným výběrem z vícerozměrného normálního rozdělení s požadovanou kovarianční strukturou. Hledaná transformační matice M musí splňovat podmínku

$$\Sigma = M^T M \tag{7.3}$$

kde Σ je korelační matice. Tuto podmínku lze odvodit následovně.

$$\begin{aligned} \Sigma = D[\epsilon'] = E[(M\epsilon)^2] - E[M\epsilon]^2 \\ = E[M^T\epsilon\epsilon^T M] - E[M\epsilon]^2 \\ = M^T E[\epsilon\epsilon^T]M - M^T E[\epsilon]^2 M \\ = M^T I M = M^T M \end{aligned} \tag{7.4}$$

Cholesky dekompozice

Cholesky dekompozice rozloží positivně definitní matici Σ na

$$\Sigma = A^T A \tag{7.5}$$

kde A je horní trojúhelníková matice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lze dokázat, že

$$a_{ii} = \left(s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \right)^{\frac{1}{2}}$$

a

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left(s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk} \right)^{\frac{1}{2}}$$

kde s_{ij} je prvkem korelační matice Σ.

Hlavní nevýhodou Cholesky dekompozice je skutečnost, že neumí rozložit korelační matici, pokud je signulární nebo není positivně definitní.

Eigenvalue dekompozice

Eigenvalue rovnice je

$$\Sigma U = U\Lambda$$

kde Σ je daná matice, Λ je diagonální matice, jejíž prvky tvoří eigenvalues matice Σ. Matici U je třeba určit. Úpravou výše uvedené rovnice získáme

$$\Sigma = U\Sigma U^{-1} = U\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}U^{-1} = Q^T Q$$

Tento přístup vyžaduje ortogonální matici U, tj. $U^T = U^{-1}$. Korelované náhodné veličiny $epsilon'$ vypočteme pomocí

$$\epsilon' = Q\epsilon = \Lambda^{\frac{1}{2}}U^{-1}\epsilon$$

SVD dekompozice

Pro korelační matice, které jsou singulární, lze použít SVD dekompozici. Jádrem dekompozice je rovnice

$$\Sigma = VDV^T$$

kde V je ortogonální matice, tj. $V^T = V^{-1}$ a D je diagonální matice se signulárními hodnotami matice Σ na diagonále. Korelované náhodné veličiny je tak možné získat pomocí vztahu

$$\epsilon' = D^{\frac{1}{2}}V^{-1}\epsilon$$

7.1.2 Výpočet bodu defaultu

Předpokládejme, že pro každého dlužníka máme k dispozici EDF. Bod defaultu vypočteme jako $DP \equiv N^{-1}(EDF)$. Dalším krokem je porovnání korelovaných náhodných veličin ϵ' s bodem defaultu pro i-tého dlužníka.

$$\begin{aligned} \epsilon' < DP_i \quad & \textit{default dlužníka} \\ \epsilon' \geq DP_i \quad & \textit{dlužník není v defaultu} \end{aligned}$$

7.1.3 Podmíněná ztráta

Jestliže je daný dlužník v defaultu, je třeba určit podmíněnou ztrátu. Ačkoliv bychom správně na podmíněnou ztrátu měli pohlížet jako na náhodnou veličinu, v praxi se často používá deterministická hodnota odpovídající střední hodnotě LGD. Pokud bychom chtěli na podmíněnou ztrátu pohlížet jako na náhodnou veličinu, pak se nejčastěji používá beta rozdělení. Pro simulaci z beta rozdělení je za potřebí nejen znalost střední hodnoty LGD ale také směrodatné odchylky σ_{LGD}.

7.1.4 Výpočet ztráty

Celkovou ztrátu v rámci jedné simulace lze snadno vypočíst jako

$$L = \sum_{dlužníci\ v\ defaultu} AE_i \times lgd_i$$

7.1.5 Simulované pravděpodobnostní rozdělení ztráty

Simulované pravděpodobnostní rozdělení ztráty je možné získat opakováním výše uvedených kroků. Počet simulací zavisí na velikosti portfolia a požadovaném kvantilu, nicméně obecně se uvádí, že je třeba 10 000 až 1 000 000 simulací, abychom dosáhli přijatelné stability řešení.

Kapitola 8

Teorie extrémní hodnoty

Pravděpodobnostní rozdělení ztráty kreditního porfolia je typicky značně sešikmené, což má za následek tzv. efekt "tlustých" chvostů. Pro odhad vysokých kvantilů tohoto pravděpodobnostního rozdělení je tak třeba zkombinovat simulaci Monte-Carlo s analytickým "fitování" chvostů. Tím se dostáváme k teorie extrémní hodnoty (extreme value theory - EVT). Ta se, jak napovídá její název, zaměřuje právě na extrémní ztráty a jejich pravděpodobnosti.

Z pohledu teorie extrémní hodnoty lze rozlišovat tři typy ztrát a to

- očekávanou ztrátu,
- neočekávanou ztrátu a
- extrémní ztrátu.

Teorie extrémní hodnoty se pak snaží o nalezení hranic mezi těmito typy ztrát.

8.0.6 Základy teorie extrémní hodnoty

Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ z identického pravděpodonostního rozdělení F, které však neznáme. Předpokládejme, že tyto náhodné veličiny představují ztráty. Pak lze extrémní ztráta definovat jako největší ztrátu v rámci pozorování

$$M_n = max[X_1, X_2, ..., X_n] \tag{8.1}$$

popř. pomocí prahové hodnoty u_α

$$P[X > u_\alpha] = 1 - F(u_\alpha) = \alpha \tag{8.2}$$

kde α představuje požadovaný kvantil. Práh u_α tak představuje minimální úroveň ekonomického kapitálu, kterým musí banka disponovat, aby přežila extrémní ztrátu.

V případě, že je stanoveno u_α, pak nás zpravidla také zajímá podmíněná pravděpodobnost

$$F_{u_\alpha} \equiv P[X - u_\alpha \leq x | X > u_\alpha]$$

Tuto pravděpodobnost lze přeformulovat do tvaru

$$
\begin{aligned}
F_{u_\alpha}(x) &\equiv P[X - u_\alpha \leq x | X > u_\alpha] \\
&= \frac{P[X - u_\alpha \leq x, X > u_\alpha]}{P[X > u_\alpha]} \\
&= \frac{F_{u_\alpha}(x + u_\alpha) - F_{u_\alpha}(u_\alpha)}{1 - F_{u_\alpha}(u_\alpha)}, x \geq 0 \quad (8.3)
\end{aligned}
$$

V případě, že máme dostatečné množství dat, lze podmíněnou pravděpodobnost F_{u_α} vypočíst přímo. V opačném případě je třeba vhodným způsobem tuto pravděpodobnost aproximovat.

8.0.7 Obecné Pareto rozdělení

Obecné Pareto rozdělení je rodina pravděpodobnostních rozdělení s třemi stupni volnosti a pravděpodobností funkcí

$$G_{\xi,\mu,\psi}(x) = e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\psi}\right)_+^{-\frac{1}{\xi}}}, \quad \xi \neq 0, \psi > 0 \tag{8.4}$$

kde ψ je škálovací parametr, μ je lokační parametr a ξ je parametr, který ovlivňuje tvar rozdělení. Pro $\xi = 0$ přejde rozdělení do limitního tvaru

$$G_{0,\mu,\psi}(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\psi}}} \tag{8.5}$$

V praxi se pak často namísto (8.4) používá zjednodušený tvar

$$G_{\xi,\mu,\psi}(x) = 1 - \left(1 + \xi\frac{x-\mu}{\psi}\right)_+^{-\frac{1}{\xi}}, \quad \xi \neq 0 \tag{8.6}$$

Obě rovnice mají stejnou asymptotickou formu a pro praktické účely je tedy lhostejné, kterou z nich použijeme.

Podle hodnoty parametru ξ lze obecné Pareto rozdělení dále klasifikovat na

- $\xi = 0$ - Gumbel popř. dvojité exponenciální rozdělení (zahrnuje normální, exponenciální, gamma a lognormální rozdělení)
- $\xi > 0$ - Frechet rozdělení s tlustým chvostem na pravo (zahrnuje Pareto, Burr, log-gamma, Cauchy a studentovo rozdělení)
- $\xi < 0$ - Weibull rozdělení s tlustým chvostem na levo (zahrnuje beta a uniformní rozdělení)

OBRÁZEK

8.0.8 Kritéria konvergence

Věta 8.1 (Fisher-Tippett, 1928) *Uvažujme i.i.d posloupnost náhodných veličin $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ z neznámé distribuční funkce F, pro kterou známe neúplnou empirickou pravděpodobnostní funkci F^{emp}. Předpokládejme, že existuje* *posloupnost reálných čísel a_n a b_n taková, že posloupnost normalizovaného maxima $(M_n - a_n)/b_n$ konverguje k pravdnedegerativnímu pravděpodobnostnímu rozdělení*

$$P\left[\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right] = F^{emp}(a_n x + b_n) \rightarrow G(x) \quad pro \quad n \rightarrow \infty \tag{8.7}$$

V tomto případě patří rozdělení G do rodiny obecného Pareto rozdělení $G_{\xi,\nu,\psi}(x)$.

Jestliže je splněna podmínka (8.7), pak pravděpodobnostní rozdělení F v maximální doméně aktrakce $G_{\xi,\mu,\psi}$, což zapisujeme jako

$$F \in MDA(G_{\xi,\mu,\psi}) \tag{8.8}$$

Jestliže jsme tedy schopni na přijatelně velkém vzorku pozorování prokázat limitní chování, pak limitní rozdělení musí být obecené Pareto rozdělení. Pro účely řízení rizik se pak nejčastěji používá Frechet rozdělení.

Věta 8.2 (Gnedenko, 1943) *Pro Frechet rozdělení platí*

$$F \in MDA(G_{\xi,\mu,\psi}) \Leftrightarrow 1 - F(x)\ x^{-1/\xi} L(x) \tag{8.9}$$

pro nějakou pomalu se měnící funkci $L(x)$.

Tato věta říká, že pokud chvost rozdělení $F(x)$ "vymírá" jako mocninná funkce, pak se nachází v doméně atrakce Frechet rozdělení.

8.0.9 Prahové hodnoty

Následující věta garantuje, že distribuční funkce přesahu přes určitou prahovou hodnotu konverguje k limitě obecného Pareto rozdělení.

Věta 8.3 (Picklands, 1975; Balkema-de Haan, 1974) *Nechť je x_0 konečný či nekonečný bod pravé strany pravděpodobnostního rozdělení, tj.*

$$x_0 = sup\{x \in R : F(x) < 1\} \leq \infty \tag{8.10}$$

Nechť je pravděpodobnostní funkce přesahu přes prahovou hodnotu u_α dána rovnicí

$$F_{u_\alpha}(x) \equiv P[X - u_\alpha \leq x | X > u_\alpha] \quad pro 0 \leq x < x_0 - u_\alpha \tag{8.11}$$

Pak $F \in MDA(G)$ právě tehdy a jen tehdy jestliže je G obecné Pareto rozdělení s tím, jak se prahová hodnota blíží koncovému bodu pravé strany pravděpodobnostního rozdělení. To znamená, že existuje kladná měřitelná funkce $\Psi(u_\alpha)$ taková, že

$$\lim_{u_\alpha \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq x < x_0 - u_\alpha} |F_{u_\alpha}(x) - G_{\xi,\mu,\psi(u_\alpha)}(x)| = 0 \tag{8.12}$$

tehdy a právě tehdy jestliže $F \in MDA(G)$.

Pro dostatečně vysoké prahové hodnoty u_α lze tedy pravděpodobnostní funkci přesahu F aproximovat pomocí obecného Pareto rozdělení $G_{\xi,\mu,\psi}$. Věta nám tak dává teoretický základ toho, že je-li zvolena dostatečně vysoká prahová hodnota, sledují data za touto prahovou hodnotou obecné Pareto rozdělení.

8.0.10 Funkce střední hodnoty přesahu

Stále ještě nebyla zodpovězena klíčová otázka, totiž jakým způsobem zvolit prahovou hodnotu. V předchozím textu jsme prahovou hodnotu odvodili od ratingu, který se odjíví od určitého cílovaného kvantilu. Existují však i jiné metody. Řada z nich je vizuálního charakteru.

- QQ grafy - Konkávní popř. konvexní odchylka od trendové přímky indikuje těžké popř. lehké chvosty v empirickém pravděpodobnostním rozdělení.

- Hill funkce odhadu - Tato funkce není nic jiného než inverzí průměru logaritmu podílů pořadových statistik empirických dat. Tato funkce odhadu se používá pro aproximaci ξ^{-1} v obecném Pareto rozdělení.

- funkce střední hodnoty přesahu - Tato funkce je definována jako

$$\hat{e}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - u)_+}{\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i > u\}}} \tag{8.13}$$

  Funkce střední hodnoty přesahu $\hat{e}(u)$ je empirickým odhadem střední hodnoty náhodné veličiny

$$e(u) \equiv E[X - u | X > u] \tag{8.14}$$

  Pro obecné Pareto rozdělení lze střední hodnotu jednoduše vypočíst jako

$$e(u) = \frac{\psi + \xi u}{1 - \xi} \tag{8.15}$$

  kde $\psi + \xi u > 0$. Všimněme si, že pro obecné Pareto rozdělení je $e(u)$ je lineární funkcí prahové hodnoty u. To znamená, že pokud graf $\hat{e}(u)$ přibližně sleduje přímku (nebo alespoň má kladný gradient) nad určitou hodnotu u, pak to indikuje, že odpovídající hodnota přesahu sleduje obecné Pareto rozdělení s kladným parametrem ξ. Kladný gradient je jasnou známkou těžkého chvostu.