

Obsah

1	Přehled základních derivátových obchodů	3
1.1	Forwardové obchody	3
1.2	Futures	5
1.3	Opce	5
1.4	Typy obchodníků	6
2	Mechanismy trhů futures	7
2.1	Systém marží	8
2.2	Typy příkazů	8
3	Ceny futures a forwardů	11
3.1	Krátký prodej	11
3.2	Měření úrokových sazeb	11
3.3	Forwardová cena investičního aktiva	12
3.4	Ocenění forwardového kontraktu	14
3.5	Rozdíl mezi cenami futures a forwards	14
3.6	Spotřební komodity	14
3.7	Cena forwardových obchodů / futures a očekávaná budoucí cena	15
4	Zajištění pomocí futures	17
4.1	Bazické riziko	17
4.2	Zajišťovací poměr	18
4.3	Futures na akciové indexy	19
5	Úrokové sazby	21
5.1	Zero sazba	21
5.2	Oceňování dluhopisů	22
5.3	Výpočet pokladniční zero sazby	22
5.4	Forwardové sazby	23
5.5	Forward rate agreement	24
5.6	Tvar úrokových křivek	25
5.7	Konvence počtu dní	25
5.8	Futures na státní dluhopisy	25
5.8.1	Výpočet konverzního faktoru	26
5.8.2	Cheapest to deliver	27
5.8.3	Wild card play	27
5.8.4	Výpočet ceny futures	27
5.9	Lema 5A - Durace	28

5.9.1	Konvexita	29
6	Swapy	31
6.1	Úrokové swapy	31
6.1.1	Hodnota úrokového swapu v čase $t_0 = 0$	32
6.1.2	Hodnota úrokového swapu v čase t	34
6.1.3	Výpočet diskontního faktoru	34
6.2	Swapová křivka	35
6.3	Měnový swap	35
6.3.1	Ocenění měnového swapu	36
6.3.2	Basis swap spread	37
7	Základy opčních trhů	39
7.1	Pokladová aktiva	39
7.2	Akciové opce	39
7.3	Vlastnosti akciových opcí	40
7.4	Horní a dolní limit pro ceny opcí	41
7.4.1	Horní limit ceny opcí	41
7.4.2	Dolní limit ceny opcí	42
7.5	Put-call parita	43
7.6	Předčasné uplatnění opce	43
7.6.1	Předčasné uplatnění kupní opce	43
7.6.2	Předčasné uplatnění prodejní opce	44
7.7	Vliv dividend	45
7.7.1	Dolní limit pro cenu evropské opce	45
7.7.2	Předčasné uplatnění americké kupní opce	46
7.7.3	Put-call parita	46
7.8	Opční strategie	46
7.8.1	Opce a akcie	46
7.8.2	Spready	48
7.8.3	Kombinace	52
8	Úvod do binomických stromů	55
8.1	Rizikově neutrální ocenění	57
8.2	Dvoustupňový binomický strom	58
8.2.1	Americká opce	58
8.3	Výpočet parametru d a u	58
8.3.1	Delta opce	59
9	Modelování cen akcií	61
9.1	Markovův proces	61
9.2	Spojitě pojetí stochastického modelu	61
9.2.1	Wienerův proces	61
9.2.2	Itô proces	63
9.3	Lema 9A - Odvození Itô procesu	64
9.4	Lema 9B - Lognormální rozdělení	65

10 Black-Scholes model	67
10.1 Výnosová míra	67
10.2 Volatilita	68
10.3 Koncept modelu	69
10.3.1 Odvození rovnic Black-Sholes modelu	71
10.4 Implikovaná volatilita	72
10.5 Dividendy	72
10.6 Modifikace Black-Scholes modelu	73
10.6.1 Akcie s konstantním dividendovým výnosem	73
10.6.2 Měnové opce	73
10.6.3 Futures opce	74
11 Řecká písmena	75
11.1 Delta	75
11.2 Theta	76
11.3 Gamma	77
11.4 Vztah mezi delta, theta a gamma	79
11.5 Vega	79
11.6 Rho	80
11.7 Syntetická opce	80
12 Volatility smile	83
12.1 Argumenty vysvětlující volatility smile	83
12.1.1 Rozdílná nabídka a poptávka	84
12.1.2 Volatilita jako funkce ceny podkladového aktiva	85
12.2 Implikované pravděpodobnostní rozdělení	85
12.3 Volatility surface	87
13 Value at risk (VaR)	89
13.1 Podmíněný VaR	90
13.2 Historický VaR	90
13.3 Modelovací techniky	90
13.3.1 Lineární model	91
13.3.2 Kvadratický model	92
13.3.3 Monte Carlo	92
13.4 Mapování cash-flow	93
14 Odhad volatilit a korelací	95
14.1 Odhad volatilit	95
14.1.1 Aritmetický průměr	95
14.2 Vážený průměr	96
14.2.1 Model ARCH	96
14.2.2 Model EWMA	96
14.2.3 Model GARCH(1,1)	96
14.3 Odhad parametrů	97
14.3.1 Metoda maximální pravděpodobnosti	97
14.3.2 Odhad parametrů modelu GARCH(1,1)	98
14.4 Korelace	100
14.4.1 Definice korelace a kovariance	100
14.4.2 Odhad korelace	101

14.4.3	Kovariační a korelační matice	101
15	Numerické metody	103
15.1	Binomický strom	103
15.1.1	Ocenění opcí pomocí binomického stromu	104
15.1.2	Řecká písmena	106
15.1.3	Ostatní případy	107
15.2	Trinomický strom	109
15.3	Implikovaný binomický strom	110
15.3.1	Konstrukce implikovaného binomického stromu	112
15.3.2	Modelový příklad	115
15.4	Simulace Monte Carlo	118
15.4.1	Modelování korelovaných náhodných veličin	119
15.4.2	Počet vzorků	120
15.4.3	Řecká písmena	120
15.5	Rozdílová metoda výpočtu ceny opce	120
16	Exotické opce	123
16.1	Nestandardní americké opce	123
16.2	Forwardové opce	123
16.3	Složené opce	123
16.4	Opce s volbou	124
16.5	Bariérová opce	124
16.5.1	Down-and-in a down-and-out opce	125
16.5.2	Up-and-in a up-and-down opce	126
16.6	Binární opce	127
16.7	Zpětná opce	127
16.8	Opce s výzvou	128
16.9	Asijská opce	128
16.9.1	Geometrický průměr	128
16.9.2	Aritmetický průměr	129
16.10	Opce na výměnu aktiv	129
16.11	Portfoliové opce	129
17	Rozšíření modelů a numerických postupů	131
17.1	CEV model	131
17.2	Skokový model	132
17.3	Stochastické modely volatility	132
17.4	IVF model	133
17.5	Deriváty s vazbou na historický vývoj cen	133
17.5.1	Zpětné opce	134
17.5.2	Bariérová opce	134
17.6	Opce na dvě korelovaná aktiva	136
17.6.1	Transformace proměnných	136
17.6.2	Modifikace binomického stromu	136
17.6.3	Modifikace pravděpodobnosti	137
17.7	Simulace Monte Carlo a americké opce	137

18 Martingaly a míry	141
18.1 Tržní cena rizika	141
18.1.1 Jeden rizikový parametr	141
18.1.2 Vícero rizikových parametrů	143
18.2 Martingaly	144
18.2.1 Martingale míra	144
18.2.2 Použití alternativních jmenovatelů v ekvivalentní martingale míře	145
18.3 Rozšíření o vícero nezávislých faktorů	148
18.4 Aplikace	148
18.4.1 Modifikace Black-Scholes modelu	148
18.4.2 Opce s výměnnou jednoho aktiva za druhé	149
18.5 Změna forwardově rizikového světa	150
18.6 Kvanta	151
18.6.1 Tradiční rizikově neutrální svět	152
18.7 Siegelův paradox	152
18.8 Lema 18A - Zobecnění Itô lemy	153
18.8.1 Varianta 1	153
18.8.2 Varianta 2	153
18.8.3 Varianta 3	154
18.9 Lema 18B - Vícenásobné zdroje nejistoty	154
19 Úrokové deriváty - standardní tržní modely	157
19.1 Rozšíření Black-Scholes modelu	157
19.1.1 Teoretické zdůvodnění modelu	158
19.2 Opce na dluhopisy	159
19.2.1 Evropské dluhopisové opce	159
19.2.2 Vnořené opce na dluhopis	159
19.2.3 Volatilita výnosové míry	160
19.2.4 Teoretické zdůvodnění modelu	160
19.3 Úrokový cap, floor a collar	161
19.3.1 Úrokový cap	161
19.3.2 Úrokový floor	162
19.3.3 Put-call parita	162
19.3.4 Úrokový collar	163
19.3.5 Teoretické zdůvodnění modelu	163
19.4 Evropské swapové opce	164
19.4.1 Vztah k dluhopisovým opcím	164
19.4.2 Teoretické zdůvodnění modelu	165
19.5 Zobecnění	166
19.6 Konvexita	166
19.6.1 Matematické zdůvodnění	167
19.6.2 Časová korekce	167
19.7 Lema 19A - Odvození konvexity	169
20 Modelování úrokových sazeb	171
20.1 Rovnovážné modely	171
20.1.1 Rovnovážné modely s jedním parametrem	172
20.1.2 Rovnovážné modely se dvěma parametry	174
20.1.3 Nearbitrážní modely	175

20.1.4	Opce na kupónové dluhopisy	177
20.2	Úrokové stromy	178
20.2.1	Příklad trinomického úrokového stromu	178
20.2.2	Nestandardní větvení	179
20.2.3	Obecná metodika úrokových stromů	179
20.2.4	Kalibrace	182
20.2.5	Zajištění a jednoparametrový model	183
20.2.6	Forwardové a futures sazby	183
20.3	Swapové obchody	184
20.3.1	Deriváty swapových obchodů	184
21	Kreditní riziko	191
21.1	Očekávaná ztráta z dluhopisů	192
21.2	Pravděpodobnost defaultu za předpokladu nulové míry náhrady	192
21.2.1	Kvantifikace pravděpodobnosti defaultu	193
21.2.2	Míra náhrady	193
21.3	Rizikově neutrální vs. reálný svět	197
21.4	Využití cen akcií pro odhad pravděpodobnosti defaultu	198
21.5	Odhad výše ztráty z titulu defaultu	199
21.5.1	Netting	199
21.5.2	Snížování expozice na kreditní riziko	200
21.6	Změna kreditního ratingu	200
21.7	Korelace defaultních událostí	201
21.7.1	Míry korelace	201
21.7.2	Vztahy mezi jednotlivými měřítky korelace	202
21.7.3	Modelování korelace	202
21.8	CVaR	203
21.8.1	Credit Risk Plus	203
21.8.2	CreditMetrics	204
22	Kreditní deriváty	207
22.1	Kreditní swap	207
22.1.1	Ocenění	208
22.1.2	Argumenty neexistence arbitráže	209
22.1.3	Implikované pravděpodobnosti defaultu	210
22.1.4	Odhad míry náhrady	210
22.1.5	Binární kreditní swapy	210
22.1.6	Portfoliový kreditní swap	211
22.1.7	Risk defaultu na straně prodávajícího	211
22.2	Totální swap	211
22.3	Opce na kreditní spread	212
22.4	Sekuritizované dluhopisy	213
22.5	Úprava cen derivátů o riziko defaultu	214
22.5.1	Deriváty, které jsou aktivy	214
22.5.2	Deriváty, které mohou být aktivy i pasivy	215
22.6	Konvertibilní dluhopisy	217
22.6.1	Ocenění konvertibilního dluhopisu	218

23 Opce na reálná aktiva	221
23.1 Oceňování budoucího cash-flow současnou hodnotou	221
23.2 Rozšíření rizikově neutrálního ocenění	222
23.2.1 Jedna podkladová proměnná	222
23.2.2 Vícero podkladových proměnných	222
23.2.3 Odhad tržní ceny rizika	223
23.3 Postup při oceňování nového projektu	224
23.4 Ceny komodit	225
23.4.1 Modelování ceny komodit pomocí trinomického stromu	225
23.5 Ocenění opcí v investičním projektu	227
23.5.1 Projekt bez vnořené opce	227
23.5.2 Projekt s vnořenou opcí	228
23.5.3 Vícero vnořených opcí	230

Kapitola 1

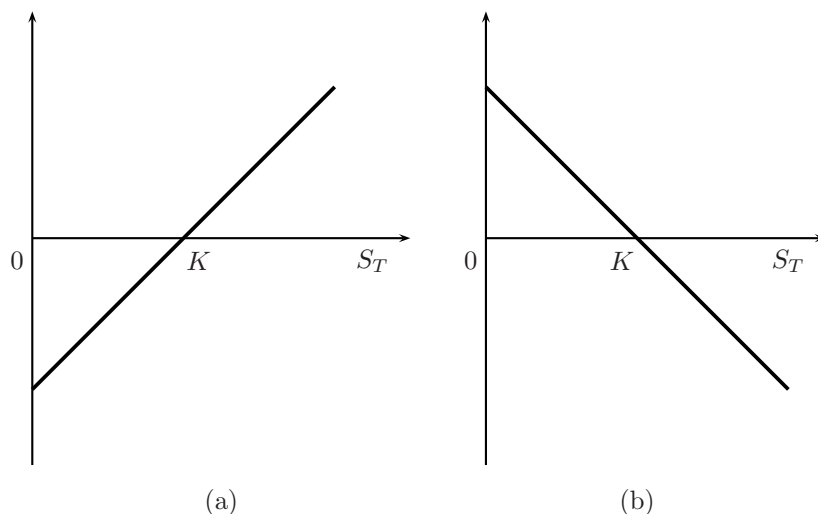
Přehled základních derivátových obchodů

Derivátem rozumíme finanční instrument, jehož cena je odvozena od ceny tzv. podkladového aktiva. Podkladovým aktivem je velice často jiné obchodovatelné aktivum (např. akcie) nebo finanční veličina (např. úrokové sazby nebo měnové kurzy).

Mezi nejvýznamnější burzy obchodujícími s deriváty patří Chicago Board of Trade, Chicago Mercantile Exchange a Chicago Board Options Exchange. Mimo to jsou deriváty obchodovány na tzv. OTC (Over-the-Counter). Objem obchodů na OTC značně převyšuje objem obchodů na burzách. Zásadní rozdíl mezi OTC a burzou je ten, že obchody na burze jsou organizované, standardizované a z právního hlediska je protistranou každého účastníka burza. To vede na jedné straně k vyšší likviditě a nižšímu kreditnímu riziku, na druhé straně k nižší flexibilitě při sjednávání a vypořádávání obchodů.

1.1 Forwardové obchody

Forward je dohodou o prodeji / koupi dohodnutého množství určitého aktiva za dohodnutou cenu k předem sjednanému datu. To znamená, že všechny náležitosti obchodu jsou dohodnuty v čase T_0 , avšak obchod samotný proběhne v čase T_1 . Majitel dlouhé pozice má povinnost koupit, majitel krátké pozice pak povinnost prodat dané aktivum v souladu s dohodnutými podmínkami. Forwardové obchody jsou obchodovány na OTC.



Výplata z forwardového kontraktu: (a) dlouhá pozice, (b) krátká pozice
 K - realizační cena, S_T - spotová cena v době splatnosti

Forwardové obchody je možné ocenit za předpokladu neexistence arbitráže. Uvažujme forwardový obchod, který nám umožňuje v čase T_n nakoupit jednotku pokladového aktiva za F_0 . Spotová cena pokladového aktiva je S_0 , bezriziková úroková sazba je rovna j (roční frekvence úročení) a je konstantní po celou dobu životnosti uvažovaného forwardového obchodu. Dále předpokládáme, že pokladové aktivum po dobu životnosti forwardového obchodu negeneruje žádnou výplatu a že náklady spojené s vlastnictvím tohoto aktiva jsou nulové. Investor může sledovat dvě investiční strategie. První strategií je nakoupit spotově pokladové aktivum za S_0 a zároveň uzavřít forwardový obchod na prodej tohoto aktiva splatný v čase T_n . Druhou investiční strategií je v čase T_0 uložit částku S_0 a inkasovat úroky odpovídající bezrizikové sazbě j . První strategie tak v čase T_n generuje výplatu $F_0 - S_0$ a druhá strategie výplatu $S_0[(1+j)^{T_n-T_0} - 1]$. Je zřejmé, že v případě neexistence arbitráže musí být obě investiční strategie identické a že rovnovážná cena je tak rovna

$$F_0 = S_0(1+j)^{T_n-T_0}$$

V případě, že by smluvená forwardová cena byla nižší než rovnovážná forwardová cena F_0 , mohl by majitel daného pokladového aktiva toto aktivum spotově prodat za S_0 , částku uložit na depozitní účet za bezrizikovou úrokovou míru i a zároveň podkladové aktivum forwardově nakoupit. Jestliže by naopak forwardová cena byla vyšší než rovnovážná forwardová cena F_0 , mohl by si investor půjčit S_0 za bezrizikovou sazbu i , spotově nakoupit dané pokladové aktivum a to pak forwardově prodat.

Příklad: Předpokládejme, že spotová cena zlata je 300 USD za trojskou uncí a bezriziková úroková sazba je 5% p.a. Jaká by měla být dohodnuta cena pro jednoroční forwardový obchod?

$$F_0 = 300 \cdot (1 + 0.05) = 315$$

V případě, že by dohodnutá cena pro jednoroční forwardový obchod nebyla rovna 315 USD za trojskou unci, existoval by prostor pro arbitráž.

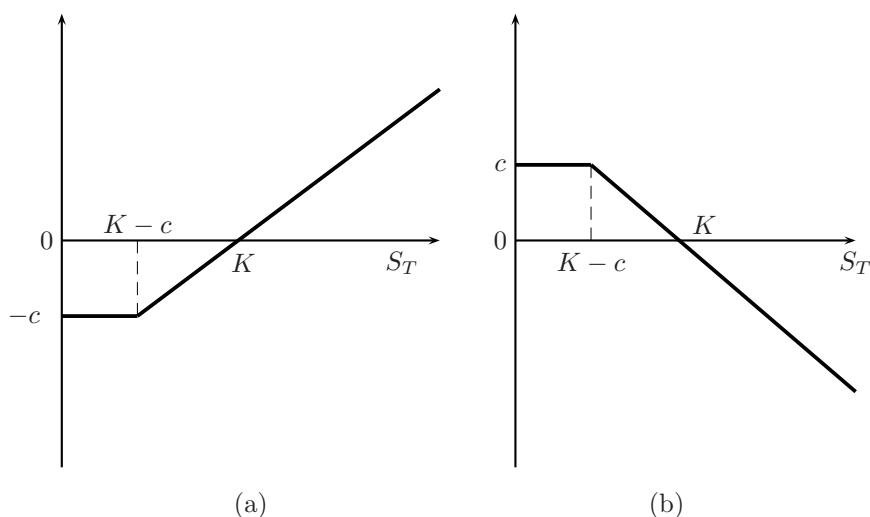
1.2 Futures

Podobně jako forwardové obchody je také futures dohoda o prodeji / koupi předem dohodnutého aktiva k dohodnutému budoucímu datu za dohodnutou cenu. Na rozdíl od forwardových obchodů jsou však futures obchodovány na burze. To s sebou přináší menší flexibilitu, která je však kompenzována vyšší likviditou a nižším kreditním rizikem.

1.3 Opce

V případě opce má jeden z účastníků (tzv. držitel opce) právo nakoupit / prodat předem dohodnuté aktivum za předem dohodnutou cenu k předem smluvenému termínu. Druhý z účastníků (tzv. vypisovatel opce) má povinnost prodat / nakoupit, je-li k tomu držitelem opce vyzván. Na rozdíl od forwardových obchodů a futures je tedy pro opci typický asymetrický vztah mezi účastníky dohody. Proto musí držitel opce zaplatit vypisovateli tzv. opční prémii.

Podle toho, umožňuje-li opce svému držiteli nakoupit nebo prodat, rozlišujeme tzv. kupní (call) nebo prodejní (put) opci. Jestliže může držitel uplatnit své právo kdykoliv do splatnosti opce, mluvíme o tzv. americké opci. Může-li toto právo uplatnit pouze v den splatnosti opce, hovoříme o tzv. evropské opci.



Výplata z kupní opce: (a) majitel opce, (b) vypisovatel opce
 K - realizační cena, c - opční premie, S_T - spotová cena v době splatnosti

1.4 Typy obchodníků

Účastníky obchodů s deriváty můžeme v zásadě rozdělit do tří skupin: (a) zajišťovatele, (b) spekulanty a (c) arbitrážéry.

Zajišťovatel se obchodováním s deriváty snaží zajistit proti rizikům plynoucím z pohybů finančních veličin. Spekulanti spekulují na budoucí vývoj trhů - snaží se predikovat vývoj a dosáhnout tak zisku. Arbitrážéři se snaží využít nedokonalosti trhu k dosažení bezrizikového zisku (např. formou cenových rozdílů na dvou různých trzích).

Kapitola 2

Mechanismy trhů futures

Futures je dohoda o nákupu / prodeji stanoveného aktiva za stanovenou cenu ve stanovenou dobu. Jedna strana má povinnost prodat, druhá pak koupit předem dohodnuté podkladové aktivum. Futures jsou obchodovány na burze, což s sebou přináší standardizaci:

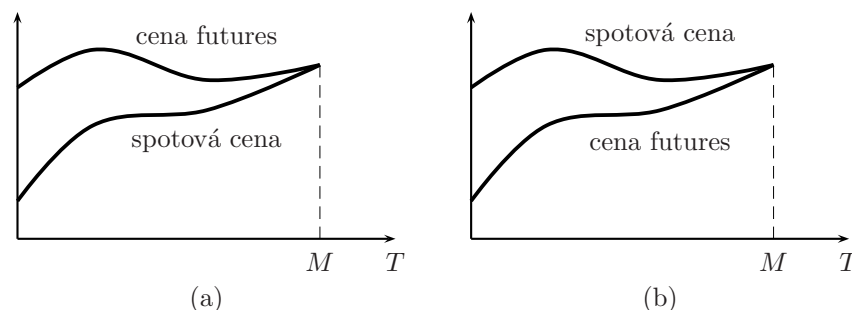
- aktiva
- jednotkového množství
- datumu popř. místa vypořádání obchodu

Platí, že jestliže je některá z položek specifikována alternativně (např. aktivum nebo místo dodání), náleží právo volby straně, která má povinnost aktivum prodat (tzv. majitel krátké pozice).

Cena futures se řídí nabídkou a poptávkou. Pro většinu kontraktů jsou specifikovány denní limity cen (a to oběma směry). V některých případech jsou také limitovány pozice, které je možné držet. Tento mechanismus má být ochranou před spekulanty. Může však být překážkou v situaci, kdy cena podkladového aktiva rapidně vzroste / poklesne z jiných než spekulativních důvodů.

S tím, jak se blíží doba splatnosti, blíží se cena futures spotové ceně. V okamžiku splatnosti se obě ceny rovnají¹. Většina obchodů je však uzavřena před datem jejich vypořádání.

¹Kdyby tomu tak nebylo, existoval by prostor pro arbitráž.



Konvergence ceny futures ke spotové ceně
 T - čas, M - maturita

2.1 Systém marží

Pro každého účastníka obchodu je protistranou burza, která tak přejímá kreditní riziko. Aby burza minimalizovala možný negativní dopad tohoto rizika, používá systém marží. Marže představuje částku, kterou musí každý účastník složit na určený účet, a která má kompenzovat případné nepříznivé výkyvy v ceně futures. Každý účastník obchodu má otevřený tzv. maržový účet. Aby mu bylo povoleno uzavřít kontrakt, musí na tento účet složit tzv. počáteční marži. Na maržovém účtu jsou pak následně zúčtovávány každodenní zisky / ztráty plynoucí z dané pozice. Jestliže zůstatek na účtu přesáhne počáteční marži, může účastník obchodu odpovídající rozdíl z účtu "stáhnout". Jestliže však zůstatek účtu klesne pod tzv. udržovací marži², musí účastník obchodu dorovnat částku až do výše počáteční marže. Tato částka se nazývá pohyblivá marže. Jestliže zůstatek účtu není doplněn, je pozice burzou uzavřena.

Platí, že obchodovat na burze mohou pouze její členové. Ostatní subjekty pak musí obchodovat pouze prostřednictvím členů burzy. Jednotliví členové mohou pro své klienty požadovat vyšší marže než nařizuje burza, ale nemohou nastavit marže na nižší úrovni. V řadě případů jsou účastníci obchodů kompenzováni za částky držené na maržových účtech formou úroku. Při otevření maržového účtu je možné k dosažení požadované výše marže použít také cenné papíry. U státních dluhopisů se zpravidla uznává 90% jejich nominální hodnoty, u akcií pak pouze 50%. Stejně jako jednotliví účastníci obchodů, musí také členové burzy udržovat tzv. zúčtovací marži. Výše této marže není ve většině případů součtem absolutní výše pozic jejich jednotlivých klientů, ale je dána celkovou výslednou pozicí (tzv. netting přístup).

2.2 Typy příkazů

Členové burzy provádí obchody na svůj účet popř. na účet klientů. Klientské obchody provádí na základě příkazů. Základní typy příkazů jsou:

²Udržovací marže je o něco nižší než počáteční marže - standardně se jedná o 75% počáteční marže.

- **Market order** - Příkaz je proveden okamžitě za nejlepší cenu dosažitelnou na trhu.
- **Limit order** - Příkaz je proveden pouze v případě, že cena na trhu dosáhne stanovené limitní ceny nebo je z pohledu klienta výhodnější než tato limitní cena.
- **Stop order / Stop-loss order** - Příkaz je proveden za nejlepší možnou cenu po té, co cena dosáhne stanovené limitní ceny nebo je z pohledu klienta horší než tato limitní cena.
- **Stop-limit order** - Stop-limit order je kombinací limit order a stop order. Příkaz se stává limit order po té, co cena na trhu dosáhne určité limitní ceny nebo ceny, která je z pohledu investora horší než tato limitní cena. V rámci tohoto typu příkazu musí klient specifikovat dvě ceny - cenu, při které je aktivován limit order (tzv. spot price) a cenu, za kterou je proveden případný limit order (tzv. limit price).

Kapitola 3

Ceny futures a forwardů

3.1 Krátký prodej

Krátký prodej (short selling) je typ obchodu, ve kterém je prodáváno aktivum, které "prodávající" nevlastní. Tento typ obchodování je možný pouze pro některé druhy investičních instrumentů. Typickým instrumentem, který bývá předmětem krátkého prodeje, je akcie. V praxi je možné si příslušný akciový titul za smlouvenou cenu vypůjčit, prodat a v době maturity obchodu akcii zpětně nakoupit na trhu a vrátit původnímu majiteli. Z logiky obchodu vyplývá, že se jedná o spekulaci na pokles ceny. Krátký prodej je totiž úspěšný pouze tehdy, jestliže po započtení odměny za vypůjčení je akcie prodána draž, než je později zpětně nakoupena.

Poznámka: Ve Spojených státech je možné provádět krátký prodej akcií pouze v případě, že poslední pohyb akcií byl vzestup (s výjimkou obchodů na akciový index popř. obchodů, které akciový index replikují).

3.2 Měření úrokových sazeb

Pro přesnou specifikaci úrokové sazby není důležitá pouze informace o její výši, ale také informace o frekvenci úročení. Mějme kapitál ve výši 100 EUR, který budeme úročit sazbou ve výši 5% po dobu jednoho roku. Uvažujme následující dva případy. V prvním případě bude frekvence úročení roční, v druhém případě čtvrtletní. Pojmem "frekvence úročení" rozumíme, jak často jsou připisovány úroky. V prvním případě budeme mít na konci roku částku

$$100 \cdot (1 + 0.05) = 105.00$$

a druhém případě částku

$$100 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^4 = 105.09$$

Jaká by měla být výše úrokové sazby pro čtvrtletní úročení, aby částka na konci roku byla stejná?

$$4 \cdot (\sqrt[4]{1 + 0.05} - 1) = 0.04909$$

Ekvivaletní úroková sazba by tedy byla 4.909%. Obecně lze tento vztah vyjádřit jako

$$j = m \cdot \left(\sqrt[m]{1+i} - 1 \right),$$

kde j je hledaná ekvivalentní úroková sazba, m je frekvence úročení a i je úroková sazba s roční frekvencí připsování úroků. Ekvivalentní úroková sazba bude klesat s rostoucí frekvencí úročení. Limitní j je přitom dáno vztahem

$$j = \lim_{m \rightarrow \infty} m \cdot \left(\sqrt[m]{1+i} - 1 \right) = \ln(1+i)$$

V souvislosti s ekvivalentní úrokovou sazbou pro $m \rightarrow \infty$ hovoříme o tzv. kontinuálním úročení / odúročení.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A \cdot \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m \cdot n} = A \cdot e^{n \cdot j}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A \cdot \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{-m \cdot n} = A \cdot e^{-n \cdot j}$$

3.3 Forwardová cena investičního aktiva

Ocenění forwardového obchodu je založeno na myšlence neexistence arbitráže. V rámci ocenění se poměrují dvě investiční strategie, které jsou z pohledu případného investora ekvivalentní, a proto by měly generovat stejný výnos. Jestliže by tomu tak nebylo, mohl by investor uzavřít krátkou pozici v jedné a dlouhou pozici v druhé strategii a tak získat dodatečný výnos.

Uvažujme investiční aktivum, jehož spotová cena v čase T_0 je S_0 , a forwardový obchod, kterým lze v čase T_n zafixovat cenu tohoto aktiva na F_0 . Definujme $n = T_n - T_0$. Předpokládejme, že bezriziková úroková sazba je rovna j (kontinuální úročení) a je konstantní po celou dobu životnosti forwardového obchodu. Dále předpokládejme, že uvažované aktivum negeruje svému majiteli po dobu životnosti žádné cash-flow a že náklady spojené s jeho držením jsou nulové. Rovnovážnou forwardovou cenu definujeme jako cenu, při které neexistuje možnost arbitráže. Tato rovnovážná cena je tedy dána vztahem

$$F_0 = S_0 e^{j \cdot n}$$

Jestliže by forwardová cena byla nižší než F_0 , mohl by majitel příslušného investičního aktiva toto aktivum spotově prodat, prostředky získané prodejem uložit za bezrizikovou úrokovou míru a aktivum forwardově nakoupit. V případě, že by forwardová cena byla vyšší než F_0 , mohl by si investor půjčit S_0 , spotově nakoupit pokladové aktivum, které by v čase T_n forwardově prodal.

Příklad: Uvažujme forwardový obchod na nákup akcie, která nepřináší žádné dividendy. Obchod bude realizován za tři měsíce. Aktuální cena akcie je 40 USD a bezriziková úroková sazba je 5% p.a. (kontinuální úročení). Jaká je rovnovážná forwardová cena (tj. cena, která neumožňuje arbitráž)?

$$F_0 = S_0 \cdot e^{j \cdot n} = 40 \cdot e^{0.05 \cdot 0.25} = 40.50$$

Rovnovážná cena je 40.50 USD. V případě, že je forwardová cena různá od 40.50 USD, je možné provést arbitráž.

Jestliže pokladové investiční aktivum generuje svému majiteli určité cash-flow, ať už kladné (např. kupónové platby, dividendy) nebo záporné (např. náklady na skladování), je nutné spotovou cenu upravit o současnou hodnotu tohoto cash-flow. Rovnice pro výpočet forwardové ceny se tak přejde do tvaru

$$F_0 = (S_0 - I)e^{j \cdot n}$$

kde I je současná hodnota cash-flow, které obdrží majitel aktiva po dobu životnosti forwardového obchodu.

Příklad: Uvažujme forwardový obchod na nákup kupónového dluhopisu, jehož aktuální cena je 900 USD. Dále předpokládejme, že dluhopis bude splatný za 5 roků a že forwardový obchod je splatný za 1 rok. Dluhopis přinese svému držiteli kupón 40 USD po 6 a 12 měsících, bezriziková úroková sazba je 9% p.a. pro 6 měsíců a 10% p.a. pro 12 měsíců (kontinuální úročení). Jaká je rovnovážná forwardová cena?

$$F_0 = (S_0 - I)e^{n \cdot j}$$

$$I = 40 \cdot e^{-0.5 \cdot 0.09} + 40 \cdot e^{-0.1} = 74.43$$

$$F_0 = (900 - 74.43) \cdot e^{0.1} = 912.39$$

Rovnovážná forwardová cena je 912.39 USD.

Jestliže má cash-flow generované pokladovým investičním aktivem charakter výnosové míry spíše než absolutních částek, musí v případě neexistence arbitráže platit

$$S_0 \int_0^n e^{st} e^{qt} dt = S_0 \int_0^n e^{rt} dt$$

kde s představuje míru růstu ceny investičního aktiva a q výnosovou míru z titulu cash-flow generovaného aktivem. Protože $r = s + q$, lze výše uvedenou rovnici dále upravit do tvaru

$$S_0 e^{(s+q)n} = S_0 e^{rn}$$

Vzhledem k tomu, že $F_0 = S_0 e^{sn}$, lze rovnovážnou forwardovou cenu vyjádřit jako

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)t}$$

Příklad: Uvažujme aktivum, které přináší výnos 2% p.a. (kontinuální úročení). Bezriziková úroková míra je 10% p.a. (kontinuální úročení). Současná cena aktiva je 25 USD. Forwardový kontrakt je splatný za 6 měsíců. Jaká je rovnovážná cena?

$$F_0 = 25 e^{0.5 \cdot (0.1 - 0.02)} = 26.02$$

Rovnovážná forwardová cena je 26.02 USD.

3.4 Ocenění forwardového kontraktu

Dlouhou pozici forwardového kontraktu lze v daný časový okamžik ocenit pomocí vztahu

$$f_L = (F_0 - K)e^{-n \cdot j}, \quad (3.1)$$

kde K je dodací cena dle kontraktu. V okamžiku sjednání obchodu platí $F_0 = K$, tj. hodnota kontraktu je nulová. S tím, jak se však v průběhu času mění cena podkladové veličiny, mění se také rovnovážná forwardová cena. Dodací cena však zůstává nezměněná. V době splatnosti forwardového kontraktu platí $F_0 = S_T$, kde S_T je spotovou cenou. Logika vztahu (3.1) vyplývá z toho, že F_0 představuje cenu, za kterou jsme schopni pozici uzavřít a zafixovat tak zisk popř. ztrátu. Vzhledem k tomu, že forwardové obchody jsou symetrické finanční deriváty, platí pro krátkou pozici vztah podobný (3.1).

$$f_S = -f_L = (K - F_0)e^{-n \cdot j}, \quad (3.2)$$

Jestliže budeme uvažovat, že dané aktivum generuje cash-flow se současnou hodnotou I , modifikují se výše uvedené rovnice do tvaru

$$f_L = (F_0 - K)e^{-n \cdot j} - I$$

resp.

$$f_S = (K - F_0)e^{-n \cdot j} + I$$

Použijeme-li vztah

$$F_0 = S_0 e^{n \cdot j}$$

můžeme rovnice (3.1) a (3.2) dále upravit na

$$f_L = S_0 - K e^{-n \cdot j} - I$$

resp.

$$f_S = K e^{-n \cdot j} - S_0 + I$$

3.5 Rozdíl mezi cenami futures a forwards

V případě obchodů, jejichž splatnost je jen několik málo měsíců, je rozdíl mezi futures a forwards zanedbatelný. S tím, jak se doba splatnosti zvětšuje, zvětšuje se také rozdíl mezi cenou futures a ekvivalentním forwardovým obchodem. Rozdíly je možné vysvětlit daňovými a transakčními důvody, systémem vypořádání marží a rozdílným kreditním rizikem protistran.

3.6 Spotřební komodity

Komodity mohou vedle funkce investičního instrumentu plnit také funkci výrobního vstupu (např. měď). Proto pro komodity nemusí nezbytně platit

$$F_0 = (S_0 + I)e^{n \cdot j},$$

kde parametr I představuje současnou hodnotu nákladů na držení komodit¹. Důvodem je to, že se na trhu mohou vyskytovat subjekty, které preferují držbu dané komodity např. jako "pohotovostní" výrobní zásoby. Z pohledu majitele je tak výhodnější držet přímo komoditu než např. dlouhou forwardovou pozici. Proto může platit

$$F_0 < (S_0 + I)e^{n \cdot j}.$$

Výhody vyplývající z fyzické držby dané komodity lze vyjádřit pomocí sazby y .

$$F_0 e^{n \cdot y} = (S_0 + I)e^{n \cdot j}$$

Jsou-li náklady na držbu komodity funkcí času (např. nájemné za skladovací prostory), můžeme výše uvedený vztah rozepsat do podoby

$$F_0 e^{n \cdot y} = S_0 \cdot e^{n \cdot (j+u)}$$

3.7 Cena forwardových obchodů / futures a očekávaná budoucí cena

Uvažujme spekulanta, který vstoupil do dlouhé pozice v rámci futures kontraktu. Očekává tedy, že spotová cena daného aktiva bude v době splatnosti kontraktu vyšší než dohodnutá cena. Dále uvažujme, že spekulant uloží současnou hodnotu této dohodnuté ceny do bezrizikového instrumentu s výnosovou mírou $j\%$ p.a. (kontinuální úročení). Očekávaná současná hodnota tohoto obchodu je tedy dána vztahem

$$E[f_L] = -F_0 e^{-n \cdot j} + E[S_T] e^{-n \cdot k},$$

kde parametr k představuje výnosovou míru adekvátní danému aktivu. Pro účely následujícího odvození budeme uvažovat, že mezi futures a forwards není rozdíl. Předpokládáme-li neexistenci arbitáže², musí v době uzavření kontraktu platit

$$F_0 e^{-n \cdot j} = E[S_T] e^{-n \cdot k}$$

nebo-li

$$F_0 = E[S_T] e^{-n \cdot (k-j)}$$

Hodnota parametru k závisí na systematickém riziku investice. Jestliže je S_T nekorelované s trhem, má nulové systematické riziko a platí $k = j$. To implikuje $F_0 = E[S_T]$. Jestliže je S_T pozitivně korelováno s trhem, má pozitivní systematické riziko a platí $k > j$. To znamená, že $F_0 < E[S_T]$. V případě záporné korelace platí analogicky $k < j$ a z toho vyplývající $F_0 > E[S_T]$. Jestliže platí $F_0 = E[S_T]$, pak lze očekávat, že forwardové ceny budou stejně často růst jako klesat. Výsledný průměrný zisk z držení této pozice je proto nulový. Jestliže $F_0 < E[S_T]$, pak lze očekávat, že forwardové ceny budou v průměru růst. Důvodem je to, že v době splatnosti by mělo platit, že forwardová cena se rovná ceně spotové. Očekávaný průměrný zisk z držení této pozice by proto měl

¹Na komodity lze pohlížet tak, že přináší záporný výnos. Tento záporný výnos je představován především náklady na skladování.

²Zde je třeba si uvědomit rozdíl mezi pojmy arbitráž a spekulace. Arbitráž umožňuje dosažení zisku bez rizika - arbitrážér si tedy může vždy dopředu vypočítat svůj zisk. Naproti tomu spekulant podstupuje riziko s výhledem na možný zisk. Jeho skutečný zisk popř. ztráta však nejsou dopředu známy.

být kladný. Analogická tvrzení platí také pro situaci, kdy $F_0 > E[S_T]$.

Výsledky z praktického pozorování trhu jsou smíšené. Některé výzkumy výše uvedené scénáře potvrdily, některé nikoliv. To, že je futures cena indikátorem budoucí ceny, se tedy nepodařilo potvrdit ani vyvrátit.

Kapitola 4

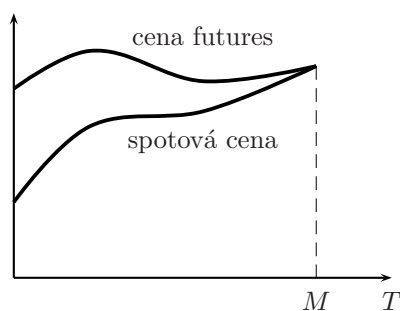
Zajištění pomocí futures

Cílem zajištění (hedging) je minimalizovat negativní dopady vyplývající z pohybů veličin jako jsou ceny finančních instrumentů, úrokové sazby, měnové kurzy. Co se týče hospodářského výsledku společnosti, může zajištění paradoxně vést v některých případech k destabilizaci vykazovaných finančních výsledků. To nastane v situaci, kdy se cena zboží / služeb produkovaných danou společností přizpůsobuje cenám výrobních vstupů. To má za následek relativně stabilní výnosovou marži. Tato rovnováha však může být porušena právě zajištěním.

Poznámka: V následující kapitole budeme s futures zacházet jako s forwardovými obchody.

4.1 Bazické riziko

Báze představuje rozdíl mezi spotovou cenou zajišťovaného aktiva a futures cenou daného kontraktu. V případě, že jsou zajišťované aktivum a podkladové aktivum pro danou futures stejné, platí, že v době splatnosti je báze nulová.



Vývoj báze v čase
 T - čas, M - maturita

Uvažujme zajišťovatele, který v čase t_1 zajistil svou krátkou pozici a v čase t_2 toto zajištění zrealizoval. V době sjednání zajištění byla báze

$$b_1 = S_1 - F_1$$

a v době realizace zajištění pak

$$b_2 = S_2 - F_2$$

Efektivní cena, kterou zajišťovatel takto získal je

$$F_1 + (S_2 - F_2) = F_1 + b_2$$

V okamžiku sjednávání hedgingu, tj. v čase t_1 , je již známo F_1 , avšak není známo b_2 . Riziko spojené s b_2 se nazývá bazické riziko. Z důvodů, které byly vysvětleny dříve, je bazické riziko větší pro komodity než např. pro akciové trhy. Velice často také platí, že podkladové aktivum pro danou futures je odlišné od aktiva, proti jehož cenovým výkyvům se chtěl zajišťovatel zajistit¹.

Definujme S_2^* jako cenu podkladového aktiva v čase t_2 a S_2 je cenu hedgovaného aktiva v čase t_2 . Vztah

$$F_1 + (S_2 - F_2)$$

může pak modifikovat do následující podoby

$$F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

Jestliže by zajišťované a podkladové aktiva byla totožná, byla by hodnota $S_2 - S_2^*$ nulová a vztah by se zredukoval na původní tvar.

4.2 Zajišťovací poměr

Zajišťovací poměr (hedging ratio) je poměr velikosti pozice ve futures k velikosti obchodu, který chceme zajistit. Až dosud jsme uvažovali poměr 1.00.

Uvažujme, že zajišťovatel má dlouhou pozici v akciích a krátkou ve futures. Změna v hodnotě celkové pozice je tak dána vztahem

$$f = \partial S - h \partial F,$$

kde ∂S je změna spotové ceny, ∂F změna v cenách futures a h je zajišťovací poměr. Rozptýl náhodné veličiny f je

$$\sigma_f^2 = E[f^2] - E[f]^2$$

Cílem zajištění je minimální změna hodnoty f , tj. dosáhnout toho, aby σ_f^2 bylo pokud možno nulové.

$$\sigma_f^2 = \sigma_S^2 + h^2 \sigma_F^2 - 2h \rho_{S,F} \sigma_S \sigma_F = 0$$

$$h = \rho_{S,F} \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

Efektivitu zajištění lze posuzovat jako část rozptylu, která je jím eliminována. Ta je vyjádřena pomocí $\rho_{S,F}^2$ neboli $h^2 \frac{\sigma_F^2}{\sigma_S^2}$. Parametry $\rho_{S,F}$, σ_F a σ_S jsou zpravidla vypočteny na základě historických hodnot ∂S a ∂F .

¹I když by pochopitelně mělo platit, že se jsou jejich ceny pokud možno co nejvíce korelovány.

Jestliže N_A je výše zajišťované pozice a Q_F velikost lotu (v kusech), lze počet futures kontraktů potřebných k zajištění pozice vyjádřit jako

$$N = \frac{h \cdot N_A}{Q_F}$$

Příklad: Letecká společnost plánuje nákup jednoho miliónu galonů leteckého paliva v průběhu příštího měsíce a chce se zajistit proti změně cen pomocí futures. Tabulka udává změny cen futures a spotových cen. Jako nejbližší komoditou obchodovanou na burze futures byl vybrán topný olej.

Měsíc	Změna ceny futures	Změna spotové ceny
1	0.021	0.029
2	0.035	0.020
3	-0.046	-0.044
4	0.001	0.008
5	0.044	0.026
6	-0.029	-0.019
7	-0.026	-0.010
8	-0.029	-0.007
9	0.048	0.043
10	-0.006	0.011
11	-0.036	-0.036
12	-0.011	-0.018
13	0.019	0.009
14	0.027	-0.032
15	0.029	0.023

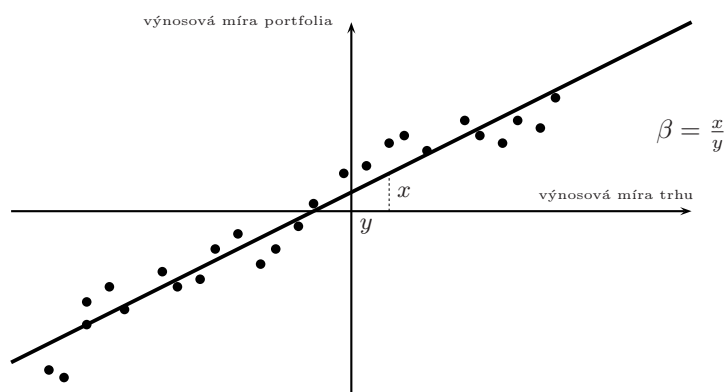
Jeden lot obsahuje 42 000 galonů topného oleje. Velikost pozice je 2 000 000 USD. Jaký je optimální počet kontraktů potřebných k zajištění obchodu?

Z údajů uvedených v zadání a v tabulce lze vypočítat $\sigma_S = 0.0263$, $\sigma_F = 0.0313$, $\rho_{S,F} = 0.9280$ a $h = 0.7800$. Optimální počet lotů pak určíme ze vztahu

$$N = \frac{0.78 \cdot 2000000}{42000} = 37.14$$

4.3 Futures na akciové indexy

Futures na akciové indexy je možné použít k zajištění akciového portfolia. Důležitou roli zde hraje parametr β z oceňovacího modelu kapitálových aktiv (CAPM). β můžeme chápat jako směrnici přímky, která aproximuje vztah mezi výnosovou mírou portfolia a výnosovou mírou trhu měřenou akciovým indexem.



Závislost mezi výnosovou mírou portfolia a výnosovou mírou trhu
(aproximováno přímkou)

Počet lotů potřebných pro zajištění pozice je dán vztahem

$$N = \beta \cdot \frac{P}{A},$$

kde P vyjadřuje objem portfolia a A představuje velikost lotu. Výše uvedený vzorec předpokládá, že splatnost futures kontraktu je přibližně stejná jako období, ke kterému chceme zajistit portfolio a ignoruje denní kalkulaci zisků a ztrát.

Futures kontrakty lze použít také ke změně β faktoru daného portfolia na hodnotu různou od nuly. Jestliže chceme změnit hodnotu β daného portfolia na hodnotu β^* (pro $\beta > \beta^*$) lze vyjádřit počet lotů, které je třeba nakoupit pomocí vztahu

$$N = (\beta - \beta^*) \frac{P}{A}$$

Vedle akciového portfolia lze zajistit také jednotlivé akcie. Účinnost tohoto zajištění je však horší a to z následujících důvodů:

- Zajištění pomocí futures kontraktů chrání pouze před nepříznivými pohyby trhu. Toto riziko však vysvětluje relativně malou část cenových změn dané akcie.
- Parametr β je pro jednu akcii méně stabilní než v případě portfolia.

Kapitola 5

Úrokové sazby

Následující seznam poskytuje přehled základních úrokových sazeb, se kterými je možné se setkat na finančních trzích.

- **Pokladniční sazba (treasury rate)** - Úroková sazba, za kterou si půjčuje vláda ve své vlastní měně. Velice často je pokladniční sazba používána jako bezriziková sazba.
- **LIBOR** - Tato sazba má charakter průměrné úrokové sazby na mezibankovním trhu¹. LIBOR vyjadřuje průměrnou sazbu, za kterou je možné si na mezibankovním trhu vypůjčit peníze. Vedle sazby LIBOR existuje také sazba LIBID, která představuje průměrnou úrokovou sazbu, kterou jsou úročena depozita na mezibankovním trhu. Tyto sazby jsou velice často používány jako referenční a zpravidla se pohybují nad pokladniční sazbou.
- **Repo sazba** - Repo sazba se vztahuje k tzv. repo obchodům. Repo obchody spočívají v prodeji a zpětném nákupu určitého cenného papíru, přičemž nákupní cena je o něco vyšší než cena prodejní. Na tento cenový rozdíl je možné pohlížet jako na úrok a související úrokovou sazbu pak označujeme jako repo sazbu. Repo obchody jsou např. využívány bankami ve vztahu k centrální bance za účelem doplnění likvidity.

5.1 Zero sazba

n -roční zero sazba je úroková míra generovaná investicí, která začíná dnes, trvá n roků a jejíž veškeré cash-flow je realizována v době splatnosti. Klasickým příkladem finančního instrumentu, pro který lze triviálním způsobem určit zero sazbu, je diskontní dluhopis.

¹LIBOR (London Interbank Offer Rate) značí průměrnou úrokovou sazbu na mezibankovním trhu v Londýně. V případě ostatních trhů se používají obdobné názvy jako např. PRIBOR pro Prahu. V praxi je však pojem LIBOR často používán jako obecné označení průměrné mezibankovní sazby na daném trhu.

5.2 Oceňování dluhopisů

Teoretickou cenu dluhopisu lze vypočítat jako současnou hodnotu veškerého cash-flow, které obdrží majitel dluhopisu. Pro diskontování těchto cash-flow je třeba používat odpovídající zero sazbu. Následující vzorec platí pro klasické dluhopisy, které v pravidelných intervalech přinášejí svému majiteli kupón a s posledním kupónem také nominální hodnotu.

$$P_T = \sum_{i=1}^n \frac{c}{m} \cdot N \cdot e^{-t_i \cdot j_i} + N \cdot e^{-t_n \cdot j_n}$$

Parametr n představuje počet období, ve kterých je vyplácen kupón ve výši $\frac{c}{m} \cdot N$. Parametr c představuje kupónovou sazbu v ročním vyjádření, m počet období v roce, kdy je vyplácen kupón, a N představuje nominální hodnotu dluhopisu, ze které je vypočtena výše kupónu. Úroková sazba j_i je zero sazby pro jednotlivá "kupónová" období, jejichž délka je t_i .

Příklad: Uvažujme dvouroční dvouletý státní dluhopis, ze kterého je vyplácen kupón každého půl roku. Nominální hodnota dluhopisu je 100 USD, kupónová sazba je 6% p.a. (pololetní úročení). Zero sazby pro jednotlivá půlroční období jsou 5.0% p.a., 5.8% p.a., 6.4% p.a. a 6.8% p.a. (kontinuální úročení). Jaká je teoretická cena tohoto dluhopisu?

$$P_T = 3e^{-0.05 \cdot 0.5} + 3e^{-0.058 \cdot 1.0} + 3e^{-0.064 \cdot 1.5} + 103e^{-0.068 \cdot 2.0} = 98.39$$

Teoretická cena výše zmiňovaného státního dluhopisu je 98.39 USD.

5.3 Výpočet pokladniční zero sazby

Uvažujme následující dluhopisy

Nominále (USD)	Splatnost (roky)	Kupónová sazba (%)	Cena (USD)
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6

Výpočet zero sazby pro první tři dluhopisy je triviální. Vzhledem k tomu, že se jedná o tzv. diskontní dluhopisy, lze jejich teoretickou cenu vyjádřit jako

$$P_T = N \cdot e^{-n \cdot j}$$

Zero sazba je pak dána vztahem

$$j = -\ln \frac{P_T}{N} \cdot \frac{1}{n} \quad (5.1)$$

Zero sazby pro první tři dluhopisy jsou tedy

$$j_{0.25} = 0.10127$$

$$j_{0.50} = 0.10469$$

$$j_{1.00} = 0.10536$$

V případě zbývajících dvou dluhopisů je postup o něco složitější. Předpokládejme, že kupón je vyplácen pololetně. Cena dluhopisu je definována vztahem

$$P_T = \sum_{i=0}^n n \frac{c}{m} \cdot N \cdot e^{-t_i j_i} + N \cdot e^{-t_n j_n}$$

Zero sazba je pak dána rovnicí

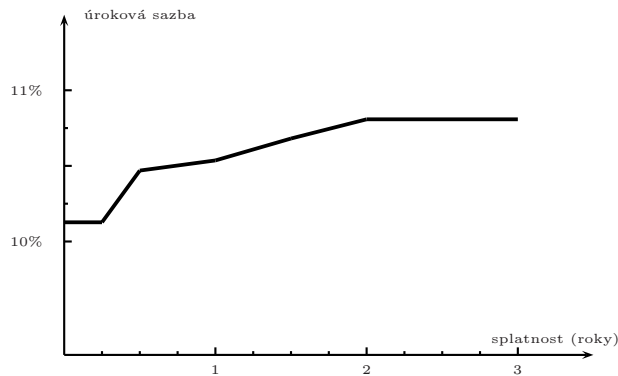
$$j_n = - \frac{\ln\left(\frac{P_T}{N} - \frac{c}{m} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-t_i j_i}\right) - \ln\left(1 + \frac{c}{m}\right)}{t_n}$$

Tento vztah je zobecněním vztahu (5.1). Abychom mohli vypočítat zero sazbu pro dané období, jsou zapotřebí zero sazby pro předcházející období. O této metodě hovoříme jako o tzv. "bootstrappingu".

$$j_{1.50} = - \frac{\ln\left(\frac{96}{100} - \frac{0.08}{2} (e^{-0.5 \cdot 0.10469} + e^{-1.0 \cdot 0.10536})\right) - \ln\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)}{1.5} = 0.106809$$

a analogicky

$$j_{2.00} = 0.10808$$



Zero sazby vypočtené pomocí metody "bootstrapping"

5.4 Forwardové sazby

S pomocí zero sazeb lze vypočítat také forwardovou sazbou. V podmínkách nemožnosti arbitráže musí totiž platit

$$\prod_{i=1}^{n-1} e^{j_{i-1,i} \cdot t_{i-1,i}} \cdot e^{j_{n-1,n} \cdot t_i} = e^{j_{0,n} \cdot t_{0,n}}$$

Forwardová sazba pro období $n-1$ až n je tedy dána vztahem

$$j_{n-1,n} = \frac{j_{0,n} \cdot t_{0,n} - \sum_{i=1}^{n-1} j_{i-1,i} \cdot t_{i-1,i}}{t_{n-1,n}}$$

Rok	Zero rate (%)	Forwardová sazba (%)
1	10.0	-
2	10.5	11.0
3	10.8	11.4
4	11.0	11.6
5	11.1	11.5

Jestliže nemáme k dispozici úrokové sazby v požadované časové struktuře, je možné potřebné sazby odvodit pomocí interpolace.

5.5 Forward rate agreement

Forward rate agreement (FRA) je OTC obchod, kterým je stanovena úroková sazba aplikovaná v dohodnutém budoucím období na předem sjednanou jistinu.

Uvažujme FRA, ve kterém získá dlouhá strana výnos j_{FRA} v období mezi T_1 a T_2 z jistiny L . Dále definujme j_F jako forwardovou sazbu LIBOR pro období T_1 až T_2 . Cash-flow v čase T_1 je tedy $-L$ a v čase T_2 pak $Le^{j_{FRA}(T_2-T_1)}$. Je zřejmé, že současná hodnota (tj. hodnota v čase T_0) je nulová, jestliže platí $j_{FRA} = j_F^2$. Z pohledu dlouhé strany je současná hodnota FRA rovna

$$PV_{FRA} = L(e^{j_{FRA}(T_2-T_1)} - e^{j_F(T_2-T_1)})e^{-j_{L_{T_2}} \cdot T_2} \quad (5.2)$$

kde $j_{L_{T_2}}$ je zero sazba pro období T_0 až T_1 .

Příklad: Uvažujme, že tří měsíční LIBOR je 5% p.a. a šesti měsíční LIBOR je 5.5% p.a. (kontinuální úročení). Předpokládejme, že v rámci FRA obdržíme 7% p.a. (čtvrtletní úročení) z jistiny 1 000 000 USD za období mezi třetím a šestým měsícem. Forwardová sazba je 6.0452% p.a. (čtvrtletní úročení).

Hodnota FRA je tedy

$$PV_{FRA} = 1000000 \cdot (e^{0.07 \cdot 0.25} - e^{0.060452 \cdot 0.25}) \cdot e^{-0.055 \cdot 0.5} = 2360$$

Alternativně lze FRA ocenit následovně. Opět uvažujme FRA, které generuje výnos j_{FRA} v období T_1 až T_2 . V čase T_1 je možné půjčit si za úrokovou sazbu j jistinu L a splatit ji v čase T_2 . Jestliže tuto transakci zkombinujeme s FRA, získáme v čase T_1 cash-flow 0 a v čase T_2 bude cash-flow $Le^{j_{FRA}(T_2-T_1)}$ a $-Le^j(T_2-T_1)$. Výsledná cash-flow v čase T_2 tedy bude

$$L(e^{j_{FRA}(T_2-T_1)} - e^{j(T_2-T_1)})e^{-j_{L_{T_2}} \cdot T_2} \quad (5.3)$$

kde $j_{L_{T_2}}$ je opět zero sazba pro období T_0 až T_1 . Můžeme-li předpokládat, že $j = j_F$, je (5.3) totožné s (5.2). Výše uvedeným jsme tedy prokázali, že:

- FRA je ekvivalentní dohodě, kdy je předem známá sazba j_{FRA} vyměněna za tržní sazbu j ,
- FRA může být oceněno za předpokladu, že je garantována forwardová sazba

²Tato podmínka je splněna vždy v době uzavírání obchodu. V opačném případě by existovala možnost arbitráže.

5.6 Tvar úrokových křivek

Existují tři základní teorie, které vysvětlují tvar úrokových křivek.

- **Teorie očekávání:** Podle této teorie by dlouhodobé úrokové sazby měly reflektovat očekávané krátkodobé úrokové sazby v budoucnosti. V souladu s touto teorií by forwardové sazby pro příslušné období v budoucnosti měly být odhadem zero sazeb pro toto období.
- **Segmentační teorie:** Podle této teorie neexistuje vztah mezi krátkodobými, střednědobými a dlouhodobými úrokovými sazbami. Každý z těchto trhů se řídí vlastní nabídkou a poptávkou a finanční instrumenty na nich obchodované nejsou vzájemné substituty. Tato teorie tedy neříká nic o "typické" úrokové křivce.
- **Teorie preference likvidity:** Podle této teorie by mělo platit, že forwardové sazby jsou vyšší než očekávané budoucí zero sazby. Základním předpokladem této teorie je, že investoři preferují likviditu a investují do krátkodobých aktiv. Dlužníci naproti tomu preferují dlouhodobější půjčky. Z tohoto důvodu jsou dlouhodobé úrokové sazby vyšší než odpovídající kombinace očekávaných krátkodobých úrokových sazeb. To vede k tomu, že úroková křivka má rostoucí charakter.

5.7 Konvence počtu dní

Standardně by se pro určení počtu dní při výpočtu úroků mělo vycházet z kalendářního počtu dní. Nicméně na finančních trzích se používají také jiné konvence. Jednotlivé konvence jsou označovány ve tvaru X/Y. Nejpoužívanější konvence jsou Actual/Actual, 30/360 a Actual/360, kde Actual značí skutečný kalendářní počet dní. Pro jednotlivé trhy a instrumenty jsou pak dohodnuty konvence, podle kterých jsou počítány úroky. Výsledky se pak mohou mírně lišit podle použité konvence.

5.8 Futures na státní dluhopisy

Nejpopulárnějším úrokovým futures kontraktem v USA je futures na státní dluhopisy³, který je obchodovaný na Chicago Board of Trade (CBOT). V době splatnosti může krátká strana dodat libovolný státní dluhopis, který má, s ohledem na typ futures kontraktu, stanovenou zbytkovou splatnost⁴. Jako protiplnění pak obdrží vypořádací cenu modifikovanou v závislosti na dodaném státním dluhopisu. Na burze jsou obchodovány dvou, pěti a desetileté futures kontrakty na střednědobé dluhopisy a futures kontrakty na dlouhodobé státní dluhopisy.

³Státními dluhopisy se rozumí dluhové cenné papíry emitované vládou Spojených států amerických. Konkrétně se jedná o střednědobé státní dluhopisy (treasury note), které mají v době emise splatnost 2, 5 a 10 let a dlouhodobé státní dluhopisy (treasury bonds) se splatností 30 let v době emise.

⁴Například v případě desetiletého futures kontraktu se musí jednat o střednědobý státní dluhopis, jehož zbytková splatnost nesmí být kratší než šest a půl roku a zároveň delší než deset roků.

Jak již bylo zmíněno výše, vypořádací cena závisí na dodaném státním dluhopisu. Korekce vypořádací ceny je určena tzv. konverzním faktorem. Každý státní dluhopis, který může být v době splatnosti dodán krátkou stranou, má přiřazen konverzní faktor. Konverzní faktor představuje cenu dluhopisu k okamžiku splatnosti futures kontraktu za předpokladu konstantní diskontní sazby. V současné době je aplikována diskontní sazba 6% p.a. (půlroční úročení). Výsledná vypořádací cena je pak rovna součinu konverzního faktoru a kotované ceny futures navýšeného o případný naběhlý úrok.

$$(\text{kotovaná futures cena} \cdot \text{konverzní faktor}) + \text{naběhlý úrok}$$

Každý kontrakt je na dodání 100 USD nominální hodnoty dluhopisu. Jestliže je kotovaná futures cena 90 USD, konverzní faktor 1.38 a naběhlý úrok 3 USD, pak platí, že krátká strana dodá dluhopis s nominální hodnotou 100 USD a obdrží

$$(1.38 \cdot 90.00) - 3.00 = 121.20$$

5.8.1 Výpočet konverzního faktoru

Konverzní faktor je roven hodnotě dluhopisu na 1 USD jeho nominální hodnoty k prvnímu možnému datu dodání. Pro účely diskontování cash-flow se předpokládá, že úroková sazba konstantní a rovna 6% p.a. (pololetní úročení) po celou zbytkovou dobu splatnosti dluhopisu. Splatnost dluhopisu je navíc pro účely výpočtu zaokrouhlena dolů na nejbližší celé měsíce (dvou, tříleté a pětileté futures kontrakty) resp. celá čtvrtletí (desetileté futures kontrakty a kontrakty na dlouhodobé státní dluhopisy). Jako počáteční datum pro výpočet zbytkové splatnosti dluhopisu je stanoven první den dodacího měsíce pro příslušný futures kontrakt. Kupón ze státních dluhopisů je vyplácen pololetně. V rámci výpočtu konverzního faktoru se předpokládá, že poslední kupón je vyplácen společně s nominální hodnotou v poslední den zaokrouhlené splatnosti uvažovaného státního dluhopisu. Jestliže zbytková splatnost dluhopisu po zaokrouhlení není násobkem šesti měsíců, je třeba vypočítat naběhlý úrok.

Příklad: Uvažujme 10% kupónový dluhopis se splatností 20 let a 2 měsíce, který může krátká strana dodat v rámci futures kontraktu na dlouhodobé státní dluhopisy. Pro účely výpočtu konverzního faktoru je splatnost dluhopisu 20 let a první kupón bude vyplácen po 6 měsících. Kupóny budou vypláceny pololetně po dobu 20 let, kdy je společně s posledním kupónem uhrazena také jistina. Nechť je nominální hodnota dluhopisu 100 USD a diskontní sazba je 6% p.a. (pololetní úročení). Hodnota dluhopisu je

$$P_T = \sum_{i=1}^{40} \frac{5}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{40}} = 146.23$$

Jestliže hodnotu dluhopisu vydělíme jeho nominální hodnotou, získáme konverzní faktor 1.4623.

Příklad: Uvažujme 3.375% kupónový dluhopis se splatností 4 roky a 2 měsíce, který může krátká strana dodat v rámci pětiletého futures kontraktu. Pro účely výpočtu konverzního faktoru je splatnost dluhopisu 4 roky a 2 měsíce. Hodnota

dluhopisu je s použitím diskontní sazby 6% p.a. (pololetní úročení) vztažená k 2. měsíci od prvního možného data jeho dodání krátkou stranou je

$$P_{T_{2M}} = \sum_{i=0}^8 \frac{1.6875}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^8} = 92.47$$

Po diskontování a očištění o kumulovaný úrok je hodnota dluhopisu

$$P_T = \frac{P_{T_{2M}}}{1.03^{1/3}} - 1.6875 \cdot \frac{2}{3} = 90.44$$

Konverzní faktor je tedy 90.44.

5.8.2 Cheapest to deliver

V průběhu dodacího měsíce může existovat více dluhopisů, jejichž dodáním splní krátká strana svůj závazek. Právo volby konkrétního dluhopisu náleží právě krátké straně. Ta v rámci kontraktu obdrží

$$(\text{kotovaná futures cena} \cdot \text{naběhlý faktor}) + \text{naběhlý úrok}$$

a dodá dluhopis, jehož cena je

$$\text{kotovaná cena} + \text{naběhlý úrok}$$

Proto se krátká strana bude snažit dodat dluhopis, pro nějž dosahuje výraz

$$\text{kotovaná cena} - (\text{kotovaná futures cena} \cdot \text{konverzní faktor})$$

minimální hodnoty.

5.8.3 Wild card play

V souvislosti s výše popsány obchody se můžeme setkat s pojmem "Wild Card Play". Obchodování na Chicago Board of Trade končí ve 14:00. Nicméně státní dluhopisy jsou obchodovány na spotovém trhu do 16:00. Krátká strana může do 20:00 zadat příkaz k uzavření pozice za dodací ceny z 14:00. Jestliže cena dluhopisu v rozmezí 14:00 až 16:00 klesne, může krátká strana nakoupit a uzavřít své pozice. V opačném případě může krátká strana počkat do následujícího dne. Tuto strategii pak může uplatňovat po celé dodací období. "Wild Card Play" představuje výhodu pro krátkou stranu. Tato výhoda však není zadarmo - ceny futures jsou o něco nižší, než by byly bez této možnosti.

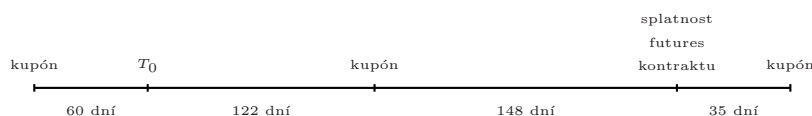
5.8.4 Výpočet ceny futures

Stanovit cenu futures pro obchodování se státními dluhopisy je poměrně složité. Výpočet totiž komplikují dva faktory - "Wild Card Play" a možnost volby krátké strany dodat libovolný z předem specifikovaných dluhopisů. Jestliže však odhlédneme od "Wild Card Play" a budeme uvažovat, že dluhopis, který bude dodán krátkou stranou, je dopředu znám, je forwardová cena dána klasickým vztahem

$$F_0 = (S_0 - I) \cdot e^{rT},$$

kde I představuje současnou hodnotu kupónů generovaných dluhopisem v průběhu života futures kontraktu, T čas do splatnosti kontraktu a r bezrizikovou úrokovou sazbu aplikovatelnou pro období T .

Příklad: Předpokládejme, že předem známe dluhopis, který bude výhodné dodat krátkou stranou. Nechť se jedná o 6% kupónový dluhopis s konverzním faktorem 1.4. Dále předpokládejme, že dodání tohoto dluhopisu proběhne za 270 dní.



Z výše uvedeného obrázku je patrné, že k poslední výplatě kupónu došlo před 60 dny a do další výplaty zbývá 122 dní. V době splatnosti kontraktu by pak měla proběhnout kompenzace za naběhlý úrok, který nabíhal po 148 dní. Uvažujme, že diskontní sazba je 10% p.a. (kontinuální úročení) a že současná cena dluhopisu je 120 USD. Hodnota dluhopisu S_0 v čase T_0 je tedy

$$S_0 = 120 + \frac{60}{60 + 122} \cdot 6 = 121.978$$

Kupón ve výši 6 USD bude vyplacen za 122 dní, a proto je jeho současná hodnota I rovna

$$I = 6 \cdot e^{-0.1 \frac{122}{365}} = 5.803$$

Kontrakt trvá 270 dní, a proto je F_0 dáno vztahem

$$F_0 = (121.978 - 5.803)e^{-0.1 \frac{270}{365}} = 125.094$$

Dále je třeba vzít v úvahu naběhlý úrok, který nabíhá 148 dní. Po této úpravě by futures cena daného dluhopisu měla být

$$F_0 = 125.094 - \frac{148}{148 + 35} \cdot 6 = 120.242$$

Z definice konverzního faktoru vyplývá, že výsledná futures cena kotovaná na burze by byla

$$\frac{120.242}{1.4} = 85.887$$

5.9 Lema 5A - Durace

Durace v případě dluhopisu znamená, jak dlouho musí držitel dluhopisu v průměru čekat, než obdrží cash-flow. Diskontní dluhopis, který je splatný za n roků, má tak duraci n roků. V případě dluhopisů, které přináší kupón, je durace menší než jejich splatnost.

Uvažujme dluhopis, který svému držiteli v čase t_i generuje cash-flow c_i , kde $1 \leq i \leq n$. Vztah mezi cenou dluhopisu B a výnosem y je dán vztahem

$$B = \sum_{i=1}^n c_i e^{-yt_i}$$

Durace dluhopisu je pak

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n c_i t_i e^{-yt_i}}{B} = \sum_{i=1}^n n \frac{c_i e^{-yt_i}}{B}$$

Dále platí

$$\frac{\partial B}{\partial y} = - \sum_{i=1}^n c_i t_i e^{-yt_i} = -B \cdot D$$

Tento vzorec se dá interpretovat tak, že malý posun výnosové křivky o ∂y způsobí změnu ceny dluhopisu o ∂B peněžních jednotek. Výše uvedený vztah tak lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial B}{B} = -D \cdot \partial y$$

Malé změny úrokové sazby jsou často měřeny pomocí tzv. bazických bodů. Jeden bazický bod odpovídá 0.01% p.a.

Jestliže je y vyjádřeno v ročním úročení namísto kontinuálního, lze dokázat, že

$$\frac{\partial B}{B} = -D \cdot \frac{\partial y}{1+y}$$

Modifikovaná durace MD je pak definována jako

$$MD = \frac{D}{1+y}$$

$$\frac{\partial B}{B} = -DM \cdot \partial y$$

Durace portfolia může být stanovena jako vážený průměr durací jednotlivých titulů, kde váha odpovídá podílům jednotlivých titulů na portfoliu. Výše uvedené vzorce v případě portfolia předpokládají, že pohyb křivek pro jednotlivé dluhopisy bude stejný.

5.9.1 Konvexita

Duraci lze aplikovat pouze na malé změny výnosové míry y . Důvodem je to, že v rámci durace je vztah mezi změnou výnosové míry a ceny aproximován přímkou, ačkoliv ve skutečnosti lineární není. Z tohoto důvodu se někdy odhad změny ceny zlepšuje pomocí tzv. konvexity, která bere částečně v potaz nelineární závislost ceny dluhopisu na výnosové míře. Konvexita C je dána vztahem

$$C = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial^2 y} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i t_i^2 e^{-yt_i}}{B}$$

Duraci lze také využít při hedgování portfolia. Platí totiž, že portfolio je imunní proti změnám úrokových sazeb za předpokladu, že je jeho durace nulová.

Hovoříme o tzv. imunizaci portfolia. Je však vhodné si uvědomit, že tento přístup zabezpečí portfolio pouze proti paralelnímu pohybu výnosových křivek. Nulové durace portfolia lze také dosáhnout nákupem / prodejem úrokových futures.

Kapitola 6

Swapy

Swap je dohodou dvou stran o vzájemné výměně cash-flow v budoucnosti. Součástí dohody jsou datумы realizace těchto cash-flow, způsob, jakým budou stanoveny, a nominály, ke kterým se vztahují.

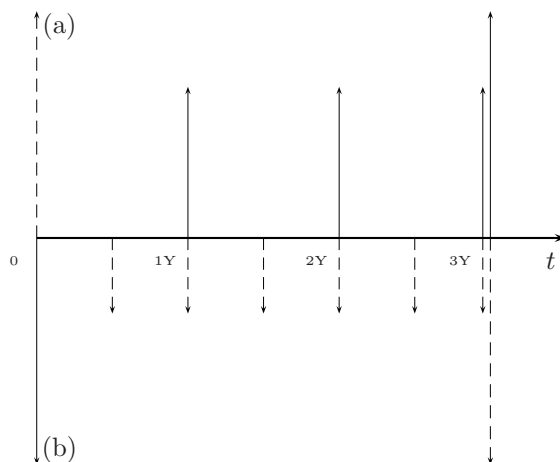
V této kapitole se budeme zabývat dvěma základními typy swapů - úrokovým a měnovým swapem.

6.1 Úrokové swapy

Úrokový swap je obchodem, kdy dochází k výměně peněžních toků mezi zúčastněnými stranami. Klasický úrokový swap, kdy dochází ke směně floatové úrokové sazby za fixní, lze modelovat pomocí imaginárního floatového a fixního dluhopisu. Vzhledem k tomu, že úrokový swap lze rozložit na jednodušší instrumenty, jedná se o syntetický instrument.

Úrokové swapy tedy použít k transformaci aktiv / pasiv. Aktiva / pasiva spojená s fixním úročením lze tak převést na floatové úročení a naopak.

Příklad: Uvažujme tříletý úrokový swap s podkladovým kapitálem 100 miliónů USD. Jedna ze smluvních stran platí dvakrát ročně úroky odpovídající aktuální sazbě LIBOR a zároveň obdrží od druhé strany jednou ročně fixní sazbu 4% p.a. Úrokové platby jsou vztaženy k podkladovému kapitálu 100 miliónů USD.



Rozklad úrokového swapu: (a) floatový dluhopis, (b) fixní dluhopis

Tento swap lze tedy "rozložit" na dva imaginární dluhopisy. První z nich je fixní s kupónovou sazbou 4% p.a. a roční výplatou kupónů. Druhý dluhopis má kupónovou sazbu definovanou sazbou LIBOR a půlroční výplatu kupónů. Tu část úrokového swapu, kterou představuje cash-flow generované fixním dluhopisem, nazýváme fixní nohou. Cash-flow generované imaginárním floatovým dluhopisem pak nazýváme floatovou nohou. Jednotlivé platby, je-li to možné, se vzájemně kompenzují a vyplácí se pouze rozdíl mezi oběma peněžními toky. Z toho principu mimojiné vyplývá, že podkladový kapitál se na začátku a na konci kontraktu nesměňuje. Z hlediska oceňování není kompenzace cash-flow důležitá.

6.1.1 Hodnota úrokového swapu v čase $t_0 = 0$

Uvažujme jednorroční úrokový swap s podkladovým kapitálem A , v rámci kterého dochází k výměně floatové sazby F za fixní sazbu R . Předpokládejme, že rok má 360 dní a definujme časový interval mezi t_2 a t_1 v ročním vyjádření jako

$$\alpha_{t_1, t_2} = \frac{t_2 - t_1}{360}$$

Dále definujme diskontní faktor DF_{t_1, t_2} pro časové období t_1 až t_2 jako

$$DF_{t_1, t_2} = \frac{1}{1 + F_{t_1, t_2} \alpha_{t_1, t_2}}$$

kde F_{t_1, t_2} je forwardová úroková míra v čase t_0 platná pro časový interval t_1 až t_2 . Předpokládejme, že pro forwardovou sazbu platí

$$(1 + F_{t_0, t_2} \alpha_{t_0, t_2}) = (1 + F_{t_0, t_1} \alpha_{t_0, t_1})(1 + F_{t_1, t_2} \alpha_{t_1, t_2})$$

Fixní noha

Výplata L_{fix}^{1Y} z fixní nohy na konci prvního roku je definována jako

$$L_{fix}^{1Y} = AR_{1Y} \alpha_{0, 1Y}$$

kde R_{1Y} představuje výši fixního kupónu jednoročního swapu. Současná hodnota fixní nohy je tedy definována jako

$$PV(L_{fix}^{1Y}) = DF_{0,1Y} L_{fix}^{1Y} = DF_{0,1Y} AR_{1Y} \alpha_{0,1Y}$$

Obecný vzorec pro současnou hodnotu fixní nohy n -letého úrokového swapu v době uzavření kontraktu je

$$AR_{nY}(DF_{0,t_1} \alpha_{0,t_1} + DF_{0,t_2} \alpha_{t_1,t_2} + \dots + DF_{0,t_n} \alpha_{t_{n-1},t_n}) \quad (6.1)$$

Floatová noha

Floatová noha se skládá ze dvou cash-flow. První cash-flow L_{float}^{6M} generované po půl roce trvání kontraktu je rovno

$$L_{float}^{6M} = AF_{0,6M} \alpha_{0,6M}$$

Floatovou sazbu platnou za půl roku tedy odhadujeme pomocí forwardové sazby $F_{0,6M}$. Současná hodnota tohoto cash-flow je

$$\begin{aligned} PV(L_{float}^{6M}) &= DF_{0,6M} L_{float}^{6M} = DF_{0,6M} AF_{0,6M} \alpha_{0,6M} = \\ &= DF_{0,6M} A \left(\frac{DF_{0,0}}{DF_{0,6M}} - 1 \right) = DF_{0,6M} A \left(\frac{1}{DF_{0,6M}} - 1 \right) = A(1 - DF_{0,6M}) \end{aligned}$$

Obdobně současná hodnota druhého cash-flow L_{float}^{1Y} generovaného na konci životnosti kontraktu je rovna

$$PV(L_{float}^{1Y}) = DF_{0,1Y} A \left(\frac{DF_{0,6M}}{DF_{0,1Y}} - 1 \right) = A(DF_{0,6M} - DF_{0,1Y})$$

Současná hodnota celé floatové nohy je tedy

$$PV(L_{float}^{6M}) + PV(L_{float}^{1Y}) = A(1 - DF_{0,6M}) + A(DF_{0,6M} - DF_{0,1Y}) = A(1 - DF_{0,1Y})$$

Obecný vzorec pro současnou hodnotu floatové nohy n -letého úrokového swapu v době uzavření kontraktu je

$$A(1 - DF_{0,nY}) \quad (6.2)$$

Hodnota úrokového swapu

Vzhledem k tomu, že při neexistenci arbitráže by měla být hodnota úrokového swapu v okamžiku jeho sjednání rovna nule, musí se současná hodnota fixní nohy rovnat současné hodnotě floatové nohy. Pro námi uvažovaný jednoroční úrokový swap tedy musí platit

$$\begin{aligned} PV(L_{fix}^{1Y}) &= PV(L_{float}^{6M}) + PV(L_{float}^{1Y}) \\ DF_{0,1Y} AR_{1Y} \alpha_{0,1Y} &= A(1 - DF_{0,1Y}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dle (6.1) a (6.2) je obecná rovnice pro n -roční úrokový swap definována jako

$$AR_{nY}(DF_{0,t_1} \alpha_{0,t_1} + DF_{0,t_2} \alpha_{0,t_2} + \dots + DF_{0,t_n} \alpha_{t_{n-1},t_n}) = A(1 - DF_{0,nY})$$

Jestliže budeme uvažovat směnu podkladového kapitálu na začátku a na konci kontraktu, změní se nám tento obecný vzorec do podoby

$$\begin{aligned}
& -A + AR_{nY}(DF_{0,t_1}\alpha_{0,t_1} + DF_{0,t_2}\alpha_{t_1,t_2} + \dots + DF_{0,t_n}\alpha_{t_{n-1},t_n}) + ADF_{0,t_n} = \\
& \quad = -A + A(1 - DF_{0,nY}) + ADF_{0,t_n} \\
& -A + AR_{nY}(DF_{0,t_1}\alpha_{0,t_1} + DF_{0,t_2}\alpha_{t_1,t_2} + \dots + DF_{0,t_n}\alpha_{t_{n-1},t_n}) + ADF_{0,t_n} = 0 \\
& \quad R_{nY}(DF_{0,t_1}\alpha_{0,t_1} + DF_{t_1,t_2}\alpha_{0,t_2} + \dots + DF_{0,t_n}\alpha_{t_{n-1},t_2}) + DF_{0,t_n} = 1
\end{aligned}$$

Tento vzorec v podstatě neříká nic jiného, než že v případě rovnovážné swapové sazby R_{nY} je současná hodnota imaginárního fixního dluhopisu rovna jeho nominální hodnotě. Z toho vyplývá, že také hodnota floatové nohy je rovna nominální hodnotě podkladového aktiva¹.

6.1.2 Hodnota úrokového swapu v čase t

Výše uvedený postup lze aplikovat v případě, že chceme vypočítat hodnotu úrokového swapu v čase $t_0 = 0$. Hodnotu úrokového swapu v obecném čase t lze opět vyjádřit jako rozdíl hodnoty fixní a floatové nohy diskontované k času t .

Současná hodnota fixní nohy v čase t je za předpokladu roční výplaty rovna

$$PV_t(L_{fix}^{t_1}) + PV_t(L_{fix}^{t_2}) + \dots + PV_t(L_{fix}^{t_n}) = AR_{nY}(DF_{t,t_1} + DF_{t,t_2} + \dots + DF_{t,t_n})$$

Současná hodnota floatové nohy v čase t je pak rovna

$$PV_t(L_{float}^{t_1}) + PV_t(L_{float}^{t_2}) + \dots + PV_t(L_{float}^{t_n}) = A\left(\frac{DF_{t,t_1}}{DF_{t_1-1,t_1}} - DF_{t,nY}\right)$$

Hodnota úrokového swapu v čase t je tedy rovna

$$AR_{nY}(DF_{t,t_1} + DF_{t,t_2} + \dots + DF_{t,t_n}) - A\left(\frac{DF_{t,t_1}}{DF_{t_1-1,t_1}} - DF_{t,nY}\right)$$

Ačkoliv by hodnota úrokového swapu v okamžiku jeho uzavření měla být nulová, neplatí tento předpoklad po dobu životnosti kontraktu. Hodnota swapu se mění s tím, jak se mění forwardové úrokové sazby.

6.1.3 Výpočet diskontního faktoru

Z (6.3) lze vypočítat diskontní faktor $DF_{0,1Y}$. Po elementárních úpravách získáváme

$$DF_{0,1Y} = \frac{1}{1 + R_{1Y}\alpha_{0,1Y}}$$

Vzhledem k tomu, že platí $R_{1Y} = F_{0,1Y}$, je tento vzorec v souladu s výše uvedenou definicí diskontního faktoru.

Analogickým postupem lze z dvouletého swapu odvodit diskontní faktor $DF_{0,2Y}$ jako

$$DF_{0,2Y} = \frac{1 - R_{2Y}\alpha_{0,1Y}DF_{0,1Y}}{1 + R_{2Y}\alpha_{1Y,2Y}}$$

¹V opačném případě by nebyla zachována rovnost.

a diskontní faktor $DF_{0,3Y}$ z tříletého swapu jako

$$DF_{0,3Y} = \frac{1 - R_{3Y}(\alpha_{0,1Y}DF_{0,1Y} + \alpha_{1Y,2Y}DF_{0,2Y})}{1 + R_{3Y}\alpha_{2Y,3Y}}$$

Pro výpočet diskontního faktoru je tedy zapotřebí znalost diskotních faktorů pro předchozí období.

Obecný vzorec pro výpočet diskontního faktoru $DF_{0,nY}$ je

$$DF_{0,nY} = \frac{1 - R_{nY} \left(\sum_{t=1Y}^{(n-1)Y} \alpha_{(t-1)Y,tY} DF_{0,t} \right)}{1 + R_{nY} \alpha_{(n-1)Y,nY}} \quad (6.4)$$

6.2 Swapová křivka

Swapová křivka je často používána jako bezriziková křivka pro oceňování investičních instrumentů. Tato křivka je definována tzv. zero sazbami². Zero sazby se splatností do jednoho roku jsou zpravidla konstruovány na základě sazeb LIBOR. Zero sazby se splatností od jednoho roku výše jsou odvozeny z koto- vaných sazeb úrokových swapů. Z těchto sazeb jsou nejprve vypočteny diskontní faktory, ze kterých jsou následně vypočteny jednotlivé zero sazby.

V případě zero sazeb konstruovaných na základě sazeb LIBOR se potřebné diskontní faktory vypočtou podle

$$DF_{0,t} = \frac{1}{1 + i_{0,t}\alpha_{t,t_0}}$$

kde $i_{0,t}$ představuje referenční sazbu LIBOR. Hodnoty zbývajících diskotních faktorů získáme dle (6.4). Vzorec pro výpočet diskotního faktoru, ze kterého se určí zero sazby $Y_{0,t}$ této křivky, je definován jako

$$DF_{0,t} = \frac{1}{(1 + Y_{0,t})^{\alpha_{t,t_0}}}$$

Elementární úpravou pak získáváme

$$Y_{0,t} = {}^{\alpha_{t,t_0}}\sqrt[\alpha_{t,t_0}]{\frac{1}{DF_{0,t}}} - 1$$

6.3 Měnový swap

Ve své nejjednodušší podobě představuje měnový swap výměnu jistiny a úroků v jedné měně za jistinu a úroky v druhé měně. Nominální hodnoty v obou měnách jsou vyměněny na začátku a na konci kontraktu.

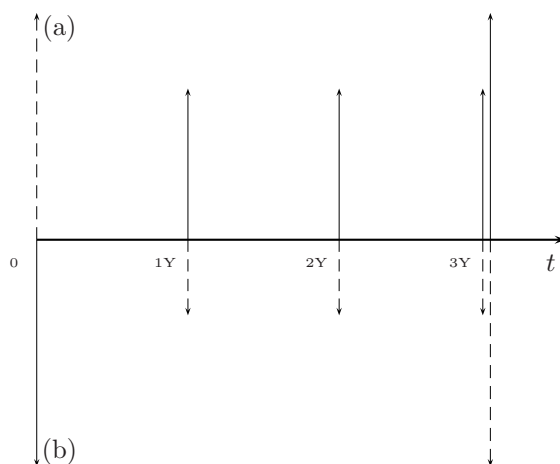
Podobně jako v případě úrokového swapu je měnový swap syntetickým instrumentem, který je možné rozložit na dvojici fiktivních dluhopisů. U měnového swapu jsou na rozdíl od úrokového swapu možné následující kombinace

² n -roční zero sazba je výnosovou mírou investice, která začíná dnes, je splatná za n roků a jejíž veškeré cash-flow je realizováno v době splatnosti.

- **fix-fix měnový swap** - směna pevné sazby za pevnou sazbu (dva fixní dluhopisy)
- **float-fix měnový swap** - směna floatové sazby za pevnou sazbu (jeden floatový a jeden fixní dluhopis)
- **float-float** - směna floatové sazby za floatovou sazbu (dva floatové dluhopisy)

Měnový swap umožňuje změnit úrokovou expozici v jedné měně na úrokovou expozici v jiné měně.

Příklad: Uvažujme tříletý float-fix měnový swap, v rámci kterého dojde v čase t_0 ke směně A_{eur} za A_{usd} . Po dobu životnosti kontraktu budou na konci roku mezi zúčastněnými stranami vyměněny úrokové platby. Strana, která v čase t_0 směnovala EUR za USD ekvivalent, bude hradit úrok z nominální hodnoty A_{usd} odpovídající sazbě LIBOR aktuální k datu výměny úrokových plateb. Druhá strana pak bude platit fixní úrok 4% p.a. z nominální hodnoty A_{eur} . V čase t_3 , tj. v době splatnosti uvažovaného měnového swapu, dojde ke zpětné směně nominálních hodnot A_{eur} a A_{usd} .



Rozklad měnového swapu: (a) fixní EUR dluhopis, (b) floatový USD dluhopis

6.3.1 Ocenění měnového swapu

Měnové swapy se oceňují podobným způsobem jako úrokové swapy. Nejprve se kontrakt rozloží na dvojici fiktivních dluhopisů, kde každý dluhopis představuje jednu nohu měnového swapu. Dále je třeba stanovit cash-flow jednotlivých nohou. Posledním krokem je určení současné hodnoty těchto cash-flow v měně příslušné nohy. Pomocí spotového kurzu se pak obě nohy vyjádří ve společné měně a hodnota měnového swapu je pak dána jejich součtem.

V případě fixních nohou je určení cash-flow triviální. Úrokové platby jsou dány fixní sazbou, která je neměnná po celou dobu životnosti měnového swapu.

Floatové nohy se oceňují stejným způsobem jako floatové dluhopisy s tím rozdílem, že se neuvažuje naběhlý úrok. Nejprve je třeba vypočítat forwardové

sazby z aktuální swapové křivky. Tyto forwardové sazby, které jsou odhadem budoucích úrokových sazeb, jsou pak použity pro stanovení očekávaného cash-flow.

6.3.2 Basis swap spread

Teoreticky je možné pro výpočet forwardových sazeb a diskontních faktorů použít standardní swapovou křivku. V praxi se u měnového swapu se často provádí úprava swapové křivky o tzv. basis swap spread. Basis swap spread odráží skutečnost, že trh nepovažuje směňované měny za "ekvivalentní". Důvody pro vysvětlení spreadu mohou být makroekonomického charakteru nebo mohou spočívat v rozdílném kreditním riziku.

Hodnoty basis swap spreadu pro jednotlivé měny a splatnosti jsou kotovány na trhu. Referenční měnou, tj. měnou s nulovým spreadem, je nejčastěji USD. Standardní swapové sazby R_{nY} je třeba navýšit basis swap spread a dle (6.4) vypočíst diskontní faktory. Z diskontních faktorů jsou pak dle (6.5) vypočteny zero sazby tzv. basis swapové křivky. Z této křivky jsou určeny diskontní faktory a forwardové sazby pro odhad cash-flow floatových nohou.

Z výše uvedeného je tedy patrné, že kdybychom měnový swap v praxi oceňovali pomocí standardní swapové namísto basis swapové křivky, měl by tento swap již v okamžiku svého sjednání nenulovou hodnotu.

Kapitola 7

Základy opčních trhů

7.1 Pokladová aktiva

Opce obchodované na burze mají jako pokladová aktiva akcie, akciové indexy, měny a futures kontrakty. V následujícím textu se bude zabývat především akciovými opcemi.

7.2 Akciové opce

Akciové opce obchodované na burze v USA jsou americké opce na nákup/prodej 100 kusů akcií. Detaily kontraktu - datum splatnosti, dodací cena, podmínky v případě výplaty dividend, maximální objem pozice atd. - jsou stanoveny burzou.

"In-the-money" ("at-the-money") opce je opce, která by svému majiteli přinesla kladné cash-flow, jestliže by byla v daný okamžik uplatněna. Opakem "in-the-money" opce je pak "out-of-the-money" opce. Jestliže S je cena akcie a K tzv. realizační cena, platí, že kupní opce je "in-the-money" pro $S < K$, "at-the-money" pro $S = K$ a "out-of-the-money" pro $S > K$.

Hodnota opce se skládá ze dvou částí - tzv. vnitřní hodnoty a časové hodnoty. Vnitřní hodnota akcie je definována jako $\max(S - K, 0)$ pro kupní opci a jako $\max(K - S, 0)$ pro prodejní opci, což odpovídá okamžité hodnotě akcie. Časová hodnota opce je dána možným pozitivním vývojem akciových kurzů a představuje tedy potenciální navýšení ceny opce. Tuto hodnotu můžeme definovat jako rozdíl mezi cenou opce a její vnitřní hodnotou. Pro americkou opci vždy platí, že její časová hodnota musí být větší nebo rovna nule. Dále platí, že časová hodnota opce v době její maturity je rovna nule.

Dříve byla realizační cena korigována o případnou výplatu dividend. V případě, že byla vyplacena dividenda, byla realizační cena snížena o výši této dividendy. V dnešní době však tato korekce prováděna není, což má dopad na způsob oceňování opcí.

Další možnou komplikací je tzv. štěpení akcií. V tomto případě je sice snížena realizační cena v poměru štěpení akcií, avšak je zvýšen počet akcií, které mají být prodány/nakoupeny. Dopad na pozici držitele/vypisovatele opce je tedy nu-

lový. Podobným způsobem je ošetřena také akciová dividendy.

Burza velice často stanovuje limity pro velikost pozice a objem, které může investor zobchodovat v průběhu pěti po sobě jdoucích pracovních dní. Tento limit se ve většině případů rovná limitu pozice.

Tvůrcem trhu je entita, která kotuje nákupní/prodejní cenu opce, za kterou je ochotna zrealizovat obchod. Tento mechanismus zajišťuje existenci ceny, za kterou je možné opci okamžitě zobchodovat. Tím je také zajištěna likvidita trhu.

Clearingové centrum plní v případě opcí stejnou funkci jako v případě trhu futures. Garantuje účastníkům, že budou moci provést obchod za sjednaných podmínek (tj. eliminuje riziko protistrany) a vede seznam obchodů včetně pozic jednotlivých účastníků. Stejně jako v případě futures platí, že obchodovat na burze mohou pouze členové clearingového centra. Clearingové centrum také spravuje maržové účty vypisovatelů opcí.

7.3 Vlastnosti akciových opcí

Následující faktory ovlivňují cenu akciových opcí:

- současná cena akcie S_0
- realizační cena K
- zbytková splatnost opce T
- volatilita ceny akcie σ
- bezriziková úroková sazba r
- očekávané dividendy v průběhu životnosti opce

Faktor	Evropská kupní opce	Evropská prodejní opce	Americká kupní opce	Americká prodejní opce
současná hodnota akcie	+	-	+	-
realizační cena	-	+	-	-
zbytková splatnost	?	?	+	+
volatilita	+	+	+	+
bezriziková sazba	+	-	+	-
dividendy	-	+	-	+

Cena akcie a realizační cena: Jestliže je kupní opce uplatněna, je cash-flow, které získá její držitel, dáno právě rozdílem mezi spotovou cenou akcie a realizační cenou. Hodnota kupní opce tedy roste s růstem spotové ceny akcie. V případě prodejní opce je tomu naopak.

Čas do splatnosti: Hodnota americké opce roste s růstem zbytkové maturity. Toto pravidlo platí ve většině případů také pro evropské opce, i když se nejedná o pravidlo (např. z důvodu očekávané výplaty dividend).

Volatilita: Hodnota opcí roste s rostoucí volatilitou.

Bezriziková úroková míra: Vliv bezrizikové úrokové míry na ceny opcí není tak přímočarý jako v předcházejících případech. Platí, že s růstem bezrizikové úrokové míry rostou také požadavky investorů na výnosnost akcií. Současně však současná hodnota budoucího cash-flow klesá. Tyto dva efekty pak mají za následek pokles ceny prodejní opce a růst ceny nákupní opce.

Dividendy: Dividendy mají za následek pokles cen akcií v tzv. "ex-dividend" den. Výplata dividend tedy způsobí růst hodnoty prodejní opce a pokles hodnoty nákupní opce.

7.4 Horní a dolní limit pro ceny opcí

V následujícím textu budeme používat symboly

- S_0 - současná cena akcie
- K - realizační cena
- T - zbytková maturita
- S_T - cena akcie v době maturity opce
- r - bezriziková úroková míra investice s maturitou v čase T (kontinuální úročení)
- C - hodnota americké kupní opce (na 1 akcii)
- c - hodnota evropské kupní opce (na 1 akcii)
- P - hodnota americké prodejní opce (na 1 akcii)
- p - hodnota evropské prodejní opce (na 1 akcii)

7.4.1 Horní limit ceny opcí

Kupní opce

Pro kupní opce platí, že jejich hodnota nemůže být vyšší než cena podkladové akcie¹.

$$c \leq S_0$$

$$C \leq S_0$$

Jestliže by výše uvedené nerovnosti neplatily, mohl by arbitrážér velice snadno vydělat tím, že koupí akcii a prodá kupní opci.

¹Důvodem tohoto tvrzení je, že realizační cena nemůže být záporná.

Prodejní opce

Pro prodejní opci platí, že její hodnota nemůže být vyšší než K^2 .

$$p \leq K$$

$$P \leq K$$

Navíc u evropské opce, která může být uplatněna pouze v době své splatnosti, platí, že v jakémkoliv okamžiku nemůže být její hodnota vyšší než $K \cdot e^{-rT}$.

7.4.2 Dolní limit ceny opcí**Kupní opce**

Dolní limit hodnoty evropské kupní opce pro akcii, ze které není vyplácena dividendy, je

$$S_0 - K \cdot e^{-rT}$$

Příklad: Uvažujme následující dvě portfolia:

- Portfolio A: evropská kupní opce a hotovost ve výši $K \cdot e^{-rT}$
- Portfolio B: jedna akcie

V případě portfolia A bude hodnota hotovosti v čase maturity opce T rovna K (bude-li investována do instrumentu, který přináší svému vlastníkovu bezrizikovou úrokovou míru r). Jestliže $S_T > K$ bude navíc uplatněna opce a portfolio A bude mít hodnotu S_T . Jestliže však platí $S_T \leq K$, opce uplatněna nebude a hodnota portfolia A bude rovna K . Hodnota portfolia A v čase T je tedy $\max(S_T, K)$.

Portfolio B má v čase T vždy hodnotu S_T a portfolio A má tedy vždy minimálně hodnotu portfolia B (může však mít také hodnotu vyšší). Proto platí

$$c + K \cdot e^{-rT} \geq S_0$$

neboli

$$c \geq S_0 - K \cdot e^{-rT}$$

Vzhledem k tomu, že hodnota opce nemůže být záporná musí platit

$$c \geq \max(S_0 - K \cdot e^{-rT}, 0)$$

Prodejní opce

Dolní limit hodnoty evropské prodejní opce pro akcii, ze které není vyplácena dividendy, je

$$K \cdot e^{-rT} - S_0$$

Příklad: Uvažujme následující dvě portfolia:

- Portfolio C: evropská prodejní opce a jedna akcie
- Portfolio D: hotovost ve výši $K \cdot e^{-rT}$

²Toto tvrzení vychází z předpokladu, že hodnota akcie nemůže být záporná.

Vztah mezi oběma portfolii je dán vztahem

$$p + S_0 \geq K \cdot e^{-rT}$$

přičemž logika věci je obdobná jako v předchozím případě. Vzhledem k tomu, že hodnota opce nemůže být záporná, musí platit

$$p \geq \max(K \cdot e^{-rT} - S_0, 0)$$

7.5 Put-call parita

Uvažujme dvě portfolia:

- Portfolio A: evropská kupní opce a hotovost ve výši $K \cdot e^{-rT}$
- Portfolio C: evropská prodejní opce a jedna akcie

Obě portfolia mají hodnotu $\max(S_T, K)$ v době své maturity. Protože obě opce lze uplatnit až době jejich splatnosti, musí být dnešní cena obou portfolií rovna, tj.

$$c + K \cdot e^{-rT} = p + S_0$$

Tento vztah nazýváme put-call paritou. To znamená, že hodnota evropské prodejní opce může být odvozena od hodnoty evropské kupní ceny a obráceně. Jestliže by totiž výše uvedená rovnice neplatila, vznikl by tímto prostor pro arbitráž.

Put-call parita platí pouze pro evropské opce. Pro americké opce platí následující vztah

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - K \cdot e^{-rT},$$

který definuje maximální rozdíl mezi cenou americké kupní a prodejní opce.

7.6 Předčasné uplatnění opce

V případě amerických opcí má jejich majitel právo uplatnit opce před jejich splatností. U evropských opcí tato možnost neexistuje.

7.6.1 Předčasné uplatnění kupní opce

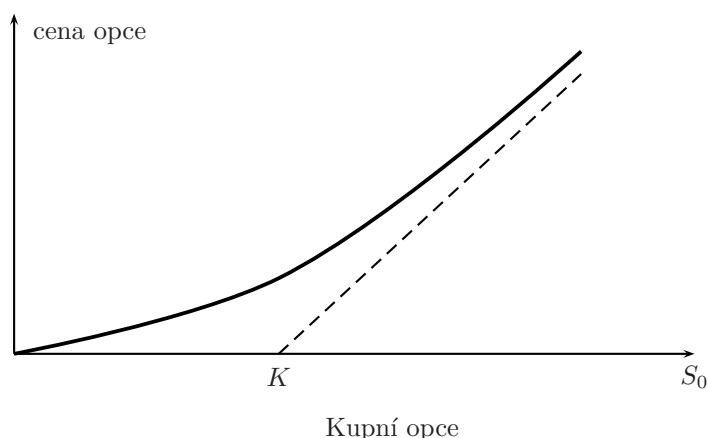
Uvažujme americkou kupní opci na akcii, ze které není vyplácena dividenda, se zbytkovou splatností 1 měsíc. Spotová cena této akcie je 50 USD a realizační cena je 40 USD. To znamená, že opce je "in-the-money". Mohlo by se zdát, že ideální je opci ihned uplatnit.

V případě, že investor plánuje držet akcii, kterou by získal uplatněním opce, nemusí být tato strategie optimální. Jestliže by totiž mezitím cena akcie klesla pod 40 USD, investor by tratil - výhodnější by totiž bylo opci neuplatnit a akci nakoupit na trhu.

Dokonce ani v případě, kdy investor předvídá propad ceny akcie nemusí být výhodnější opci uplatnit a akci obratem ruky prodat za 50 USD. Optimální je

opci prodat jinému investorovi³. Cena této prodané opce bude vyšší než vnitřní hodnota 10 USD, protože musí platit

$$C \geq S_0 - K \cdot e^{-rT}$$

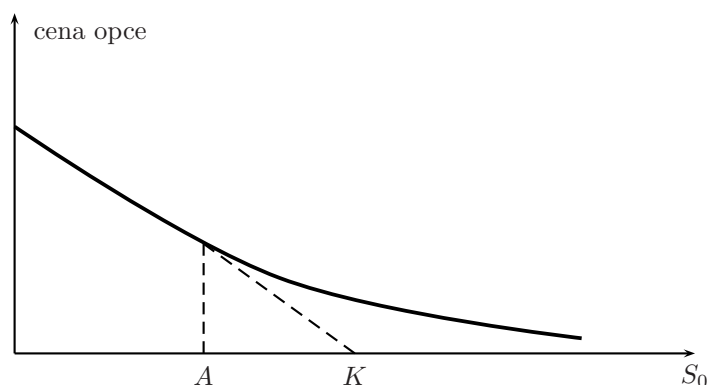


Výše uvedený obrázek ukazuje, že hodnota kupní opce se mění se změnou K a S_0 a že hodnota opce je vždy nad její vnitřní hodnotou $\max(S_0 - K, 0)$. S růstem r , T a volatility se tento rozdíl zvětšuje - hovoříme o tzv. časové hodnotě opce.

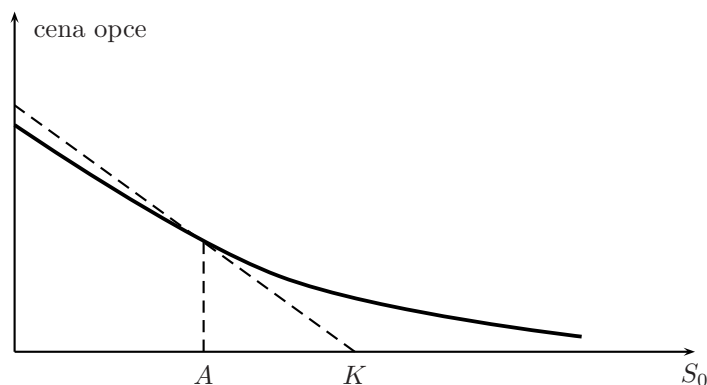
7.6.2 Předčasné uplatnění prodejní opce

Narozdíl od kupní opce může být předčasné uplatnění prodejní opce optimální. Uvažujme situaci, kdy je realizační cena 10 USD a cena akcie se blíží nule. Uplatněním opce tak investor získá 10 USD. Investor nemůže nikdy získat více než 10 USD, a proto je uplatnění opce optimální. Obecně platí, že uplatnění prodejní opce je tím atraktivnější, čím více klesá S_0 , roste r a klesá volatilita. Pro cenu americké prodejní opce navíc platí $P \geq K - S_0$. Americká prodejní opce by tedy měla být uplatněna, když $S_0 \leq A$. V tomto případě je totiž časová hodnota opce záporná. V případě americké opce proto, narozdíl od evropské opce, nemůže dojít k situaci, kdy je vnitřní hodnota opce vyšší než celková hodnota opce, což by implikovalo zápornou časovou hodnotu opce.

³Takový investor musí existovat, jinak by cena akcií nebyla 50 USD.



Americká prodejní opce: vnitřní a časová hodnota



Evropská prodejní opce: vnitřní a časová hodnota

7.7 Vliv dividend

Až dosud jsme předpokládali, že akcie svému majiteli nepřináší žádnou dividendu. V případě opcí, které mají maturitu řádově několik měsíců, je možné výši případné dividendy poměrně přesně odhadnout. Současnou hodnotu dividendy vyplácené v průběhu životnosti opce označíme jako D . Pro výpočet D předpokládejme, že výplata dividendy proběhla k tzv. "ex-dividend" dni.

7.7.1 Dolní limit pro cenu evropské opce

Kupní opce

Uvažujme následující portfolia:

- Portfolio A: evropská kupní opce a hotovost $D + K \cdot e^{-rT}$
- Portfolio B: jedna akcie

Pro cenu evropské kupní opce platí

$$c \geq S_0 - D - K \cdot e^{-rT}$$

Prodejní opce

Uvažujme následující dvě portfolia:

- Portfolio C: evropská prodejní opce a jedna akcie
- Portfolio D: hotovost ve výši $D + K \cdot e^{-rT}$

Pro cenu evropské prodejní opce platí

$$p \geq D + K \cdot e^{-rT} - S_0$$

7.7.2 Předčasné uplatnění americké kupní opce

Jestliže je očekávána výplata dividend, nemusí vždy platit, že není optimální uplatnit americkou kupní opci předčasně. Někdy může být naopak výhodnější uplatnit opci před "ex-dividend" dnem.

7.7.3 Put-call parita

Jestliže budeme porovnávat výše definovaná portfolia A a C, bude put-call parita převedena do tvaru

$$c + D + K \cdot e^{-rT} = p + S_0$$

pro evropskou opci popř. do tvaru

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - K \cdot e^{-rT}$$

pro americkou opci.

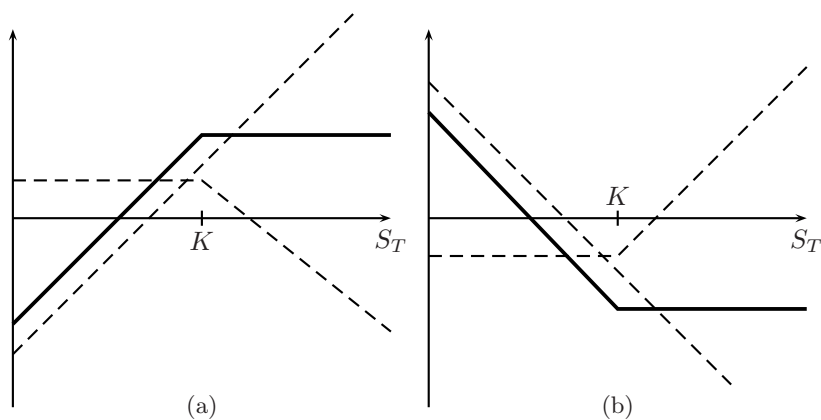
7.8 Opční strategie

Jednotlivé typy opcí je možné vzájemně kombinovat a modelovat tak nejrůznější výnosové profily. Opce jsou tak ideálním nástrojem pro implementaci investičních strategií.

Všechny opce uvažované v této kapitole jsou evropské. V případě amerických opcí, se kterými je spojeno právo předčasného uplatnění, by výnosový profil jednotlivých strategií byl mírně odlišný.

7.8.1 Opce a akcie

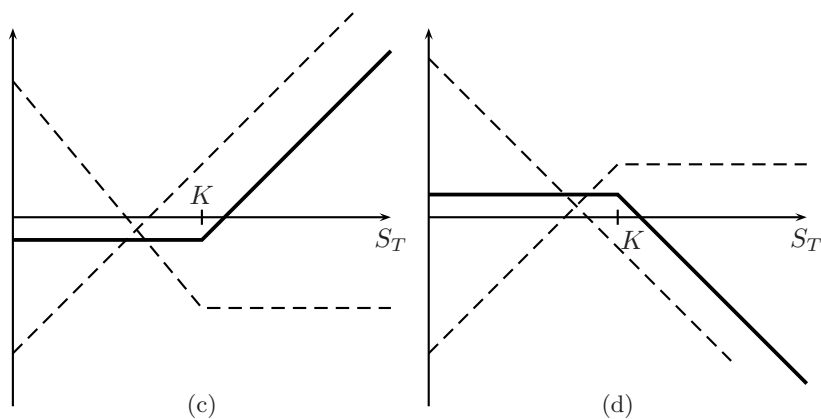
Nejjednodušší opční strategie jsou založeny na kombinaci pokladového aktiva, v našem případě akcie, a opce.



Výnosové profily opční strategie

(a) dlouhá pozice v akci, krátká pozice v kupní opci

(b) krátká pozice v akci, dlouhá pozice v kupní opci



Výnosové profily opční strategie

(c) dlouhá pozice v akci, dlouhá pozice v prodejní opci

(d) krátká pozice v akci, krátká pozice v prodejní opci

Výnosový profil výše uvedených příkladů (a), (b), (c) a (d) má podobný tvar jako elementární evropské opce. Ten v příkladě (a) odpovídá krátké pozici v prodejní opci, v příkladě (b) dlouhé pozici v prodejní opci, v příkladě (c) dlouhé pozici v kupní opci a v příkladě (d) krátké pozici v kupní opci. Toto zjištění je v souladu s již dříve zmiňovanou put-call paritou

$$p + S_0 = c + Ke^{-rT} + D \quad (7.1)$$

kde p je cenou evropské kupní opce, S_0 spotovou cenou akcie, c cenou evropské prodejní opce, K realizační cenou společnou prodejní i kupní opci, r bezrizikovou úrokovou mírou, T zbytkovou splatností obou opcí a D současnou hodnotou očekávaných dividend vyplácených z podkladové akcie.

Rovnice (7.1) tak například říká, že dlouhá pozice v prodejní opci a dlouhá pozice v akci je ekvivalentní dlouhé pozici v kupní opci a navýšené o objem hotovosti ve výši $Ke^{-rT} + D$. Tímto se vysvětluje proč má případ (a) podobný

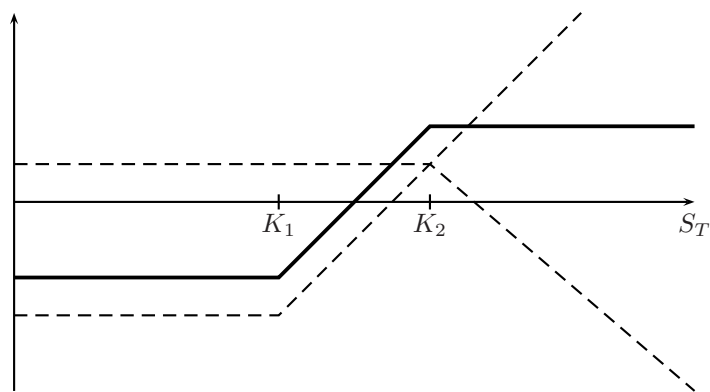
výnosový profil jako krátká pozice v prodejní opci. Elementárními úpravami (7.1) lze odvodit také výnosové profily pro příklady (b), (c) a (d).

7.8.2 Spready

Opční strategie založené na spreadech předpokládají, že investor má pozice ve dvou nebo více opcích stejného druhu. Nejběžnějšími druhy těchto strategií jsou býčí, medvědí, motýlí a kalendářní spread. Každý z těchto spreadů je možné vytvořit z kupních i prodejních opcí.

Býčí spread

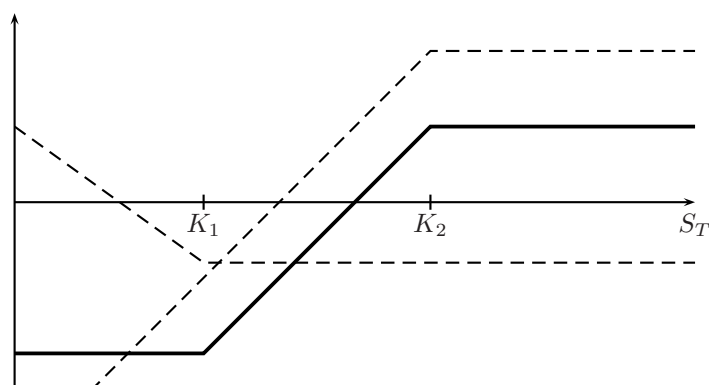
Býčí spread (bull spread) je možné vytvořit dlouhou pozicí v evropské kupní opci s realizační cenou K_1 a krátkou pozicí v evropské kupní opci s realizační cenou K_2 , kde $K_2 > K_1$. Obě uvažované opce mají stejnou zbytkovou splatnost. Protože je hodnota kupní opce nepřímou závislostí na realizační ceně, vyžaduje býčí spread vytvořený z kupních opcí počáteční investici.



Výnosový profil býčího spreadu vytvořeného z kupních opcí

Z výše uvedeného obrázku je patrné, že býčí spread limituje riziko investora shora i zdola.

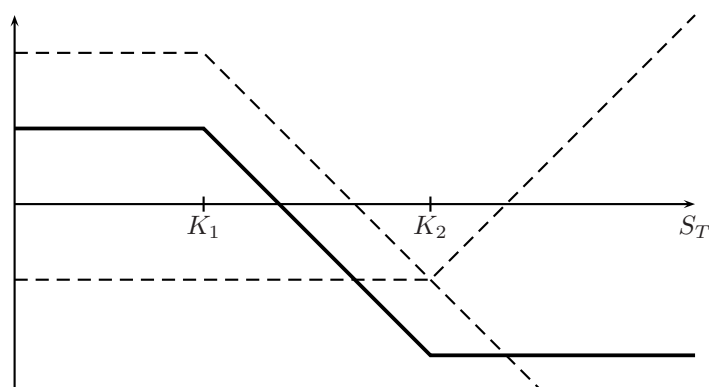
Kromě kupních opcí je možné býčí spread zkonstruovat také z prodejních opcí. Narozdíl od předchozího případu generuje vytvoření býčího spreadu z prodejních opcí pozitivní cash-flow z titulu opčních prémie.



Výnosový profil býčímho spreadu vytvořeného z prodejních opcí

Medvědí spread

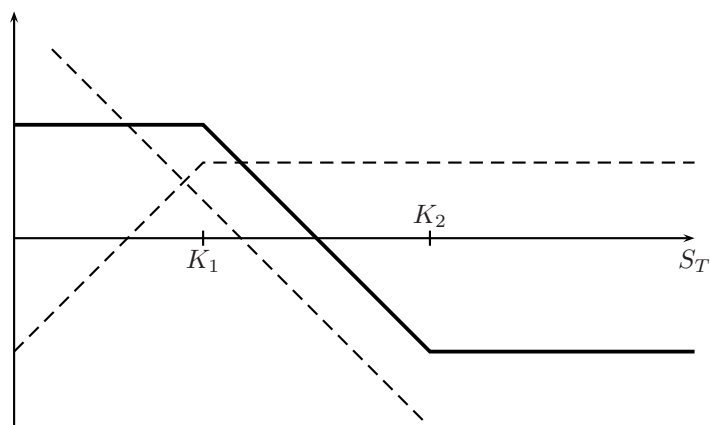
V případě býčímho spreadu spekuluje investor na vzestup ceny podkladové akcie. U medvědího spreadu (bear spread) je tomu naopak. Medvědí spread se konstruuje podobným způsobem jako býčí spread. K vytvoření medvědího spreadu je třeba prodat evropskou kupní opci s realizační cenou K_1 a koupit evropskou kupní opci s realizační cenou K_2 , kde $K_1 < K_2$. Obě kupní opce mají stejnou zbytkovou splatnost. Medvědí spread je tedy zrcadlový k býčímu spreadu a jeho vytvoření z kupních opcí generuje kladné cash-flow.



Výnosový profil medvědího spreadu vytvořeného z kupních opcí

Podobně jako býčí spread i medvědí spread stanovuje limity pro maximální zisk popř. ztrátu, které může investor dosáhnout.

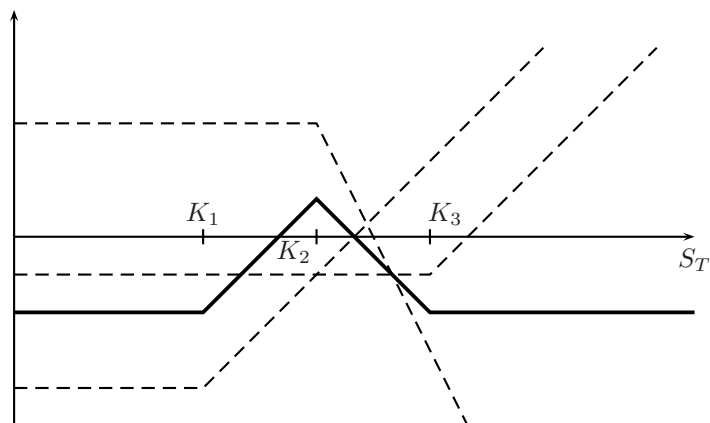
Vedle kupních opcí je možné medvědí spread sestavit také z prodejních opcí. V tomto případě však konstrukce medvědího spreadu vyžaduje počáteční investici titulu opční prémie.



Výnosový profil medvědího spreadu vytvořeného z prodejních opcí

Motýlí spread

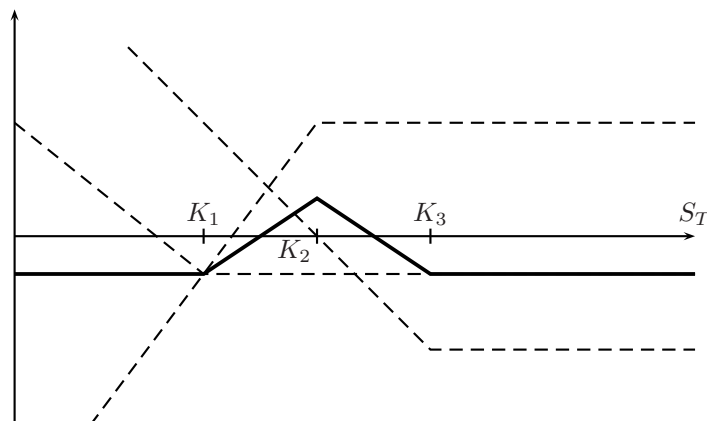
Motýlí spread (butterfly spread) vzniká kombinací čtyř opcí s rozdílnou realizační cenou a shodnou zbytkovou splatností. Motýlí spread je možné vytvořit krátkou pozicí ve dvou evropských kupních opcích s realizační cenou K_2 a dlouhou pozicí v evropských kupních opcích s realizačními cenami K_1 a K_3 . Pro realizační ceny uvažovaných opcí platí $K_2 = (K_1 + K_3)/2$.



Výnosový profil motýlího spreadu vytvořeného z kupních opcí

Motýlí spread generuje výnos za předpokladu, že cena pokladové akcie je v době splatnosti opcí v okolí K_2 . Sestavení motýlího spreadu pomocí kupních opcí vyžaduje počáteční investici, která je však v porovnání s nominální hodnotou spreadu relativně malá.

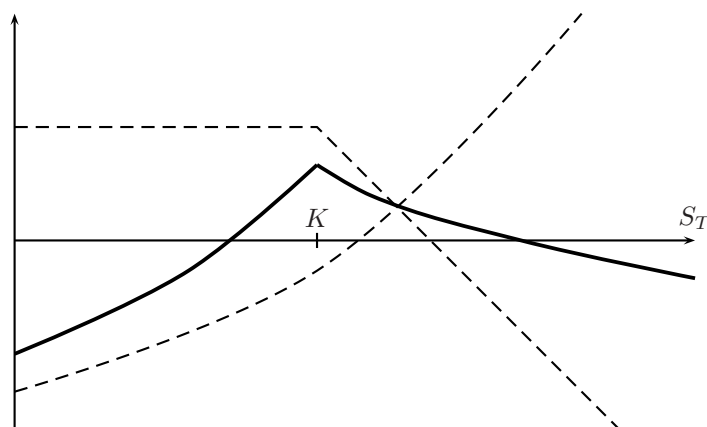
Podobně jako v předchozích případech je možné motýlí spread sestavit z prodejních opcí. Také v tomto případě je zapotřebí počáteční investice. Pomocí put-call parity definované pomocí (7.1) je možné dokázat, že výše této investice se shoduje s investicí, která je zapotřebí pro konstrukci motýlího spreadu z kupních opcí.



Výnosový profil motýlího spreadu vytvořeného z prodejních opcí

Kalendářní spread

Kalendářní spread (calendar spread) je možné rozložit na krátkou pozici v evropské kupní opci a dlouhou pozici v evropské kupní opci. Obě uvažované opce mají stejnou realizační cenu, avšak opce, ve které je investor dlouhý, má delší dobu splatnosti. Vzhledem k tomu, že hodnota opce je rostoucí funkcí splatnosti opce, vyžaduje sestavení kalendářního spreadu z kupních opcí počáteční investici.



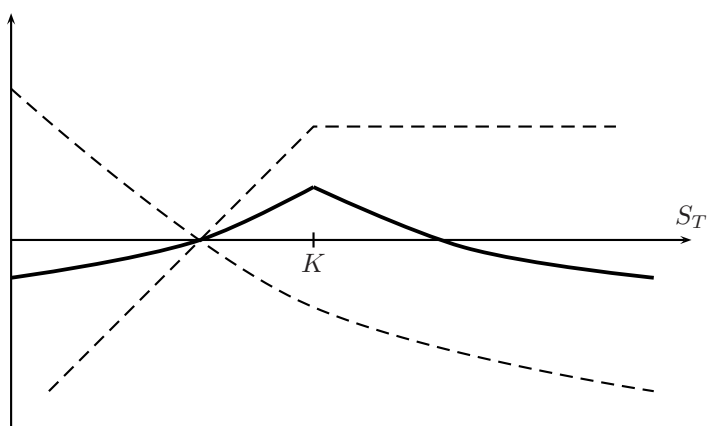
Výnosový profil kalendářního spreadu vytvořeného z kupních opcí

Výše uvedeného výnosového profilu je docíleno tak, že v době splatnosti první opce je prodána opce s delší splatností. Tvar výnosového profilu připomíná motýlí spread. Kalendářní spread tak svému majiteli generuje výnos v případě, že se spotová cena pokladové akcie v době splatnosti první opce nachází v okolí realizační ceny.

Uvažujme situaci, kdy se v době splatnosti první opce cena pokladové akcie blíží nule. Splatná opce je bezcenná a hodnota druhé opce se blíží nule. Investor tedy utrpěl ztrátu, jejíž výše přibližně odpovídá počáteční investici potřebné pro vytvoření kalendářního spreadu. Dále uvažujme situaci, kdy je v době splatnosti první opce spotová cena S_T pokladové akcie vzhledem k realizační ceně K velmi vysoká. První opce tedy stojí investora v době své splatnosti $S_T - K$

a současně druhá opce má z pohledu investora hodnotu o něco málo vyšší než $S_T - K$. Investor opět utrpí ztrátu, která je blízká počáteční investici spojené s vytvoření kalendářního spreadu. Jestliže naopak v době splatnosti první opce bude spotová cena pokladové akcie blízká realizační ceně, je hodnota první opce nulová nebo blízká nule, kdežto hodnota druhé z opcí je kladná.

Kalendářní spread může být vytvořen také z prodejních opcí a to tak, že investor koupí evropskou prodejní opci s delší splatností a prodá evropskou prodejní opci s kratší splatností.



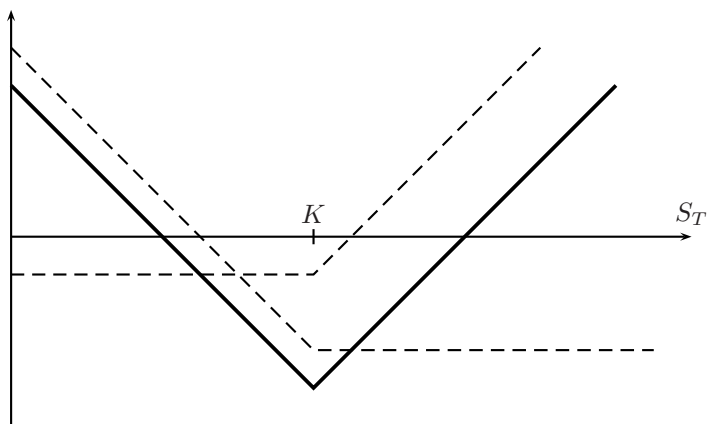
Výnosový profil kalendářního spreadu vytvořeného z prodejních opcí

7.8.3 Kombinace

Až dosud jsme v rámci opční strategie uvažovali pouze jeden typ opcí. Kombinace je naproti tomu opční strategií, která zahrnuje pozice jak v kupních tak prodejních opcích. Mezi nejznámější kombinace patří straddle a strangle.

Straddle

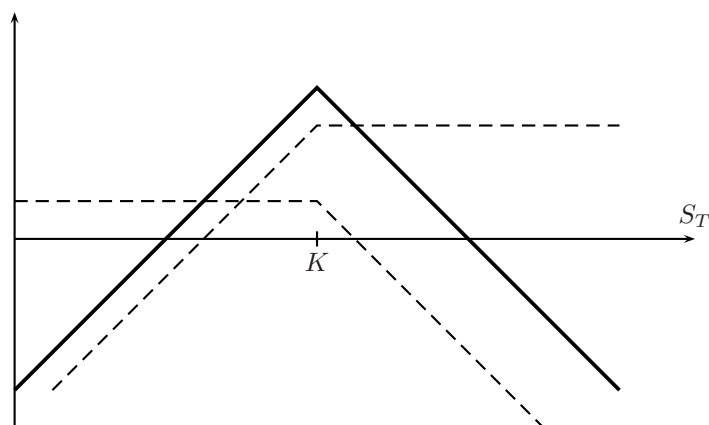
Opční strategii typu straddle lze rozložit na dlouhou pozici v evropské kupní opci a evropské prodejní opc. Obě opce mají stejnou splatnost a realizační cenu.



Výnosový profil straddle vytvořeného nákupem opcí

Jestliže je spotová cena podkladové akcie v době splatnosti blízka realizační ceně, generuje výše uvedený straddle ztrátu. Naopak v případě, že se spotová cena od realizační ceny výrazněji odchýlí, dosahuje investor zisku. Z výšového profilu je tedy zřejmé, že tato opční strategie se hodí v situacích, kdy investor očekává výraznější změnu ceny podkladové akcie, avšak není si jistý jejím směrem. Nicméně v situacích, kdy trh očekává změnu ceny podkladové akcie, bude toto očekávání již promítnuto v ceně opcí. Cena opcí tak bude výrazně vyšší než v případě, kdy trh žádnou změnu neočekává.

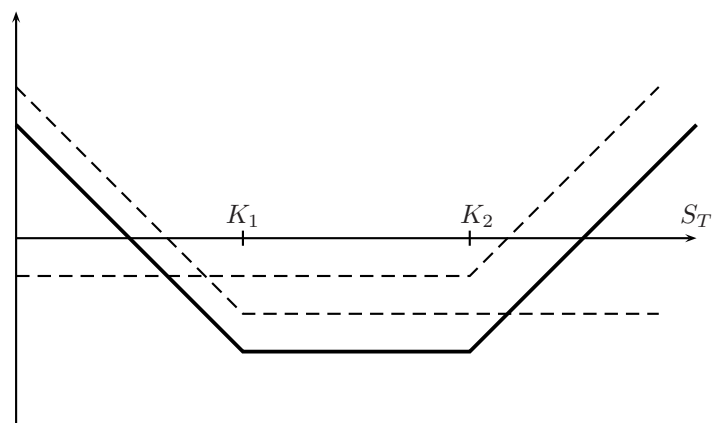
Kromě výše uvedeného příkladu je možné straddle sestavit také tak, že investor prodá evropskou kupní opci a evropskou prodejní opci se stejnou splatností a realizační cenou. V tomto případě však bude investor naopak spekulovat na to, že se spotová cena v době splatnosti opcí výrazněji neodchýlí od realizační ceny. Výšový profil této strategie tedy připomíná motýlí spread s tím rozdílem, že možná ztráta investora není limitována.



Výšový profil straddle vytvořeného prodejem opcí

Strangles

Strangles je opční strategie velice podobná straddle s tím rozdílem, že uvažované opce mají různou realizační cenu. Opční strategii strangles je možné vytvořit jak prodejem tak nákupem opcí. Jako příklad uveďme strangle vytvořeného nákupem opcí.

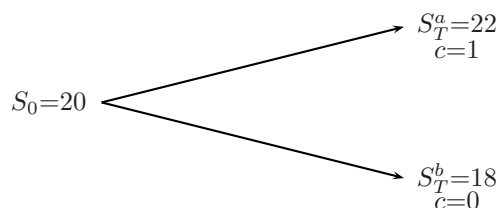


Výnosový profil strangle vytvořeného nákupem opcí

Kapitola 8

Úvod do binomických stromů

Binomický strom je diagram, který zobrazuje možný vývoj ceny akcie po dobu životnosti akcie.



Binomický strom: vývoj ceny akcie a kupní opce
 $K = 21$ USD, S - spotová cena, c - cena kupní opce

Uvažujme evropskou opci, která nám dává právo koupit akcii za 21 USD za tři měsíce. Spotová cena akcie je 20 USD. Zjednodušeně předpokládejme, že na konci těchto tří měsíců může být cena akcie 22 nebo 18 USD a to se stejnou pravděpodobností. V prvním případě bude hodnota opce 1 USD, druhém pak nulová.

Mějme portfolio skládající se z Δ akcií a krátké pozice jedné kupní opce. Aby na konci uvažovaného tříměsíčního období neexistovala možnost arbitráže, musí platit

$$\begin{aligned} 22\Delta - 1 &= 18\Delta - 0 \\ \Delta &= 0.25 \end{aligned}$$

Bez ohledu na budoucí vývoj bude hodnota portfolia v naší modelové situaci po třech měsících 4.50 USD. Dané portfolio je tedy bezrizikové. Při neexistenci arbitráže musí bezrizikové portfolio přinášet výnos ve výši bezrizikové úrokové sazby. Jestliže je bezriziková úroková sazba 12% p.a., je současná hodnota portfolia

$$4.50 \cdot e^{-0.12 \cdot 3/12} = 4.367$$

Spotová hodnota akcie je 20 USD. Hodnota opce f je pak

$$20 \cdot 0.25 - f = 4.367$$

$$f = 0.633$$

Jestliže by cena opce byla více než 0.633 USD, portfolio by stálo méně než 4.367 USD a výnos by byl vyšší než bezriziková výnosová míra. Jestliže by cena opce byla méně než 0.633, představovala by krátká pozice v portfoliu způsob půjčení si peněz za méně než bezrizikovou výnosovou míru.

Uvažujme akcii, jejíž spotová cena je S_0 a opci, jejíž současná cena je f . Předpokládejme, že životnost opce je T a že v průběhu této doby může dojít k růstu ceny akcií na S_0u nebo poklesu na S_0d , kde $u > 1$ a $d < 1$. Procentní růst cen akcií je $u - 1$; procentní pokles pak $1 - d$. Jestliže se cena akcie zvýší na S_0u , bude cena opce f_u , v případě poklesu ceny akcie na S_0d bude cena opce f_d . Portfolio se skládá z Δ akcií a krátké pozice v jedné opci. Jestliže cena akcie poroste, je hodnota portfolia

$$S_0u \cdot \Delta - f_u$$

a v případě poklesu cen akcie pak

$$S_0d \cdot \Delta - f_d$$

Při neexistenci arbitráže musí platit

$$S_0u \cdot \Delta - f_u = S_0d \cdot \Delta - f_d$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \quad (8.1)$$

Bezrizikové portfolio musí přinášet výnos odpovídající bezrizikové úrokové míře. Hodnota portfolia je tedy

$$(S_0u \cdot \Delta - f_u) \cdot e^{-rT}$$

Náklady na pořízení portfolia jsou

$$S_0 \cdot \Delta - f$$

z čehož vyplývá

$$S_0 \cdot \Delta - f = (S_0u \cdot \Delta - f_u) \cdot e^{-rT}$$

$$f = S_0 \cdot \Delta - (S_0u \cdot \Delta - f_u) \cdot e^{-rT} \quad (8.2)$$

Dosazením (8.1) za Δ do (8.2) a s využitím vztahu

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \quad (8.3)$$

lze cenu opce vyjádřit do tvaru

$$f = e^{-rT}[p \cdot f_u + (1 - p) \cdot f_d] \quad (8.4)$$

8.1 Rizikově neutrální ocenění

Proměnou p ve vztahu (8.3) je možné interpretovat jako pravděpodobnost růstu ceny akcie a výraz

$$p \cdot f_u + (1 - p) \cdot f_d$$

pak jako očekávanou hodnotu opce. Současná hodnota opce je pak dána (8.4).

Nechť p je pravděpodobnost růstu ceny akcie. Pak platí, že očekávaná cena akcie je

$$E[S_T] = p \cdot S_0 u + (1 - p) S_0 d$$

$$E[S_T] = p \cdot S_0(u - d) + S_0 d$$

Dosazením za p dostáváme

$$E[S_T] = S_0 \cdot e^{rT}, \quad (8.5)$$

čímž jsem dokázali, že akcie roste v průměru tempem odpovídajícím bezrizikové úrokové míře. V rizikově neutrálním "světě" jsou všichni investoři rizikově neutrální a nepožadují kompenzaci za podstupované riziko. Všechny investice tak přinášejí svému majiteli v průměru výnos odpovídající bezrizikové úrokové míře. Tomuto závěru také odpovídá zjištění zformulované vztahem (8.5) - hovoříme o tzv. konceptu rizikově neutrálního oceňování.

Příklad: Dosazením do (8.3) podle zadání výše uvedeného příkladu dostáváme

$$p = \frac{e^{0.12 \cdot \frac{3}{12}} - \frac{18}{20}}{\frac{22}{20} - \frac{18}{20}}$$

$$p = 0.6523$$

Dosazením do (8.4) pak vypočteme hodnotu opce.

$$f = e^{-0.12 \cdot 3/12} [0.6523 \cdot 1 + 0.3477 \cdot 0]$$

$$f = 0.63302$$

Pravděpodobnost p je pravděpodobností růstu cen akcií v rizikově neutrálním "světě". Nejedná se o pravděpodobnost růstu cen akcie v reálném světě. Investoři totiž požadují kompenzaci za podstupované riziko - namísto 12% p.a. by tak mohli požadovat např. 16% p.a. V tomto případě by pravděpodobnost p byla

$$p = \frac{e^{0.16 \cdot 3/12} - \frac{18}{20}}{\frac{22}{20} - \frac{18}{20}}$$

$$p = 0.7041$$

8.2 Dvoustupňový binomický strom

Uvažujme akcii, jejíž cena je 20 USD. Tato cena se může v každém ze dvou kroků zvýšit nebo snížit o 10%. Předpokládejme, že délka těchto kroků je jeden měsíc a že bezriziková úroková sazba je 12% p.a. Realizační cena opce je 21 USD. Při výpočtu ceny opce lze postupovat analogicky jako ve výše popsaném případě jednostupňového binomického stromu.

Nejprve namodeluje možné ceny akcie S_2 na konci druhého roku a jednotlivým cenám přiřadíme pravděpodobnost, s kterou nastanou. Na základě namodelovaných cen určíme výnosy z opce na konci druhého kroku (tj. $\max(S_2 - s, 0$, kde S_2 je cena akcie na konci druhého kroku a s je realizační cena). Tyto výnosy pak násobíme odpovídající pravděpodobnostmi a výsledné číslo diskontujeme bezrizikovou úrokovou mírou k T_0 . Výsledná cena opce je v našem konkrétním případě 1.2823 USD. Obdobný postup je možné aplikovat i na vícestupňové binomické stromy.

8.2.1 Americká opce

Výše popsaný způsob lze uplatnit při oceňování evropské opce. Podobný mechanismus oceňování lze také použít pro americkou opci. Zásadní rozdíl oproti evropské opci spočívá v tom, že americká opce může být předčasně uplatněna. Proto nestačí zabývat se pouze cenou opce v posledním kroku binomického stromu, ale je nutné uvažovat také kroky předchozí a určit, zda-li je předčasné uplatnění opce optimální či nikoliv.

Uvažujme binomický strom o n krocích. Při oceňování americké opce se postupuje od konce binomického stromu směrem k jeho počátku. V koncových uzlech n -tého kroku binomického stromu se americká opce oceňuje hodnotou danou (8.4). V uzlech m -tého kroku, kde $m < n$, je hodnota opce dána vyšší z následujících dvou hodnot:

- současnou hodnotou váženého průměru ceny opce v sousedících uzlech kroku $m + 1$, kde váhy jsou pravděpodobnostmi přesunu z uvažovaného uzlu do odpovídajícího sousedícího uzlu
- výnosem z okamžitého uplatnění opce

Při ocenění americké opce je třeba projít všechny uzly binomického stromu. Hodnota americké opce v čase nula je rovna hodnotě ve výchozím uzlu binomického stromu. Pro diskontování hodnot mezi jednotlivými kroky binomického stromu se používá bezriziková sazba.

8.3 Výpočet parametru d a u

Předpokládejme, že očekávaná míra růstu cen akcií je μ a jeho volatilita σ . Necht' je časová délka kroku binomického stromu δt . V každém kroku cena akcie buďto vzroste nebo poklesne. Pravděpodobnost růstu ceny akcie je q^1 . Očekávaná cena na konci prvního kroku je $S_0 e^{\mu \delta t}$. Dle logiky binomického stromu lze tuto cenu také vyjádřit jako

$$qS_0u + (1 - q)S_0d$$

¹Pravděpodobnost q na rozdíl od p značí pravděpodobnost růstu akcie v reálném světě.

Proto musí platit

$$qS_0u + (1-q)S_0d = S_0e^{\mu\delta t} \quad (8.6)$$

$$q = \frac{e^{\mu\delta t} - d}{u - d}$$

Směrodatná odchylka výnosové míry akcie v čase δt je s ohledem na zadání $\sigma\sqrt{\delta t}$. Volatilu výnosové míry akcie lze pomocí (8.6) vyjádřit také jako

$$qu^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2$$

Musí tedy platit

$$qu^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2 = \sigma^2\delta t$$

Dosazením za parametr q dostáváme po následných úpravách

$$e^{\mu\delta t}(u + d) - ud - e^{2\mu\delta t} = \sigma^2\delta t$$

Vzhledem k tomu, že pro malá δt konverguje člen řádu δt^2 k nule, a při podmínce $ud = 1$, je řešením výše uvedené rovnice

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

Poznámka: Platí, že volatilita v rizikově neutrálním modelu a reálném světě je stejná, ačkoliv požadované výnosové míry jsou odlišné. Výše popsany postup lze tedy aplikovat v obou případech.

8.3.1 Delta opce

Delta akciové opce je poměr změny ceny opce ku změně ceny akcie. Delta tak představuje počet akcií, které je třeba držet na jednu opci, abychom tak vytvořili bezrizikové portfolio. Delta kupní opce je kladná, delta prodejní opce pak záporná.

$$\Delta = \frac{f_1 - f_0}{S_1 - S_0}$$

Hodnota parametru Δ se mění v čase. Proto je třeba pozici průběžně korigovat.

Kapitola 9

Modelování cen akcií

O proměnné, jejíž hodnota v čase není určena deterministicky, říkáme, že sleduje stochastický proces. Tento proces pak může být definován diskrétně nebo spojitě.

9.1 Markovův proces

Markovův proces je jeden z typů stochastických procesů, který je používán pro modelování cen finančních instrumentů. Pro predikci budoucí ceny je rozhodující pouze současná cena - minulý vývoj cen je tak irrelevantní. Tato teorie tedy předpokládá alespoň slabou formu efektivity trhu. O akciích se většinou předpokládá, že sledují Markovův proces.

9.2 Spojité pojetí stochastického modelu

Uvažujme proměnnou, která sleduje Markovův proces. Předpokládejme, že se meziroční změna ceny akcie řídí pravděpodobnostním rozdělením $\phi(0, 1)$ ¹. Vzhledem k nezávislosti meziročních změn se změna ceny akcie v průběhu n let řídí pravděpodobnostním rozdělením $\phi(0, \sqrt{n})$.

9.2.1 Wienerův proces

Výše popsaný proces nazýváme Wienerův proces a jedná se o konkrétní případ Markovova procesu. Tento proces se používá ve fyzice k modelování pohybů částic, kde je známější pod pojmem Brownův pohyb.

Wienerův proces má následující dvě základní vlastnosti:

- Změna ceny δz v průběhu malé časové periody δt je

$$\delta z = \epsilon \sqrt{\delta t},$$

kde ϵ je náhodný výběr z pravděpodobnostního rozdělení $\phi(0, 1)$.

¹Pravděpodobnostním rozdělením $\phi(\mu, \sigma)$ budeme označovat normální rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ .

- Hodnoty δz jsou pro libovolné dva rozdílné časové intervaly δt vzájemně nezávislé.

Z těchto dvou vlastností pak vyplývá

- $E[\delta z] = 0$
- $D[\delta z] = \delta t$

Předpokládejme, že došlo k růstu ceny akcie v relativně dlouhém časovém horizontu T . Tuto změnu označme $[z(T) - z(0)]$. Změna ceny akcie může být považována za sumu N dílčích změn, které nastaly v časovém intervalu δt

$$N = \frac{T}{\delta t}$$

$$\epsilon_i \in \phi(0, 1)$$

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\delta t}$$

Pro náhodnou veličinu $[z(T) - z(0)]$ platí

- $E[z(T) - z(0)] = 0$
- $D[z(T) - z(0)] = N \cdot \delta t = T$

Zobecněný Wienerův proces proměnné x může být pomocí výše definované proměnné dz popsán jako

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dz$$

Člen $a \cdot dt$ značí tzv. trend, který náhodná veličina x sleduje, a člen $b \cdot dz$ představuje oscilaci kolem tohoto trendu. Pro malý časový interval δt platí

$$\delta x = a \cdot \delta t + b \cdot \epsilon \sqrt{\delta t},$$

kde $\epsilon \in \phi(0, 1)$. To znamená, že

- $E[\delta x] = a \cdot \delta t$
- $D[\delta x] = b^2 \cdot \delta t$

Investory spíše než absolutní změna ceny akcie zajímá jejich relativní změna - tzv. výnosová míra. Jestliže označíme výnosovou míru jako μ , lze předcházející vztahy vyjádřit jako

$$\delta S = \mu S \delta t \tag{9.1}$$

resp.

$$\frac{\delta S}{S} = \mu \delta t \tag{9.2}$$

za předpokladu, že volatilita výnosové míry je nulová. Cenu akcie v čase T pak lze pomocí kontinuálního úročení vyjádřit jako

$$S_T = S_0 e^{\mu T}$$

Jestliže navíc přidáme volatilní složku, modifikují se rovnice (9.1) a (9.2) do tvaru

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \delta z$$

resp.

$$\frac{\delta S}{S} = \mu \delta t + \sigma \delta z \quad (9.3)$$

Pro δt blížící se 0 lze (9.3) upravit do tvaru

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz,$$

který je nejpoužívanějším modelem pro ceny akcií. Proměnná μ je očekávaná výnosová míra, σ pak představuje volatilitu cen akcií.

Výše uvedený vztah lze pro naše účely dále přeformulovat do podoby

$$dS = \mu S dt + \sigma S \epsilon \sqrt{dt} \quad (9.4)$$

Člen δS představuje změnu ceny akcie v malém časovém intervalu délky δt a ϵ je výběr z pravděpodobnostního rozdělení $\phi(0, 1)$. Lze dokázat, že náhodnou proměnnou $\frac{\delta S}{S}$ lze popsat pomocí náhodného rozdělení

$$\frac{\delta S}{S} \sim \phi(\mu \delta t, \sigma \sqrt{\delta t})$$

Tohoto vztahu lze např. využít při simulaci cen metodou Monte Carlo.

9.2.2 Itô proces

Dalším z rodiny stochastických procesů je Itô proces. Jedná se o zobecněný Wienerův proces, kde parametry a a b jsou funkcí hodnoty podkladové proměnné x v čase t . Oba parametry se tak v průběhu času mění.

$$dx = a(x, t) + b(x, t) dz$$

Itô lemma: Předpokládejme, že náhodná veličina x sleduje Itô proces.

$$dx = a(x, t) + b(x, t) dz,$$

kde dz představuje Wienerův proces a parametry a a b jsou funkcí x a t . Funkce G proměnných x a t sleduje proces

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b \cdot dz \quad (9.5)$$

a jedná se tedy také o Itô proces.

V našem případě je G funkcí S a t . Můžeme proto s využitím (9.4) převést (9.5) do tvaru

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S \cdot dz$$

Výše uvedený vztah lze snadno aplikovat např. na forwardové obchody. Jestliže r je bezriziková úroková míra, T délka kontraktu a S_0 spotová cena akcie, lze forwardovou cenu akcie vyjádřit jako

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

Jestliže nás zajímá možný vývoj ceny forwardového kontraktu v čase t , kde $t < T$, je možné použít právě Itô proces.

$$\begin{aligned} F &= Se^r(T-t) \\ dF &= \left(\frac{\partial F}{\partial S} \mu S + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sigma S \cdot dz \\ dF &= (e^{r(T-t)} \mu S - rSe^{r(T-t)}) dt + e^{e(T-t)} \sigma S \cdot dz \end{aligned}$$

9.3 Lema 9A - Odvození Itô procesu

Uvažujme funkci G , která je funkcí dvou proměnných x a y . S použitím Taylo-rova rozvoje lze δG vyjádřit jako

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \delta x \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \delta y^2 + \dots \quad (9.6)$$

S tím, jak se δx a δy limitně blíží 0, přejde výše uvedený vztah do tvaru

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy$$

Předpokládejme, že náhodná veličina x sleduje Itô proces

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz,$$

který je možné v diskrétním tvaru vyjádřit jako

$$\delta x = a(x, t)\delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\delta t}$$

Pro funkci $G(x, t)$ tedy platí

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \delta x \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \delta t^2 + \dots \quad (9.7)$$

Narozdíl od (9.6) nelze jednoduše z Taylorova rozvoje vypustit člen, který obsahuje $\delta^2 x$, protože ten obsahuje část řádu δt .

$$\delta x^2 = a^2(x, t)\delta t^2 + a(x, t)b(x, t)\epsilon\delta t^{\frac{3}{2}} + b^2(x, t)\epsilon^2\delta t$$

Pro δt blížící se nule je možné první dva členy zanedbat, protože jsou vyššího řádu než δt . Vzhledem k tomu, že $\epsilon \in \phi(0, 1)$, platí

$$E[\epsilon^2] = 1$$

Střední hodnota třetího členu je tedy rovna $b^2(x, t)\delta t$. S pomocí $D[ax] = a^2 D[x]$ lze dokázat, že rozptyl členu $b^2(x, t)\epsilon^2\delta t$ má řád δt^2 . Výraz δx^2 tak lze pro δt blížící se nule považovat za deterministický a roven

$$\delta x^2 = b^2(x, t)\delta t$$

Rovnice (9.7) tak přechází do tvaru

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \delta x^2$$

$$\delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a(x, t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x, t) \right) \delta t + \frac{\partial G}{\partial x} b(x, t) \epsilon \sqrt{\delta t}$$

Dosazením δz za $\epsilon \sqrt{\delta t}$ pak získáváme konečnou podobu Itô procesu v diskretním tvaru.

$$\delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a(x, t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x, t) \right) \delta t + \frac{\partial G}{\partial x} b(x, t) \cdot \delta z$$

9.4 Lema 9B - Lognormální rozdělení

Uvažujme náhodnou veličinu S , která sleduje proces $dS = \mu S dt + \sigma S dz$. Dále definujme funkci G jako $G = \ln S$. Platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial S} &= \frac{1}{S} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial^2 S} &= -\frac{1}{S^2} \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Dosazením do (9.5) tak získáme

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Protože μ i σ jsou konstanty, jedná se opět o případ Wienerova procesu. To mimojiné znamená, že

$$\begin{aligned} \ln S_T - \ln S_0 &\sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \\ \ln S_T &\sim \phi \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \end{aligned}$$

Parametr S_T představuje cenu akcie v budoucím čase T , S_0 je spotová cena akcie a $\phi(m, s)$ označuje normální rozdělení se střední hodnotou m a směrodatnou odchylkou s . Z výše uvedeného vztahu vyplývá, že $\ln S_T$ má normální rozdělení. Samotnou náhodnou veličinu S_T lze tedy popsat pomocí lognormálního rozdělení.

Kapitola 10

Black-Scholes model

V předchozí kapitole jsme dokázali

$$\frac{\delta S}{S} \sim \phi(\mu \delta t, \sigma \sqrt{\delta t}),$$

tj. že relativní změna ceny akcie v čase δt sleduje normální rozdělení se střední hodnotou $\mu \delta t$ a směrodatnou odchylkou $\sigma \sqrt{t}$. Dále jsme dokázali, že

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \quad (10.1)$$

Náhodná proměnná $\ln S_T$ tedy sleduje normální rozdělení. Z toho vyplývá, že náhodná proměnná S_T sleduje lognormální rozdělení. Pro S_T tedy s ohledem na (10.1) platí

$$E[S_T] = S_0 e^{\mu T}$$
$$D[S_T] = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

10.1 Výnosová míra

Uvažujme náhodnou veličinu η . Nechť tato náhodná veličina představuje roční výnosovou míru v kontinuálním vyjádření, kterou přináší svému držiteli konkrétní akcie. Cenu akcie v čase S_T lze pak vyjádřit jako

$$S_T = S_0 e^{\eta T}$$

Z toho plyne

$$\eta = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0} \quad (10.2)$$

S použitím (10.1) je možné η vyjádřit v následujícím tvaru

$$\eta \sim \phi \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \right] \quad (10.3)$$

Parametr μ závisí na riziku akcie a bezrizikové výnosové míře - čím vyšší je riziko popř. bezriziková úroková míra, tím vyšší výnos investoři požadují. Pro krátký

časový interval δt lze očekávanou výnosovou míru $E[\eta]$ aproximovat právě pomocí parametru μ jako $\mu\delta t$. Pro delší časové intervaly je však nutné s ohledem na (10.3) vyjádřit očekávanou výnosovou míru jako

$$E[\eta] = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$$

Vzhledem k (10.2) lze $E[\eta]$ vyjádřit jako

$$E[\eta] = \frac{1}{T} \left(E\left[\ln \frac{S_T}{S_0}\right] \right) \quad (10.4)$$

Jedinou náhodnou proměnnou je ve výše uvedeném vztahu S_T . Pro očekávanou hodnotu této veličiny sice platí

$$E[S_T] = S_0 e^{\mu T}$$

$$\ln(E[S_T]) = \ln S_0 + \mu T$$

V (10.4) však figuruje $E[\ln(S_T)]$ a z důvodu nelinearity přirozeného logaritmu nelze tvrdit následující

$$\ln(E[S_T]) = E[\ln(S_T)]$$

Protože je přirozený logaritmus nelineární, platí

$$\ln(E[S_T]) > E[\ln(S_T)]$$

$$E\left[\ln \frac{S_T}{S_0}\right] < \mu T$$

Z tohoto důvodu není vhodné aproximovat očekávanou výnosovou míru parametrem μ .

10.2 Volatilita

Volatilita akcie σ definuje nejistotu ohledně výnosu, který poskytne svému držiteli akcie. Pro akcie je volatilita typicky 20% - 50% na roční bázi. Volatilita v absolutním vyjádření s ohledem na cenu akcie pak dána vztahem

$$S_0 \sigma \sqrt{T}$$

Jestliže sledujeme cenu akcie v pravidelných intervalech (např. na denní bázi), lze relativní změnu ceny v i -tém období vyjádřit jako

$$u_i = \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right)$$

Směrodatnou odchylku výnosové míry lze odhadnout pomocí s .

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

Jestliže $\hat{\sigma}$ je odhad roční volatility a τ délka období pro výpočet u_i , platí

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Standardní chyba tohoto odhadu je $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$, kde n je počet pozorování. Z toho tedy vyplývá, že s rostoucím n se zvyšuje přesnost odhadu.

Poznámka: Empirické výzkumu prokázaly, že pro odhad volatility je vhodnější použít pouze pracovní dny. V opačném případě by došlo k zavádějícímu snížení volatility.

10.3 Koncept modelu

Předpoklady modelu:

1. Cena akcie sleduje proces popsany v kapitole 9. Parametry μ a σ jsou konstantní.
2. Krátký prodej je povolen.
3. Neexistují transakční náklady ani daně. Všechny cenné papíry jsou dokonale dělitelné (tj. je např. možné koupit $1/3$ akcie).
4. V průběhu životnosti opce nedochází k výplatě dividend z podkladové akcie.
5. Neexistuje možnost bezrizikové arbitráže.
6. Obchodování s cennými papíry je nepřetržité.
7. Bezriziková úroková sazba r je konstantní po celou dobu životnosti opce pro všechny splatnosti.

Za předpokladů zmiňovaných v předchozí kapitole sleduje změna ceny akcie proces

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Uvažujme cenu kupní opce f . Je zřejmé, že proměnná f je funkcí S a t . Proto platí

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Jestliže výše uvedené rovnice převedeme do diskrétního tvaru, dostáváme

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \delta z \quad (10.5)$$

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \delta z \quad (10.6)$$

Uvažujme portfolio, které se skládá z -1 opce a $\partial f / \partial S$ akcií. Jestliže Π je hodnota portfolio, platí

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

Změnu ceny tohoto portfolio v čase δt pak lze vyjádřit jako

$$\delta \Pi = -\delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \delta S$$

Dosazením (10.5) a (10.6) a následnými úpravami lze výše uvedenou rovnici vyjádřit jako

$$\delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t$$

Protože tento vztah neobsahuje δz , musí být portfolio v časovém horizontu δt bezrizikové. Proto musí svému vlastníkovvi přinášet výnos odpovídající bezrizikové výnosové míře.

$$\delta\Pi = r\Pi\delta t$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} \right) \delta t$$

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \quad (10.7)$$

(10.7) je Black-Sholes-Mertonova diferenciální rovnice. Řešením této rovnice s ohledem na omezující podmínku $f = \max(S-K, 0)$ pro $t = T$ v případě evropské kupní opce (popř. $f = \max(K-S, 0)$ pro $t = T$ v případě evropské prodejní opce) jsou pak následující rovnice

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (10.8)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (10.9)$$

(10.8) resp. (10.9) představuje cenu evropské kupní opce resp. evropské prodejní opce v čase t . $N(x)$ je kumulativní distribuční funkce normovaného normálního rozdělení a K je realizační cena opce.

Výše uvedené rovnice jsou založeny na principu rizikově neutrálního ocenění. V těchto rovnicích totiž nefiguruje žádný člen, který by odrážel rizikový profil investora. Jak již bylo zmíněno, je tímto členem μ , který však při odvozování diferenciální rovnice vypadl. Výše uvedené rovnice je tak možné použít ve světě s libovolným rizikovým profilem. Uvažujme svět, kde investoři požadují vyšší očekávanou výnosovou míru jako kompenzaci za podstupované riziko¹. V tomto případě dojde k změně dvou faktorů, které se vzájemně vykompenzují:

1. zvýší se požadovaný očekávaný výnos z akcie jako důsledek zvýšené averze k riziku
2. vzroste diskontní faktor, který je používán k určení současné hodnoty budoucího cash-flow.

¹Toto pojetí odpovídá reálnému světu více než koncept rizikově neutrálního modelu

10.3.1 Odvození rovnic Black-Sholes modelu

Vedle odvození rovnic (10.8) a (10.9) prostřednictvím diferenciální rovnice (10.7) existuje ještě další možnost řešení.

Uvažujme hustotu pravděpodobnosti $g(V)$ náhodné proměnné V . Platí

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_K^\infty (V - K)g(V)dV \quad (10.10)$$

Nechť proměnná $\ln V$ sleduje normální rozdělení se směrodatnou odchylkou s . Z definice střední hodnoty lognormálního rozdělení vyplývá

$$m = \ln(E[V]) - \frac{s^2}{2}, \quad (10.11)$$

kde m je střední hodnota proměnné $\ln V$. Definujme novou proměnnou

$$Q = \frac{\ln V - m}{s}$$

Proměnná Q sleduje normované normální rozdělení. Platí tedy

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}$$

Rovnici (10.10) tedy lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} E[\max(V - K, 0)] &= \int_{(\ln K - m)/s}^\infty (e^{Qs+m} - K)h(Q)dQ \\ E[\max(V - K, 0)] &= \int_{(\ln K - m)/s}^\infty e^{Qs+m}h(Q)dQ - K \int_{(\ln K - m)/s}^\infty h(Q)dQ \end{aligned} \quad (10.12)$$

Úpravami výrazu $e^{Qs+m}h(Q)$ z rovnice (10.12) získáme

$$e^{Qs+m}h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-Q^2+2Qs+2m)/2} = \frac{e^{m+s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{[-(Q-s)^2]/2} = e^{m+s^2/2}h(Q-s)$$

Rovnici (10.12) tak lze dále upravit do tvaru

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{m+s^2/2} \int_{(\ln K - m)/s}^\infty h(Q-s)dQ - K \int_{(\ln K - m)/s}^\infty h(Q)dQ \quad (10.13)$$

Definujme funkci $N(x)$ jako pravděpodobnost, že náhodná proměnná, která sleduje normované normální rozdělení, je menší než x . První člen pravé strany rovnice (10.13) je tak

$$1 - N[(\ln K - m)/s - s]$$

neboli

$$N[(-\ln K + m)/s + s]$$

Dosazením za m dle (10.11) pak získáme

$$N\left(\frac{\ln(E[V]/K) + s^2/2}{s}\right) = N(d_1)$$

Podobně lze převést druhý člen pravé strany rovnice (10.13) do tvaru

$$N\left(\frac{\ln(E[V]/K) - s^2/2}{s}\right) = N(d_2)$$

Celou rovnici (10.13) tak lze vyjádřit jako

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{m+s^2/2}N(d_1) - KN(d_2)$$

Dosazením za m a následnými úpravami pak získáme rovnici pro výpočet ceny evropské kupní opce.

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{\ln(E[V]) - s^2/2}N(d_1) - KN(d_2)$$

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{E[\ln(V)]}N(d_1) - KN(d_2)$$

$$E[\max(V - K, 0)] = E[V]N(d_1) - KN(d_2)$$

Diskontováním pak získáme konečnou formu rovnice pro výpočet ceny evropské kupní opce

$$c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

10.4 Implikovaná volatilita

Rovnice Black-Scholes modelu považují volatilitu ceny akcie za jeden ze vstupních parametrů. Volatilita se běžně počítá z relativních změn ceny akcií mezi jednotlivými pracovními dny. Pro účely výpočtu historické volatility se uvažuje 252 pracovních dní v roce.

Nieméně je možné, známe-li cenu opce, volatilitu zpětně vypočítat. Platí, že takto vypočtená volatilita se nemusí vždy rovnat volatilítě historické. V tomto případě hovoříme o tzv. implikované volatilítě, kterou je možné chápat jako volatilitu očekávanou trhem.

Poznámka: Volatilitu není možné z rovnic Black-Scholes modelu vyjádřit analyticky - je třeba ji určit iteračně. Dále není vhodné počítat implikovanou volatilitu z opcí, které jsou hluboce in-the-money nebo out-of-the-money, protože cena opce je v těchto případech velice málo citlivá na změnu volatility.

10.5 Dividendy

Až dosud jsme uvažovali pouze akcie, které nepřinášejí svému majiteli žádnou dividendu.

Jsou-li však držitel akcie po dobu životnosti evropské opce vypláceny dividendy, je třeba v rovnici (10.8) a (10.9) snížit S_0 o současnou hodnotu očekávané dividendy. Tyto dividendy pak považujeme za "bezrizikovou" složku akcie. Spolehlivé určení očekávané výše dividend ovšem vyžaduje stabilní dividendovou politiku. Dividendy se diskontují k tzv. ex-dividend dni bezrizikovou úrokovou sazbou r .

Dalším problémem je zdanění dividend. Míra zdanění totiž nemusí být shodná pro všechny subjekty. Jistým vodítkem může být v tomto případě vývoj cen akcie v minulosti. Jestliže tedy např. cena akcie k ex-dividend dni v minulosti klesla v průměru o 80% hodnoty vyplácené dividendy je vhodné pro výpočet současné hodnoty použít nikoliv 100% ale pouze 80% hodnoty dividendy.

10.6 Modifikace Black-Scholes modelu

10.6.1 Akcie s konstantním dividendovým výnosem

V případě evropské opce, kde podkladovým aktivem je akcie popř. akciový index s konstantním dividendovým výnosem q , jsou původní rovnice Black-Scholes modelu modifikovány následujícím způsobem

$$\begin{aligned}c &= S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\p &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \\d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\end{aligned}$$

Důvod výše uvedených úprav spočívá v hlavní myšlence rizikově neutrálního oceňování - tj. že každé aktivum přináší svému majiteli očekávaný výnos odpovídající bezrizikové úrokové míře r .

Uvažujme dvě akcie, jejichž spotová cena je S_0 . První z akcií přináší svému majiteli konstantní dividendový výnos q , z druhé akcie dividendy vypláceny nejsou. Jestliže odhlédneme od kapitálových výnosů, pak na konci časového období délky T , bude cena první akcie $S_0 e^{qT}$, avšak cena druhé akcie zůstane S_0 . Aby se ceny obou akcií na konci období délky T rovnaly S_0 , musí být cena první akcie na začátku období rovna $S_0 e^{-qT}$. To vysvětluje nahrazení S_0 výrazem $S_0 e^{-qT}$ v rovnicích pro výpočet ceny opce. Vzhledem k tomu, že dividendy generují výnos q , musí kapitálový růst první akcie odpovídat $r - q$. Celkový výnos tak bude odpovídat bezrizikové úrokové sazbě r . To vyžaduje úpravy parametrů d_1 a d_2 .

10.6.2 Měnové opce

Logika měnových opcí je podobná jako v případě opcí, jejichž podkladovým aktivem je akcie s konstantním dividendovým výnosem. Parametr r představuje bezrizikovou výnosovou míru domácí měny², parametr r_f pak bezrizikovou výnosovou míru cizí měny. Obě bezrizikové výnosové míry musí být vztaženy k časovému období T . Parametr σ je volatilitou měnového kurzu. V případě měnových opcí navíc platí, že prodejní a kupní opce jsou symetrické³.

$$\begin{aligned}c &= S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\p &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1) \\d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\end{aligned}$$

²Domácí měna je měna, ve které je vyjádřena cena opce.

³To znamená, že prodej měny A znamená současný prodej měny B a naopak.

10.6.3 Futures opce

Futures opce je označována maturitou podkladové futures. Splatnost opce se pak odvíjí od tzv. delivery dne pro podkladovou futures - končí první možným termínem popř. několik dní před tímto datem.

Futures kontrakt vyžaduje nulovou počáteční investici. V rizikově neutrálním světě by proto očekávaná výnosnost takovéto investice měla být nulová. Z toho logicky vyplývá, že očekávaný růst ceny futures by měl být nulový. Touto úvahou se dostáváme do situace analogické s případem akciové opce, kdy podkladová akcie generovala konstatní dividendový výnos q . Tato akcie rostla mírou $r - q$. V případě futures opcí pak tedy speciálně platí $r = q$. To znamená, že cena futures roste nulovou mírou.

$$c = e^{-rT} \left[F_0 N(d_1) - K N(d_2) \right] \quad (10.14)$$

$$p = e^{-rT} \left[K N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \right] \quad (10.15)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Poznámka: Většina futures opcí je americká. Výše uvedené rovnice se však vztahují pouze na evropské opce.

Kapitola 11

Řecká písmena

Uvažujme situaci, kdy obchodník prodal evropskou prodejní opci za cenu 300 000 USD, přičemž teoretická cena této opce byla 240 000 USD¹. Necht' je realizační cena za jednu podkladovou akcii 50 USD a celkový objem 100 000 kusů. Obchodník sice realizoval zisk 60 000 USD, avšak současně si prodejem opce otevřel pozici. Existuje několik možností, jak se obchodník může zachovat. První možností je nedělat nic. Tato strategie je optimální v případě, že cena akcie nevzroste v době maturity opce nad 50 USD. V opačném případě však může vyústit ve značné ztráty. Druhou možností je nakoupit v době prodeje opce 100 000 akcií a ty držet a do splatnosti opce. Tato strategie je optimální v případě, kdy cena akcie vzroste nad 50 USD.

Vzhledem k tomu, že budoucí vývoj ceny akcie nelze předjímat, neposkytuje ani jedna z výše uvedených možností dostatečné zajištění. Jako ideální by se mohla jevit strategie, kdy by obchodník akcie nakoupil v okamžiku, kdy by cena vzrostla nad 50 USD a prodal v případě, že cena klesne pod 50 USD. Tato kombinace výše uvedených přístupů se označuje jako "stop-loss strategy". Celkové teoretické náklady této strategie by byly nulové (obchodník by nakupoval a prodával za cenu 50 USD na akcii). Zásadním problémem je, že z důvodu časového zpoždění by obchodník nebyl schopen zrealizovat prodej popř. nákup za tuto cenu. Dalším problémem je existence transakčních nákladů. Poslední skutečností, která hovoří v neprospěch této strategie, je fakt, že v případě efektivního trhu není minulý vývoj cen akcií není indikátorem budoucího vývoje². "Stop-loss strategy", ačkoliv na je na první pohled velice atraktivní, v praxi selhává. Pro zajištění pozice používají obchodníci následujících technik a postupů.

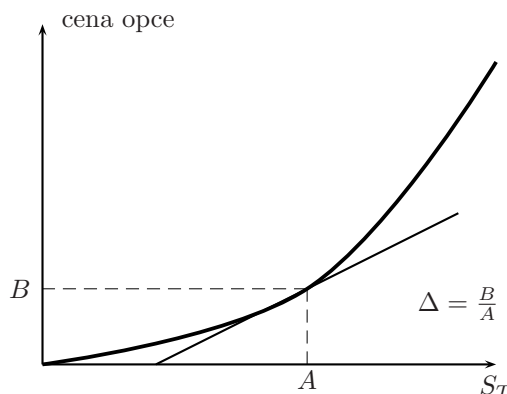
11.1 Delta

Delta opce je definována jako podíl změny ceny opce ku změně ceny podkladového aktiva. Jestliže je Π cenou opce, pak je možné deltu definovat jako

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

¹Teoretickou cenou rozumíme cenu stanovenou podle Black-Scholes modelu.

²Jestliže cena akcie na efektivním trhu protne určitou cenovou hranici, je pravděpodobnost, že se vrátí pod tuto hranici stejná jako pravděpodobnost, že bude pokračovat v nastoupeném trendu.



Výpočet parametru delta

Význam tohoto parametru pro zajištění je patrný na první pohled. Jestliže obchodník drží jednu jednotku pokladového aktiva, musí nakoupit $-\Delta$ jednotek opce. Pro hodnotu tohoto portfolia totiž v případě malých změn δS platí

$$-\Delta\delta S + \delta\Pi = 0$$

O takovéto pozici hovoříme jako o delta neutrální. Jak již bylo zmíněno, výše uvedená rovnice platí pouze pro malé změny δS , což znamená, že obchodník má zajištěnou pozici pouze na krátký časový interval. Aby jeho pozice zůstala delta neutrální, musí průběžně korigovat objem opcí v portfoliu v závislosti na tom, jak se mění delta.

Pro evropskou akciovou opci je delta dána vztahem

$$\Delta_c = e^{-qT} N(d_1)$$

$$\Delta_p = e^{-qT} [N(d_1) - 1]$$

Stejně rovnice možné použít také na výpočet delty měnových a futures opcí. V případě měnových opcí se namísto dividendové výnosové míry q použije bezriziková výnosová míra cizí měny r_f . U futures opcí se pak namísto q použije bezriziková úroková sazba r .

Pro portfolio opcí platí, že delta portfolia je rovna váženému průměru delt jednotlivých opcí.

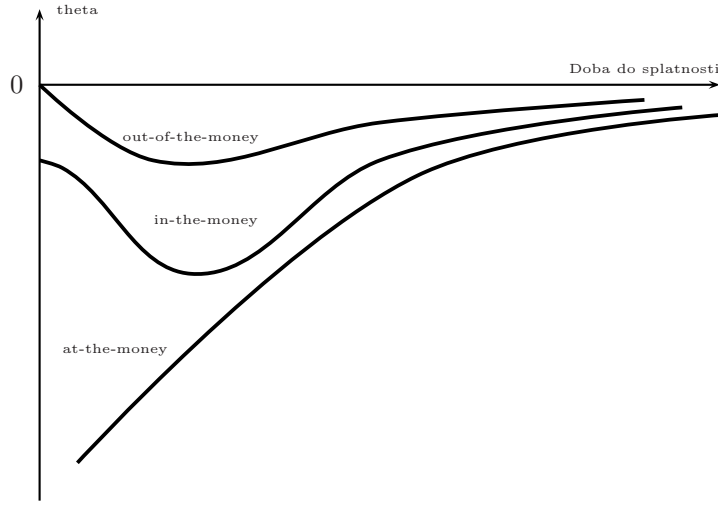
$$\Delta = \sum_{i=1}^n w_i \Delta_i$$

Poznámka: Parametr delta lze určit také pro jiné deriváty. Delta je opět definována jako citlivost ceny derivátu na změnu ceny podkladového aktiva.

11.2 Theta

Theta lze definovat jako změnu ceny opci v závislosti na tom, jak plyne čas, za předpokladu, že všechny ostatní faktory zůstávají neměnné.

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$



Parametr theta pro jednotlivé typy evropské kupní opce

V případě akcie s konstantním dividendovým výnosem lze theta příslušné evropské opce vyjádřit jako

$$\Theta_c = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T} - qS_0 N(d_1) e^{-qT} - rK e^{-rT} N(d_2)}$$

$$\Theta_p = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T} + qS_0 N(-d_1) e^{-qT} + rK e^{-rT} N(-d_2)}$$

kde $N'(x)$ je definováno jako

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Obdobné vztahy je možné použít také pro výpočet theta pro měnové a futures opce. V případě měnové opce se namísto q použije bezriziková výnosová míra cizí měny r_f , v případě futures opcí pak bezriziková úroková míra r .

Pro theta platí, že v čase klesá. To znamená, že cena opce se se zkracující maturitou zmenšuje. Vzhledem k tomu, že theta není měřítkem rizika³ používá se jako popisná statistika.

Poznámka: Výše uvedené vzorce měří čas v rocích. V praxi je však theta často vyjádřena ve dnech. Abychom získali theta ve dnech, je zapotřebí výsledek podělit 365 (pro kaledářní dny) resp. 252 (pro pracovní dny).

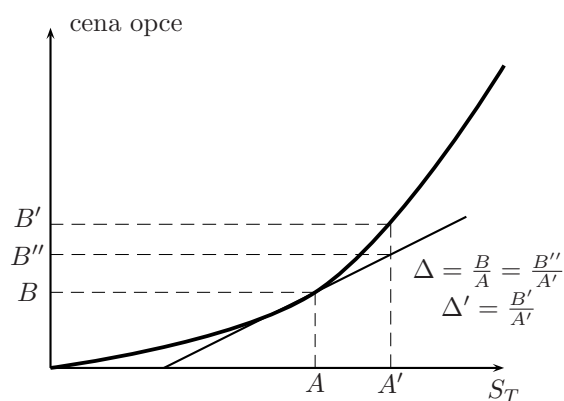
11.3 Gamma

Gamma vyjadřuje citlivost parametru delta na změnu ceny pokladového aktiva. Jestliže je gamma malé, mění se delta pouze pozvolna a korekce je potřeba

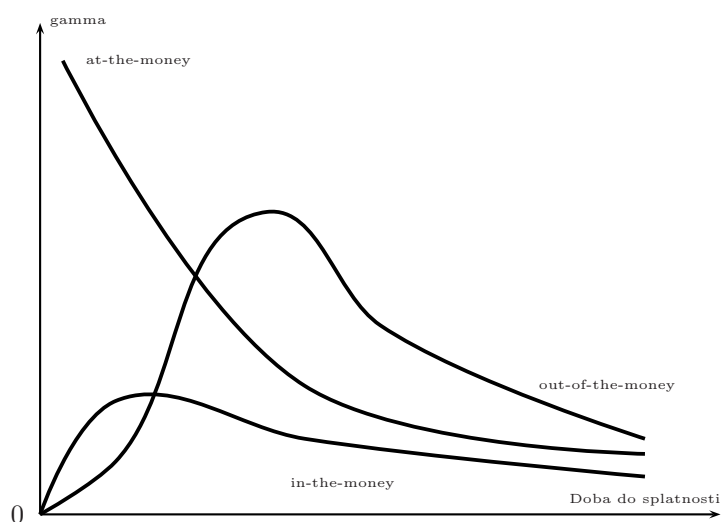
³Čas je čistě deterministickým procesem - nezahrnuje žádnou náhodnou složku.

provádět s nižší frekvencí. Je-li gamma v absolutním vyjádření vysoké, je reaguje delta velmi silně na změnu ceny podkladového aktiva.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$



Výpočet parametru gamma



Parametr gamma pro jednotlivé typy opcí

Podobně jako pro parametr delta platí, že gamma portfolia je dána váženým průměrem dílčích parametrů gamma.

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n w_i \Gamma_i$$

Parametr gamma je pro evropskou kupní a prodejní akciovou opci shodný a dán vztahem

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

V případě měnové opce je parametr q ve výše uvedé rovnici nahrazen parametrem r_f a v případě futures opcí platí $q = r$.

Poznámka: Parametry delta a gamma jsou vzájemně provázány - změna jednoho z nich vyvolá změnu druhého a naopak.

11.4 Vztah mezi delta, theta a gamma

Nechť je hodnota portfolia Π funkcí času t a ceny podkladového aktiva S . Pomocí Taylorova rozvoje lze $\delta\Pi$ vyjádřit jako

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\delta S^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\delta t^2 + \frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial t}\delta S\delta t + \dots$$

S použitím řeckých písmen lze výše uvedený vztah dále upravit do tvaru

$$\delta\Pi = \Delta\delta S + \Theta\delta t + \frac{1}{2}\Gamma\delta S^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\delta t^2 + \frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial t}\delta S\delta t + \dots \quad (11.1)$$

Změnu ceny portfolia tak lze přibližně vyjádřit jako

$$\delta\Pi \approx \Delta\delta S + \Theta\delta t + \frac{1}{2}\Gamma\delta S^2 \quad (11.2)$$

Pro další členy rozvoje (11.1) by tak bylo možné definovat další řecká písmena a aproximaci dále zpřesnit.

11.5 Vega

Až dosud jsme uvažovali, že volatilita ceny pokladového aktiva je konstantní. Tato volatilita se však v čase může měnit. Parametr vega vyjadřuje citlivost ceny opce na změnu volatility podkladového aktiva. Z logiky věci tedy vyplývá, že pozice v podkladovém aktivu má vega rovnou nule. Dále platí, že vega je vždy kladná - tj. že cena opce s rostoucí volatilitou roste.

$$\nu = \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}$$

Pro portfolio instrumentů platí

$$\nu = \sum_{i=1}^n w_i \nu_i$$

Zásadním problémem je, že delta neutrální portfolio není ve většině případů vega neutrální a naopak. Jestliže chce obchodník vytvořit portfolio, které bude současně delta a vega neutrální, musí použít alespoň dva deriváty, které jsou odvozeny od požadovaného pokladového aktiva. Pro evropskou kupní a prodejní akciovou opci s konstantním dividendovým výnosem platí

$$\nu = S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}$$

Poznámka: Odvození parametru vega z Black-Scholes modelu je na první pohled paradoxní, protože tento model předpokládá konstantní volatilitu. Přesnost výše uvedených vzorců se však v praxi ukázala jako dostatečná.

11.6 Rho

Parametr rho vyjadřuje míru citlivosti ceny opce na změnu úrokové míry.

$$\rho = \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

Pro evropskou akciovou opci s konstantním dividendovým výnosem platí

$$\rho_c = KTe^{-rT}N(d_2)$$

$$\rho_p = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

Pro každou měnovou opci existují vždy dvě rho. Jedna vyjadřuje citlivost na změnu úrokové míry domácí a druhá citlivost na změnu úrokové míry cizí měny. Parametr rho pro domácí měnu je možné vypočíst podle výše uvedených vztahů. Pro cizí měnu je rho dáno rovnicemi

$$\rho_c = -Te^{-r_fT}S_0N(d_1)$$

$$\rho_p = Te^{-r_fT}S_0N(-d_1)$$

Pro futures opce je rho dáno

$$\rho_c = -cT$$

$$\rho_p = -pT$$

11.7 Syntetická opce

Jestliže obchodník drží akciové portfolio, může pro něj být velice zajímavé doplnit portfolio o prodejní opci na tyto akcie. Tímto způsobem může limitovat maximální ztrátu, kterou může v případě nepříznivého vývoje cen utrpět. Problém nastává, když opce není na trhu k dispozici. Požadovanou opci je však možné vytvořit synteticky. Hlavní myšlenka syntetické opce spočívá v tom, že se udržuje taková pozice v podkladovém aktivu (popř. futures na pokladové aktivum), jejíž delta je rovna deltě požadované opce. Vzhledem k tomu, že delta evropské prodejní akciové opce je

$$\Delta = e^{-qT} \left[N(d_1) - 1 \right]$$

a vzhledem k tomu, že delta podkladového aktiva je vždy rovna jedné, platí, že syntetickou opci je možné vytvořit prodejem právě Δ jednotek podkladového aktiva. Za takto získané prostředky je pak třeba nakoupit bezrizikové aktivum, které generuje bezrizikovou výnosovou míru. S tím, jak se mění delta portfolia, je třeba postupně dokupovat / prodávat podkladové aktivum. V praxi se velice často namísto konkrétních akciových titulů používá jako pokladové aktiva akciového indexu. V tomto případě je odpovídající delta na jeden futures kontrakt definována jako

$$\Delta = e^{-qT} e^{-(r-q)T^*} \left[1 - N(d_1) \right]$$

Počet futures kontraktů na daný akciový index je pak dán vztahem

$$e^{-qT} e^{-(r-q)T^*} \left[1 - N(d_1) \right] \frac{K_1}{K_2} \beta,$$

kde T^* představuje maturitu futures kontraktu, K_1 podíl hodnoty portfolia a indexu, K_2 podíl hodnoty futures kontraktu a indexu a β je beta koeficient portfolia.

Poznámka: Princip syntetické opce selhává v okamžiku, kdy se volatilita indexu mění skokově v krátkém období. Navíc tento mechanismus paradoxně přispívá zvýšené volatilitě trhu - obchodníci totiž prodávají akcie popř. futures na index při poklesu trhu, čímž pokles dále prohlubují. Typickým příkladem je krize z 19. října 1987.

Kapitola 12

Volatility smile

Black-Scholes model je založen na předpokladu konstantní volatility podkladového aktiva. Tento předpoklad však v reálném světě přestal platit po finanční krizi v roce 1987. V dnešní době je obvyklé, že implikovaná volatilita¹ out-of-the-money prodejní opce je vyšší než implikovaná volatilita out-of-the-money kupní opce. Vzhledem k tomu, že volatilita přímoúměrně ovlivňuje cenu opce, jsou out-of-the-money prodejní opce dražší než out-of-the-money kupní opce.

Řešením tohoto rozporu je tzv. volatility smile. Volatility smile je funkcí vyjadřující závilost realizační ceny opce a implikované volatility a říká nám, pro jakou volatilitu je Black-Scholes model konzistentní s kotovanými cenami opcí. Protože tvar příslušné křivky připomínal po krizi v roce 1987 tvar písmene “U”, začalo se této křivce říkat volatility smile. Název se udržel až do dnešní doby, ačkoli toto pravidlo již neplatí. Tvar volatility smile závisí na typu podkladového aktiva (akcie, měnový kurz apod.) a může se lišit v čase.

Poznámka: V praxi se namísto realizační ceny opce používá její delta. Jestliže v rámci Black-Scholes modelu zafixujeme všechny parametry s výjimkou realizační ceny, lze snadno dokázat, že pro každou realizační cenu existuje právě jedna delta a naopak. Dále platí, že opce, která je hluboce in-the-money, má deltu blízkou jedné a opce, která je hluboce out-of-the-money, má deltu blízkou nule. V případě kupní opce je tedy delta klesající funkcí realizační ceny, u prodejní opce je tomu naopak.

12.1 Argumenty vysvětlující volatility smile

Možná vysvětlení, proč jsou out-of-the-money prodejní opce dražší než out-of-the-money kupní opce, jsou

- rozdílná poptávka a nabídka, kdy si většina investorů kupuje out-of-the-money prodejní opci jako určitou formu pojištění svého portfolia, a proto jsou ochotni akceptovat vyšší cenu
- skutečnost, že volatilita není konstantní, ale je funkcí ceny podkladového aktiva

¹Připomeňme, že implikovaná volatilita je volatilita zpětně vypočtená z Black-Scholes modelu na základě znalosti ceny evropské opce.

12.1.1 Rozdílná nabídka a poptávka

Dle Black-Scholes modelu je hodnota evropské kupní opce dána vztahem

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Tento vztah lze interpretovat tak, že pozici v evropské kupní opci je možné replikovat pomocí dlouhé pozice $N(d_1)$ kusů v podkladovém aktivu se spotovou cenou S_0 a krátké pozice $N(d_2)$ kusů v bezrizikovém diskontním dluhopisu, který v době splatnosti T generuje cash-flow K . Obdobně lze interpretovat také evropskou prodejní opci.

Uvažujme evropskou prodejní a kupní opci se shodným podkladovým aktivem. Shodné pokladové aktivum tak pro obě opce implikuje shodnou spotovou cenu S_0 , výnosovou míru q a volatilitu σ . Ostatní parametry, které figuruji v Black-Scholes modelu, se mohou lišit. Hodnotu uvažovaných opcí lze vyjádřit jako

$$c = S_0 N(d_1^c) - K^c e^{-r^c T^c} N(d_2^c) \quad (12.1)$$

$$p = K^p e^{-r^p T^p} N(-d_2^p) - S_0 N(-d_1^p) \quad (12.2)$$

kde c představuje hodnotu kupní a p hodnotu prodejní opce. Hodnoty d_1 a d_2 jsou definovány standardními rovnicemi.

$$d_1^c = \frac{\ln(S_0/K^c) + (r^c - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T^c}}$$

$$d_2^c = d_1^c - \sigma\sqrt{T^c}$$

$$d_1^p = \frac{\ln(S_0/K^p) + (r^p - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T^p}}$$

$$d_2^p = d_1^p - \sigma\sqrt{T^p}$$

Z rovnice (12.2) je možné vyjádřit spotovou cenu S_0 jako

$$S_0 = \frac{K^p e^{-r^p T^p} N(-d_2^p) - p}{N(-d_1^p)}$$

Dosazením do rovnice (12.1) pro výpočet hodnoty kupní opce získáme

$$c = K^c e^{-r^c T^c} N(-d_2^c) - K^p e^{-r^p T^p} \frac{N(-d_2^p) N(-d_1^c)}{N(-d_1^p)} + p \frac{N(-d_1^c)}{N(-d_1^p)} \quad (12.3)$$

Rovnici (12.3) lze tedy interpretovat tak, že odhlédneme-li od transakčních nákladů, lze v nekonečně malém časovém intervalu replikovat uvažovanou kupní opci pomocí

- dlouhé pozice v $N(-d_2^c)$ kusech bezrizikového diskontního dluhopisu, který v době své splatnosti T^c generuje cash-flow K^c
- krátké pozice v $\frac{N(-d_2^p) N(-d_1^c)}{N(-d_1^p)}$ kusech bezrizikového diskontního dluhopisu, který v době své splatnosti T^p generuje cash-flow K^p
- dlouhé pozice v $\frac{N(-d_1^c)}{N(-d_1^p)}$ kusech prodejní opce p

Argument rozdílné nabídky a poptávky tak naráží na skutečnost, že prodejní a kupní opce jsou vzájemnými substituty. Proto se jako vysvětlení rozdílné implikované volatility preferuje hypotéza, že volatilita je funkcí ceny pokladového aktiva.

12.1.2 Volatilita jako funkce ceny podkladového aktiva

Black-Scholes model je založený na předpokladu, že cena S podkladového aktiva sleduje stochastický proces

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

Black-Scholes model tedy předpokládá, že volatilita σ je konstantní. Rozdílná implikovaná volatilita pro různé realizační ceny opce však naznačuje, že cena podkladového aktiva sleduje proces

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma(S) dz$$

V tomto pojetí je tedy volatilita funkcí ceny podkladového aktiva. Obecně by mělo platit, že v době, kdy je cena podkladového aktiva nízká (např. v době finanční krize), je volatilita vyšší a naopak. Toto tvrzení je konzistentní se skutečností, že implikovaná volatilita out-of-the-money prodejních opcí je vyšší než implikovaná volatilita out-of-the-money kupních opcí².

Implikovaná volatilita a put-call parita

Volatilitu je tedy možné chápat jako funkci ceny podkladového aktiva. Lze dokázat, že i v reálném světě se volatilita kupní opce musí rovnat volatilitě odpovídající prodejní opce. Uvažujme evropskou prodejní a kupní opci, které mají stejné parametry jako je realizační cena, splatnost, podkladové aktivum apod. Put-call parita říká, že pro ceny těchto dvou opcí musí platit

$$p_m + S_0 e^{-qT} = c_m + K e^{-rT}$$

Protože put-call parita platí také v reálném světě, musí všechny kotované opce splňovat stejnou podmínku.

$$p_r + S_0 e^{-qT} = c_r + K e^{-rT}$$

Z těchto dvou rovnic vyplývá

$$c_m - c_r = p_m - p_r \quad (12.4)$$

Rozdíl mezi oceněním trhem a podle Black-Scholes modelu musí být tedy stejný pro prodejní i kupní opci. Je-li tento rozdíl nulový, platí, že modelová volatilita je rovna implikované volatilitě.

Protože v rámci Black-Scholes modelu se uvažuje stejná volatilita pro kupní i prodejní opci, znamená rovnice (12.4), že implikovaná volatilita pro obě opce musí být taktéž shodná.

12.2 Implikované pravděpodobnostní rozdělení

Důvodem pro existenci volatility smile je, že cena podkladového aktiva ve skutečnosti neodpovídá modelovému lognormálnímu rozdělení. Pravděpodobnostní rozdělení, kterým se cena podkladového aktiva řídí v reálném světě, označujeme jako tzv.

²Pro out-of-the-money prodejní opci platí, že realizační cena je v porovnání se spotovou cenou relativně nízká. V případě out-of-the-money kupní opce je tomu naopak.

implikované pravděpodobnostní rozdělení. V případě, kdy implikované pravděpodobnostní rozdělení indikuje vyšší cenu opce než modelové lognormální rozdělení, má toto za následek vyšší implikovanou volatilitu a naopak.

Uvažujme evropskou kupní opci. Pro cenu této opce platí

$$c = e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K)g(S_T)dS_T,$$

kde g je hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné S_T . Derivace ceny opce c podle realizační ceny K je

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} g(S_T)dS_T$$

Jestliže budeme derivovat dále podle realizační ceny, dostaneme

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} = e^{-rT} g(K)$$

Hustotu pravděpodobnosti g pak lze vyjádřit jako

$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}$$

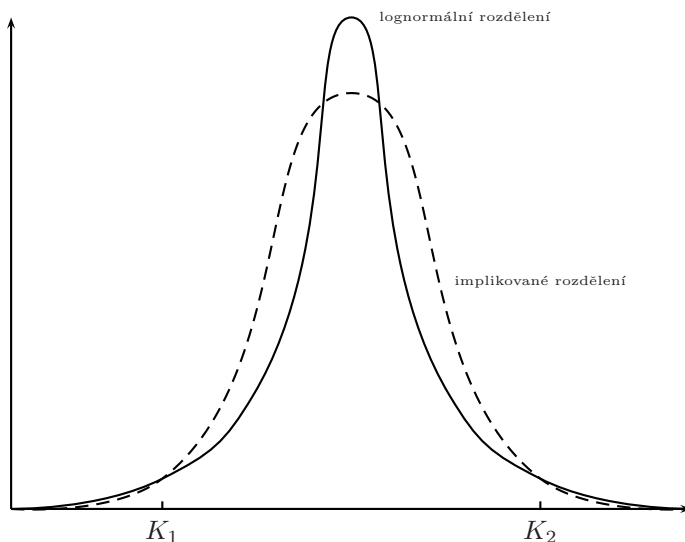
Druhá derivace funkce $f(x)$ je definována jako

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta) - f(x)] - [f(x) - f(x - \Delta)]}{\Delta^2}$$

Za předpokladu dostatečně malého δ lze tak $g(K)$ odhadnout jako

$$g(K) = e^{rT} \frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2}$$

kde c_1 , c_2 a c_3 jsou ceny kupní opce se zbytkovou splatností T a realizačními cenami $K + \delta$, K a $K - \delta$.



Teoretické lognormální a implikované rozdělení

12.3 Volatility surface

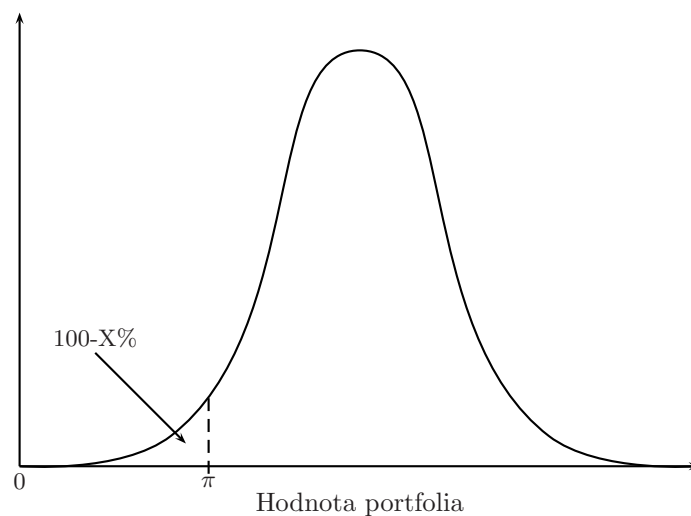
Volatilita používaná pro výpočet ceny opcí nezávisí pouze na realizační ceně ale také na zbytkové splatnosti. Obecně platí, že je-li historická volatilita nízká, je implikovaná volatilita rostoucí funkcí maturity, protože se očekává její růst v budoucnu a naopak. V praxi jsou pak často oba přístupy kombinovány do jedné tabulky a výsledná volatilita je tak dána realizační cenou a splatností opce. Vzhledem k tomu, že výslednou tabulku lze interpretovat pomocí třírozměrného grafu, hovoříme o tzv. volatility surface.

	Realizační cena				
	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10
1 měsíc	14.2	13.0	12.0	13.1	14.5
3 měsíce	14.0	13.0	12.0	13.1	14.2
6 měsíců	14.1	13.3	12.5	13.4	14.3
1 rok	14.7	14.0	13.5	14.0	14.8
2 roky	15.0	14.4	14.0	14.5	15.1
5 roků	14.8	14.6	14.4	14.7	15.0

Kapitola 13

Value at risk (VaR)

Value at risk (VaR) představuje maximální ztrátu, kterou může obchodník utrpět na zvolené hladině pravděpodobnosti pro daný časový interval. VaR lze tedy interpretovat následovně: "Jsme si na X procent jisti, že naše případná ztráta nepřesáhne částku Y CZK v následujících N dnech." Jestliže tedy budeme hodnotu portfolia v následujících N dnech považovat za náhodnou veličinu, pak lze VaR odvodit od $100 - X$ tého kvantilu pravděpodobnostního rozdělení této náhodné veličiny.



$$\int_0^{\pi} f(\Pi) d\Pi = 100 - X\%$$

Ve výše uvedeném vztahu je Π náhodná veličina, která představuje hodnotu portfolia na konci uvažovaného časového období, $f(\Pi)$ její hustota pravděpodobnosti a π vyjadřuje $100 - X$ % kvantil této náhodné veličiny. VaR pak lze vypočítat jako

$$VaR = \Pi_0 - \pi$$

kde Π_0 je hodnota portfolia v okamžiku výpočtu VaR.

VaR se vždy váže k určitému časovému horizontu. Je možné přepočítat VaR z jednoho časového horizontu na jiný podle

$$VaR_N = VaR_{den} \sqrt{N}$$

kde VaR_{den} představuje jednodenní a VaR_N N -denní VaR. Aby tento vztah platil, musí být hodnota portfolia mezi jednotlivými časovými horizonty nezávislá a mít identické normální rozdělení s nulovou střední hodnotou. V ostatních případech se jedná pouze o aproximaci.

13.1 Podmíněný VaR

Vedle pojmu VaR je možné se setkat také s pojmem podmíněný VaR. Podmíněný VaR je definovaný jako očekávaná ztráta v případě, že ztráta přesáhne částku Y . Ačkoliv je z praktického hlediska vypovídací schopnost podmíněného VaR vyšší, nejrozšířenějším ukazatelem je právě VaR.

Podmíněný VaR lze vypočítat podle

$$VaR_C = \Pi_0 - \int_0^\pi \Pi f(\Pi) d\Pi$$

Kvantil π lze určit ze vztahu $Y = \Pi_0 - \pi$.

13.2 Historický VaR

Velice často se v případě VaR pracuje s tzv. historickými scénáři. Historické scénáře mají většinou podobu vývoje úrokových sazeb, měnových kurzů, akciových indexů apod. Minulý vývoj se tak používá jako indikátor toho, co se může stát v budoucnu. Postup výpočtu hodnoty VaR je velice jednoduchý. V prvním kroku je třeba kvantifikovat dopad jednotlivých scénářů na hodnotu portfolia. V druhém kroku se tyto scénáře seřadí podle míry ztráty, která se k nim váže. Ve třetím a posledním kroku se vypočte příslušný kvantil. Jestliže např. chceme určit 99% VaR a máme k dispozici 250 denních pozorování¹, stačí zprůměrovat ztrátu, která by byla generována druhým a třetím nejhorším scénářem.

Někdy jsou vedle historických scénářů používány také tzv. hypotetické scénáře. Ty odrážejí názor managementu na několik z jejich pohledu kritických situací. Klasickými příklady je např. dramatický růst popř. pokles úrokových sazeb, propad akciového indexu apod. Ze sady těchto scénářů se však nepočítá VaR. Pouze se vybere nejhorší scénář a ten se uvádí jako dokreslující statistika k hodnotě VaR.

13.3 Modelovací techniky

Vedle historických scénářů je možné pro výpočet hodnoty VaR použít také modelů. Vzhledem k tomu, že VaR se vztahuje k časovému horizontu jednoho

¹250 denních pozorování odpovídá přibližně jednomu roku.

popř. několika málo dnů, je volatilita aktiv měřena na denní bázi. Jak již bylo zmiňováno dříve, lze roční volatilitu vyjádřit z roční volatility jako

$$\sigma_{den} = \frac{\sigma_{rok}}{\sqrt{252}},$$

kdy předpokládáme, že rok má 252 pracovních dní. Při výpočtu hodnoty VaR se dále často uvažuje, že očekávaná hodnota změny ceny aktiva je v sledovaném časovém horizontu nulová. Tento předpoklad je pochopitelně přijatelný pouze relativně krátká časová období. Obecně platí, že čím vyšší je směrodatná odchylka v poměru k očekávané výnosové míře, tím delší toto období může být. Dalším předpokladem je, že relativní změna ceny uvažovaného aktiva sleduje normální rozdělení. Výsledkem těchto úvah tedy je, že výnosová míra tohoto aktiva je náhodná veličina, kterou lze popsat rozdělením $N[0, \sigma]$.

Příklad: Uvažujme akcii, jejíž spotová cena je 50 USD. Jaký je 99% VaR portfolia sestávajícího se ze 10 000 kusů této akcie za předpokladu, že uvažujeme časový horizont 14 dní? V rámci jednoho dne sleduje výnosová míra této akcie normální rozdělení se střední hodnotou 0 a směrodatnou odchylkou 1%.

$$VaR = 10\,000 \cdot 50 \cdot 0.01 \cdot \Theta(1 - 0.99)\sqrt{14} = -43\,522$$

Výsledný VaR tohoto portfolia je -43 522 USD².

Jestliže se portfolio skládá z n různých aktiv, je volatilita tohoto portfolia dána vztahem

$$\sigma_{\Pi}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j,$$

kde α_i představuje váhu aktiva v portfoliu³ a ρ_{ij} je korelační koeficient mezi výnosovými mírami i -tého a j -tého aktiva. Postup výpočtu VaR je totožný s případem, kdy je portfolio tvořeno jediným aktivem.

13.3.1 Lineární model

Uvažujme portfolio, jehož hodnota je Π a které se skládá z n aktiv. Definujme parametr Δ i -tého aktiva jako

$$\Delta_i = \frac{\delta \Pi}{\delta S_i},$$

kde S_i představuje cenu tohoto aktiva. Dále definujme výnosovou míru i -tého aktiva δx jako

$$\delta x_i = \frac{\delta S_i}{S_i}$$

Změnu ceny portfolia Π pak je možné vyjádřit vztahem

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^n S_i \Delta_i \delta x_i$$

²Z teoretického hlediska je pro výpočet hodnoty VaR lhostejné, zda-li je pozice v portfoliu dlouhá nebo krátká. V případě, že by se výnosová míra neřídila normálním rozdělením $N[0, \sigma]$, byla by hodnota VaR pro dlouhou a krátkou pozici rozdílná.

³Platí tedy $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Platí, že v lineárním modelu lze váhu aktiva v portfoliu α_i vyjádřit jako $\alpha_i = S_i \Delta_i$. V tomto případě je možné změnu ceny portfolia vyjádřit jako $\delta\Pi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta x_i$.

13.3.2 Kvadratický model

Jestliže portfolio obsahuje opce, je lineární model pouhou aproximací. Tento model nebere v potaz nelinearitu vztahu mezi cenou portfolia a podkladovými tržními proměnnými. Aproximaci je možné zlepšit použitím parametru gamma - z lineárního modelu se tak stává model kvadratický. Parametr gamma i -tého a j -tého aktiva definujeme jako

$$\Gamma_{ij} = \frac{\delta^2 \Pi}{\delta S_i \delta S_j}$$

Změna ceny portfolia je pak dána vztahem

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^n S_i \Delta_i \delta x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} S_i S_j \Gamma_{ij} \delta x_i \delta x_j$$

Tento vzorec je velice často vyjadřován také ve tvaru

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \delta x_i \delta x_j \quad (13.1)$$

kde $\beta_{ij} = \frac{1}{2} S_i S_j \Gamma_{ij}$

13.3.3 Monte Carlo

Metoda Monte Carlo je spíše než na analytickém přístupu založena na hrubé výpočetní síle. V případě výpočtu hodnoty VaR portfolia lze postupovat následovně:

1. určit aktuální hodnotu portfolia s ohledem na dnešní hodnoty tržních proměnných
2. vygenerovat vektor náhodných veličin δx_i
3. určit hodnotu tržních proměnných s využitím vygenerovaných proměnných δx_i
4. určit hodnotu portfolia na základě odvozených tržních proměnných
5. vypočítat $\delta\Pi$ jako rozdíl hodnot získaných v krocích 1. a 4.
6. opakovat kroky 2. až 5. s cílem získat pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny $\delta\Pi$

Poznámka: Jednou z možností, jak zjednodušit výše uvedený postup, je využití vztahu (13.1). To zredukuje celý výše uvedený postup pouze na kroky 2 a 5⁴.

⁴V tomto případě bude $\delta\Pi$ vypočteno přímo na základě (13.1).

13.4 Mapování cash-flow

Uvažujme portfolio, které se skládá pouze z jednoho dluhopisu s nominální hodnotou 1 000 000 USD a zbytkovou splatností 0.8 roku. Předpokládejme, že máme k dispozici údaje pro půlroční a roční zero-coupon bond. Necht' je příslušná půlroční úroková sazba rovna 6% p.a. a roční úroková sazba rovna 7% p.a. Interpolovaná sazba je rovna 6.8% p.a. a současná hodnota dluhopisu je tedy

$$\frac{1\,000\,000}{1.068^{0.8}} = 948\,730.80$$

Dále je třeba také interpolovat volatilitu. Je-li volatilita denních výnosů 6 měsíčního dluhopisu 0.1% a volatilita denních výnosů ročního dluhopisu 0.2%, je volatilita 0.8 ročního dluhopisu rovna 0.18%.

Korelace denních výnosů

	6 měsíční dluhopis	1 roční dluhopis
6 měsíční dluhopis	1.0	0.7
1 roční dluhopis	0.7	1.0

Námi uvažovaný bond je možné replikovat pomocí 6 měsíčního a ročního dluhopisu.

$$0.0018^2 = 0.001^2\alpha^2 + 0.002^2(1-\alpha)^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 0.001 \cdot 0.002\alpha(1-\alpha)$$

$$\alpha = 0.156518$$

To znamená, že námi uvažovaný dluhopis je možné replikovat pomocí 6 měsíčního dluhopisu, jehož současná hodnota je $0.156518 \cdot 948\,730.80 = 148\,493.45$ USD, a pomocí ročního dluhopisu se současnou hodnotou $(1 - 0.156518) \cdot 948\,730.80 = 800\,237.35$ USD. Výhodou tohoto přístupu je, že respektuje jak současnou hodnotu původního dluhopisu, tak rozptyl jeho cash-flow.

Pozice v	Cash-flow
6 měsíční dluhopis	148 493.45
roční dluhopis	800 237.35

Rozptyl výnosové míry dluhopisu je dán obecným vzorcem

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

tj. v našem případě

$$\left(\frac{148\,493.45}{948\,730.80}\right)^2 0.001^2 + \left(\frac{800\,237.35}{948\,730.80}\right)^2 0.002^2 + 2 \cdot \frac{148\,493.45}{948\,730.80} \cdot \frac{800\,237.35}{948\,730.80} \cdot 0.001 \cdot 0.002 \cdot 0.7 = 3.24 \cdot 10^{-6}$$

což odpovídá původně vypočtené směrodatné odchylce 0.18%. Dvacetidenní 99% VaR je roven 7 637.10 USD.

$$\sqrt{3.24 \cdot 10^{-6}} \cdot 948\,730.80 \cdot \sqrt{20} = 7\,637.10$$

Kapitola 14

Odhad volatilit a korelací

14.1 Odhad volatilit

Definujme σ_n jako volatilitu tržní proměnné pro den n odhadnutou koncem dne $n - 1$. Dále definujme mezidenní změnu ceny (tj. denní výnosovou míru) aktiva jako

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Máme-li k dispozici m denních pozorování u_i , lze σ_n^2 odhadnout pomocí

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (u_{n-i} - \bar{u})^2, \quad (14.1)$$

kde

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i} - 1$$

Pro účely výpočtu VaR se (14.1) upravuje následovně:

- u_i je definováno jako

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

- Předpokládá se, že \bar{u} je rovno nule.
- $m - 1$ je nahrazeno m .

14.1.1 Aritmetický průměr

Výše uvedené úpravy, které představují pouze marginální změny, umožňují převést rovnici (14.1) do tvaru

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2$$

Skutečná volatilita σ_n^2 náhodné veličiny S je tak odhadnuta pomocí aritmetického průměru u_{n-i}^2 .

14.2 Vážený průměr

V případě odhadu volatility σ_n^2 pomocí aritmetického průměru je všem pozorovaným u_{n-i}^2 přiřazena stejná váha. Další možnou modifikací je použití váženého průměru, kdy je větší váha přisuzována aktuálnějším datům.

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (14.2)$$

Pro váhy α_i musí platit

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

14.2.1 Model ARCH

Je-li V_L dlouhodobá míra volatility a γ jí přiřazená váha, pak lze rovnici (14.2) upravit do tvaru

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2, \quad (14.3)$$

přičemž opět musí platit

$$\gamma + \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

Rovnice (14.3) je rovnicí tzv. ARCH(m) modelu.

14.2.2 Model EWMA

Dalším modelem je EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), ve kterém váhy exponenciálně rostou s aktuálností dat. Pro tento model se nejčastěji používají váhy $\alpha_i = \lambda \alpha_{i-1}$. Rovnice pro výpočet odhadované volatility pak dána vztahem

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$$

Postupnými rekurentními substitucemi za σ_{n-i}^2 získáváme

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2$$

V případě druhé rovnice je výraz $\lambda^m \sigma_{n-m}^2$ pro dostatečně velkou m natolik malý, že je možné jej zanedbat. Rovnice pak odpovídá (14.2) pro $\alpha_i = (1 - \lambda) \lambda^{i-1}$.

14.2.3 Model GARCH(1,1)

Model GARCH(1,1) je dán rovnicí

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

V_L představuje dlouhodobou rovnovážnou volatilitu. Váhy α , β a γ musí splňovat podmínku

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

GARCH(1,1) model je postaven na aktuálních odhadech volatility σ_{n-1}^2 a poslední dostupné změně ceny podkladového aktiva u_{n-1}^2 .

Jestliže definujeme ω jako $\omega = \gamma V_L$, lze rovnici upravit do tvaru

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (14.4)$$

Model GARCH(1,1) má tendenci konvergovat k dlouhodobé průměrné volatilitě V_L . Vzhledem k tomu, že tato jeho vlastnost odpovídá také empirickým pozorováním, patří GARCH k nejpoužívanějším modelům. Tento model je ekvivalentní stochastickému procesu, ve kterém je volatilita V popsána jako

$$dV = \gamma(V_L - V)dt + \xi V dz$$

kde čas je měřen ve dnech, $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ a $\xi = \gamma\sqrt{2}$. Modelovaná volatilita konverguje k dlouhodobé volatilitě V_L mírou γ .

14.3 Odhad parametrů

14.3.1 Metoda maximální pravděpodobnosti

Metoda maximální pravděpodobnosti slouží k odhadu parametrů statistických modelů. Parametry jsou vybírány tak, aby byla maximalizována pravděpodobnost, že model vygeneruje stejná data, jako na základě kterých byl příslušný model vytvořen.

Uvažujme náhodnou veličinu X , která je dána normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a volatilitou v . Dále uvažujme pozorování u_1, u_2, \dots, u_m , která jsou daná stejným pravděpodobnostním rozdělením jako náhodná veličina X . Pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny X bude rovna u_i , je funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{u_i^2}{2v}}$$

Pravděpodobnost, že náhodná veličiny X nabude hodnot u_1, u_2, \dots, u_m je pak dána

$$\prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{u_i^2}{2v}} \quad (14.5)$$

Maximalizace výše uvedeného výrazu je ekvivalentní maximalizaci jeho logaritmu. Jestliže (14.5) zlogaritmujeme a ignorujeme konstatní členy, lze tento výraz upravit do tvaru

$$-m \ln v - \sum_{i=1}^m \frac{u_i^2}{v}$$

Derivováním výše uvedeného výrazu podle v a položením rovno nule, zjistíme, že hodnota v , pro kterou je maximalizována pravděpodobnost (14.5), je rovna

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i^2$$

14.3.2 Odhad parametrů modelu GARCH(1,1)

Definujeme $v_i = \sigma_i^2$ jako odhad volatility pro den i učiněný na konci dne $i - 1$ a ω jako $\omega = \gamma V_L$, kde V_L je dlouhodobá průměrná volatilita. Předpokládejme, že u_i sleduje normální rozdělení s nulovou střední hodnotou. V případě modelu GARCH(1,1) je výchozí výraz pro odhad parametrů podobný (14.5), s tím rozdílem, že namísto v je použito v_i .

$$\prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}} e^{-\frac{u_i^2}{2v_i}}$$

Zlogaritmováním tohoto vztahu a zanedbáním konstant získáme

$$\sum_{i=1}^m \left(-\ln v_i - \frac{u_i^2}{v_i} \right) \quad (14.6)$$

Ilustrace na příkladě

Následující tabulka obsahuje historické denní údaje o kurzu S_i pro měnový pár JPY/USD. Tyto údaje použijeme pro odhad parametrů modelu GARCH(1,1).

Datum	Den i	S_i	u_i	$v_i = \sigma_i^2$	$-\ln v_i - u_i^2/v_i$
06.01.1988	1	0.007728			
07.01.1988	2	0.007779	0.006599		
08.01.1988	3	0.007746	-0.004242	0.00004355	9.6283
11.01.1988	4	0.007816	0.009037	0.00004198	8.1329
12.01.1988	5	0.007837	0.002687	0.00004455	9.8568
13.01.1988	6	0.007924	0.011101	0.00004220	7.1529
...
13.08.1997	2421	0.008643	0.003374	0.00007626	9.3321
14.08.1997	2422	0.008493	-0.017309	0.00007092	5.3294
15.08.1997	2423	0.008495	0.000144	0.00008417	9.3824
					22 063.58

Připomeňme, že parametr u_i je definován jako

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

Odhad volatility σ_3^2 pro třetí den je roven u_2^2 . Pro následující dny je volatilita vypočtena pomocí (14.4). Hodnoty parametrů ω , α a β modelu GARCH(1,1) jsou určeny iteračně tak, aby volatilita vypočtená podle (14.4) maximalizovala (14.6). To odpovídá maximalizaci součtu posledního sloupce tabulky. Pro námi uvažovaná historická data jsou hodnoty těchto parametrů $\gamma = 0.00000176$, $\alpha = 0.0626$ a $\beta = 0.8976$. Dlouhodobá volatilita V_L je tedy rovna

$$\frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = \frac{0.00000176}{0.0398} = 0.00004422$$

Další možností je cílovou volatilitu V_L určit expertním odhadem popř. jako průměrnou historickou hodnotu volatility a zbývají parametry α a β ¹ opět určit iterativně.

¹Parametr γ je dán vztahem $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

Autokorelace

Autokorelace je nástroj pro odhalování opakujících se sekvencí. Autokorelace tedy vyjadřuje míru korelace náhodné veličiny se sebou sama. Autokorelace diskrétní náhodné veličiny X je rovna

$$\eta_k = \frac{1}{(n-k)\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-k} [X_i - \bar{X}][X_{i+k} - \bar{X}]$$

kde σ^2 je volatilita a \bar{X} střední hodnota náhodné veličiny X . Parametr k pak představuje délku kroku, přes který se autokorelace měří.

Pomocí autokorelace je možné posuzovat kvalitu výstupních hodnot získaných pomocí modelu GARCH(1,1). Empirickými pozorováními bylo zjištěno, že existují období relativně vysoké a relativně nízké volatility. Pro u_i^2 tedy mělo platit, že je-li u_i^2 vysoké, jsou také $u_{i+1}^2, u_{i-2}^2, \dots, u_{i-n}^2$ vysoká a naopak. Parametr u_i^2 by tak měl vykazovat poměrně vysokou míru autokorelace pro vhodně zvolený krok k . V případě, že model GARCH(1,1) dává správné výstupní hodnoty pro volatilitu σ_i^2 , měla by naopak proměnná u_i^2/σ_i^2 vykazovat pro stejný krok k nízkou autokorelaci. Následující tabulka udává autokorelaci proměnných u_i^2 a u_i^2/σ_i^2 pro kroky $k = 1, 2, \dots, 15$ vypočtenou na základě dříve uváděných údajů pro měnový pár JPY/USD.

Krok	Autokorelace u_i^2	Autokorelace u_i^2/σ_i^2
1	0.072	0.004
2	0.041	-0.005
3	0.057	0.008
4	0.107	0.003
5	0.075	0.016
6	0.066	0.008
7	0.019	-0.033
8	0.085	0.012
9	0.054	0.010
10	0.030	-0.023
11	0.038	-0.004
12	0.038	-0.021
13	0.057	-0.001
14	0.040	0.002
15	0.007	-0.028

Autokorelace pro u_i^2 jsou u všech kroků pozitivní. V případě u_i^2/σ_i^2 figurují pozitivní i negativní autokorelace a jejich výše je nižší než v případě u_i . Zdá se, že výše nastíněné podmínky jsou splněny. Pro testování míry autokorelace je používán tzv. Ljung-Boxův test. V případě řady m pozorování je příslušná statistika rovna

$$s = m \sum_{k=1}^K w_k \eta_k^2$$

kde η_k je autokorelace pro krok k a

$$w_k = \frac{m-2}{m-k}$$

V případě $k = 15$ může být hypotéza nulové autokorelace zamítnuta s 95% pravděpodobností je-li $s > 25$. Pro u_i^2 je hodnota statistiky 123 a pro u_i^2/σ_i^2 pak 8.2.

Použití modelu GARCH(1,1) pro modelování budoucí volatility

Model GARCH(1,1) je možné použít také pro prognózu vývoje budoucí volatility. S využitím $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ lze volatilitu na konci $n - 1$ dne pro n -tý den vyjádřit jako

$$\sigma_n^2 = (1 - \alpha - \beta)V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

respektive pro $n + k$ -tý den jako

$$\sigma_{n+k}^2 = V_L + \alpha(u_{n+k-1}^2 - \alpha) + \beta(\sigma_{n+k-1}^2 - V_L)$$

Vzhledem k tomu, že dle (14.1) je očekávaná hodnota u_{n+k-1}^2 za předpokladu $\bar{u} = 0$ rovna σ_{n+k-1}^2 , platí

$$E[\sigma_{n+k}^2] = V_L + (\alpha + \beta)(E[\sigma_{n+k-1}^2] - V_L)$$

Rekurzivní aplikací této rovnice na sebe sama ji lze upravit do tvaru

$$E[\sigma_{n+k}^2] = V_L + (\alpha + \beta)^k(\sigma_n^2 - V_L) \quad (14.7)$$

Pomocí (14.7) je možné předvídat budoucí volatilitu v den $n + k$ s využitím informací, které jsou dostupné na konci dne $n - 1$. K tomu, aby predigovaná volatilita s rostoucím k konvergovala k dlouhodobé volatilitě V_L , musí platit $\alpha + \beta < 1$.

Uvažujme opci s životností mezi dny n a $n + N$. S použitím (14.7) je možné vypočítat očekávanou volatilitu opce v daném období jako

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E[\sigma_{n+k}^2]$$

Čím delší je životnost opce, tím blíže je její volatilita dlouhodobé rovnovážné volatilitě V_L .

14.4 Korelace

14.4.1 Definice korelace a kovariance

Korelace mezi dvěma náhodnými proměnnými x a y je definována jako

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Kovariance $\text{cov}(x, y)$ mezi náhodnými veličinami x a y je pak definována jako

$$\text{cov}(x, y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

14.4.2 Odhad korelace

Odhad korelace se tak skládá ze dvou částí a to odhadu volatilit a odhadu kovariance. Odhadem volatilit jsme se zabývali v předchozí podkapitole. Pro odhad kovariance lze použít analogické modely jako v případě volatilit. Pro účely výpočtu korelace by kovariance a volatilit měly být vypočteny na základě stejného modelu, aby tak byla zaručena vzájemná porovnatelnost.

Definujeme x_i a y_i jako

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}}$$

$$y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$$

Rovnice pro výpočet kovariance pomocí váženého průměru je dána vztahem

$$cov(x, y)_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{n-i} y_{n-i}$$

Kovarianci podle modelu EWMA lze vypočíst dle

$$cov(x, y)_n = \lambda \cdot cov(x, y)_{n-1} + (1 - \lambda) x_{n-1} y_{n-1}$$

V případě modelu GARCH(1,1) je kovariance dána vztahem

$$cov(x, y)_n = \gamma C_L + \alpha x_{n-1} y_{n-1} + \beta \cdot cov(x, y)_{n-1}$$

Korelace ρ_n^{xy} pro n -tý den je definována jako

$$\rho_n^{xy} = \frac{cov(x, y)_n}{\sigma_n^x \sigma_n^y}$$

14.4.3 Kovariační a korelační matice

Z vypočtených kovariancí resp. korelací je možné zkonstruovat kovarianční resp. korelační matici. Aby tyto matice by interně konzistentní, musí být pozitivně semidefinitivní.

Matice Ω typu $N \times N$ je pozitivně semidefinitivní tehdy a jen tehdy, je-li pro všechny reálné vektory w typu $N \times 1$ splněna podmínka

$$w\Omega w^T \geq 0 \quad (14.8)$$

Uvažujme portfolio, které se skládá z N investičních instrumentů. Z kovariancí těchto investičních instrumentů je možné zkonstruovat kovarianční matici Ω . Rozptyl celého portfolio je definován jako $\sigma_P^2 = w\Omega w^T$, kde w představuje vektor vah jednotlivých investičních instrumentů v rámci portfolio. Vzhledem k tomu, že rozptyl portfolio pro libovolné w nemůže být záporný, musí být kovarianční matice pozitivně semidefinitivní.

Interpretace v případě korelační matice již bohužel není tak přímočará. Uvažujme korelační matici

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.9 \\ 0.0 & 1.0 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1.0 \end{bmatrix}$$

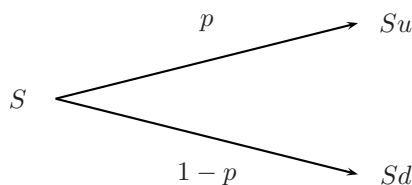
Podle této matice je první prvek silně korelován se třetím prvkem, který je zase silně korelován s druhým prvkem. Z toho vyplývá, že první a třetí prvek by měly být také silně korelovány. Podle korelační matice však vykazují nulovou korelaci. Korelační matice tak postrádá vnitřní logiku a lze dokázat, že nesplňuje podmínku (14.8).

Kapitola 15

Numerické metody

15.1 Binomický strom

Uvažujme opci na akcii s nulovým dividendovým výnosem. Rozdělme zbytkovou dobu splatnosti opce na velký počet intervalů délky δt . Dále uvažujme, že na konci každého tohoto intervalu se původní cena S změní na Su nebo Sd , kde $u > 1$ a $0 \leq d < 1$. Pravděpodobnost růstu ceny akcie označme p ; pravděpodobnost poklesu ceny pak bude rovna $1 - p$.



Binomický strom
změna ceny v časovém intervalu δt

Předpokládejme, že se nacházíme v rizikově neutrálním světě. Očekávaný výnos ze všech investičních instrumentů tak odpovídá bezrizikové úrokové míře. Očekávaná cena akcie na konci časového období je tedy $Se^{r\delta t}$. Proto platí

$$Se^{r\delta t} = pSu + (1 - p)Sd$$
$$e^{rt} = pu + (1 - p)d \quad (15.1)$$

Protože volatilita relativní změny ceny akcie je v časovém intervalu δt rovna $\sigma^2 \delta t$ a rozptyl náhodné veličiny X lze vyjádřit jako $D[X] = E[X^2] - (E[X])^2$, platí

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2 = \sigma^2 \delta t$$

Substitucí za p dle (15.1) se výše uvedený vztah zredukuje na

$$e^{r\delta t}(u + d) - ud - e^{2r\delta t} = \sigma^2 \delta t$$

Přidáme-li předpoklad

$$d = \frac{1}{u}$$

získáme po následných úpravách, kdy ignorujeme členy vyššího řádu než δt , následující rovnice.

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \quad (15.2)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \quad (15.3)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \quad (15.4)$$

Jestliže určitý časový horizont rozdělíme do i intervalů délky δt , kdy na konci každého intervalu cena akcie vzroste o $1 - u$ popř. poklesne o $1 - d$ procent, existuje na konci tohoto období $i + 1$ cen. Jednotlivé ceny jsou rovny

$$Su^i d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

Použijeme-li vztah $d = \frac{1}{u}$, lze všechny možné ceny na konci i -tého intervalu vyjádřit jako

$$Su^{2j-i}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

15.1.1 Ocenění opcí pomocí binomického stromu

Ocenění evropské opce

S pomocí binomického stromu je možné ocenit akciové opce. V případě evropské opce je její cena dána vztahy

$$c = e^{-rn\delta t} \sum_{i=0}^n \max(Su^i d^{n-i} - K, 0) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

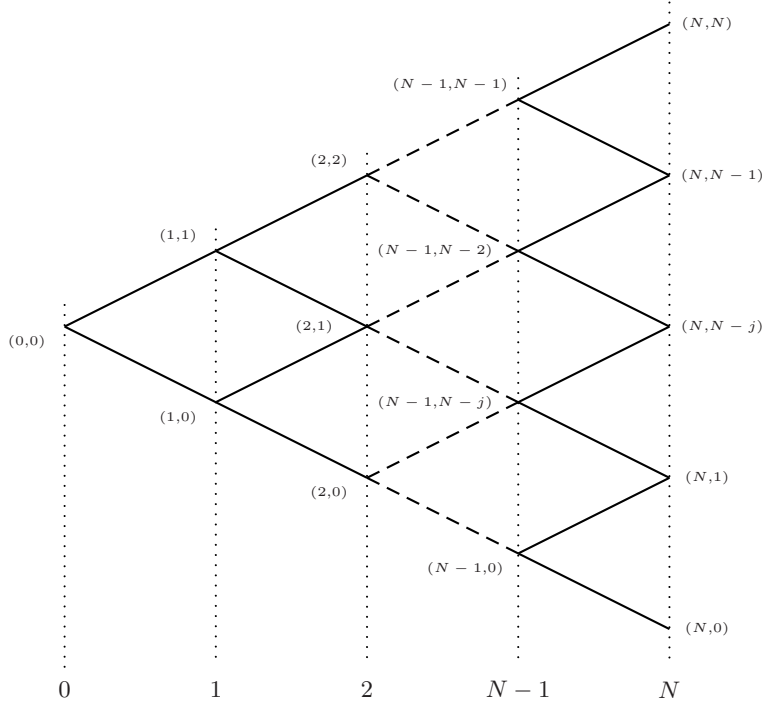
$$p = e^{-rn\delta t} \sum_{i=0}^n \max(K - Su^i d^{n-i}, 0) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

kde c představuje cenu kupní opce, p cenu prodejní opce, n je počet kroků binomického stromu, K je realizační cena, výraz $\max(Su^i d^{n-i} - K, 0)$ resp. $\max(K - Su^i d^{n-i}, 0)$ představuje cenu opce pro jednotlivé koncové uzly binomického stromu a $\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ odpovídá pravděpodobnosti výskytu daného uzlu. Pro účely výpočtu pravděpodobnosti p připomeňme, že $p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$.

Ocenění americké opce

Pomocí binomických stromů lze ocenit také americké opce. Narozdíl od výše uvedeného příkladu se americké opce oceňují od konce binomického stromu směrem k jeho počátku. Důvodem je možnost předčasného uplatnění opce.

Uvažujme americkou prodejní opci na akcii s nulovým dividendovým výnosem. Rozdělme životnost této opce na N intervalů délky δt . Definujme $f_{i,j}$ jako hodnotu opce v uzlu (i,j) .



Binomický strom
intervaly a uzly

Hodnota opce pro jednotlivé koncové uzly (N, j) v době splatnosti je

$$f_{N,j} = \max(K - Su^j d^{N-j}, 0), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

V koncových uzlech opce zanikne, a proto neuvažujeme možnost jejího předčasného uplatnění. V uzlech, které předcházejí koncovým uzlům, je však třeba brát možnost předčasného uplatnění opce v potaz. Jestliže by možnost předčasného uplatnění opce neexistovala, bylo by možné její hodnotu v uzlu (i, j) vyjádřit jako

$$f_{i,j} = e^{-r\delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]$$

V případě, že budeme uvažovat možnost předčasného uplatnění opce, modifikuje se výše uvedený vztah do podoby

$$f_{i,j} = \max \{ K - Su^j d^{i-j}, e^{-r\delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}] \}$$

kde $K - Su^j d^{i-j}$ představuje výnos z okamžitého uplatnění opce v uzlu (i, j) a $e^{-r\delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]$ očekávanou hodnotu opce v uzlu (i, j) za podmínky, že nebude v tomto uzlu předčasně uplatněna. Vzhledem k tomu, že výpočet začíná v čase splatnosti opce T a postupuje směrem k počátečnímu uzlu binomického stromu, odráží hodnota opce v čase $i\delta t$ nejen efekt předčasného uplatnění v čase $i\delta t$, ale také efekt předčasného uplatnění v následujících intervalech. Výsledná hodnota opce je rovna hodnotě opce v počátečním uzlu $(0, 0)$ binomického stromu.

15.1.2 Řecká písmena

V následujícím textu představuje f_{ij} hodnotu opce v uzlu (i, j) . Definice jednotlivých řeckých písmen odpovídá definici z kapitoly 11.

Delta

Hodnoty získané v rámci modelování binomických stromů lze použít také pro výpočet řeckých písmen. Obecná definice řeckého písmene delta je

$$\Delta = \frac{\delta \Pi}{\delta S},$$

kde $\delta \Pi$ resp. δS představuje změnu ceny opce resp. akcie v časovém intervalu délky δt . Pro časový interval $1 \cdot \delta t$ lze tak deltu vyjádřit jako

$$\Delta = \frac{f_{11} - f_{10}}{S_{0u} - S_{0d}}$$

Gamma

Pro výpočet řeckého písmene gamma je třeba vypočítat dvě delty v čase $2 \cdot \delta t$. Připomeňme, že

$$\Gamma = \frac{\delta^2 \Pi}{\delta S^2}$$

Vzorec pro numerický výpočet druhé derivace funkce $f(x)$ je

$$\frac{\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x)-f(x-h_2)}{h_2}}{\frac{1}{2}(h_1+h_2)}$$

V našem případě je $x = S_0$, $x + h_1 = Su^2$, $x - h_2 = Sd^2$, $h_1 = S_0(u^2 - 1)$ a $h_2 = S_0(1 - d^2)$. Dety, které jsou zapotřebí pro výpočet řeckého písmene gamma, lze v případě klasického binomického stromu vypočítat jako

$$\Delta_1 = \frac{f_{22} - f_{21}}{Su^2 - S_0}$$

$$\Delta_2 = \frac{f_{21} - f_{20}}{S_0 - S_0d^2}$$

Řecké písmeno gamma lze pak definovat jako

$$\Gamma = \frac{\frac{f_{22}-f_{21}}{S_0u^2-S_0} - \frac{f_{21}-f_{20}}{S_0-S_0d^2}}{\frac{1}{2}S_0(u^2-d^2)}$$

Theta

Řecké písmeno theta, které vyjadřuje změnu ceny opce v čase, je dáno vztahem

$$\Theta = \frac{f_{21} - f_{00}}{2 \cdot \delta t}$$

Vega

V případě řeckého písmene vega je třeba mít k dispozici dva binomické stromy - jeden pro standardní volatilitu σ a druhý pro volatilitu σ^* . Vega je pak definována jako

$$\nu = \frac{f^* - f}{\delta\sigma}$$

kde f^* je hodnota opce vypočtená pro binomický strom s volatilitou σ^* a f hodnota opce vypočtená pro binomický strom s volatilitou σ . Ostatní parametry obou uvažovaných binomických stromů jsou shodné.

Rho

Podobným způsobem lze vypočítat také řecké písmeno rho. Opět jsou zapotřebí dva binomické stromy, tentokrát pro dvě rozdílné bezrizikové úrokové sazby r a r^* .

$$\rho = \frac{f^* - f}{\delta r}$$

15.1.3 Ostatní případy**Výnosová míra generovaná pokladovým aktivem**

Jestliže chceme vypočítat hodnoty opce, kdy podkladové aktivum generuje výnosovou míru q^1 , je postup zcela identický pouze s tím rozdílem, že pravděpodobnost růstu ceny aktiva v časovém horizontu δt je definována jako

$$p = \frac{e^{(r-q)\delta t} - d}{u - d}$$

Výplata dividend

Další možnou modifikaci představuje situace, kdy podkladovým aktivem je akcie, ze které je majiteli vyplácena dividendy. Právě o výši vyplácené dividendy by se v tzv. ex-dividendový den měla snížit cena akcie. Před tímto dnem tedy pro cenu akcie v uzlu (i, j) platí

$$Su^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

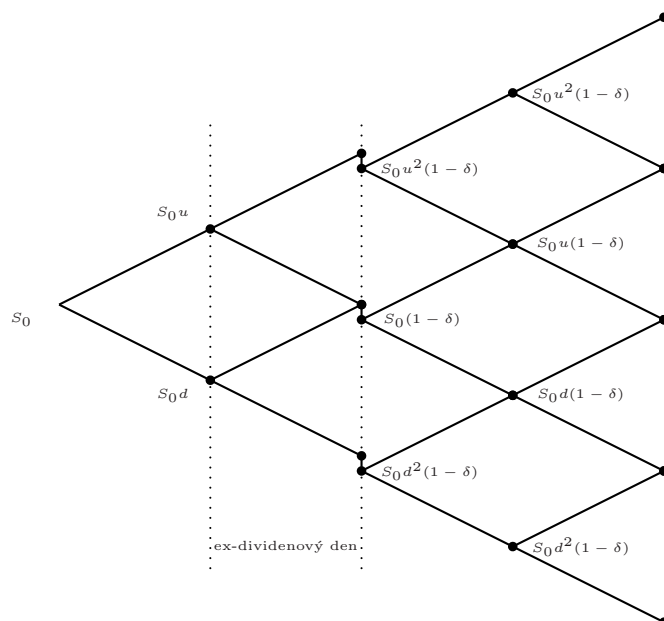
Po tomto datu je pak cena akcie dána vztahem

$$S(1 - \delta)u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

kde δ představuje dividendový výnos. Hodnoty p , u a d jsou vypočteny podle (15.2), (15.3) a (15.4). Tento vztah lze poměrně snadno použít také v případě opakované výplaty dividendy. Je-li δ_i celkový dividendový výnosem mezi časem 0 až $i\delta t$, modifikuje se vztah do tvaru

$$S(1 - \delta_i)u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

¹Příkladem takového aktiva může být bankovní účet se spojitým úročením.



Binomický strom
dopad dividendového výnosu δ na počet uzlů

Namísto dividendového výnosu δ je možné použít přímo výši dividendy D . Spadá-li ex-dividendový den mezi $k\delta t$ a $(k+1)\delta t$, pak pro $i \leq k$ je cena akcie rovna

$$S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

pro $i = k + 1$

$$S_0 u^j d^{i-j} - D, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

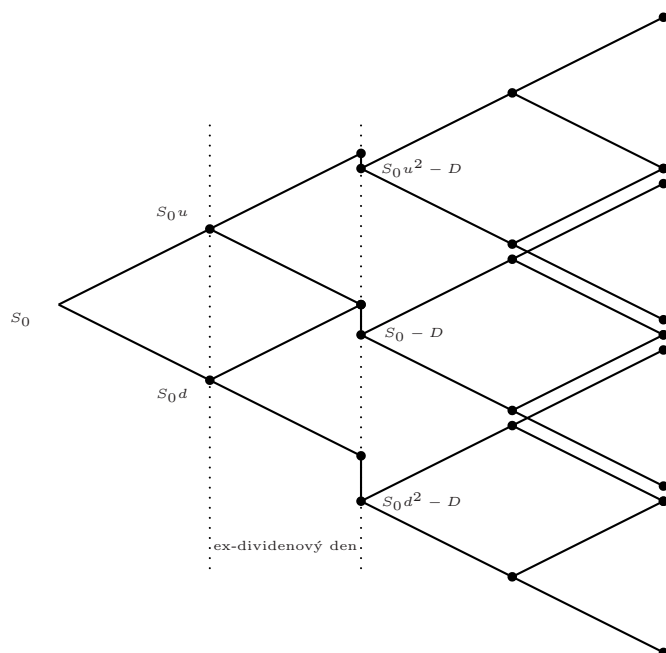
a pro $i = k + 2$

$$(S_0 u^j d^{i-j} - D)u, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

resp.

$$(S_0 u^j d^{i-j} - D)d, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

V případě výplaty dividend D platí, že pro $i = k + m$ existuje $m(k + 2)$ uzlů namísto $k + m + 1$. Počet uzlů binomického stromu je tedy vyšší, než když uvažujeme dividendový výnos δ .



dopad dividendy D na počet uzlů

Celou problematiku však lze zjednodušit následující úvahou. Rozdělme cenu akcie na dvě složky - "nejistou" část a část tvořenou současnou hodnotou všech budoucích dividend vyplacených do splatnosti opce. Uvažujme pouze jeden ex-dividend den τ , kde $k\delta t \leq \tau \leq (k+1)\delta t$. Platí

$$S = S^*, \quad i\delta t > \tau$$

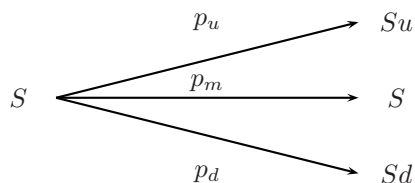
$$S = S^* + De^{-r(\tau - i\delta t)}, \quad i\delta t \leq \tau$$

Rizikovou složku S^* akcie je pak možné modelovat klasickým způsobem. V případě, že budeme uvažovat více ex-dividendových dní, lze výše uvedené rovnice snadno modifikovat.

15.2 Trinomický strom

V případě binomického stromu vedou z každého uzlu dvě větve. Cena podkladového aktiva se tak může z výchozí úrovně S zvýšit na Su nebo snížit na Sd , kde $u > 1$ a $0 < d < 1$.

Alternativu k binomickým stromům pak představují trinomické stromy. Z každého uzlu trinomického stromu vedou tři větve.



Trinomický strom
změna ceny v časovém intervalu δt

Parametry p_u , p_m a p_d představují pravděpodobnosti pro jednotlivé větve. Uvažujme akcii s nulovým dividendovým výnosem. Hodnoty těchto parametrů vypočtené tak, aby odpovídaly střední hodnotě a směrodatné odchylce ceny podkladového aktiva při zanedbání členů řádu $\sqrt{\delta t}$ a vyšší, jsou

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

$$p_u = \sqrt{\frac{\delta t}{12\sigma^2}} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{6} \right)$$

$$p_m = \frac{2}{3}$$

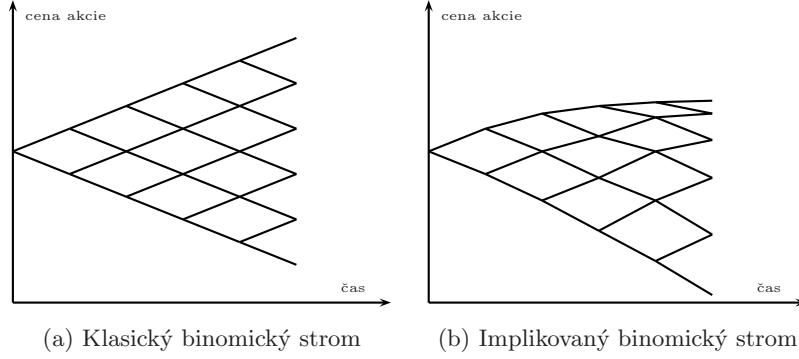
$$p_d = -\sqrt{\frac{\delta t}{12\sigma^2}} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{6} \right)$$

V případě akcie s dividendovým výnosem q stačí ve výše uvedených rovnicích nahradit r výrazem $r - q$. Samotná konstrukce trinomického stromu je analogická konstrukci binomického stromu.

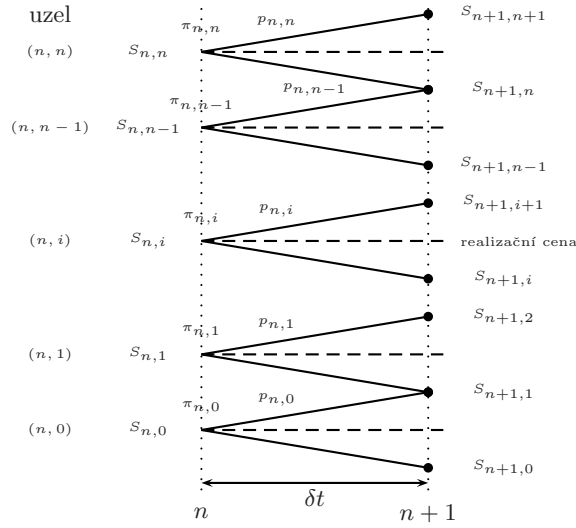
Lze dokázat, že oceňování opcí pomocí trinomického stromu je shodné s oceňováním rozdílovou metodou, které je popsána v kapitole 15.5.

15.3 Implikovaný binomický strom

Konstrukce klasického binomického stromu je založena na předpokladu, že volatilita podkladového aktiva je konstantní. V kapitole 12 jsme ukázali, že v praxi tomu tak není a že volatilita je funkcí ceny pokladového aktiva a zbytkové splatnosti opce. Tento funkční vztah je vyjádřen pomocí tzv. volatility surface. Binomický strom zkonstruovaný na základě volatility surface je nazýván implikovaným binomickým stromem. Tento strom opouští předpoklad konstantní volatility a modeluje správně cenu pokladového aktiva ve všech svých uzlech. Implikovaný binomický strom nám tedy umožňuje si vytvořit představu o skutečném pravděpodobnostním rozdělení ceny pokladového aktiva.



Uvažujme implikovaný binomický strom s konstantní délkou kroku δt a předpokládejme, že jsme tento strom zkonstruovali do n -tého kroku. Situaci zachycuje následující obrázek.



Výsek z implikovaného binomického stromu
(krok n a $n + 1$)

Definujme r jako bezrizikovou úrokovou míru mezi kroky n a $n + 1$ a $F_{n,i}$ jako forwardovou cenu podkladového aktiva.

$$F_{n,i} = S_{n,i} e^{r\delta t} \quad (15.5)$$

Dále definujme $p_{n,i}$ jako pravděpodobnost přesunu z uzlu (n, i) do uzlu $(n + 1, i + 1)$ a $\pi_{n,i}$ jako pravděpodobnost přesunu z uzlu $(0, 0)$ do uzlu (n, i) diskontovanou bezrizikovou sazbou přes časové období 0 až $n\delta t$. V případě klasického binomického stromu, který je kromě konstantní volatility charakteristický také konstantní pravděpodobností $p_{n,i} = p$, a za předpokladu konstantní bezrizikové sazby r , tedy platí $\pi_{n,i} = e^{-rn\delta t} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$.

15.3.1 Konstrukce implikovaného binomického stromu

Z výše uvedeného obrázku vyplývá, že pro přesun z n -tého do $n + 1$ -ního kroku je třeba vypočítat $2n + 1$ parametrů. Konkrétně se jedná o

- $n + 1$ cen pokladového aktiva $S_{n+1,i}$
- n pravděpodobností $p_{n,i}$

Hodnota opce dle klasického binomického stromu

Volatility surface definuje volatilitu podkladového aktiva jako funkci realizační ceny a doby do splatnosti opce. S využitím takto stanovené volatility jsme schopni zkonstruovat klasický binomický strom a ten použít pro ocenění evropské kupní popř. prodejní opce.

Nechť $c(K, t_{n+1})$ resp. $p(K, t_{n+1})$ jsou hodnota prodejní resp. kupní opce s realizační hodnotou K a splatností v čase t_{n+1} . Hodnota těchto opcí vypočtená dle klasického binomického stromu je

$$c(K, t_{n+1}) = \Pi_{i=1}^{n+1} e^{-r_i \delta t} \sum_{i=0}^{n+1} \max(S_{0,0} u^i d^{(n+1)-i} - K, 0) \binom{n+1}{i} p^i (1-p)^{(n+1)-i} \quad (15.6)$$

$$p(K, t_{n+1}) = \Pi_{i=1}^{n+1} e^{-r_i \delta t} \sum_{i=0}^{n+1} \max(K - S_{0,0} u^i d^{(n+1)-i}, 0) \binom{n+1}{i} p^i (1-p)^{(n+1)-i} \quad (15.7)$$

Parametr r_i představuje bezrizikovou úrokovou míru platnou mezi kroky $i - 1$ a i a parametry p , u a d jsou dány rovnicemi (15.2), (15.3) a (15.4). Volatilita σ , která figuruje v rovnicích (15.3) a (15.4), je odvozena z volatility surface pro realizační cenu K a splatnost t_{n+1} .

Hodnota opce dle implikovaného binomického stromu

Hodnotu evropské kupní popř. prodejní opce lze také vypočíst pomocí implikovaného binomického stromu. Hodnota opce vypočtená podle klasického a podle implikovaného binomického stromu musí být shodná. Zásadní rozdíl mezi oběma binomickými stromy je ten, že klasický binomický strom je zkonstruován na základě volatility odvozené z volatility surface, která je pro celý strom konstantní. Tento strom tak lze použít pouze pro ocenění jedné konkrétní opce, pro kterou byla tato volatilita odvozena. Naproti tomu s pomocí implikovaného binomického stromu je možné ocenit libovolnou opci, protože konstrukce tohoto stromu zohledňuje rozdílnou volatilitu pro rozdílnou realizační cenu a zbytkovou splatnost. Rovnice pro výpočet ceny evropské kupní resp. prodejní podle implikovaného binomického stromu jsou

$$c(K, t_{n+1}) = e^{-r \delta t} \sum_{j=0}^{n+1} \left(\pi_{n,j} p_{n,j} + \pi_{n,j+1} (1 - p_{n,j+1}) \right) \max(S_{n+1,j+1} - K, 0)$$

$$p(K, t_{n+1}) = e^{-r \delta t} \sum_{j=0}^{n+1} \left(\pi_{n,j} p_{n,j} + \pi_{n,j+1} (1 - p_{n,j+1}) \right) \max(K - S_{n+1,j+1}, 0)$$

Je-li realizační cena K rovna $S_{n,i}$, mohou být výše uvedené rovnice po oddělení prvního in-the-money uzlu² vyjádřeny ve tvaru

$$c(K, t_{n+1}) = e^{-r\delta t} \left(\pi_{n,i} p_{n,i} (S_{n+1,i+1} - S_{n,i}) + \sum_{j=i+1}^{n+1} \pi_{n,j} [(p_{n,j} S_{n+1,j+1} + (1-p_{n,j}) S_{n+1,j}) - S_{n,i}] \right)$$

$$p(K, t_{n+1}) = e^{-r\delta t} \left(\pi_{n,i} (1-p_{n,i}) (S_{n,i} - S_{n+1,i}) + \sum_{j=0}^{i-1} \pi_{n,j} [S_{n,i} - (p_{n,j} S_{n+1,j+1} + (1-p_{n,j}) S_{n+1,j})] \right)$$

Vzhledem k tomu, že forwardovou cenu $F_{n,i}$ je možné kromě (15.5) vypočítat také ze vztahu

$$F_{n,i} = p_{n,i} S_{n+1,i+1} + (1 - p_{n,i}) S_{n+1,i} \quad (15.8)$$

lze tyto rovnice dále upravit do tvaru

$$c(K, t_{n+1}) = e^{-r\delta t} \left(\pi_{n,i} p_{n,i} (S_{n+1,i+1} - S_{n,i}) + \sum_{j=i+1}^{n+1} \pi_{n,j} (F_{n,j} - S_{n,i}) \right) \quad (15.9)$$

$$p(K, t_{n+1}) = e^{-r\delta t} \left(\pi_{n,i} (1-p_{n,i}) (S_{n,i} - S_{n+1,i}) + \sum_{j=0}^{i-1} \pi_{n,j} (S_{n,i} - F_{n,j}) \right) \quad (15.10)$$

Výpočet parametrů $S_{n+1,j}$ a $p_{n,j}$

Protože hodnota kupní resp. prodejní opce je dána rovnicí (15.6) resp. (15.7) a forwardová cena $F_{n,j}$ rovnicí (15.5), obsahují (15.9) a (15.10) následující neznámé

- $n + 1$ cen pokladového aktiva $S_{n+1,j}$
- n pravděpodobností $p_{n,j}$ přechodu z uzlu (n, j) do uzlu $(n + 1, j + 1)$

Celkem je tedy třeba vypočítat $2n + 1$ neznámých. Pro výpočet těchto neznámých máme k dispozici

- n rovnic forwardových cen (15.8)
- n rovnic cen kupních resp. prodejních opcí daných rovnicemi (15.9) resp. (15.10)³

Jako $(2n + 1)$ -ní podmínku, která je nezbytná pro výpočet výše uvedených neznámých, zvolme “vycentrování” implikovaného binomického stromu na klasický binomický strom. Pro lichá n , kdy je počet uzlů v $(n + 1)$ -ním kroku taktéž lichý, platí

$$S_{n+1,(n+1)/2} = S_{0,0} \quad (15.11)$$

²Tímto uzlem je uzel (n, i) . Hodnota kupní opce v kroku $n + 1$ je pro všechny nižší uzly rovna nule. Cena pokladového aktiva v těchto uzlech je totiž menší než realizační cena $S_{n,i}$. Hodnota prodejní opce se tedy skládá z horní větve vedoucí z uzlu (n, i) a z uzlů nacházejících se nad touto větví. V případě prodejní opce je tomu přesně naopak.

³Nejedná o $2n$ rovnic, jak by se mohlo na první pohled zdát - tj. n rovnic pro cenu kupní a n rovnic pro cenu prodejní opce. Protože ceny kupní a prodejní opce jsou “propojeny” skrze put-call paritu, máme k dispozici pouze n nezávislých rovnic.

Naproti tomu pro sudá n má tato podmínka podobu rovnice

$$S_{n+1,n/2} = \frac{S_{0,0}^2}{S_{n+1,n/2+1}} \quad (15.12)$$

Z rovnice (15.9) lze s využitím substituce za $p_{n,i}$ dle (15.8) vyjádřit cenu podkladového aktiva $S_{n+1,i+1}$ jako

$$S_{n+1,i+1} = \frac{S_{n+1,i}[e^{r\delta t}c(S_{n,i},t_{n+1}) - \Psi_c] - \pi_{n,i}S_{n,i}(F_{n,i} - S_{n+1,i})}{[e^{r\delta t}c(S_{n+1,i},t_{n+1}) - \Psi_c] - \pi_{n,i}(F_{n,i} - S_{n+1,i})} \quad (15.13)$$

kde

$$\Psi_c = \sum_{j=i+1}^{n+1} \pi_{n,i}(F_{n,j} - S_{n,i})$$

Podobně lze z rovnice (15.10) vyjádřit cenu podkladového aktiva $S_{n+1,i}$ jako

$$S_{n+1,i} = \frac{S_{n+1,i+1}[e^{r\delta t}p(S_{n,i},t_{n+1}) - \Psi_p] + \pi_{n,i}S_{n,i}(F_{n,i} - S_{n+1,i+1})}{[e^{r\delta t}p(S_{n,i},t_{n+1}) - \Psi_p] + \pi_{n,i}(F_{n,i} - S_{n+1,i+1})} \quad (15.14)$$

kde

$$\Psi_p = \sum_{j=0}^{i-1} \pi_{n,i}(S_{n,i} - F_{n,j})$$

Ceny podkladového aktiva pro $(n+1)$ -ní krok implikovaného binomického stromu začínáme počítat od uzlu $(n+1, i+1)$, kde $i = n/2$ resp. $i = (n+1)/2$ pro sudá resp. lichá n . Ceny pokladového aktiva tak počítáme od “centrálního” uzlu $(n+1)$ -ního kroku binomického stromu.

Nejdříve uvažujme situaci, kdy je n liché. Počet uzlů v $(n+1)$ -ním kroce je taktéž lichý. Proto je hodnota podkladového aktiva $S_{n+1,i}$ v centrálním uzlu s ohledem na (15.11) rovna výchozí ceně $S_{0,0}$. Cenu $S_{n+1,i+1}$ lze vypočítat dle rovnice (15.13). Následně je možné získat pravděpodobnost $p_{n,i}$ z rovnice (15.8). Tímto způsobem postupně odvodíme ceny a pravděpodobnosti až do nejvyššího uzlu $(n+1, n+1)$. Cenu podkladového aktiva pro uzly $(n+1, j)$, které se nachází pod centrálním uzlem $(n+1, i)$, lze dopočítat dle rovnice (15.14).

V případě, že je n sudé, je počet uzlů v $(n+1)$ -ním kroce také sudý. “Centrální” uzel proto neexistuje. Pro výpočet ceny $S_{n+1,i+1}$ je tedy třeba modifikovat rovnici (15.13) s využitím vztahu (15.12). Cena podkladového aktiva $S_{n+1,i+1}$ je tak dána rovnicí

$$S_{n+1,i+1} = \frac{S_{0,0}[e^{r\delta t}c(S_{0,0},t_{n+1}) + \pi_{n,i}S_{0,0} - \Psi_c]}{\pi_{n,i}F_{n,i} - e^{r\delta t}c(S_{0,0},t_{n+1}) + \Psi_c}$$

Cena $S_{n+1,i}$ je následně dopočtena podle (15.12). Ceny podkladového aktiva pro uzly nad uzlem $(n+1, i+1)$ je možné dopočítat dle (15.13). Ceny podkladového aktiva pro uzly pod uzlem $(n+1, i)$ jsou pak dány rovnicí (15.14). Pro výpočet pravděpodobností $p_{n,j}$ lze opět využít vztahu (15.8).

Další podmínkou, která musí být při konstrukci binomického stromu dodržena, je

$$F_{i,j} < S_{i+1,j+1} < F_{i,j+1} \quad (15.15)$$

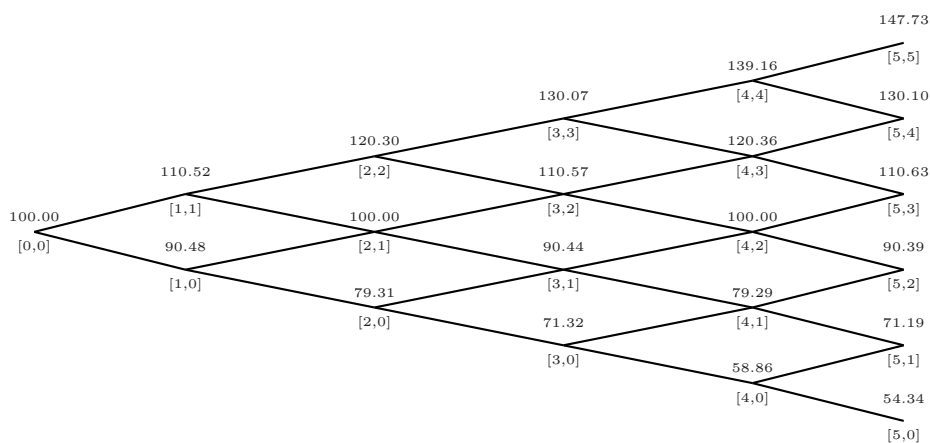
Tato podmínka zaručuje, že v rámci implikovaného binomického stromu neexistuje možnost arbitráže. Jestliže modelová cena pokladového aktiva $S_{i+1,j+1}$ tuto podmínku nesplňuje, definujeme tuto cenu jako

$$S_{i+1,j+1} = S_{i+1,j} \cdot \frac{S_{i,j-1}}{S_{i,j}}$$

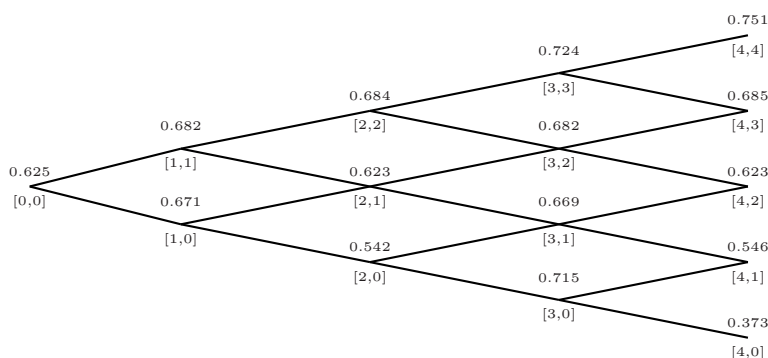
15.3.2 Modelový příklad

Uvažujme akcii s nulovým dividendovým výnosem, jejíž spotová cena je 100 USD. Předpokládejme, že roční implikovaná volatilita at-the-money evropské opce je 10% a že se zvyšuje lineárně o 0.05 procentního bodu za každý jeden dolar poklesu ceny podkladového aktiva⁴. Dále předpokládejme, že bezriziková úroková sazba je konstantní pro všechny splatnosti a rovna 3% v ročním vyjádření.

Následující grafy zobrazují implikovaný binomický strom včetně klíčových hodnot nezbytných pro jeho konstrukci.

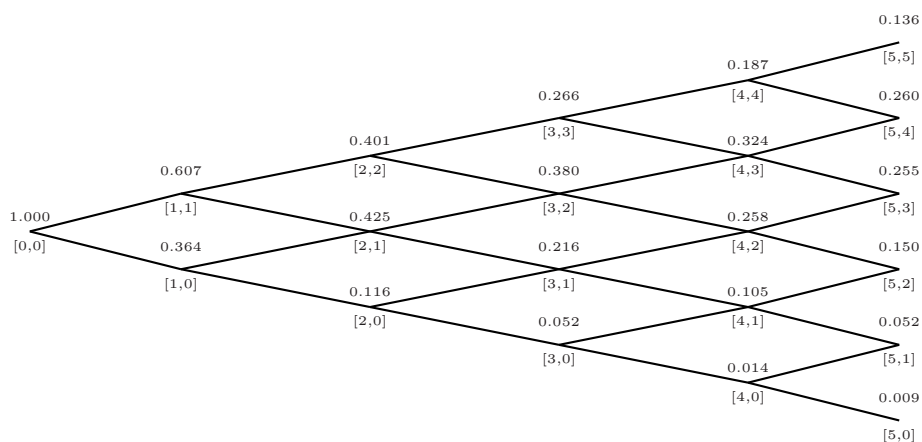


Implikovaný binomický strom



Pravděpodobnost $p_{i,j}$ přechodu na vyšší uzel

⁴Tímto způsobem jsme právě definovali volatility surface.

Diskontovaná pravděpodobnost $\pi_{i,j}$

Ilustrujme si konstrukci implikovaného binomického stromu na výpočtu cen podkladového aktiva pro uzly v posledním pátém kroce.

Centrální uzly

Vzhledem k tomu, že pátý krok má sudý počet uzlů, neexistuje jeden centrální uzel. Konstrukci implikovaného binomického stromu tak zahájíme výpočtem cen podkladového aktiva pro uzly $(5, 3)$ a $(5, 2)$.

Cenu podkladového aktiva $S_{5,3}$ vypočteme jako

$$S_{5,3} = \frac{S_{0,0}[e^{r\delta t}c(S_{0,0}, 5) + \pi_{4,2}S_{0,0} - \Psi_c]}{\pi_{4,2}F_{4,2} - e^{r\delta t}c(S_{0,0}, 5) + \Psi_c}$$

Připomeňme, že hodnota evropské kupní opce $c(S_{0,0}, 5)$ vypočtená na základě klasického binomického stromu je

$$c(S_{0,0}, 5) = e^{-5r} \sum_{i=0}^5 \max(S_{0,0}u^i d^{5-i} - S_{0,0}, 0) \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i}$$

Protože se realizační cena opce rovná spotové ceně podkladového aktiva, je implikovaná volatilita rovna 10.00%. Hodnoty parametrů u , d a p jsou dány rovnicemi (15.2), (15.3) a (15.4). Hodnota uvažované opce je tedy rovna 17.07 USD. Další parametr, který je nutné vypočíst, je Ψ_c . Ten je pro $S_{5,3}$ definován jako

$$\Psi_c = \pi_{4,3}(F_{4,3} - S_{4,2}) + \pi_{4,4}(F_{4,4} - S_{4,2})$$

a je tedy roven 15.87. Dosazením do rovnice získáme cenu podkladového aktiva $S_{5,3}$.

$$S_{5,3} = \frac{100[1.03 \cdot 17.07 + 0.258 \cdot 100 - 15.87]}{0.258 \cdot (100 \cdot 1.03) - 1.03 \cdot 17.07 + 15.87} = 110.66$$

Cena podkladového aktiva v uzlu $(5, 3)$ je tedy 110.66 USD. Rozdíl oproti ceně 110.63 USD delarované v grafu implikovaného binomického stromu je způsoben zaokrouhlováním během výpočtu.

Cena podkladového aktiva v druhém centrálním uzlu (5, 2) je dána rovnicí (15.12) a je tedy rovna 90.37 USD.

Posledním krokem při výpočtu centrálních uzlů je kontrola podmínky neexistence arbitráže. Tato podmínka zformulovaná do nerovnosti (15.15) je splněna pro oba uvažované uzly.

Horní větve implikovaného binomického stromu

Nyní přistoupíme k výpočtu cen podkladového aktiva pro uzly nad uzlem (5, 3). Cena podkladového aktiva pro tyto uzly se vypočte dle rovnice (15.13).

Nejprve vypočteme cenu podkladového aktiva pro uzel (5, 4). Hodnota opce $c(120.36, 5)$ při volatilitě 8.98% je rovna 6.27 USD. Dalším parametrem nezbytným pro výpočet ceny $S_{5,4}$ je Ψ_c . Hodnota tohoto parametru je 4.30. Cena podkladového aktiva v uzlu (5, 4) je tedy dána rovnicí

$$S_{5,4} = \frac{110.66(1.03 \cdot 6.27 - 4.30) - 0.324 \cdot 120.35(123.97 - 110.66)}{1.03 \cdot 6.27 - 4.30 - 0.324 \cdot (123.97 - 110.66)} = 130.06$$

Nakonec je třeba zkontrolovat podmínku neexistence arbitráže definovou nerovností (15.15). Tato nerovnost je pro vypočtené $S_{5,3}$ splněna.

Pro uzel (5, 5) je hodnota opce $c(139.16, 5)$ při volatilitě 8.04% rovna 1.17 USD. Vzhledem k tomu, že se jedná o “nejvyšší” uzel, nabývá sumační parametr Ψ_c hodnotu nula. Konkrétní podoba rovnice pro výpočet ceny podkladového aktiva je tedy

$$S_{5,5} = \frac{130.06(1.03 \cdot 1.17 - 0) - 0.187 \cdot 139.16(143.33 - 130.06)}{1.03 \cdot 1.17 - 0 - 0.187 \cdot (143.33 - 130.06)} = 147.75$$

Nyní je třeba zkontrolovat splnění podmínky (15.15). Vzhledem k tomu, že $F_{4,5}$ není definováno, je tato podmínka modifikována do podoby

$$F_{4,4} < S_{5,5}$$

Protože $F_{4,4}$ je rovno 143.33 USD, je tato podmínka splněna.

Dolní větve implikovaného binomického stromu

Zkonstruovali jsme implikovaný binomický strom v uzlech (5, 2) až (5, 5). Zbývá tedy vypočítat ceny podkladového aktiva pod uzlem (5, 2). Ceny podkladového aktiva pro tyto uzly jsou dány rovnicí (15.14).

Konstrukce dolních větví implikovaného binomického stromu začíná uzlem (5, 1). Nejprve je třeba vypočítat hodnotu opce $p(79.29, 5)$ a sumačního parametru. Hodnota opce $p(79.29, 5)$ pro implikovanou volatilitu 11.04% je rovna 0.64 USD; hodnota parametru Ψ_p je pak rovna 0.267. Rovnice pro výpočet ceny podkladového aktiva v uzlu (5, 1) má tedy tvar

$$S_{5,1} = \frac{90.37 \cdot (1.03 \cdot 0.64 - 0.267) + 0.105 \cdot 79.29 \cdot (81.67 - 90.37)}{1.03 \cdot 0.64 - 0.267 + 0.105 \cdot (81.67 - 90.37)} = 70.95$$

Před přesunem na vyšší větev binomického stromu je třeba zkontrolovat splnění podmínky (15.15). Vzhledem k tomu, že $F_{4,0} = 60.63$ a $F_{4,1} = 81.67$ je tato podmínka splněna.

V případě uzlu $(5, 0)$ je hodnota opce $p(58.86, 5, 5)$ při volatilitě 12.06% rovna 0.04 USD. Protože se jedná o “nejnižší” uzel, je hodnota sumačního parametru Ψ_c rovna nule. Cena podkladového aktiva je tak rovna

$$S_{5,0} = \frac{70.95 \cdot (1.03 \cdot 0.04 - 0) + 0.014 \cdot 58.86 \cdot (60.63 - 70.95)}{1.03 \cdot 0.04 - 0 + 0.014 \cdot (60.63 - 70.95)} = 54.04$$

Při kontrole splnění podmínky neexistence arbitráže nastává analogická situace jako v případě uzlu $(5, 5)$. Podmínka má proto podobu

$$S_{5,0} < F_{4,0}$$

Vzhledem k tomu, že je $F_{4,0}$ rovno 60.63 USD, je tato podmínka splněna.

Výpočet parametrů $p_{i,j}$ a $\pi_{i,j}$

Jestliže bychom chtěli konstruovat implikovaný binomický strom pro šestý krok, je zapotřebí vypočítat pravděpodobnosti $p_{4,j}$ a $\pi_{5,j}$, které jsou definovány rovnicemi

$$p_{4,j} = \frac{F_{4,j} - S_{5,j}}{S_{5,j+1} - S_{5,j}}$$

resp.

$$\pi_{5,j} = e^{-r\delta t}(p_{4,j}\pi_{4,j} + (1 - p_{4,j+1})\pi_{4,j+1})$$

Další postup by pak byl analogický výše uvedenému postupu.

15.4 Simulace Monte Carlo

Postup při použití metody Monte Carlo je následující:

- vygenerovat náhodný vývoj ceny akcie pro zvolené časové období
- vypočítat výnos z opce
- opakovat kroky (1) a (2) za účelem vygenerování potřebného vzorku
- zprůměrovat výnosy z opce s cílem určit očekávaný opční výnos
- diskontovat očekávaný opční výnos bezrizikovou úrokovou sazbou

Jestliže rozdělíme životnost opce do N časových intervalů délky δt , lze změnu ceny akcie mezi těmito intervaly definovat jako

$$S(t + \delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\delta t + \sigma S(t)\epsilon\sqrt{\delta t} \quad (15.16)$$

V praxi je však mnohem přesnější simulovat $\ln S$. Zatímco (15.16) platí pouze pro δt blízká nule, (15.17) platí pro všechna δt .

$$\ln S(t + \delta t) - \ln S(t) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\delta t} \quad (15.17)$$

Nevýhodou metody Monte Carlo jsou zvýšené požadavky na výpočetní výkon. Naopak výhodou je relativní jednoduchost ocenění i poměrně komplikovaných struktur, které by bylo velice těžké uchopit analyticky.

Alternativu k metodě Monte Carlo představuje binomický strom. Výhodou binomického stromu je, že bere v potaz všechny možné ceny, které s ohledem na parametry modelu přicházejí v úvahu. Binomický strom je také v porovnání s metodou Monte Carlo zpravidla méně náročný na výpočetní výkon.

15.4.1 Modelování korelovaných náhodných veličin

Uvažujme situaci, kdy výplata z finálního derivátu závisí na n proměnných θ_i ($1 \leq i \leq n$). Definujme s_i jako volatilitu θ_i , \hat{m}_i jako očekávanou míru růstu θ_i a ρ_{ij} jako míru korelace mezi θ_i a θ_j . Vývoj θ_i v čase lze pak modelovat pomocí

$$\theta_i(t + \delta t) - \theta_i(t) = \hat{m}_i \theta_i(t) \delta t + s_i \theta_i(t) \epsilon_i \sqrt{\delta t}$$

Problém může nastat v případě ϵ_i , které představuje náhodný výběr normovaného normálního rozdělení. Jestliže totiž uvažujeme n parametrů θ_i , které jsou vzájemně korelovány, je nutné tuto korelaci při konstrukci ϵ_i zohlednit. V prvním kroku je potřeba vygenerovat n vzájemně nezávislých náhodných výběrů normovaného normálního rozdělení x_i . ϵ_i lze pak vypočítat na základě rovnice

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} x_k, \quad (15.18)$$

přičemž musí být splněna podmínka

$$\sum_{k=1}^i \alpha_{ik}^2 = 1 \quad (15.19)$$

a pro všechna $j < i$ také podmínka

$$\sum_{k=1}^i \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \rho_{ij} \quad (15.20)$$

kde ρ_{ij} představuje korelaci mezi ϵ_i a ϵ_j .

Postup výpočtu

Jednotlivá ϵ_i jsou vypočtena metodou bootstrapping. To znamená, že pro výpočet hodnoty ϵ_i je třeba znalosti všech hodnot ϵ_j , kde $j < i$.

Pro $i = 1$ nejprve dle (15.19) vypočteme $\alpha_{11} = 1$. Z (15.18) vyplývá

$$\epsilon_1 = x_1$$

Po té můžeme přistoupit k určení náhodné veličiny ϵ_2 . S pomocí (15.20) odvodíme $\alpha_{21} = \rho_{21}$. Dosazením α_{21} do (15.19) získáme $\alpha_{22} = \sqrt{1 - \rho_{21}^2}$. Hodnota ϵ_2 je tedy v souladu s (15.18) dána vztahem

$$\epsilon_2 = \rho_{21} x_1 + \sqrt{1 - \rho_{21}^2} x_2$$

V případě ostatních ϵ je postup analogický. Tento postup je znám jako Choleskyho dekompozice.

Interní konzistence korelační matice

Jestliže jednotlivá α získaná Choleskyho dekompozicí nejsou z množiny reálných čísel, není uvažovaná korelační matice tvořená korelacemi ρ_{ij} interně konzistentní. Takováto korelační matice tedy nemůže existovat. Pouze připomeňme, že aby korelační matice byla interně konzistentní, musí být pozitivně semidefinitivní.

15.4.2 Počet vzorků

Vypovídací schopnost modelu Monte Carlo závisí na počtu vygenerovaných hodnot. Uvažujme M vygenerovaných hodnot. Nechť μ je očekávaná hodnota finančního derivátu a ω jeho směrodatná odchylka vypočtená na základě nasimulovaných hodnot. Standardní chyba odhadu očekávané hodnoty μ je dána

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}$$

Je-li f skutečná očekávaná cena derivátu, pak je 95% interval spolehlivosti pro f dán vztahem

$$\mu - \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}}$$

15.4.3 Řecká písmena

Metodu Monte Carlo je možné použít také pro výpočet řeckých písmen. Uvažujme odhad ceny derivátu \hat{f} , který jsme získali pro cenu pokladového aktiva x . Dále uvažujme odhad ceny derivátu \hat{f}^* pro cenu pokladového aktiva x^* . Definujme δx jako $x^* - x$. Delta je pak definována jako

$$\Delta = \frac{\hat{f}^* - \hat{f}}{\delta x}$$

Pro simulaci \hat{f} a \hat{f}^* je třeba použít stejnou délku intervalu δt . Obdobným způsobem lze vypočítat také ostatní řecká písmena.

15.5 Rozdílová metoda výpočtu ceny opce

Uvažujme evropskou prodejní opci, kde pokladovým aktivem je akcie s nulovým dividendovým výnosem. Z dřívějších kapitol víme, že takováto opce musí splňovat diferenciální rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

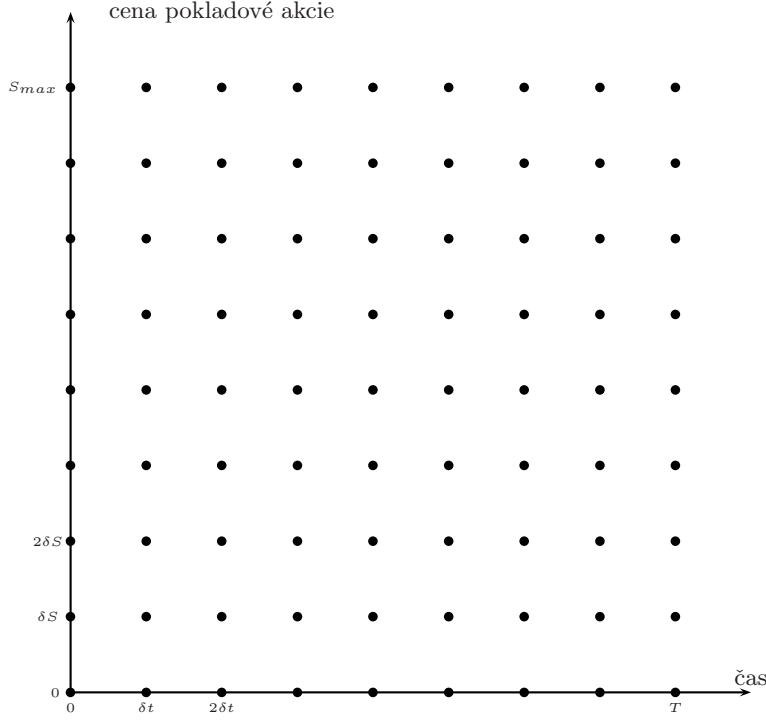
Nechť je T životnost opce. Rozdělme T na N stejných intervalů délky $\delta t = T/N$. Celkový počet časových bodů je tedy $N + 1$ a konkrétně se jedná o

$$0, \delta t, 2\delta t, \dots, T$$

Dále definujme S_{max} jako cenu pokladové akcie, pro kterou je hodnota prodejní opce blízká nule. Uvažujme $M + 1$ možných cen akcie

$$0, \delta S, 2\delta S, \dots, S_{max}$$

Definujme δS jako S_{max}/M . Časové a cenové body tak vytvářejí matici o $(N + 1) \times (M + 1)$ bodech.



Matice $(N + 1) \times (M + 1)$

Bod (i, j) odpovídá časovému bodu $i\delta t$ a cenovému bodu $j\delta S$. Dále definujme proměnnou $f_{i,j}$, která odpovídá hodnotě opce v bodě (i, j) .

Pro vnitřní bod (i, j) platí

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta S}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\delta S^2}$$

Doplněním do výše uvažované diferenciální rovnice s využitím vztahu $S = j\delta S$ získáváme pro $j = 1, 2, \dots, M - 1$ a $i = 0, 1, \dots, N - 1$

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta t} + rj\delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\delta S^2} = rf_{i,j}$$

Tuto rovnici je pak možné dále upravit do tvaru

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \quad (15.21)$$

kde $a_j = \frac{1}{2}rj\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\delta t$, $b_j = 1 + \sigma^2j^2\delta t + r\delta t$ a $c_j = -\frac{1}{2}rj\delta t - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\delta t$. Abychom mohli tento vztah řešit, je zapotřebí určit cenu opce v "limitních" případech. Ta je dána rovnicemi (15.22), (15.23) a (15.24). Hodnota prodejní opce v čase T je

$$f_{N,j} = \max(K - j\delta S, 0), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (15.22)$$

Hodnota této opce, je-li cena podkladové akcie nulová, je K .

$$f_{i,0} = K, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (15.23)$$

Dále předpokládáme, že cena prodejní opce je nulová, je-li $S = S_{max}$

$$f_{i,M} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (15.24)$$

Výše uvedené tři rovnice definují hodnotu uvažované prodejní opce podél tří hran matice $(N+1) \times (M+1)$. Pro výpočet ceny opce ve zbývajících bodech stačí použít rovnici (15.21). Nejprve je vypočtena hodnota opce v čase $T - \delta$. Rovnice (15.21) pro $i = N-1$ je

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \quad (15.25)$$

kde $j = 1, 2, \dots, M-1$. Pravá strana soustavy $M+1$ těchto rovnic je dána (15.22). Z rovnic (15.23) a (15.24) vyplývá

$$f_{N-1,0} = K$$

$$f_{N-1,M} = 0$$

Řešením (15.25) pak získáme postupně $M+1$ neznámých - $f_{N-1,1}, f_{N-1,2}, \dots, f_{N-1,M-1}$. Po té jsou hodnoty $f_{N-1,j}$ porovnány s $K - j\delta S$. Jestliže $f_{N-1,j} < K - j\delta S$, je optimální uplatnit opci předčasně v $T - \delta t$ a hodnota $f_{N-1,j}$ je tak rovna $K - j\delta t$. Analogickým způsobem jsou postupně vypočteny hodnoty také pro ostatní časové body. Výsledkem je matice hodnot $f_{0,1}, f_{0,2}, \dots, f_{0,M-1}$, které odpovídají hodnotám opce pro ceny $\delta S, 2\delta S, \dots, M - 1\delta S$ podkladové akcie. Pro nulovou cenu podkladové akcie je hodnota prodejní opce rovna K a pro cenu S_{max} je pak tato hodnota nulová.

Kapitola 16

Exotické opce

16.1 Nestandardní americké opce

V případě nestandardních amerických opcí může být právo uplatnit opci omezeno na určitá předem dohodnutá data, popř. může být toto právo omezeno pouze na určitou část životnosti opce. Další možností je změna realizační ceny v průběhu splatnosti opce. Příkladem finančních instrumentů, které mohou implementovat některou z těchto modifikací, jsou akciové waranty. Prakticky jedinou možností, jak ocenit tento druh opcí, je pomocí binomického stromu popř. metodou Monte Carlo.

16.2 Forwardové opce

Forwardové opce jsou opce, které neplatí okamžitě, ale od určitého v budoucnu sjednaného okamžiku.

Uvažujme evropskou forwardovou at-the-money kupní opci, která je sjednána v čase T_0 , začíná v čase T_1 a je splatná v čase T_2 . Hodnota at-the-money kupní opce je propocionální ceně pokladového aktiva. Cena forwardové opce je tedy dána vztahem

$$c_{T_1}^f = e^{-rT_1} \hat{E} \left[c \frac{S_1}{S_0} \right],$$

kde $\hat{E}[x]$ představuje očekávanou hodnotu náhodné veličiny x v rizikově neutrálním světě, c je cena odpovídající evropské kupní opce v čase T_1 a S_0 je spotovou cenou podkladového aktiva. Jediná veličina, kterou neznáme, je tak S_1 , resp. $\hat{E}[S_1]$. V rizikově neutrálním světě však musí platit $\hat{E}[S_1] = S_0 e^{(r-q)T_1}$. Po úpravách tak získáváme

$$c_{T_1}^f = ce^{-qT_1}$$

16.3 Složené opce

Existují čtyři základní typy složených opcí (compound option): (a) kupní opce na kupní opci, (b) prodejní opce na prodejní opci, (c) kupní opce na prodejní opci a (d) prodejní opce na kupní opci. Každá složená opce má dvě realizační ceny a dvě data, kdy je možné uplatnit opční právo.

Uvažujme kupní opci na kupní opci. V čase T_1 má držitel složené opce možnost uplatnit první opční právo. V tomto případě zaplatí první z realizačních cen, K_1 , a obdrží prodejní opci. Tato opce pak dává držiteli právo koupit za druhou realizační cenu, K_2 , podkladové aktivum v čase T_2 . Tato složená opce bude v čase T_1 uplatněna pouze v případě, že cena opce je vyšší než první realizační cena K_1 . Hodnota evropské kupní opce na kupní opci je v čase T_0

$$S_0 e^{-qT_2} M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} K_1 N(a_2),$$

kde

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^*) + (r - q + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

Funkce M je kumulativní dvojrozměrné normální rozdělení. Proměnná S^* je cena aktiva v čase T_1 , pro kterou se cena opce v čase T_1 rovná K_1 . Podobně lze vyjádřit také cenu evropské prodejní opce na kupní opci

$$K_2 e^{-rT_2} M(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-qT_2} M(-a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} K_1 N(-a_2)$$

cenu evropské kupní opce na prodejní opci

$$K_2 e^{-rT_2} M(-a_2, -b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-qT_2} M(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} K_1 N(-a_2)$$

a cenu evropské prodejní opce na prodejní opci

$$S_0 e^{-qT_2} M(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-rT_2} M(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} K_1 N(a_2)$$

16.4 Opce s volbou

Pro opci s volbou (chooser option) je specifické, že se držitel této opce může po určité době rozhodnout, zda má být opce prodejní nebo kupní. Jsou-li obě tyto opce evropské a mají-li stejnou realizační cenu, je možné cenu této opce určit na základě put-call parity.

$$\begin{aligned} \max(c, p) &= \max(c, c + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S_1 e^{-q(T_2-T_1)}) = \\ &= c + e^{-q(T_2-T_1)} \max(0, Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1) \end{aligned}$$

Na opci s volbou lze v zásadě pohlížet jako na portfolio, které se skládá z

- kupní opce s realizační cenou K a maturitou T_2
- $e^{-q(T_2-T_1)}$ prodejní opce s realizační cenou $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$ a splatností T_1

16.5 Bariérová opce

V případě bariérové opce záleží výplata z opce na tom, zda-li cena podkladového aktiva dosáhne popř. nedosáhne určité hranice v průběhu životnosti

opce. Základní dělení bariérových opcí je na knock-out a knock-in opce. Knock-out opce je v zásadě klasickou opcí, které však přestane existovat v okamžiku, kdy podkladové aktivum dosáhne určité hranice. Naopak knock-in opce je regulérní opcí, které však vznikne teprve v okamžiku, kdy pokladové aktium tuto předem dohodnutou hranici dotkne. V souvislosti s bariérovými opcemi se pak mluví o down-and-out, down-and-in, up-and-out a up-and-in kupních opcích a down-and-out, down-and-in, up-and-out a up-and-in prodejních opcích. Označení těchto opcí souvisí s tím, zda-li je bariéra protnuta shora nebo zdola, a zda-li tímto prodejní popř. kupní opce vzniká nebo zaniká.

Down-and-out a up-and-out opce jsou knock-out opce - opce zanikne, jestliže cena podkladového aktiva protne stanovenou hranici. Jak název napovídá, v případě down-and-out opce je tato hranice protnuta shora¹, v případě up-and-out opce pak zdola². Down-and-in a up-and-in opce pak patří do rodiny knock-in opcí - vzniknou, jestliže cena podkladového aktiva protne stanovenou hranici. Směr protnutí této bariéry je pak analogický jako v případě odpovídajících knock-out opcí.

Velmi důležitým faktorem v případě bariérových opcí je stanové frekvence, se kterou se bude sledovat protnutí bariéry. Níže uvedené vzorce předpokládají, že vývoj cen je sledován spojitě; existují však také modely pro diskrétní intervaly sledování vývoje cen pokladového aktiva.

16.5.1 Down-and-in a down-and-out opce

Hodnota down-and-in kupní opce v čase nula je za předpokladu $H \leq K$ dána vztahem

$$c_{di} = S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T}),$$

kde

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{\ln[H^2/(S_0 K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

Protože se cena kupní opce rovná součtu ceny down-and-in a down-and-out kupní opce, platí pro down-and-out kupní opci

$$c_{do} = c - c_{di}$$

Je-li naopak $H \geq K$, je cena down-and-out opce

$$c_{do} = S_0 N(x_1) e^{-qT} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y_1) + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{T}),$$

kde

$$x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

¹To mimojině znamená, že výchozí cena pokladového aktiva musí být nad touto hranicí.

²Bariéra je zvolena tak, abych se nacházela nad spotovou cenou podkladového aktiva v době sjednání opce.

Cenu down-and-in opce pak lze dopočítat ze vztahu

$$c_{di} = c - c_{di}$$

V případě up-and-in kupní opce je její cena pro $H \geq K$ dána

$$\begin{aligned} c_{ui} = & S_0 N(x_1) e^{-qT} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] \\ & + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})] \end{aligned}$$

Z této ceny je možné dopočítat cenu kupní up-and-out opce

$$c_{uo} = c - c_{ui}$$

16.5.2 Up-and-in a up-and-down opce

Cena up-and-in prodejní opce je pro $H \geq K$ dána

$$p_{ui} = -S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y) + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T})$$

a cena up-and-out prodejní opce pak vztahem

$$p_{uo} = p - p_{ui}$$

Je-li $H \leq K$, jsou odpovídající ceny

$$\begin{aligned} p_{uo} = & -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y_1) \\ & - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma) \end{aligned}$$

a

$$p_{ui} = p - p_{uo}$$

V případě down-and-in and down-and-out prodejní opce platí pro $H \geq K$

$$p_{do} = 0$$

$$p_{di} = p$$

Je-li $H \leq K$ platí pro ceny těchto akcií

$$\begin{aligned} p_{di} = & -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)] \\ & - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})] \end{aligned}$$

a

$$p_{do} = p - p_{di}$$

16.6 Binární opce

Výplata z binárních opcí je vázána na splnění určité podmínky. Je-li tato podmínka splněna v případě tzv. cash-or-nothing binárních opcí, je vyplacena konstantní částka; jestliže nedojde ke splnění podmínky, je výplata z opce nulová.

Uvažujme kupní cash-or-nothing opci. Výplata z této opce je nulová, je-li cena pokladového aktiva v čase T pod realizační cenou K . V opačném případě je vyplacena částka Q . Pravděpodobnost, že cena podkladového aktiva přesáhne realizační cenu, je $N(d_2)$. Cena této binární opce je tudíž

$$c_{con} = Qe^{-rT}N(d_2)$$

Hodnota odpovídající prodejní binární opce je pak

$$p_{con} = Qe^{-rT}N(-d_2)$$

Další možnou modifikací je, že namísto fixní částky Q bude dodáno samotné aktivum. V tomto případě hovoříme o tzv. asset-or-nothing opci.

$$c_{aon} = S_0e^{-qT}N(d_1)$$

$$p_{aon} = S_0e^{-qT}N(-d_1)$$

16.7 Zpětná opce

Výplata ze zpětné opce (lookback option) závisí na minimální nebo maximální ceně aktiva v průběhu životnosti opce. Výplata z evropské zpětné kupní opce představuje rozdíl mezi konečnou a minimální cenou podkladového aktiva. Výplata evropské prodejní opce pak naopak představuje rozdíl mezi konečnou a maximální cenou podkladového aktiva. Zpětná kupní opce tak představuje způsob, jak může kupující získat podkladové aktivum za nejnižší cenu, které bylo dosaženo v průběhu životnosti opce. Podobně v případě prodejní zpětné opce může vlastník opce prodat pokladové aktivum za nejvyšší cenu dosaženou v průběhu životnosti opce.

Hodnota evropské kupní zpětné opce je dána

$$S_0e^{-qT}N(a_1) - S_0e^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-a_1) - S_{min}e^{-rT}\left(N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_1}N(-a_3)\right)$$

kde

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S_{min}) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$a_3 = \frac{\ln(S_0/S_{min}) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_1 = \frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_0/S_{min})}{\sigma^2}$$

Cena evropská prodejní zpětné opce je dána vztahem

$$S_{max}e^{-rT}\left(N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_2}N(-b_3)\right) + S_0e^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-b_2) - S_0e^{-qT}N(b_2)$$

kde

$$b_1 = \frac{\ln(S_{max}/S_0) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$b_3 = \frac{\ln(S_{max}/S_0) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_2 = \frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_{max}/S_0)}{\sigma^2}$$

S_{min} resp. S_{max} jsou minimální resp. maximální cena pokladového aktiva od počátku životnosti opce do data výpočtu její ceny³. Výše uvedené rovnice předpokládají, že jsou ceny opce sledovány na spojitě bázi.

16.8 Opce s výzvou

V případě opcí s výzvou (shout option) se jedná o modifikovanou evropskou opci. Její držitel může jednou v průběhu životnosti opce vyzvat jejího vypisovatele. Na konci životnosti pak dostane vyšší částku z (a) standardní výplaty klasické evropské opce nebo (b) vnitřní hodnotou opce v době výzvy. Z tohoto pohledu je opce s výzvou do určité míry podobná zpětné opci. Uvažujme kupní opci s výzvou. Pro určení ceny opce s výzvou je důležité si uvědomit, že je-li výzva podána v čase τ , platí pro výplatu z této opce v čase T

$$\max(0, S_T - S_\tau) + (S_T - K)$$

Cena této opce je proto v čase τ rovna součtu $S_\tau - K$ a klasické evropské kupní opce s realizační cenou S_τ . Postup ocenění opce s výzvou bude představen v kapitole 17.

16.9 Asijská opce

V případě asijské opce závisí výplata na průměrné ceně pokladového aktiva za určité období po dobu životnosti opce. Průměrná cena této akcie je nižší než cena klasické akcie.

Stejně jako v případě bariérových opcí je v praxi důležitá perioda, s jakou budou sledovány ceny pokladového aktiva. Níže uvedené vzorce předpokládají, že průměrná cena je počítána ze spojitých cen.

16.9.1 Geometrický průměr

Jestliže budeme pod pojmem "průměrná cena" chápat geometrický průměr, je možné asijskou opci ocenit jako klasickou opci s volatilitou $\sigma\sqrt{3}$ a dividendovým výnosem

$$\frac{1}{2} \left(r + q + \frac{\sigma^2}{6} \right)$$

³Jestliže cenu této opce počítáme na začátku její životnosti, platí $S_{min} = S_0$ resp. $S_{max} = S_0$.

16.9.2 Aritmetický průměr

V případě, kdy je průměrná cena definována aritmetickým průměrem, nejsou analytické rovnice pro výpočet ceny asijských opcí k dispozici. Nicméně je možné tuto cenu poměrně přesně aproximovat. Nejprve je třeba určit první a druhý moment pravděpodobnostního rozdělení aritmetického průměru

$$M_1 = \frac{e^{(r-q)T} - 1}{(r-q)T} S_0$$

$$M_2 = \frac{2e^{[2(r-q)+\sigma^2]T} S_0^2}{(r-q+\sigma^2)(2r-2q+\sigma^2)T^2} + \frac{2S_0^2}{(r-q)T^2} \left(\frac{1}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T}}{r-q+\sigma^2} \right)$$

Asijskou opci pak můžeme ocenit stejně jako opci na futures s parametry

$$F_0 = M_1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{M_2}{M_1^2} \right)$$

16.10 Opce na výměnu aktiv

Klasickým příkladem opce s výměnou aktiv jsou měnové opce.

Uvažujme evropskou opci, která umožňuje svému držiteli získat v čase T aktivum s hodnotu V_T výměnou za aktivum s cenou U_T . Předpokládejme, že tyto dvě aktiva s cenami U a V sledují geometrický Brownův pohyb s volatilitami σ_U a σ_V . Dále předpokládejme, že tyto aktiva generují výnos q_U a q_V a jejich vzájemná korelace je ρ . Cena takovéto opce v čase nula je

$$V_0 e^{-q_V T} N(d_1) - U_0 e^{-q_U T} N(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2)/T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$$

Je dobré si uvědomit, že opci na získání lepšího popř. horšího ze dvou aktiv lze replikovat pomocí pozice v jednom z aktiv a opcí na výměnu tohoto aktiva za druhé.

$$\min U_T, V_T = V_T - \max(V_T - U_T, 0)$$

$$\max(U_T, V_T) = U_T + \max(V_T - U_T, 0)$$

16.11 Portfoliové opce

Opce, které zahrnují alespoň dvě riziková aktiva, jsou označovány jako duhové opce (rainbow option). Klasickým příkladem jsou dluhopisové futures, tak jak byly popsány dříve, kdy má krátká strana právo vybrat konkrétní dluhopis z

předem daného balíku státních dluhopisů. Pravděpodobně nejpopulárnější duhovou opcí je tzv. portfoliová opce (portfolio option). V jejím případě záleží výplata na ceně podkladového portfolia, které se skládá z několika aktiv. Tyto opce je možné oceňovat pomocí metody Monte Carlo za předpokladu, že aktiva v portfoliu popsat pomocí korelovaného Brownova pohybu. Rychlejším avšak méně přesným přístupem je vypočítat první dva momenty portfolia v době maturity opce a předpokládat, že jeho cena sleduje lognormální rozdělení. Cena takovéto opce pak může být vypočtena na základě rovnic pro výpočet futures opcí.

$$c = e^{-rT}[F_0 N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p = e^{-rT}[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$$F_0 = M_1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \ln M_2 M_1^2$$

Kapitola 17

Rozšíření modelů a numerických postupů

17.1 CEV model

CEV (Constant elasticity of variance) model předpokládá, že rizikově neutrální proces pro vývoj ceny akcií je popsán rovnicí

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma S^\alpha dz$$

kde r je bezriziková úroková sazba, q dividendový výnos, dz Wienerův proces, σ volatilita a α pozitivní konstanta. Cena akcie pak má volatilitu $\sigma S^{\alpha-1}$. To umožňuje nastavit model tak, aby volatilita byla funkcí ceny akcie¹.

Vzorce pro evropské opce jsou následující:

- $0 < \alpha < 1$

$$c = S_0 e^{-qT} [1 - \chi^2(a, b + 2, c)] - K e^{-rT} \chi^2(c, b, a)$$

$$p = K e^{-rT} [1 - \chi^2(c, b, a)] - S_0 e^{-qT} \chi^2(a, b + 2, c)$$

- $\alpha > 1$

$$c = S_0 e^{-qT} [1 - \chi^2(c, -b, a)] - K e^{-rT} \chi^2(a, 2 - b, c)$$

$$p = K e^{-rT} [1 - \chi^2(a, 2 - b, c)] - S_0 e^{-qT} \chi^2(c, -b, a)$$

kde

$$a = \frac{K^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 \sigma^2 T}, \quad b = \frac{1}{1-\alpha}, \quad c = \frac{(S e^{(r-q)T})^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 \sigma^2 T}$$

$\chi^2(z, v, k)$ je kumulativní pravděpodobnost, že proměnná s necentrálním χ^2 rozdělením s parametrem necentrality v a k stupni volnosti je menší než z .

Pro $0 < \alpha < 1$ generuje model CEV pravděpodobnostní rozdělení podobné tomu, jaké je možné pozorovat u akcií, tj. s těžkým levým koncem. Pro $\alpha > 1$ generuje tento model naopak pravděpodobnostní rozdělení s těžším pravým koncem.

¹Je-li $\alpha < 1$, volatilita roste s poklesem ceny akcie a obráceně. Je-li $\alpha = 1$, pak se jedná o klasický model, který byl popsán výše.

17.2 Skokový model

Tento model představený Mertonem předpokládá možnost skokové změny ceny aktiva. Změna ceny podkladového aktiva je v rámci tohoto modelu dána rovnicí

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dz + dp,$$

kde μ představuje očekávaný výnos z aktiva očištěný o dividendový výnos, λ průměrný počet skoků v roce a k je průměrná velikost skoku vyjádřená jako procentní část ceny aktiva. Pravděpodobnost cenového skoku v čase δt je $\lambda \delta t$. Průměrná výše skoku v procentním vyjádření z ceny aktiva je tak λk . Parametr dz představuje Wienerův proces a dp Poissonův proces. Oba tyto procesy jsou nezávislé. Klíčovým předpokladem modelu je, že skoková složka ceny představuje nesystematické riziko (tj. riziko, které není oceněno trhem). To znamená, že portfolio, které eliminuje nejistotu vyplývající z Brownova pohybu, musí investorovi přinášet výnos odpovídající bezrizikové sazbě.

Uvažujme specifickou situaci, kdy je logaritmus procentní změny ceny aktiva náhodnou veličinou s normálním rozdělením. Předpokládejme, že směrodatná odchylka tohoto rozdělení je s . Cena evropské opce je pak definována jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'} (\lambda' T)^n}{n!} f_n,$$

kde $\lambda' = \lambda(1 + k)$. f_n je cena opce vypočtena na základě Black-Scholes modelu s dividendovým výnosem q , směrodatnou odchylkou

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{ns^2}{T}$$

a bezrizikovou sazbou

$$r_n = r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T},$$

kde $\gamma = \ln(1 + k)$.

Skokový model je charakteristický těžším levým i pravým koncem pravděpodobnostního rozdělení ceny podkladového aktiva, které je charakteristické pro měnové opce.

17.3 Stochastické modely volatility

Je-li volatilita funkcí času, je proces, který sleduje vývoj cen akcií, dán vztahem

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma(t)Sdz$$

Výše uvedená rovnice předpokládá, že volatilita v čase je predikovatelná. V praxi se však volatility mění stochasticky. Hull a White uvažovali níže uvedený model změny ceny podkladového aktiva

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sqrt{V}dz_s$$

$$dV = a(V_L - V)dt + \xi V^\alpha dz_v$$

kde a , V_L a α jsou konstanty a dz_s a dz_y jsou Wienerovým procesem. Proměnná V představuje v tomto modelu směrodatnou odchylku ceny aktiva. Tato směrodatná odchylka s vrací s intenzitou a k dlouhodobé hladině volatilit σ .

Autoři modelu porovnali tento model s Black-Scholes modelem. Směrodatná odchylka v Black-Scholes modelu byla nastavena jako rovna očekávané směrodatné odchylce po dobu životnosti opce. Hull a White prokázali, že je-li volatilita stochastická ale nekorelovaná s cenou aktiva, je cena evropské opce rovna ceně podle Black-Scholes modelu integrované nad pravděpodobnostním rozdělením průměrné volatility po dobu životnosti opce. Pro evropskou kupní opci tedy např. platí

$$c^* = \int_0^\infty c(\bar{V})g(\bar{V})d\bar{V},$$

kde \bar{V} je průměrná hodnota rozptylu, c je cena opce z Black-Scholes modelu vyjádřená jako funkce \bar{V} a g je hustota pravděpodobnosti proměnné \bar{V} v rizikově neutrálním světě. Vzájemným porovnáním vyšlo najevo, že Black-Scholes model nadhodnocuje at-the-money opce a podhodnocuje opce, které jsou deep-in-the-money nebo deep-out-of-the-money.

V případě, že jsou volatilita a cena akcie vzájemně korelovány, je analytické odvození ceny opce problematické. Řešení je však možné získat pomocí simulace Monte-Carlo.

17.4 IVF model

IVF (Implied volatility function) model vyvinutý Dermanem, Kanim a Rubinsteinem je konstruován tak, aby umožňoval přesnou kalibraci na dnešní ceny všech evropských opcí. Stochastický proces pro cenu podkladového aktiva je dán rovnicí

$$dS = [r(t) - q(t)]Sdt + \sigma(S, t)Sdz,$$

kde $r(t)$ je forwardová úroková sazba pro kontrakt s splatností v čase t a $q(t)$ je dividendový výnos jako funkce času. Směrodatná odchylka $\sigma(S, t)$ je funkcí S a t a je vybrána tak, aby modelové ceny všech evropských opcí byly v souladu s trhem. Volatilita podkladového aktiva pak může být počítána analyticky jako

$$\sigma^2(K, T) = 2 \frac{\partial c_{mkt} / \partial T + q(T)c_{mkt} + K[r(T) - q(T)]\partial c_{mkt} / \partial K}{K^2(\partial^2 c_{mkt} / \partial K^2)}$$

kde $c_{mkt}(K, T)$ je tržní cena evropské kupní opce s realizační cenou K a maturitou T . Je-li na trhu dostatek kotací, je možné pomocí výše uvedené funkce odhadnout průběh funkce $\sigma(S, t)$.

17.5 Deriváty s vazbou na historický vývoj cen

Jedná se o deriváty, u kterých výplata závisí na historickém vývoji ceny podkladového aktiva a nikoliv pouze na jeho konečné ceně. Klasickým příkladem těchto opcí jsou asijské a zpětné opce. Nejjednodušším způsobem, jak ocenit tyto opce je metoda Monte Carlo.

17.5.1 Zpětné opce

Uvažujme americkou zpětnou opci. V případě, že se investor rozhodne tuto opci uplatnit, bude mu vyplacen rozdíl mezi nejvyšší cenou od okamžiku sjednání opce a spotovou cenou v okamžiku jejího uplatnění.

Definujme $G(t)$ jako maximum ceny akcie dosažené do času t .

$$Y(t) = \frac{G(t)}{S(t)}$$

V prvním kroku platí $Y(0) = 1$. Z logiky věci také vyplývá, že je to minimální hodnota pro $Y(t)$. Pravděpodobnost růstu $Y(t)$ je rovna $1 - p$; pravděpodobnost poklesu je rovna p . Výplatu ze zpětné opce v peněžních jednotkách lze vyjádřit jako

$$SY - S$$

Definujme $f_{i,j}$ jako hodnotu zpětné americké opce v j -tém uzlu v čase $i\delta t$ a $Y_{i,j}$ jako hodnotu Y v příslušném uzlu. Hodnotu $f_{i,j}$ pro $j \geq 1$ lze vyjádřit jako

$$f_{i,j} = \max \left(Y_{i,j} - 1, e^{-r\delta t} [(1-p)f_{i+1,j+1}d + pf_{i+1,j-1}u] \right) S_{i,j}$$

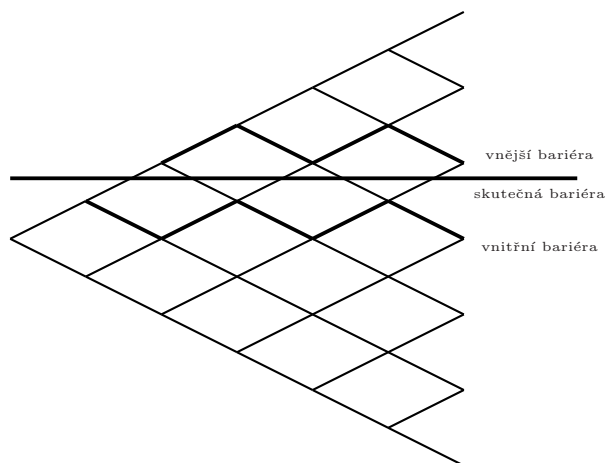
a pro $j = 1$

$$f_{i,j} = \max \left(Y_{i,j} - 1, e^{-r\delta t} [(1-p)f_{i+1,j+1}d + pf_{i+1,j}u] \right) S_{i,j}$$

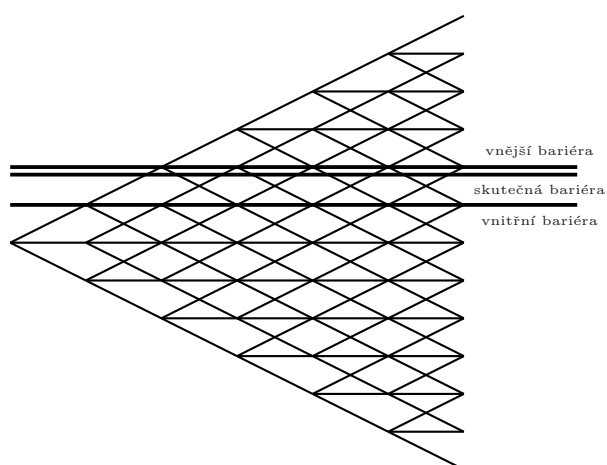
17.5.2 Bariérová opce

Uvažujme up-and-down bariérovou opci. Tuto opci lze ocenit stejným způsobem jako klasickou opci s tím rozdílem, že v případě uzlů nad stanovenou bariérou je hodnota opce rovna nule.

Výše uvažovanou bariérovou opci lze ocenit pomocí binomického resp. trinomického stromu. Problémem je však relativně pomalá konvergence k požadovanému výsledku. Důvodem je vysoký počet požadovaných časových period, který je nezbytný k získání přijatelně přesného výsledku. Důvodem je, že skutečná bariéra se liší od uvažované bariéry v rámci stromu. Částečným řešením tohoto problému je zavedení tzv. vnitřní a vnější bariéry, mezi kterými leží skutečná bariéra. Pro obě bariéry se vypočte cena opce v jednotlivých uzlech.



Binomický strom: vnější, vnitřní a skutečná bariéra



Trinomický strom: vnější, vnitřní a skutečná bariéra

Obecný postup předpokládá, že vnější bariéra je skutečnou bariérou, protože k překročení uvažované bariéry dojde právě v uzlech, které tvoří vnější bariéru. V případě, že délka kroku stromu je δt , je vertikální vzdálenost mezi uzly na vnější a vnitřní bariéře řádu $\sqrt{\delta t}$. To znamená, že oceňovací chyba z titulu rozdílu mezi vnější a vnitřní bariérou je také řádu \sqrt{t} . Určitého zpřesnění výsledku je možné dosáhnout tak, že oceníme opci pro vnější a vnitřní bariéru a výsledné hodnoty zprůměrujeme.

17.6 Opce na dvě korelovaná aktiva

Jedná se o situaci, kdy je hodnota opce závislá na dvou podkladových aktivech, která jsou vzájemně korelovaná.

17.6.1 Transformace proměnných

Předpokládejme, že tato dvě aktiva sledují proces

$$dS_1 = (r - q_1)S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1$$

$$dS_2 = (r - q_2)S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2$$

kde korelace mezi Wienerovým procesem dz_1 a dz_2 je ρ . Platí tedy

$$d \ln S_1 = (r - q_1 - \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dz_1$$

$$d \ln S_2 = (r - q_2 - \sigma_2^2/2)dt + \sigma_2 dz_2$$

Definujme dále dvě nekorelované proměnné

$$x_1 = \sigma_2 \ln S_1 + \sigma_1 \ln S_2$$

$$x_2 = \sigma_2 \ln S_1 - \sigma_1 \ln S_2$$

Tyto proměnné sledují proces

$$dx_1 = [\sigma_2(r - q_1 - \sigma_1^2/2) + \sigma_1(r - q_2 - \sigma_2^2/2)]dt + \sigma_1\sigma_2\sqrt{2(1+\rho)}dz_A$$

$$dx_2 = [\sigma_2(r - q_1 - \sigma_1^2/2) - \sigma_1(r - q_2 - \sigma_2^2/2)]dt + \sigma_1\sigma_2\sqrt{2(1-\rho)}dz_A$$

kde dz_A a dz_B jsou nekorelované Wienerovy procesy. Proměnné x_1 a x_2 mohou být modelovány pomocí dvou nezávislých binomických stromů. V čase δt má x_i pravděpodobnost p_i růstu o h_i a pravděpodobnost $1 - p_i$ poklesu o h_i . Proměnné h_i a p_i jsou vybrány tak, aby binomické stromy dávaly správné hodnoty pro první dva momenty pravděpodobnostního rozdělení x_1 a x_2 . Protože jsou vzájemně nekorelované, je možné oba binomické stromy zkombinovat do jednoho trojrozměrného stromu. Pro každý uzel binomického stromu je možné vypočítat S_1 a S_2 z x_1 a x_2 jako

$$S_1 = e^{\frac{x_1 + x_2}{2\sigma_2}}$$

$$S_2 = e^{\frac{x_1 - x_2}{2\sigma_1}}$$

17.6.2 Modifikace binomického stromu

Další možností je přímo modelovat strom pro obě aktiva. Opět uvažujme aktiva S_1 a S_2 s mírou korelace ρ . Z každého uzlu (S_1, S_2) je možné se přesunout do uzlů $(S_1 u_1, S_2 A)$, $(S_1 u_1, S_2 B)$, $(S_1 d_1, S_2 C)$ a $(S_2 d_1, S_2 D)$, kde každý uzel má přiřazenou pravděpodobnost 0.25. Pro tyto uzly platí

$$u_1 = e^{(r - q_1 - \sigma_1^2/2)\delta t + \sigma_1 \sqrt{\delta t}}$$

$$d_1 = e^{(r - q_1 - \sigma_1^2/2)\delta t - \sigma_1 \sqrt{\delta t}}$$

$$A = e^{(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\delta t + \sigma_2 \sqrt{\delta t}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})}$$

$$B = e^{(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\delta t + \sigma_2 \sqrt{\delta t}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2})}$$

$$C = e^{(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\delta t - \sigma_2 \sqrt{\delta t}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})}$$

$$D = e^{(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\delta t - \sigma_2 \sqrt{\delta t}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2})}$$

17.6.3 Modifikace pravděpodobnosti

Poslední alternativou konstrukce trojrozměrného binomického stromu pro S_1 a S_2 je úprava pravděpodobnosti o vzájemnou korelaci mezi aktivy.

Jestliže uvažujeme dvě nekorelovaná aktiva S_1 a S_2 , je pravděpodobnostní matice těchto aktiv následující

Pohyb S_2		
Pohyb S_1	Pokles	Růst
Růst	0.25	0.25
Pokles	0.25	0.25

Pravděpodobnost pohybu cen nekorelovaných aktiv S_1 a S_2

V případě, že míra korelace mezi aktivy S_1 a S_2 je ρ , je třeba pravděpodobnosti upravit níže uvedeným způsobem

Pohyb S_2		
Pohyb S_1	Pokles	Růst
Růst	$0.25(1-\rho)$	$0.25(1+\rho)$
Pokles	$0.25(1+\rho)$	$0.25(1-\rho)$

Pravděpodobnost pohybu cen korelovaných aktiv S_1 a S_2

17.7 Simulace Monte Carlo a americké opce

Metoda Monte Carlo je ideální pro oceňování opcí, jejichž výplata se odvíjí od historického vývoje ceny podkladového aktiva², a případy, kdy do ceny opce vstupuje velké množství náhodných proměnných.

K tomu, aby bylo možné ocenit americkou opci, je nutné v každém čase, kdy je možné opci uplatnit, rozhodnout, zda-li je výhodnější tak učinit či nikoliv. Uvažujme tříroční prodejní opci na akci s nulovým dividendových výnosem, která může být uplatněna vždy na konci každého ze tří roků. Bezriziková úroková sazba je 6% p.a. (složené úročení), spotová cena pokladové akcie 1.00 a realizační cena je 1.10. Následující tabulka zachycuje osm nasimulovaných hodnot podkladového aktiva, na kterých budeme demonstrovat postup výpočtu.

Simulace	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.56
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	0.93	0.97	0.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	0.76	0.77	0.90
7	1.00	0.92	0.84	1.01
8	1.00	0.88	1.22	1.34

Simulace vývoje cen pokladové akcie

²Jedná se zejména o asijské a zpětné opce.

Jestliže by majitel uvažovanou opci neuplatnil na konci prvního ani druhého roku, byla by opce na konci třetího roku at-the-money pro simulace 3, 4, 6 a 7. Uplatnění opcí by přineslo cash-flow ve výši 0.07, 0.18, 0.20 a 0.09.

Přesuňme se nyní na konec druhého roku. Předpokládejme, že opce nebyla uplatněna. Je-li opce na konci druhého roku at-the-money, musí se její majitel rozhodnout, zda-li tuto opci uplatní nebo nikoliv. Z výše uvedené tabulky je zřejmé, že se jedná o simulace 1, 3, 4, 6 a 7. Pro tyto simulace uvažujme vztah

$$V = a + bS + cS^2,$$

kde S je cena podkladového aktiva dle simulace na konci druhého roku a V je cena neuplatnění opce diskontovaná ke konci druhého roku. Hodnoty parametru V jsou $0.00e^{-0.06}$, $0.07e^{-0.06}$, $0.18e^{-0.06}$, $0.20e^{-0.06}$ a $0.09e^{-0.06}$ ³. Tyto hodnoty se pak použijí pro výpočet parametrů a , b a c pomocí metody nejmenších čtverců.

$$\sum_{i=1}^5 (V_i - a - bS_i - cS_i^2)^2 \rightarrow \min$$

Řešením výše uvedené podmínky je

$$V = -1.070 + 2.983S - 1.813S^2$$

Dle této rovnice vychází regresní hodnota V pro simulace 1, 3, 4, 6 a 7 jako 0.0369, 0.0461, 0.1176, 0.1520 and 0.1565. Odpovídající hodnoty dané realizační cenou a cenou akcie na konci druhého roku podle výše uvedené tabulky jsou 0.02, 0.03, 0.13, 0.33 a 0.26. Z toho vyplývá, že na konci druhého roku by majitel opce měl realizovat své právo v případě simulací 4, 6 a 7.

Stejný postup je pak aplikován také na konec prvního roku. Simulace, které jsou na konci prvního roku in-the-money, jsou 1, 4, 6 a 7. Hodnoty V pro tyto simulace jsou rovny $0.00e^{-0.06}$, $0.13e^{-0.06}$, $0.33e^{-0.06}$, $0.26e^{-0.06}$ a $0.00e^{-0.06}$. Hodnoty parametrů a , b a c vypočtené metodou nejmenších čtverců jsou 2.038, -3.335 a 1.356. Rovnice pro výpočet regresní hodnoty V má tedy tvar

$$V = 2.038 - 3.335S + 1.356S^2$$

Jestliže opce nebude na konci prvního roku uplatněna, je její hodnota pro simulace 1, 4, 6 a 7 rovna 0.0139, 0.1092, 0.2866, 0.1175 a 0.1533. Hodnota opce v případě uplatnění bude pro uvažované simulace rovna 0.01, 0.17, 0.34, 0.18 a 0.22. Majitel tedy uplatní opci v případě simulací 4, 6, 7 a 8.

Na konci prvního roku tedy majitel uplatnil opci pro simulace 4, 6, 7 a 8. Na konci druhého roku nebyla opce uplatněna pro žádnou ze simulací⁴. Na konci třetího roku byla uplatněna opce pro simulaci 3⁵. Výplatu z opce shrnuje následující tabulka.

³Pro každou simulaci je porovnávána cena na konci třetího roku s realizační cenou a příslušný rozdíl je diskontován zpětně ke konci druhého roku.

⁴V případě uzlů 4, 6 a 7 byla opce uplatněna již na konci prvního roku.

⁵Pro simulace 4, 6 a 7 byla opce uplatněna již v prvním roce.

Simulace	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.07
4	0.17	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00
6	0.34	0.00	0.00
7	0.18	0.00	0.00
8	0.22	0.00	0.00

Výplata z americké prodejní opce

Výsledná hodnota opce je tedy

$$\frac{1}{8}(0.07e^{-0.06 \cdot 3} + 0.34e^{-0.06 \cdot 1} + 0.18e^{-0.06 \cdot 1} + 0.18e^{-0.06 \cdot 1} + 0.22e^{-0.06 \cdot 1}) = 0.1144$$

Protože je výsledná hodnota opce větší než 0.10 je výhodné tuto opci okamžitě uplatnit.

Kapitola 18

Martingaly a míry

Až dosud jsme uvažovali konstantní úrokové sazby po celou dobu životnosti opce. V rámci rizikově neutrálního světa, ve kterém jsme se v předchozích kapitolách “pohybovali”, hrála klíčovou roli bezriziková sazba. Ta se používala k diskontování cash-flow a dále se předpokládalo, že očekávaný výnos všech finančních instrumentů je roven právě bezrizikové úrokové sazbě¹. V následující kapitole předpoklad konstantních úrokových sazeb opustíme. Uvolnění tohoto předpokladu má za následek, že existuje mnoho paralelních rizikově neutrálních světů. A právě martingaly a míry jsou nezbytné pro správné pochopení rizikově neutrálního oceňování. Martingale lze zjednodušeně definovat jako stochastický proces s nulovou očekávanou střední hodnotou. Míru pak lze chápat jako jednotku, kterou měříme hodnotu cenných papírů.

18.1 Tržní cena rizika

18.1.1 Jeden rizikový parametr

Uvažujme proměnnou θ , která sleduje proces

$$\frac{d\theta}{\theta} = mdt + sdz,$$

kde dz je Wienerův proces, m je očekávaná míra růstu a s volatilita proměnné θ . Dále uvažujme hodnoty f_1 a f_2 dvou derivátů, které jsou závislé pouze na θ a t . Tyto hodnoty sledují procesy

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz$$

$$\frac{df_2}{f_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz$$

kde μ_1 , μ_2 , σ_1 a σ_2 jsou funkcemi θ a t . dz je ten samý Wienerův proces, jaký figuruje v procesu proměnné θ , protože se jedná o jediný zdroj nejistoty pro f_1 a f_2 . Diskrétní verze výše uvedených procesů jsou

$$\delta f_1 = \mu_1 f_1 \delta t + \sigma_1 f_1 \delta z \quad (18.1)$$

¹Připomeňme, že v uvažovaném rizikově neutrálním světě neexistovala prémie za riziko.

$$\delta f_2 = \mu_2 f_2 \delta t + \sigma_2 f_2 \delta z \quad (18.2)$$

Wienerův proces δz je možné eliminovat pomocí portfolia, které se skládá z $\sigma_2 f_2$ prvního derivátu a $-\sigma_1 f_1$ druhého derivátu. Je-li Π hodnota portfolia, pak platí

$$\begin{aligned} \Pi &= (\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2 \\ \delta \Pi &= \sigma_2 f_2 \delta f_1 - \sigma_1 f_1 \delta f_2 \end{aligned} \quad (18.3)$$

Dosadíme-li (18.1) a (18.2) do (18.3), dostáváme

$$\delta \Pi = (\mu_1 \sigma_2 f_1 f_2 - \mu_2 \sigma_1 f_1 f_2) \delta t \quad (18.4)$$

Protože je portfolio Π bezrizikové, musí generovat výnos, který odpovídá bezrizikové sazbě r .

$$\delta \Pi = r \Pi \delta t$$

Dalšími úpravami výše uvedeného vztahu získáme

$$(\mu_1 \sigma_2 f_1 f_2 - \mu_2 \sigma_1 f_1 f_2) \delta t = r \left((\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2 \right) \delta t$$

$$\mu_1 \sigma_2 - \mu_2 \sigma_1 = r \sigma_2 - r \sigma_1$$

Definujme λ jako

$$\lambda = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$$

Vypustíme-li indexy, dokázali jsme, že je-li f cenou derivátu závislého na θ a t , kde

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz \quad (18.5)$$

pak

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (18.6)$$

Parametr λ je tzv. tržní cena rizika θ . λ závisí na θ popř. také na t , ale není závislé na konstrukci příslušného derivátu. V daný časový okamžik tak musí být $(\mu - r)/\sigma$ shodné pro všechny deriváty, které jsou závislé pouze na θ a t .

Směrodatná odchylka σ ceny derivátu f je v (18.5) definovaná koeficient dz . Paradoxem je, že tato směrodatná odchylka může být jak kladná tak záporná. Jestliže je směrodatná odchylka s parametru θ je kladná a f je pozitivně korelovaná s θ , pak je σ také pozitivní. Je-li však f negativně korelovaná s θ , je také σ záporné. Směrodatná odchylka σ ceny derivátu f ve statistickém slova smyslu je tedy definována jako $|\sigma|$.

Rovnici (18.6) lze přepsat do tvaru

$$\mu - r = \lambda \sigma$$

Tento vztah lze chápat jako kompenzaci za podstupované riziko a proměnnou σ jako množství rizika θ v ceně derivátu f . Na pravé straně rovnice proto násobíme množství rizika θ jeho cenou λ .

Poznámka: Výše uvedené by mělo platit pro investiční aktiva. V případě aktiv, která slouží jako výrobní vstup, toto však platit nemusí².

Jak již bylo zmíněno výše, cena derivátu f sleduje proces

$$df = \mu f dt + \sigma f dz \quad (18.7)$$

Hodnota μ závisí na rizikových preferencích investorů. V rizikově neutrálním světě, kde je tržní cena rizika rovna nule, je λ nulové. V tomto případě platí $\mu = r$, a proto lze výše uvedenou rovnici přepsat do tvaru

$$df = r f dt + \sigma f dz$$

Definujeme-li v souladu s výše uvedeným textem λ jako tržní cenu rizika θ , pak lze definovat μ jako

$$\mu = r + \lambda \sigma$$

Rovnici (18.7) je tak možné přepsat do tvaru

$$df = (r + \lambda \sigma) f dt + \sigma f dz \quad (18.8)$$

Tržní cena příslušného rizika tedy ovlivňuje hodnotu očekávaného výnosu všech cenných papírů závislých na tomto riziku. Při přesunu z jedné cenové úrovně rizika na jinou se tak mění očekávaný výnos cenného papíru, avšak jeho volatilita zůstává stejná. Výběrem konkrétní tržní ceny rizika je tedy definována pravděpodobnostní míra. Pro určitou hodnotu rizika tak lze získat obraz “reálného” světa, kdy modelované výnosové míry odpovídají skutečným výnosovým mírám.

18.1.2 Vícero rizikových parametrů

Uvažujme proměnné $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, které jsou popsány náhodným procesem

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i$$

kde m_i je očekávaná míra růstu proměnné θ_i a s_i je její směrodatnou odchylku. Dále uvažujme náhodnou veličinu f , která představuje hodnotu cenného papíru a která je závislá na θ_i a čase t . Dle lemy 18A sleduje náhodná veličina f stochastický proces

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dz_i$$

kde μ je očekávaný výnos z cenného papíru a $\sigma_i dz_i$ představuje výnos, který kompenzuje rizikovou složku z θ_i . Lze dokázat, že pro celkovou rizikovou složku výnosu platí

$$\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$$

Výraz $\lambda_i \sigma_i$ na pravé straně rovnice vyjadřuje dodatečný výnos, který je vyžadován investory jako kompenzace za závislost hodnoty f na θ_i . Celkový rizikový výnos je pak dán součtem přes všechna θ_i . $\lambda_i \sigma_i$ může být i záporné a to v případě, kdy θ_i má za následek snížení rizika portfolia typického investora.

²Jedná se především o komodity.

18.2 Martingaly

Martingale je stochastický proces s nulovým trendem. Jestliže je určitá náhodná veličina popsána martingalem, pak sleduje proces

$$d\theta = \sigma dz$$

Proměnná σ může být sama o sobě náhodná. Jestliže je proměnná θ martingalem, platí

$$E[\theta_T] = \theta_0$$

Z definice martingalu tedy vyplývá, že jeho očekávaná hodnota v libovolný okamžik je rovna jeho současné hodnotě. Výše uvedenou definici lze interpretovat tak, že změny θ ve velmi malém časovém intervalu lze popsat normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou.

18.2.1 Martingale míra

Uvažujme hodnoty dvou instrumentů f a g , které závisí na společném “zdroji” nejistoty. Dále předpokládejme, že oba instrumenty nepřinášejí investorům po námi uvažovaný časový interval žádný výnos. Definujme ϕ jako

$$\phi = \frac{f}{g}$$

Tímto jsme definovali tzv. martingale míru. Hodnotu f tak namísto v peněžních jednotkách vyjadřujeme jako násobek hodnoty g .

Lze dokázat, že při nemožnosti arbitráže existuje úroveň ceny rizika, pro kterou je ϕ martingalem. Navíc platí, že pro daný instrument g dělá stejná cena rizika z ϕ martingale pro všechna f . Touto cenou rizika je v našem případě směrodatná odchylka g . Jinými slovy je-li tržní cena rizika rovna směrodatné odchylce g , je podíl f/g martingalem pro všechna f .

Použijeme-li (18.8), můžeme za podmínky, že tržní cena rizika je rovna směrodatné odchylce g , vyjádřit df a dg jako

$$df = (r + \sigma_g \sigma_f) f dt + \sigma_f f dz$$

$$dg = (r + \sigma_g^2) g dt + \sigma_g g dz$$

Tyto dva vztahy lze s využitím Itô lemmy dále upravit do tvaru

$$d \ln f = (r + \sigma_g \sigma_f - \sigma_f^2/2) dt + \sigma_f dz$$

$$d \ln g = (r + \sigma_g^2/2) dt + \sigma_g dz$$

Rozdíl obou výše uvedených rovnic je

$$d \left(\ln \frac{f}{g} \right) = - \frac{(\sigma_f - \sigma_g)^2}{2} dt + (\sigma_f - \sigma_g) dz \quad (18.9)$$

S opětovným použitím Itô lemmy lze (18.9) upravit do tvaru

$$d \left(\frac{f}{g} \right) = (\sigma_f - \sigma_g) \frac{f}{g} dz$$

čímž jsme dokázali, že f/g je martingale³. Svět, kde je tržní cena rizika rovna σ_g , nazýváme forwardově rizikově neutrální s ohledem k g . Z toho mimojiné vyplývá

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g \left[\frac{f_T}{g_T} \right]$$

neboli

$$f_0 = g_0 E_0 \left[\frac{f_T}{g_T} \right] \quad (18.10)$$

kde E_0 označuje očekávanou hodnotu ve světě, který je forwardově neutrální ve vztahu k g .

18.2.2 Použití alternativních jmenovatelů v ekvivalentní martingale míře

V přechodí kapitole jsme jako jmenovatele při definici ekvivalentní martingale míři použili g , které reprezentovalo cenu obecného finančního instrumentu. V následujícím textu použijeme některé konkrétní investiční instrumenty.

Účet peněžního trhu

Účet peněžního trhu je investiční instrument, jehož hodnota je 1 USD v čase nula a který svému majiteli generuje výnos odpovídající bezrizikové úrokové sazbě r . Proměnná r může být stochastická.

$$dg = rg \, dt$$

Proměnná g je stochastická a její volatilita je tak nulová. Tímto jsme definovali svět, kde je tržní hodnota rizika nula. Jedná se o tradiční rizikově neutrální svět, tak jak jsme ho definovali dříve.

$$f_0 = g_0 \hat{E} \left[\frac{f_T}{g_T} \right]$$

Vzhledem k tomu, že

$$g_0 = 1$$

a

$$g_T = e^{\int_0^T r \, dt}$$

lze f_0 vyjádřit jako

$$f_0 = \hat{E} \left[e^{-\int_0^T r \, dt} f_T \right]$$

Jestliže je krátkodobá sazba r fixní, lze f_0 vyjádřit jako

$$f_0 = e^{-rT} \hat{E}[f_T]$$

³Výše uvedený proces je martingale, protože postrádá trend. Očekávaná hodnota dz je nulová, a proto je očekávaná hodnota $d(f/g)$ rovněž nulová.

Diskontní dluhopis

Definujme $P(t, T)$ jako cenu diskontního dluhopisu v čase t za předpokladu, že tento dluhopis generuje cash-flow 1 USD v čase T . Dále definujme E_T jako očekávání ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k $P(t, T)$. Vzhledem k tomu, že $g_T = P(T, T) = 1$ a $g_0 = P(0, T)$ ⁴, platí podle (18.10)

$$f_0 = P(0, T)E_T[f_T]$$

Zatímco v předchozím případě bylo diskontování součástí očekávané hodnoty⁵, je diskontování pro diskontní dluhopis od očekávané hodnoty oddělené. Tento fakt značně zjednodušuje navazující úvahy.

Je-li F forwardovou cenou f pro kontrakt se splatností v čase T , je F za předpokladu neexistence arbitráže dáno vztahem

$$F = \frac{f_0}{P(0, T)}$$

z čehož vyplývá

$$F = E_T[f_T]$$

Tímto jsme dokázali, že ve světě, který je forwardově rizikově neutrální ve vztahu k $P(t, T)$, je forwardová cena finálního instrumentu f rovna jeho očekávané spotové ceně.

Forwardové sazby

Definujme $R(t, T_1, T_2)$ jako forwardovou úrokovou sazbu platnou v čase t na období T_1 až T_2 . Protože je forwardová úroková sazba implikována forwardovou cenou odpovídajícího dluhopisu, platí

$$\frac{1}{1 + (T_2 - T_1)R(t, T_1, T_2)} = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$$

resp.

$$R(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{P(t, T_1) - P(t, T_2)}{P(t, T_2)} \right)$$

Jestliže definujeme f jako

$$f = \frac{1}{T_2 - T_1} [P(t, T_1) - P(t, T_2)]$$

a g jako

$$g = P(t, T_2)$$

lze dokázat, že $R(t, T_1, T_2)$ je martingalem ve světě, který se forwardově rizikově neutrální s ohledem na $P(t, T_2)$.

$$f_0 = g_0 E_2 \left[\frac{f_{T_1}}{g_{T_1}} \right]$$

⁴ $P(0, T)$ lze chápat jako diskontní faktor pro časový horizont 0 až T .

⁵Výjimkou byla situace, kdy jsme uvažovali konstantní bezrizikovou míru. V tomto případě bylo možné diskontování z očekávané hodnoty “vyjmout”.

$$\frac{1}{T_2 - T_1} [P(T_1, T_1) - P(T_1, T_2)] = P(0, T_2) E_2 \left[\frac{\frac{1}{T_2 - T_1} [P(T_1, T_1) - P(T_1, T_2)]}{P(T_1, T_2)} \right]$$

$$R(0, T_1, T_2) = E_2[R(T_1, T_1, T_2)]$$

Anuita

Uvažujme swap, který začíná v budoucím čase T s platbami v čase T_1, T_2, \dots, T_N . Definujme $T_0 = T$. Předpokládejme, že jistina tohoto swapu má hodnotu 1 USD. Dále uvažujme forwardovou swapovou sazbu $s(t)$ v čase t^6 , kde $t \leq T$. Hodnota fixní nohy swapu je

$$s(t)A(t)$$

kde

$$A(t) = \sum_{i=0}^{N-1} (T_{i+1} - T_i) P(t, T_{i+1})$$

Pro úrokový swap platí, že je-li k poslední platbě v době splatnosti swapu přidán nominál, je hodnota plovoucí nohy na počátku kontraktu rovná výši tohoto nominálu. Hodnota 1 USD v čase t obdrženo v čase T_N je $P(t, T_N)$ a podobně hodnota 1 USD v čase t obdrženo v čase T_0 je $P(t, T_0)$. Hodnota plovoucí swapové nohy v čase t je tak

$$P(t, T_0) - P(t, T_N)$$

Jestliže platí předpoklad rovnosti mezi hodnotou fixní a plovoucí nohy, získáváme

$$s(t)A(t) = P(t, T_0) - P(t, T_N)$$

Parametr $s(t)$ je tak možné vyjádřit jako

$$s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{A(t)}$$

Jestliže f definujeme jako $P(t, T_0) - P(t, T_N)$ a g jako $A(t)$, lze s použitím martingale míry vyjádřit $s(t)$ jako

$$s(t) = E_A[s(T)]$$

Ve světě, který je rizikově neutrální vzhledem k $A(t)$, je tak očekávaná budoucí swapová sazba rovna současné swapové sazbě. Pro libovolný cenný papír f tedy platí

$$f_0 = A(0) E_A \left[\frac{f_T}{A(T)} \right]$$

⁶Swapovou sazbou $s(t)$ rozumíme sazbu fixní nohy, pro kterou je hodnota úrokového swapu nulová.

18.3 Rozšíření o vícero nezávislých faktorů

Předpokládejme, že procesy, které sledují f a g , jsou

$$df = rf \, dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

$$dg = rg \, dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} g dz_i$$

Podobně jako v případě jednoho rizikového faktoru, můžeme definovat jiné světy, které jsou interně konzistentní, pomocí

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{f,i} \right) f \, dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f \, dz_i$$

$$dg = \left(r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{g,i} \right) g \, dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} g \, dz_i$$

Jeden z těchto světů je svět reálný. Dále definujme svět, který je forwardově rizikově neutrální k g , jako svět, kde $\lambda_i = \sigma_{g,i}$. S využitím Itô lemmy a toho, že dz_i jsou vzájemně nekorelované, lze dokázat, že f/g je martingalem.

18.4 Aplikace

18.4.1 Modifikace Black-Scholes modelu

V následující kapitole si ukážeme rozšíření Black-Scholes modelu za předpokladu, že úrokové sazby jsou stochastické. Uvažujme evropskou kupní opci se splatností v čase T , kde je podkladovým aktivem akcie, která negeneruje žádný dividendový výnos. Hodnota této opce je dána vztahem

$$c = P(0, T) E_T[\max(S_T - K, 0)]$$

Definujme R jako zero sazbu pro splatnost T . Platí tedy

$$c = e^{-RT} E_T[\max(S_T - K, 0)]$$

Jestliže má S_T lognormální rozdělení v námi uvažovaném forwardově neutrálním světě a směrodatná odchylka $\ln(S_T)$ je rovna s , pak v souladu se závěry kapitoly 10.3 platí

$$E_T[\max(S_T - K, 0)] = E_T(S_T)N(d_1) - KN(d_2)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[E_T(S_T)/K] + s^2/2}{s}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_T(S_T)/K] - s^2/2}{s}$$

$E_T(S_T)$ je forwardová cena akcie pro kontrakt s maturitou v čase T . Při neexistenci arbitráže tedy platí

$$E_T(S_T) = S_0 e^{RT}$$

Hodnota výše uvažované opce je pro $s = \sigma\sqrt{T}$ tedy rovna

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-RT} N(d_2)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (R + \sigma^2/2)/T}{s}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (R - \sigma^2/2)/T}{s}$$

Jediným rozdílem oproti standardnímu Black-Scholes modelu je nahrazení bez-rizikové úrokové sazby r zero sazbou R .

18.4.2 Opce s výměnnou jednoho aktiva za druhé

Uvažujme opci, která nám umožňuje vyměnit aktivum s hodnotou U za aktivum s hodnotou V . Předpokládejme, že žádné z těchto aktiv negeneruje výnos.

Pro martingale míru zvolme jako jmenovatele aktivum g s hodnotou U a jako čitatele aktivum f s hodnotou V . Z rovnice (18.10) vyplývá

$$V_0 = U_0 E_U \left(\frac{V_T}{U_T} \right)$$

kde E_U představuje očekávání ve světě, který je forwardově rizikově neutrální s ohledem k U .

Jestliže definujeme f v rovnici (18.10) jako $f_T = \max(V_T - U_T, 0)$, platí

$$f_0 = U_0 E_U \left[\frac{\max(V_T - U_T, 0)}{U_T} \right] \quad (18.11)$$

neboli

$$f_0 = U_0 E_U \left[\max \left(\frac{V_T}{U_T} - 1, 0 \right) \right]$$

Volatilita proměnné V/U je definována jako

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V$$

Pomocí Black-Scholes modelu lze f_0 vyjádřit jako

$$f_0 = U_0 \left[E_U \left(\frac{V_T}{U_T} \right) N(d_1) - N(d_2) \right] \quad (18.12)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + \hat{\sigma}^2 T/2}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

Rovnici (18.12) lze s využitím (18.11) dále upravit do tvaru

$$f_0 = V_0 N(d_1) - U_0 N(d_2)$$

Jestliže aktiva f a g generují výnos q_f a q_g , změní se výše uvedená rovnice do tvaru

$$f_0 = e^{-q_v T} V_0 N(d_1) - e^{-q_v T} U_0 N(d_2)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

18.5 Změna forwardově rizikového světa

Ve světě, který je forwardově rizikově neutrální s ohledem na finanční instrument g , sleduje cena aktiva f proces

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} \sigma_{f,i} \right) f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

Podobně ve světě, který je rizikově neutrální k jinému aktivu h , platí pro proces sledovaný aktivem f rovnice

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^n \sigma_{h,i} \sigma_{f,i} \right) f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

Jestliže se přesuneme ze světa, který je rizikově neutrální k g , do světa, který je rizikově neutrální k h , je změna očekávaného růstu ceny aktiva f dána vztahem

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}) \sigma_{f,i}$$

Uvažujme další proměnnou v , která je funkcí ceny obchodovaných finančních instrumentů. Definujme $\sigma_{v,i}$ jako i -tou komponentu volatility v . S využitím lemy A je možné určit, co se stane s procesem proměnné v , jestliže dojde ke změně forwardově rizikového světa. Ta má, jak již bylo zmíněno, za následek změnu očekávaného růstu ceny pokladového aktiva. Lze dokázat, že očekávaný růst v reaguje na tyto změny stejně jako očekávaný růst cen obchodovaných aktiv, jejichž je v funkcí. Tato změna je tedy rovna

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^n (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}) \sigma_{v,i}$$

Definujme $w = h/g$ a $\sigma_{w,i}$ jako i -tou komponentu volatility proměnné w . Z Itô lemy vyplývá

$$\sigma_{w,i} = \sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}$$

resp.

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^n \sigma_{w,i} \sigma_{v,i} = \rho \sigma_v \sigma_w \quad (18.13)$$

kde ρ je korelace mezi v a w . Parametr α_v odpovídá změně očekávané míry růstu proměnné v v důsledku změny forwardově rizikového světa. Proměnná w je tzv. poměrový ukazatel. Změna očekávané míry růstu proměnné v je tedy rovna kovarianci mezi procentní změnou v a procentní změnou poměrového ukazatele w .

18.6 Kvanta

Kvantum je měnový derivát, který zahrnuje dvě měny. Výplata z tohoto derivátu je vázána na vývoj jedné měny, avšak samotná výplata je realizována ve druhé z měn.

Uvažujme kvantum, které generuje výplatu v měně X v čase T . Předpokládejme, že výplata závisí na hodnotě aktiva V vyjádřené v čase T v měně Y . Definujme

$F(t)$	forwardová cena aktiva V v čase t denominovaná v měně Y pro účely kontraktu, který maturuje v čase T
V_T	cena V v čase T
$P_X(t, T)$	hodnota diskontního dluhopisu v čase t denominovaná v měně X ; nominální hodnota dluhopisu je 1 X a dluhopis je splatný v čase T
$P_Y(t, T)$	hodnota diskontního dluhopisu v čase t denominovaná v měně Y ; nominální hodnota dluhopisu je 1 Y a dluhopis je splatný v čase T
$E_X[*]$	očekávání v čase nula ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k $P_X(t, T)$
$E_Y[*]$	očekávání v čase nula ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k $P_Y(t, T)$
$G(t)$	forwardový měnový kurz v čase t (počet jednotek Y získaných výměnou za jednu jednotku X) v rámci forwardového kontraktu splatného v čase T
σ_F	volatilita $F(t)$
σ_G	volatilita $G(t)$
ρ	korelace mezi $F(t)$ a $G(t)$
S_T	spotový měnový kurz v čase T ($S_T = G(T)$)

Víme, že platí

$$E_Y[V_T] = F_0$$

a chceme znát $E_X[V_T]$. Jestliže zaměníme svět $P_Y(t, T)$ za $P_X(t, T)$, je poměrový ukazatel roven

$$G(t) = \frac{P_X(t, T)}{P_Y(t, T)}$$

Z (18.13) vyplývá, že změna forwardově rizikově neutrálního světa má za následek změnu očekávané míry růstu $F(t)$ o

$$\rho\sigma_F\sigma_G$$

To znamená, že přibližně platí

$$E_X[F(T)] = E_Y[F(T)]e^{\rho\sigma_F\sigma_GT}$$

nebo-li také

$$E_X[V_T] = F(0)e^{\rho\sigma_F\sigma_GT}$$

protože $V_T = F(T)$ a $E_T[V_T] = F(0)$. Tento vztah je pak přibližně roven

$$E_X[V_T] = F(0)(1 + \rho\sigma_F\sigma_GT)$$

18.6.1 Tradiční rizikově neutrální svět

Koncept forwardově rizikově neutrálního světa, který jsme až dosud používali, je vhodný pro situace, kdy je výplata realizována pouze v jeden daný časový okamžik. V ostatních případech je lepší použít tradiční rizikově neutrální svět.

Uvažujme proces, který sleduje proměnná V v rizikově neutrálním světě s ohledem na měnu Y . Předpokládejme, že chceme odhadnout odpovídající proces v rizikově neutrálním světě s ohledem na měnu X . Definujme

S	spotový měnový kurz (počet jednotek Y získaných výměnou za jednu jednotku X)
σ_S	volatilita S
σ_V	volatilita V
ρ	korelace mezi S a V

Ve výše popsaném příkladě dochází ke změně z peněžního trhu měny Y na peněžní trh měny X (v obou případech jsou odpovídající veličiny vyjádřeny v měně X). Podle Itô lemy je možné dokázat, že poměrový ukazatel je roven σ_S . Změna očekávané míry růstu V je proto rovna

$$\rho\sigma_V\sigma_S$$

Tržní cena rizika se tedy zvýší z nuly na $\rho\sigma_V\sigma_S$.

18.7 Siegelův paradox

Uvažujme dvě měny X a Y a forwardově rizikově neutrální svět vzhledem k Y . Definujme spotový měnový kurz S jako počet jednotek Y , které je možné získat výměnou za jednu jednotku X . Protože je na měnový kurz možné nahlížet podobně jako na akcii nesoucí dividendový výnos odpovídající bezrizikové úrokové sazbě, sleduje S v rizikově neutrálním světě vzhledem k Y proces

$$dS = (r_Y - r_X)Sdt + \sigma_S Sdz$$

kde r_X a r_Y jsou úrokové míry pro měny X a Y . Z Itô lemy vyplývá, že $1/S$ sleduje proces

$$d(1/S) = (r_X - r_Y + \sigma_S^2)(1/S)dt - \sigma_S(1/S)dz \quad (18.14)$$

Vzhledem k tomu, že očekávaná míra růstu S je $r_Y - r_X$, intuice napovídá, že by míra růstu $1/S$ měla být $r_X - r_Y$. Podle (18.14) je však tato míra rovna $r_X - r_Y + \sigma_S^2$.

Abychom porozumněli tomuto paradoxu, je třeba si uvědomit, že rovnice (18.14) je platná ve světě, který je rizikově neutrální vzhledem k měně Y . V předchozí kapitole jsme ukázali, že přechod z S na $1/S$ ⁷ a s tím související změna světů má za následek změnu očekávané míry růstu o $\rho\sigma_V\sigma_S$. V našem případě platí $V = 1/S$, $\sigma_V = \sigma_S$ a $\rho = -1$. Tato změna je tedy po úpravách rovna $-\sigma_S^2$. Rovnice (18.14) se tedy v rizikově neutrálním světě vzhledem k X změní na

$$d(1/S) = (r_X - r_Y)(1/S)dt - \sigma_S(1/S)dz$$

⁷Tato změna je ekvivalentní změně podkladové měně.

18.8 Lema 18A - Zobecnění Itô lemy

18.8.1 Varianta 1

Uvažujme funkci f proměnných x_1, x_2, \dots, x_n a času t . Předpokládejme, že x_i sleduje Itô proces s trendem a_i a volatilitou b_i^2 , tj.

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i \quad (18.15)$$

kde dz_i představuje Wienerův proces. Každé a_i a b_i může být funkcí všech x_i a t . Taylorovým rozvojem f získáváme

$$\delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} \delta x_i \delta t + \dots \quad (18.16)$$

Diskretizací rovnice (18.15) získáme

$$\delta x_i = a_i \delta t + b_i \epsilon_i \sqrt{\delta t}$$

Při odvození základní formy Itô lemy v kapitole 9 jsme dokázali, že

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \delta x_i^2 = b_i^2 dt$$

Podobně platí

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \delta x_i \delta x_j = b_i b_j \rho_{ij} dt \quad (18.17)$$

kde ρ_{ij} představuje korelaci mezi dz_i a dz_j . S tím, jak se δt blíží limitně nule, jsou první tři členy (18.16) řádu δt , ostatní členy jsou vyššího řádu.

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt$$

Substitucí podle (18.15) a (18.17) získáme zobecněnou Itô lemu.

$$df = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} b_i dz_i$$

18.8.2 Varianta 2

Alternativní přístup pro zobecnění Itô lemy předpokládá, že f je závislé na jedné proměnné x , jejíž proces obsahuje vícero Wienerových procesů.

$$dx = a dt + \sum_{i=1}^m b_i dz_i$$

V tomto případě platí

$$\delta f = \frac{f}{x} \delta x + \frac{f}{t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \delta x \delta t + \dots$$

$$\delta x = a \delta t + \sum_{i=1}^m b_i \epsilon_i \sqrt{\delta t}$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \delta x_i^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_i b_j \rho_{ij} dt$$

kde ρ_{ij} představuje korelaci mezi dz_i a dz_j . Kombinací výše uvedených tří vztahů tak získáváme

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{i=1}^m b_i dz_i$$

18.8.3 Varianta 3

Nejobecnější variantou zobecnění Itô lemy představuje situace, kdy f je funkcí n proměnných x_i , z nichž každá sleduje proces

$$dx_i = a_i dt + \sum_{k=1}^m b_{ik} dz_k$$

Podobným způsobem jako v předchozím případě lze odvodit

$$df = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{ik} b_{jl} \rho_{kl} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{k=1}^m b_{ik} dz_k$$

18.9 Lema 18B - Vícenásobné zdroje nejistoty

Uvažujme n stochastických proměnných, které sledují Wienerův proces. Dále uvažujme $n + 1$ obchodovaných aktiv, jejichž ceny závisí na některých popř. všech těchto n stochastických proměnných. Definujme f_j jako cenu j -tého aktiva. Předpokládejme, že tato aktiva negenerují žádný výnos ve formě dividend, [roků popř. kupónů. Cena aktiva f_j pak dle lemy 18A sleduje proces

$$df_j = \mu_j f_j dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} f_j dz_i \quad (18.18)$$

Protože existuje $n + 1$ obchodovaných aktiv a n Wienerových procesů, je možné vytvořit bezrizikové portfolio Π

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j$$

kde k_j představuje váhu j -tého aktiva v portfoliu. Parametr k_j musí být zvolen tak, aby se stochastické komponenty výnosové míry vzájemně vyrušily. S ohledem na (18.18) to znamená, že musí platit

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j \sigma_{ij} f_j = 0 \quad (18.19)$$

Výnos generovaný portfoliem je dán

$$d\Pi = \sum_{j=1}^{n+1} k_j \mu_j f_j dt$$

a náklady na jeho pořízení jsou

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j$$

Za předpokladu nulové možnosti arbitráže proto musí platit

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j \mu_j f_j = r \sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j$$

neboli

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j (\mu_j - r) = 0 \quad (18.20)$$

Na rovnice (18.19) a (18.20) je možné pohlížet jako na $n + 1$ homogenních lineárních rovnic. Aby existovalo řešení těchto rovnic, musí platit

$$f_j (\mu_j - r) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ij} f_j \quad (18.21)$$

což je ekvivalentní

$$\mu_j - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ij} \quad (18.22)$$

Po vypuštění indexu j je zřejmé, že pro libovolné aktivum f závislé na n stochastických proměnných, platí

$$df = \mu f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i f dz_i \quad (18.23)$$

kde

$$\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \quad (18.24)$$

Kapitola 19

Úrokové deriváty - standardní tržní modely

Oceňování úrokových derivátů je složitější, než ocenění měnových nebo akciových derivátů. Jedním z důvodů je to, že vývoj úrokových sazeb není dán stochastickým procesem ale řadou externích faktorů jako například měnovou politikou centrální banky. V případě, že bychom chtěli přesto na úrokovou sazbu pohlížet jako na náhodnou veličinu, je třeba modelově popsat celou zero křivku. Volatilita v různých bodech této křivky přitom může být různá. Úrokové sazby získané z tohoto modelu jsou navíc použity nejen pro diskontování ale také pro definování výplaty derivátu.

19.1 Rozšíření Black-Scholes modelu

Uvažujme evropskou kupní opci na proměnnou, jejíž hodnota je V . Definujme

T	zbytková splatnost opce
F	forwardová cena V v čase T
F_0	hodnota F v čase $T_0 = 0$
K	realizační cena opce
$P(t, T)$	cena diskontního dluhopisu v čase t s výplatou 1 USD v čase T
V_T	hodnota V v čase T
σ	volatilita náhodné veličiny F

Pomocí Black-Scholes modelu lze vypočítat výplatu opce za předpokladu, že:

- V_T má lognormální rozdělení se standardní směrodatnou odchylkou $\ln V_T$ rovnou $\sigma\sqrt{T}$
- očekávaná hodnota V_T je rovna F_0

Očekávanou výplatu je nutné diskontovat T -roční bezrizikovou sazbou tak, že ji vynásobíme $P(0, T)$. Výplata z dané opce očekávaná v čase T je rovna $\max(V_T - K, 0)$. Při odvozování Black-Scholes modelu jsme dokázali, že očekávaná výplata je za předpokladu lognormálního rozdělení dána rovnicí

$$E[V_T]N(d_1) - KN(d_2)$$

kde $E[V_T]$ je očekávaná hodnota V_T a

$$d_1 = \frac{\ln(E[V_T]/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(E[V_T]/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Protože předpokládáme $E[V_T] = F_0$ a diskontujeme bezrizikovou úrokovou sazbou, je hodnota opce rovna

$$c = P(0, T)[F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \quad (19.1)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Podobně cena odpovídající put opce je dána

$$p = P(0, T)[K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (19.2)$$

Jediný rozdíl mezi výše odvozenými rovnicemi a rovnicemi (10.14) a (10.15) je ten, že očekávaná cena proměnné V je zde vyjádřena jako forwardová cena narozdíl od futures ceny.

Dále je možné rozšířit Black-Scholes model o situace, kdy je výplata vypočtena z hodnoty proměnné V v čase T , ale samotná výplata je realizována v pozdějším čase T^* .

$$c = P(0, T^*)[F_0 N(d_1) - K N(d_2)]$$

$$p = P(0, T^*)[K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

Black-Scholes model nepředpokládá, že V nebo F jsou popsány Brownovým pohybem. Jediné, co se vyžaduje, je aby V_T sledovalo lognormální rozdělení v čase T . Parametr σ je nazýván volatilitou proměnné F nebo také forwardovou volatilitou V . Jedinou úlohou tohoto parametru je definovat směrovanou odchylku $\ln V_T$ jako $\sigma\sqrt{T}$. Parametr σ nám tak neříká nic o volatilitě $\ln V$ v jiném čase než T .

19.1.1 Teoretické zdůvodnění modelu

Aplikace Black-Scholes modelu předpokládá konstantní popř. deterministické úrokové sazby. V tomto případě, jak bylo vysvětleno v kapitole 3, je forwardová cena rovna futures ceně. Odvozené rovnice tak odpovídají rovnicím (10.14) a (10.15). Jestliže jsou však úrokové sazby stochastické povahy, nabízejí se následující otázky

- Proč bychom měli předpokládat, že $E[V_T]$ je rovno forwardové ceně F_0 ? Forwardová cena přeci není totéž jako futures cena.
- Proč při diskontování očekávané výplaty ignorujeme, že úrokové sazby mohou být stochastické?

V následujícím textu ukážeme s využitím poznatků z kapitoly 18.2.2, že výše odvozené rovnice nejsou pouhou aproximací rovnic (10.14) a (10.15) a že je možné předpokládat $E[V_T] = F_0$, jestliže současně diskontujeme budoucí cash-flow pomocí zero křivky.

19.2 Opce na dluhopisy

Opce na dluhopisy představují pro svého majitele právo koupit nebo prodat určitý bond k určitému datu za předem dohodnutou cenu.

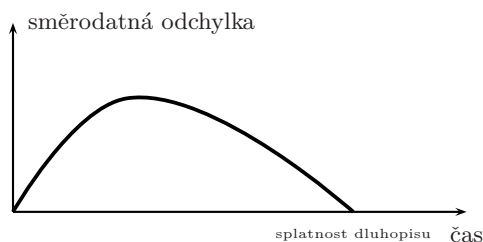
19.2.1 Evropské dluhopisové opce

V případě opce na dluhopis předpokládáme, že cena dluhopisu má v době splatnosti lognormální rozdělení. Na základě tohoto předpokladu je pak možné použít rovnice (19.1) popř. (19.2) pro ocenění opce. Proměnná σ je pak definována jako směrodatná odchylka logaritmu ceny dluhopisu v době splatnosti opce. F_0 je možné vypočítat na základě vztahu

$$F_0 = \frac{B_0 - I}{P(0, T)}$$

kde B_0 je cena dluhopisu v čase nula a I je současná hodnota kupónů, které budou vyplaceny po dobu životnosti opce. Pro účely výpočtu forwardové ceny F_0 zahrnuje spotová cena B_0 naběhlý úrok stejně jako realizační cena K v rovnicích (19.1) a (19.2).

Následující graf zobrazuje vývoj směrodatné odchylky logaritmu ceny dluhopisu v čase.



Směrodatná odchylka logaritmu ceny dluhopisu v čase

Vzhledem k tomu, že je současná cena dluhopisu známá, vykazuje její logaritmus nulovou směrodatnou odchylku. Také v době splatnosti dluhopisu je tato směrodatná odchylka nulová, protože cena dluhopisu je rovněž známa a je rovna jeho nominální hodnotě. Mezi těmito dvěma časovými okamžiky směrodatná odchylka nejprve roste a po té klesá. Volatilita σ , která by měla být použita pro ocenění evropské opce, je

$$\sigma = \frac{\sigma_m}{\sqrt{T}}$$

kde σ_m je směrodatná odchylka logaritmu ceny dluhopisu v době splatnosti opce a T je zbytková splatnost uvažované opce.

19.2.2 Vnořené opce na dluhopis

V zásadě existují dva druhy dluhopisů s tzv. vnořenou opcí, která umožňuje zpětný odkup nebo prodej dluhopisu před jeho splatností. V případě, že emitent má právo na zpětný odkup dluhopisu za předem stanovenou cenu, hovoříme o tzv. svolatelném dluhopisu. Jestliže naopak investor má právo na prodej dluhopisu emitentovi za předem určenou cenu, hovoříme o tzv. vratném dluhopisu.

Cena odpovídající opce je pak zpravidla kotována ve formě počtu bazických bodů, o které se zvýší (svolatelny dluhopis) popř. sníží (vratný dluhopis) výnos podkladového dluhopisu. Vedle dluhopisů mohou vnořenou opci obsahovat také vklady a půjčky klientů bank, přičemž princip je shodný jako u dluhopisů.

19.2.3 Volatilita výnosové míry

Volatility, které jsou kotovány pro dluhopisové opce, jsou velice často volatilitami výnosových měr spíše než volatilitami ceny dluhopisu. Pro výpočet cenové volatility z volatilit výnosových měr se pak používá koncept durace. Změnu forwardové ceny dluhopisu na změnu forwardových výnosových měr lze vyjádřit vztahem

$$\frac{\delta F}{F} \approx -D\delta y_F$$

resp.

$$\frac{\delta F}{F} \approx -Dy_F \frac{\delta y_F}{y_F}$$

Volatilita proměnné je vyjádřena pomocí směrodatné odchylky její procentní změny. Volatilita ceny dluhopisu tak může být z volatility výnosové míry aproximována pomocí

$$\sigma = Dy_0\sigma_y$$

kde y_0 je počáteční hodnota y_F .

19.2.4 Teoretické zdůvodnění modelu

Jednou z možností, které jsme uvažovali v předchozí kapitole, byl svět forwardově rizikově neutrální s ohledem na diskontní dluhopis se splatností v čase T . To znamená, že současná hodnota jakéhokoliv finančního instrumentu je rovna jeho očekávané hodnotě v čase T přenásobené současnou hodnotou diskontního dluhopisu se splatností v čase T . Očekávaná cena libovolného finančního instrumentu je tak rovna jeho forwardové ceně. Cena kupní dluhopisové opce se splatností v čase T je

$$c = P(0, T)E_T[\max(B_T - K, 0)] \quad (19.3)$$

Za předpokladu, že cena dluhopisu má lognormální rozdělení a standardní směrodatnou odchylku $\sigma\sqrt{T}$, lze (19.3) vyjádřit jako

$$c = P(0, T)[E_T(B_T)N(d_1) - KN(d_2)]$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[E_T(B_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_T(B_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Protože pro očekávanou cenu uvažovaného dluhopisu platí $E_T(B_T) = F_0$, lze rovnici (19.3) dále upravit do tvaru

$$c = P(0, T)[F_0N(d_1) - KN(d_2)]$$

která je shodná s rovnicí (19.1).

19.3 Úrokový cap, floor a collar

19.3.1 Úrokový cap

Úrokový cap zaručuje, že úroková sazba nepřesáhne určitou předem stanovenou úroveň. Poskytuje tak ochranu před růstem úrokových sazeb.

Uvažujme úvěr, kdy výše splátky je v pravidelných intervalech určena podle předem dohodnuté floatové úrokové sazby. Úrok je tak vypočten na základě aktuální referenční sazby. V případě úrokového capu je však navíc dohodnut tzv. úrokový strop. Jestliže referenční sazba přesáhne tento strop, je úrok vypočten na základě stropové sazby; v opačném případě je pro výpočet rozhodující referenční sazba.

Uvažujme cap s životností T , jistinou L a úrokovým stropem R_K . Předpokládejme, že k přehodnocení úrokových sazeb dochází v čase t_1, t_2, \dots, t_n (tzv. nulovací období). Dále definujme t_{n+1} jako T a R_k jako referenční sazbu platnou pro t_k až t_{k+1} známou v čase t_k . Výplata z daného capu v čase t_{k+1} , kde $k = 1, 2, \dots, n$, je dána vztahem

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0) \quad (19.4)$$

kde $\delta_k = t_{k+1} - t_k$. Perioda úročení sazeb R_k a R_K odpovídá periodě δ_k . Výše uvedený vzorec představuje výplatu prodejní opce na referenční sazbu. Cap lze pak chápat jako portfolio n takovýchto opcí. Jednotlivé prodejní opce jsou pak označovány jako caplety.

Cap lze také chápat jako portfolio prodejních bondových opcí. Výplatu z capu v čase t_{k+1} je totiž možné vyjádřit také jako

$$\frac{L\delta_k}{1 + R_k\delta_k} \max(R_k - R_K, 0)$$

Tento vztah lze elementárními úpravami převést do tvaru

$$\max\left(L - \frac{L(1 + R_K\delta_k)}{1 + \delta_k R_K}, 0\right)$$

Výraz $\frac{L(1 + R_K\delta_k)}{1 + \delta_k R_K}$ představuje hodnotu diskontního dluhopisu v čase t_k za předpokladu, že tento dluhopis generuje v čase t_{k+1} výplatu $L(1 + R_K\delta_k)$. Výše uvedený vztah tak lze interpretovat jako výplatu z prodejní opce na diskontní dluhopis se splatností v čase t_k za předpokladu, že nominální hodnota dluhopisu je $L(1 + R_K\delta_k)$ a realizační cena je rovna L .

Caplet odpovídající sazbě platné v čase t_k generuje v čase t_{k+1} výplatu danou rovnicí (19.4). Jestliže je sazba R_k dána lognormálním rozdělením se směrodatnou odchylkou σ_k , lze současnou hodnotu tohoto capletu vyjádřit jako

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - R_K N(d_2)] \quad (19.5)$$

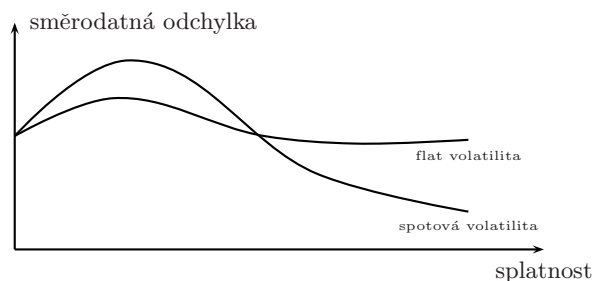
kde F_k představuje forwardovou sazbu pro periodu t_k až t_{k+1} a

$$d_1 = \frac{\ln(F_k/R_k) + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k/R_k) - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

Cena celého capu je pak dána součtem jednotlivých capletů. Při výpočtu ceny capletu je také možné používat odlišnou volatilitu s ohledem na různé časové období, která tyto caplety pokrývají. V tomto případě hovoříme o tzv. spotových volatilitách. Alternativou k tomuto přístupu je pak použít pro všechny caplety stejnou volatilitu, avšak tu rozlišit na úrovni capu podle jeho životnosti. Tyto volatility jsou označovány jako flat volatility. Implikované volatility kotované na trhu jsou pak zpravidla flat volatility. Pokladové instrumenty, z nichž jsou tyto implikované volatility počítány, jsou zpravidla at-the-money¹.

Následující graf zobrazuje typický profil spotové a flat volatility v závislosti na čase. Flat volatilita má povahu průměru spotových volatilit, a proto je méně volatilní.



Cap - spotová a flat volatilita

19.3.2 Úrokový floor

Floor generuje výplatu v případě, že referenční floatová úroková sazba klesne pod určitou stanovenou hranici. Floor tak představuje ochranu před poklesem úrokových sazeb. Podobně jako v případě capu je možné definovat výplatu z úrokového flooru v čase t_{k+1} jako

$$L\delta_k \max(R_k - R_k, 0) \quad (19.6)$$

Floor je tak možné rozložit na sérii prodejních úrokových opcí popř. na sérii kupních opcí na diskontní dluhopisy. Tyto dílčí opce pak nazýváme floorlets. Současná hodnota floorletu, jehož výplata je definována (19.6), je dána vztahem

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [R_k N(-d_2) - F_k N(-d_1)] \quad (19.7)$$

což analogie k rovnici (19.5) pro caplet. Stejně jako v případě úrokového capu představuje proměnná F_k forwardovou sazbu pro periodu t_k až t_{k+1} a σ_k volatilitu logaritmu náhodné proměnné R_k .

19.3.3 Put-call parita

Podobně jako v případě prodejní a kupní opce platí pro cap a floor tzv. put-call parita.

¹To znamená, že limitní sazba je rovna swapové sazbě pro swapový obchod, který má stejné výplatní dny jako uvažovaný cap.

$$\text{cena cap} = \text{cena floor} + \text{cena úrokového swapu}$$

Podmínkou platnosti výše uvedeného vztahu je, že cap i floor mají stejnou realizační cenu R_K a že v rámci swapu dochází k výměně floatové úrokové sazby za fixní sazbu R_K . Dále musí mít všechny tři uvažované instrumenty stejná data plateb. Uvedená rovnice tedy mimojiné znamená, že úrokový swap je možné replikovat pomocí dlouhé pozice v capu a krátké pozice ve flooru.

19.3.4 Úrokový collar

Collar je kombinací capu a flooru. Collar tedy generuje výplatu v případě, že referenční floatová úroková sazba opustí stanovené pásmo. Collar je velice často konstruován tak, aby se hodnota capu rovnala hodnotě flooru a cena collar v době jeho sjednání tak byla nulová.

19.3.5 Teoretické zdůvodnění modelu

Je možné dokázat, že Black-Scholes model pro ocenění capletu je interně konzistentní s světem, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k diskontnímu dluhopisu se splatností v čase t_{k+1} . Pro tento forwardově rizikově neutrální svět bylo prokázáno, že

- současná hodnota libovolného investičního instrumentu je rovna očekávané hodnotě v čase t_{k+1} vynásobená současnou cenou diskontního dluhopisu se splatností v čase t_{k+1}
- očekávaná hodnota úrokových sazeb v období t_k až t_{k+1} je rovna forwardové sazbě

Cena capletu, který generuje případnou výplatu v čase t_{k+1} , je

$$L\delta_t P(0, t_{k+1}) E_{k+1}[\max(R_k - R_K, 0)]$$

Podobně jako v případě klasické evropské opce lze dokázat, že tento vztah lze také vyjádřit jako

$$L\delta_t P(0, t_{k+1}) [E_{k+1}[R_k] N(d_1) - R_K N(d_2)] \quad (19.8)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[E_{k+1}[R_k]/R_K] + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_{k+1}[R_k]/R_K] - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

Druhý z výše uvedených předpokladů implikuje vztah

$$E_{k+1}[R_k] = F_k \quad (19.9)$$

Spojením (19.8) a (19.9) pak získáváme (19.5).

19.4 Evropské swapové opce

Swapové opce neboli swapce jsou opce na úrokové swapy. Swapce dávají právo svému vlastníkovvi vstoupit do úrokového swapu v daném časovém okamžiku v budoucnosti a jedná se tak do určité míry o alternativu k tzv. forwardovým swapům. Jestliže obchodník nakoupí swapci, zajišťuje se proti případnému růstu fixních sazeb.

19.4.1 Vztah k dluhopisovým opcím

Úrokový swap je lze chápat jako dohodu o výměně fixního dluhopisu za floatový. Swapci je proto možné interpretovat jako opci na výměnu fixního dluhopisu za floatový. Jestliže swapce dává svému majiteli možnost zaplatit fixní a obdržet floatový dluhopis, hovoříme o prodejní swapci, v opačném případě pak o kupní swapci.

Swapová sazba pro určitou splatnost v daný čas je fixní sazba, která by byla v rámci swapového kontraktu nabídnuta výměnou za floatovou sazbu LIBOR. Black-Scholes model, pomocí kterého obvykle oceňujeme evropské swapce, předpokládá, že odpovídající swapová sazba v době splatnosti swapce má lognormální rozdělení.

Uvažujme swapci, v rámci které máme právo zaplatit sazbu s_K a získat LIBOR. Kontrakt bude trvat n let a začne za T roků. Předpokládejme, že v rámci tohoto kontraktu bude provedeno m plateb za rok a že pokladový kapitál, od kterého se odvíjí úroky, je roven L . Dále předpokládejme, že swapová sazba pro n -letý swap, jehož splatnost se shoduje se splatností swapce, je s_T . Výplata z námi uvažované swapce v době splatnosti je dána vztahem

$$\frac{L}{m} \max(s_T - s_K, 0)$$

Peněžní toky jsou obdrženy m krát ročně po dobu n let životnosti swapového kontraktu. Nechť jsou data těchto plateb T_1, T_2, \dots, T_{mn} . Každou takovou platbu v čase T_i lze pak považovat za výplatu z kupní opce na s_T s realizační cenou s_K .

$$\frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(s_0/s_K) + \sigma^2/2T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(s_0/s_K) - \sigma^2/2T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

a s_0 forwardová swapová sazba. Celková hodnota swapce je tedy rovna

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

Definujme A jako hodnotu kontraktu, který vyplácí $1/m$ v čase T_i ($1 \leq i \leq mn$). Hodnota odpovídající swapce je pak rovna

$$LA[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \quad (19.10)$$

kde

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$$

Jestliže swapce dává vlastníkovu možnost obdržet fixní sazbu s_K namísto toho, aby jí platil, je hodnota swapce dána vztahem

$$LA[s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)]$$

Brokeři obvykle poskytují tabulku s implikovanými volatilitami pro evropské swapce. Instrumenty, na jejichž základě byla implikovaná volatilita vypočtena, jsou obvykle at-the-money². Frekvence plateb podkladového swapu je zpravidla šest měsíců pro floatovou nohu a jeden rok pro fixní nohu.

19.4.2 Teoretické zdůvodnění modelu

Je možné dokázat, že Black-Scholes model pro ocenění swapcí je interně konzistentní se světem, který je forwardově rizikově neutrální s ohledem k anuitě A . V tomto světě totiž platí

- současná hodnota libovolného aktiva se rovna součinu současné hodnoty anuity a očekávané hodnotě výrazu

$$(\text{hodnota aktiva v čase } T) / (\text{hodnota anuity v čase } T)$$

.

- očekávaná hodnota swapové sazby v čase T je rovna forwardové swapové sazbě (viz. kapitola 18.2.2, Anuita)

Výplata a čase T ze swapce, kde vlastník má právo zaplatit s_K a obdržet floatovou sazbu, je rovna součinu anuity a

$$\frac{L}{m} \max(s_T - s_K, 0)$$

Hodnota této swapce je tedy

$$LAE_A[\max(s_T - s_K, 0)]$$

Tento výraz lze dále upravit do tvaru

$$LA[E_A(s_T)N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(E_A[s_T]/s_K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(E_A[s_T]/s_K) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Dle druhého z výše uvedených bodů platí $E_A[s_T] = s_0$. S využitím této substituce lze vzorec pro výpočet hodnoty swapce upravit do tvaru (19.10). Za předpokladu, že očekávané swapové sazby jsou rovny forwardovým swapovým sazbám, je tedy možné pro účely diskontování považovat úrokové sazby za konstantní.

²To znamená, že realizační swapová sazba je rovna forwardové swapové sazbě.

19.5 Zobecnění

Dosud jsme představili tři různé verze Black-Scholes modelu - jeden pro dluhopisové opce, jeden pro capy a jeden pro swapce. Tyto modely jsou sice interně konzistentní, však nejsou konzistentní vzájemně³. Následujících několik bodů představuje zobecnění výše popsaných modelů.

- Uvažujme aktivum, které generuje výplatu v čase T v závislosti na jeho ceně v čase T . Současná hodnota tohoto aktiva je dána součinem $P(0, T)$ a očekávané výplaty. Toto tvrzení však platí pouze za předpokladu, že očekávaná výplata je vypočtena pro svět, kde očekávaná hodnota podkladového aktiva je rovna jeho forwardové ceně.
- Uvažujme aktivum, které generuje výplatu v čase T_2 v závislosti na úrokové míře pro splatnost T_2 platnou pro časový okamžik T_1 . Jeho současná hodnota je rovna součinu $P(0, T_2)$ a očekávané výplaty. Nezbytným předpokladem opět je, že očekávaná výplata je vypočtena pro svět, kde se očekávaná hodnota podkladové úrokové sazby rovná forwardové úrokové sazbě.
- Uvažujme aktivum, které generuje výplatu ve formě annuity. Předpokládejme, že výše annuity v čase T je funkcí swapové sazby pro n roční swap, který začíná v čase T . Dále předpokládejme, že tato annuita trvá po n let a výplaty pro danou annuitu se shodují s výplatami v rámci swapu. Hodnota odpovídajícího aktiva je rovna součinu A a očekávané roční výplaty. Podmínky, pro které je toto tvrzení platné, jsou (a) A je současná hodnota annuity, kde výplaty jsou ve výši 1 USD za rok a (b) očekávání jsou vztažena ke světu, kde očekávaná budoucí swapová sazba je rovna forwardové swapové sazbě.

19.6 Konvexita

Forwardová výnosová míra dluhopisu je definována jako výnosová míra implicitovaná jeho forwardovou cenou. Předpokládejme, že B_T je cena bondu v čase T a y_T je odpovídající výnosová míra. Vztah mezi B_T a y_T je definován pomocí

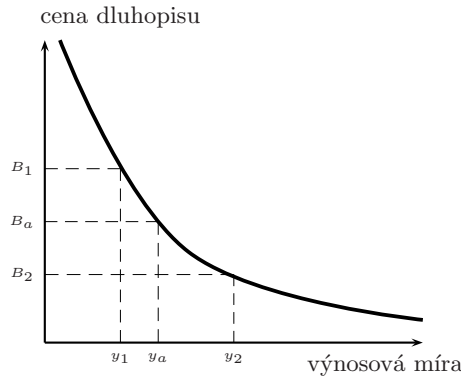
$$B_T = G(y_T)$$

Definujme F_0 jako forwardovou cenu dluhopisu v čase nula pro kontrakt se splatností v čase T a y_0 jako odpovídající forwardovou výnosovou míru. Platí

$$F_0 = G(y_0)$$

Funkce G je nelineární. To znamená, že je-li očekávaná budoucí cena dluhopisu rovna jeho forwardové ceně, není očekávaná budoucí výnosová míra dluhopisu rovna forwardové výnosové míře. Abychom toto tvrzení ilustrovali na příkladě, uvažujme dluhopis, pro který existují pouze dvě možné ceny a to B_1 a B_2 a jim odpovídající výnosové míry y_1 a y_2 . Jestliže pravděpodobnost realizace obou cen je shodná, je očekávaná cena tohoto dluhopisu dána průměrem cen B_1 a B_2 , tj. cenou B_a . Očekávaná výnosová míra y_a však není prostým průměrem výnosových měr y_1 a y_2 .

³Například když jsou budoucí ceny dluhopisů lognormální, budoucí zero sazby a swapové sazby tuto podmínku nesplňují.



Vztah mezi cenou dluhopisu a výnosovou mírou

19.6.1 Matematické zdůvodnění

Uvažujme derivát, který poskytuje výplatu závislou na výnosové míře dluhopisu v čase T . Z rovnice

$$df = (r + \lambda\sigma)fdt + \sigma f dz$$

víme, že tento derivát můžeme ocenit (a) výpočtem očekávané výplaty ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k diskontnímu dluhopisu se splatností v čase T a (b) následným diskontováním současnou bezrizikovou mírou pro splatnost T . Víme, že očekávaná hodnota dluhopisu je v námi uvažovaném světě rovna jeho forwardové ceně. Proto potřebujeme znát hodnotu očekávané výnosové míry dluhopisu za předpokladu, že se očekávaná cena dluhopisu rovná jeho forwardové ceně. V lemmě 19A je ukázáno, že přibližné vyjádření očekávané výnosové míry dluhopisu je rovno

$$E_T[y_T] = y_0 - \frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2T\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

kde E_T označuje očekávání ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k $P(t, T)$ a σ_y je volatilita forwardové výnosové míry. Z výše uvedeného vyplývá, že očekávané výplaty můžeme diskontovat současnou bezrizikovou sazbou pro splatnost T za předpokladu, že očekávaná výnosová míra dluhopisu je rovna

$$y_0 - \frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2T\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

a nikoliv pouze y_0 . Rozdíl $-\frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2T\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$ je tzv. konvexní úprava.

19.6.2 Časová korekce

V této kapitole se budeme zabývat situací, kdy derivát generuje výplatu v čase T_2 na základě hodnoty proměnné v pozorované v dřívějším časovém okamžiku T_1 . Definujme

v_1	hodnota proměnné v v čase T_1
F	forwardová cena proměnné v kontraktu se splatností v čase T_1
$E_1[v_1]$	očekávaná hodnota v_1 ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k $P(t, T_1)$
$E_2[v_1]$	očekávaná hodnota v_1 ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k $P(t, T_2)$
G	forwardová cena diskontního dluhopisu s životností od T_1 do T_2
R	forwardová úroková sazba pro časové období mezi T_1 a T_2 pro úrokovou frekvenci m
R_0	dnešní hodnota R
σ_F	volatilita náhodné veličiny F
σ_G	volatilita náhodné veličiny G
σ_R	volatilita náhodné veličiny R
ρ	korelace mezi náhodnými veličinami F a G

Jestliže se přesuneme ze světa, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k $P(t, T_1)$, do světa, který je forwardově neutrální vzhledem k $P(t, T_2)$, platí

$$G = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$$

Míra růstu náhodné veličiny v se změní o

$$\alpha_v = -\rho\sigma_G\sigma_F$$

(Náhodné veličiny G a F jsou vzájemně dokonale negativně korelovány, proto záporné je korelace mezi G a R rovna $-\rho$). Protože

$$G = \frac{1}{(1 + R/m)^{m(T_2 - T_1)}}$$

může být vztah mezi volatilitami náhodných veličin G a R vypočten na základě Itô lemy jako

$$\sigma_G = \frac{\sigma_R R(T_2 - T_1)}{1 + R/m}$$

Z toho vyplývá, že α_v je možné vyjádřit jako

$$\alpha_v = -\frac{\rho\sigma_F\sigma_R R(T_2 - T_1)}{1 + R/m}$$

V rámci aproximace můžeme předpokládat, že R je konstantní na úrovni R_0 . Tímto získáváme vztah

$$E_2[v_1] = E_1[v_1]e^{-\frac{\rho\sigma_F\sigma_R R_0 T_1 (T_2 - T_1)}{1 + R_0/m}}$$

Tato rovnice umožňuje úpravu forwardové ceny tak, aby byl zohledněn časový posun mezi okamžikem, ke kterému pozorujeme hodnotu podkladové veličiny v , a okamžikem, ke kterému je realizována výplata závisající na této hodnotě.

19.7 Lema 19A - Odvození konvexity

Uvažujme derivát, jehož výplata v čase T závisí na dluhopisovém výnosu pozorovaném v tomto čase. Definujme

y_0	dnešní forwardová výnosová míra dluhopisu pro forwardový kontrakt se splatností v čase T
y_T	výnosová míra dluhopisu v čase T
B_T	cena dluhopisu v čase T
σ_y	volatilita výnosové míry dluhopisu

Nechť platí

$$B_T = G(y_T)$$

Taylorovým rozvojem $G(y_T)$ podle $y_T = y_0$ získáme aproximaci

$$B_T = G(y_0) + (y_T - y_0)G'(y_0) + \frac{1}{2}(y_T - y_0)^2 G''(y_0)$$

Jestliže do této rovnice zapracujeme očekávání ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k diskontnímu dluhopisu se splatností v čase T , přejde tato rovnice do tvaru

$$E_T[B_T] = G(y_0) + E_T[y_T - y_0]G'(y_0) + \frac{1}{2}E_T[(y_T - y_0)^2]G''(y_0)$$

Z definice vyplývá, že $G(y_0)$ a $E_T[B_T]$ jsou forwardovou cenou dluhopisu. Rovnice se tedy dále zjednoduší na

$$E_T[y_T - y_0]G'(y_0) + \frac{1}{2}E_T[(y_T - y_0)^2]G''(y_0) = 0$$

Vzhledem k tomu, že platí $E_T[(y_T - y_0)^2] \approx \sigma_y^2 y_0^2 T$, získáváme

$$E_T[y_T] \approx y_0 - \frac{1}{2}\sigma_y^2 y_0^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

Kapitola 20

Modelování úrokových sazeb

Výše uvedené modely pro oceňování derivátů předpokládaly, že pravděpodobnostní rozdělení úrokových sazeb, cen dluhopisů a dalších veličin je lognormální. Ačkoliv je předpoklad lognormálního rozdělení všeobecně přijímán, má svá omezení - např. není schopen postihnout vývoj úrokových sazeb v čase. To znamená, že tento přístup není možné aplikovat na ocenění amerických úrokových opcí. V této kapitole se pokusíme nabídnout alternativní přístup a budeme se zabývat modelováním krátkodobých úrokových sazeb.

20.1 Rovnovážné modely

Rovnovážné modely zpravidla začínají předpoklady o ekonomických proměnných v návaznosti na než definují proces, který sleduje krátkodobá úroková sazba r . Tato úroková sazba je platná po nekonečně malý časový interval v čase t . Následně se zkoumá vazba mezi vývojem úrokové sazby a cenou dluhopisů a opcí. Předpokládá se, že tyto ceny závisí výhradně na vývoji úrokové sazby. V tradičním pojetí rizikově neutrálního světa platí, že hodnota derivátu, který v čase T generuje výplatu f_T , je v čase t dána

$$\hat{E} \left[e^{-\bar{r}(T-t)} f_T \right]$$

kde \bar{r} představuje průměrnou hodnotu r v časovém intervalu od t do T a \hat{E} je očekávanou hodnotou v tradičním rizikově neutrálním světě. Pouze připomeňme, že v tomto světě platí

$$P(t, T) = \hat{E} \left[e^{-\bar{r}(T-t)} \right]$$

Jestliže $R(t, T)$ je úroková míra s kontinuálním úročením v čase t pro časový interval $T - t$, pak

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \quad (20.1)$$

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \hat{E} \left[e^{-\bar{r}(T-t)} \right]$$

Tato rovnice umožňuje získat kompletní časovou strukturu úrokových sazeb na základě znalosti hodnoty r v daném čase a procesu, který tato náhodná veličina sleduje. Z této rovnice tak vyplývá, že je-li definován proces pro r , je definována také zero křivka a její vývoj v čase.

20.1.1 Rovnovážné modely s jedním parametrem

V případě rovnovážných modelů s jedním parametrem zahrnuje náhodný proces r pouze jeden zdroj nejistoty.

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

Parametr m a s jsou funkcí r , avšak jsou nezávislé na t . Tyto modely předpokládají, že se všechny sazby pohybují stejným směrem v rámci krátkého časového intervalu, i když tento posun nemusí být vždy stejný.

Rendelman-Bartterův model

V rámci Rendelman-Bartterova modelu sleduje náhodná veličina r proces

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz$$

kde μ a σ jsou konstanty. Náhodná veličina r tedy sleduje tzv. Brownův pohyb, podobně jak je tomu v případě modelování cen akcií. Jeden zásadní rozdíl mezi vývojem cen akcií a úrokových sazeb je ten, že sazby mají tendenci se v delším časovém horizontu vracet k dlouhodobému průměru. Rendelman-Bartterův model však tuto vlastnost v sobě zakomponovanu nemá.

Vašíčkův model

V rámci Vašíčkova modelu sleduje náhodná veličina r proces

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dz \quad (20.2)$$

kde a , b a σ jsou konstanty. Tento model zahrnuje návrat úrokových sazeb k dlouhodobému průměru - ty se vrací k úrovni b mírou a . Vašíček dokázal, že (20.1) může být použita k výpočtu ceny diskontovaného dluhopisu v časovém okamžiku t , jestliže tento dluhopis v čase T generuje výplatu 1 USD.

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

Ve výše uvedené rovnici představuje $r(t)$ hodnotu r v čase t ,

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

a

$$A(t, T) = e^{\frac{(B(t, T)-T+t)(a^2b-\sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a}}$$

Jestliže $a = 0$, dostáváme $B(t, T) = T - t$ a $A(t, T) = e^{\sigma^2(T-t)^3/6}$. Dosazením do rovnice (20.1) získáme

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T)r(t)$$

Pomocí sazby $r(t)$ lze tedy vypočítat celou výnosovou křivku a volbou parametrů a , b a σ lze ovlivnit její tvar.

Pomocí Vašíčkova modelu lze také oceňovat opce na diskontní dluhopis. Cenu evropské kupní opce se splatností v čase s na diskontní dluhopis s nominálem L a se splatností v čase T lze určit podle

$$c = LP(0, s)N(h) - KP(0, T)N(h - \sigma_P)$$

kde

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, T)K} + \frac{\sigma_P}{2}$$

a

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{a}(1 - e^{a(s-T)})\sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

Cena evropské prodejní opce je pak dána

$$p = KP(0, T)N(-h + \sigma_P) - LP(0, s)N(-h)$$

Cenu opcí na kupónové dluhopisy lze odvodit z cen opcí na diskontní dluhopis pomocí jednoparametrových modelů, jakým je např. Vašíčkův model, kde jsou všechny sazby pozitivně korelovány s r . Uvažujme evropskou kupní opci s realizační cenou K a splatností T na kupónový dluhopis. Předpokládejme, že tento dluhopis generuje n plateb po té, co příslušná opce zmaturuje. Označme i -tou platbu, která nastane v čase s_i ($s_i \geq T$), jako c_i . Definujme

- r_K hodnota krátkodobé sazby r v čase T , pro kterou se hodnota dluhopisu s nenulovým kupónem rovná realizační ceně K
- K_i hodnota diskontního dluhopisu v čase T za předpokladu, že tento dluhopis generuje výplatu 1 USD v době splatnosti s_i a rovnosti sazeb r a r_K

Jestliže jsou ceny dluhopisu vyjádřeny jako funkce proměnné r (jak je tomu v případě Vašíčkova modelu), je možné iterativně vypočítat r_K např. pomocí Newton-Raphsonovy metody. Nechť je $P(T, s_i)$ cenou diskontního dluhopisu v čase T za předpokladu, že tento dluhopis generuje výplatu 1 USD v čase s_i . Výplata z uvažované opce je tak dána rovnicí

$$\max \left(0, \sum_{i=1}^n c_i P(T, s_i) - K \right)$$

Protože jsou všechny sazby rostoucí funkcí r , jsou ceny dluhopisů klesající funkcí r . To znamená, že kupónový dluhopis, který má v čase T hodnotu vyšší než realizační cenu K , by měl být uplatněn v případě, že $r < r_K$. Dále platí, že diskontní dluhopis se splatností v s_i , který je podkladem pro kupónový dluhopis, má v čase T hodnotu vyšší než $c_i K_i$ tehdy a jen tehdy, platí-li $r < r_K$. Z toho vyplývá, že výplata z opce je

$$\sum_{i=1}^n c_i \max[0, P(T, s_i) - K_i]$$

Evropská kupní opce na kupónový dluhopis je tedy součtem n opcí na podkladové diskontní dluhopisy. Obdobný postup lze aplikovat na evropskou prodejní opci.

Cox-Ingersollův-Rossův model

V případě Vašíčkova modelu může dojít k tomu, že krátkodobá úroková míra r bude záporná. Cox, Ingersoll a Ross navrhli model, v rámci kterého jsou úrokové sazby vždy nezáporné.

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

Tento model, stejně jako Vašíčkův, má v sobě zabudovaný návrat úrokových sazeb k dlouhodobému průměru b tempem, které určuje parametr a . Směrodatná odchylka je však propocionální k \sqrt{r} . To znamená, že dojde-li k růstu krátkodobé úrokové sazby, dojde také k růstu směrodatné odchylky. Ceny dluhopisů jsou dány stejným vztahem jako v případě Vašíčkova modelu

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}$$

avšak rovnice pro $B(t, T)$ a $A(t, T)$ jsou definovány odlišně.

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$A(t, T) = \left(\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

Cox, Ingersoll a Ross definovali také rovnice pro výpočet evropských kupní a prodejních opcí na diskontní dluhopis. Ty však obsahují integrály přes chi-kvadrát rozdělení, a proto je jejich nasazení v praxi relativně problematické. Cena opcí na kupónový dluhopis se dá určit obdobně jako v případě Vašíčkova modelu.

20.1.2 Rovnovážné modely se dvěma parametry**Brennan-Schwartzův model**

V tomto modelu konverguje krátkodobá úroková sazba k dlouhodobé úrokové sazbě. Dlouhodobá sazba sleduje stochastický proces a je definována v rámci modelu jako výnos perpetuitního bondu, který generuje 1 USD ročně. S pomocí Itô lemmy lze pak z procesu, který sleduje cena tohoto dluhopisu, určit proces, který sleduje jeho výnosová míra. Podmínkou kalibrace modelu je, že tento dluhopis je obchodován. Dále platí, že očekávaný výnos tohoto dluhopisu je v rizikově neutrálním světě roven bezrizikové úrokové sazbě.

Longstaff-Schwartzův model

Tento model je zvláštní tím, že vychází z obecného rovnovážného modelu ekonomiky, na základě kterého odvozuje model úrokových sazeb, ve kterém je zapracována stochastická volatilita.

20.1.3 Nearbitrážní modely

Nevýhodou rovnovážných modelů je, že nemusí vždy odpovídat dnešní struktuře úrokových sazeb. Vhodným výběrem parametrů je možné určité shody dosáhnout, však tato shoda ve většině případů není dokonalá.

Nearbitrážní model je zkonstruován tak, aby byl konzistentní se strukturou úrokových sazeb v době své kalibrace. V případě rovnovážného modelu jsou "dnešní" úrokové sazby výstupem; v případě nearbitrážního modelu jsou tyto sazby vstupem. Dalším rozdílem je tzv. trend krátkodobé sazby (tj. koeficient parametru dt) - u rovnovážných modelů není odpovídající parametr funkcí času; u nearbitrážních modelů je naopak tento parametr velice často funkcí času.

Ho-Lee model

Rovnice popisující model je

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz$$

kde σ je směrodatná odchylka krátkodobé úrokové sazby, kterou v rámci modelu považujeme za konstatní, a $\theta(t)$ je funkcí času, která je zvolena tak, aby model odpovídal výchozí struktuře úrokových sazeb. Funkce $\theta(t)$ vyjadřuje průměrný směr, kterým se pohybuje r v čase t , a je nezávislá na úrovni r .

Proměnná $\theta(t)$ může být vypočtena analyticky jako

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t$$

kde $F(0, t)$ je forwardová sazba v čase nula pro splatnost t . Dolní index t značí derivaci s ohledem na t . Jako aproximaci je možné použít vztah $\theta(t) = F(0, t)$ ¹.

V Ho-Lee modelu je možné diskontní dluhopis a evropské opce ocenit analyticky. Cena diskontního dluhopisu v čase t je

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)(T-t)} \quad (20.3)$$

kde

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - (T - t) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T - t)^2$$

Ve výše uvedené rovnici značí čas nula dnešek. Čas T a t jsou obecné časy v budoucnu, kde $T \geq t$. Tato rovnice tedy definuje cenu diskontního dluhopisu v budoucím čase t v kontextu krátkodobé sazby v čase t a dnešních cen dluhopisů s tím, že dnešní cena dluhopisů může být vypočtena na základě současné zero křivky.

Po zbytek této kapitoly bude $R(t)$ popř. pouze R označovat úrokovou sazbu pro periodou δt . Rovnici (20.3) lze také vyjádřit ve tvaru

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-R(t)(T-t)} \quad (20.4)$$

kde

$$\ln \hat{A}(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - \frac{T - t}{\delta t} \ln \frac{P(0, t + \delta t)}{P(0, t)} - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T - t) [(T - t) - \delta t]$$

¹To znamená, že průměrný směr, kterým se bude krátkodobá úroková sazba pohybovat v budoucnu, je rovna sklonu forwardové křivky.

V praxi se většinou cena dluhopisu určuje ve formě R spíše než r , a proto je rovnice (20.3) použitelnější než (20.4).

Evropská kupní opce na diskontní dluhopis s maturitou v čase s , která je splatná v čase T , má v čase nula hodnotu

$$LP(0, s)N(h) - KP(0, T)N(h - \sigma_p)$$

L představuje nominální hodnotu dluhopisu, K realizační cenu, h je definováno jako

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln LP(0, s)P(0, T)K + \frac{\sigma_p}{2}$$

a σ_p jako

$$\sigma_p = \sigma(s - T)\sqrt{T}$$

Cena ekvivalentní prodejní opce je pak rovna

$$KP(0, T)N(-h + \sigma_p) - LP(0, s)N(-h)$$

Nevýhodou Ho-Lee modelu je, že neposkytuje uživateli flexibilitu při volbě struktury volatilit. Změny všech úrokových sazeb mají v krátkém časovém okamžiku stejnou směrodatnou odchylku. Další nevýhodou je, že tento model v sobě nemá zabudovaný mechanismus návratu k dlouhodobé úrokové míře.

Hull-White model

Hull-Whitův model je rozšířením Vašíčkova modelu o mechanismus, který zajišťuje návrat úrokové míry k dlouhodobému průměru.

Uvažujme

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$$

kde a a σ jsou konstanty. Funkce $\theta(t)$ může být vypočtena z počáteční struktury úrokových sazeb.

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (20.5)$$

Poslední člen ve výše uvedené rovnici je zpravidla zanedbatelný. Jeho vynecháním se proces, který sleduje r , zjednoduší na

$$r(t) = F_t(0, t) + a[F(0, t) - r]$$

To znamená, že r sleduje v průměru sklon křivky počátečních forwardových sazeb. Když se r odlišuje od této křivky, konverguje zpět k této křivce rychlostí a .

Cena diskontního dluhopisu v čase t podle Hull-Whitova modelu je dána rovnicí

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

kde

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{a(T-t)}}{a}$$

a

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{4a^3} \sigma^2 (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1)$$

Stejně jako v případě Ho-Lee modelu je relevantnější vztáhnout hodnotu dluhopisu k $R(t)$, tj. sazbě, která odpovídá periodě δt v čase t .

$$P(t, T) = \hat{A}(t, T)e^{-\hat{B}(t, T)R(t)}$$

kde

$$\ln \hat{A}(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - \frac{B(t, T)}{B(t, t + \delta t)} \ln \frac{P(0, t + \delta t)}{P(0, t)} - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T) [B(t, T) - B(t, t + \delta t)]$$

$$\hat{B}(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, t + \delta t)} \delta t$$

Cena evropské kupní opce, která maturuje v čase T , na diskontní dluhopis se splatností v čase s je v čase nula dána vztahem

$$LP(0, s)N(h) - KP(0, T)N(h - \sigma_p)$$

kde L představuje nominále dluhopisu a K je realizační cenou. Ostatní parametry jsou definovány jako

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

Cena odpovídající prodejní opce se vypočte podle

$$KP(0, T)N(-h + \sigma_p) - LP(0, s)N(-h)$$

Volatilita je v Hull-Whitovém modelu determinována parametry a a σ . Volatilita ceny diskontního dluhopisu, který je splatný v čase T , je definována v čase t jako

$$\frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

Směrodatná odchylka odpovídající výnosové míry je pak dána vztahem

$$\frac{\sigma}{a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})$$

Volatilita forwardové sazby s maturitou v čase T je

$$\sigma e^{-a(T-t)}$$

Parametr σ představuje volatilitu krátkodobých úrokových sazeb. Parametr a představuje míru, se kterou volatilita cen dluhopisů roste resp. míru se kterou volatilita úrokových sazeb klesá s narůstající splatností.

20.1.4 Opce na kupónové dluhopisy

V předchozí kapitole jsme ukázali na příkladě Vašíčkova modelu, že je možné opci na kupónový dluhopis rozložit na sérii dílčích opcí na diskontní dluhopis. V následujícím textu aplikujeme tento postup Ho-Lee a Hull-Whitův model.

V případě Vašíčkova modelu jsme vypočetli hodnotu krátkodobé úrokové sazby, $r = r_K$, pro kterou se cena kupónového dluhopisu rovnala realizační ceně. V návaznosti na to jsme uvažovali, že opce na kupónový dluhopis je ekvivalentní portfoliu opcí na diskontní dluhopisy, na které lze rozložit původní kupónový dluhopis. Realizační hodnota pro každou z těchto opcí je hodnota odpovídajícího diskontního dluhopisu pro $r = r_K$.

Postup v případě Ho-Lee na Hull-Whitova modelu je identický. Pro účely těchto modelů je však vhodnější pracovat s úrokovou sazbou R pro časový interval δt než s aktuální krátkodobou sazbou r . Vhodnou volbou pro δt je časový interval mezi splatnostmi opce a prvním následujícím kupónem pro podkladový dluhopis. Nejprve vypočteme sazbu R_K , pro kterou je cena kupónového dluhopisu rovna realizační ceně. Hodnota uvažované opce je rovna portfoliu opcí na diskontované dluhopisy, na které je možné rozložit původní kupónový dluhopis. Realizační hodnota pro každou z těchto dílčích opcí je rovna hodnotě odpovídajícího diskontního dluhopisu za předpokladu $R = R_K$.

20.2 Úrokové stromy

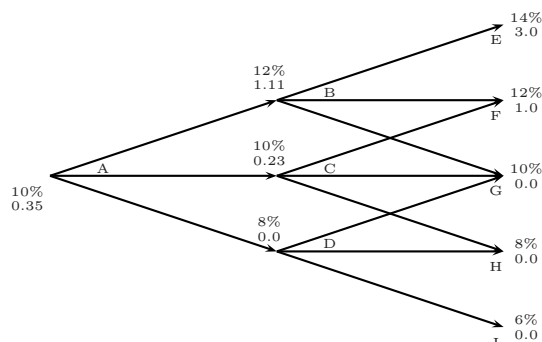
Úrokový strom je diskrétním znázorněním stochastického procesu, který sledují úrokové sazby. Jestliže je časový posun roven δt , jsou sazby uvažované v rámci úrokového stromu definovány jako složené úročené pro časový interval δt . Obvykle předpokládáme, že sazba R pro časový interval δt sleduje stejný náhodný proces jako úroková sazba r v odpovídajícím spojitém modelu. V praxi se často osvědčuje použít namísto klasického binomického stromu strom trinomický.

20.2.1 Příklad trinomického úrokového stromu

Předpokládejme, že pravděpodobnost růstu úrokové sazby je 0.25, pravděpodobnost setrvalého stavu je 0.50 a pravděpodobnost poklesu je 0.25 pro každý krok v rámci trinomického stromu. Tento strom je použit pro ocenění derivátu, který na generuje výplatu

$$\max[100(R - 0.11), 0]$$

na konci druhého kroku. Definujme R jako sazbu pro časový interval δt .

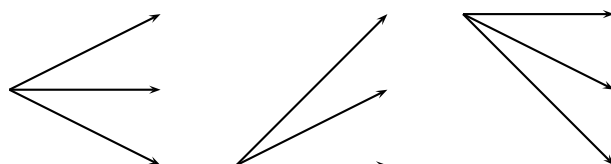


Úrokový derivát oceněný pomocí trinomického úrokového stromu

V koncových uzlech trinomického stromu se hodnota derivátu rovná výplatě, kterou generuje. Například pro uzel E platí, že hodnota derivátu je rovna $100 \cdot (0.14 - 0.11) = 3$. V přecházejících uzlech je hodnota derivátu vypočtena oceňováním "pozpátku", tak jak je popsáno v kapitole 15.1.2. V uzlu B je jednorroční úroková sazba 12%. Jestliže použijeme tuto sazbu pro diskontování pro výpočet hodnoty derivátu v uzlu B z hodnot derivátu v uzlech E, F, G, dostaneme $(0.25 \cdot 3 + 0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 0)e^{-0.12 \cdot 1} = 1.11$.

20.2.2 Nestandardní větvení

V některých případech se může ukázat žádoucí modifikovat standardní větvení, které je použito ve výše uvedeném obrázku. V rámci tohoto větvení se uvažuje, že úroková sazba může během skoku klesnout, zůstat stejná nebo vzrůst.



(a) standardní

(b) rostoucí

(c) klesající

Alternativní větvení

Alternativní větvení jsou vhodná např. v situacích, kdy je návrat k dlouhodobé úrokové míře v rámci uvažovaného úrokového modelu příliš rychlý resp. příliš pomalý.

20.2.3 Obecná metodika úrokových stromů

Následující kapitola bude vycházet z Hull-Whitova modelu úrokových sazeb. V tomto modelu platí, že krátkodobá úroková sazba sleduje náhodný proces

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$$

Předpokládejme, že krok v rámci úrokového stromu je konstatní a roven δt . Dále předpokládejme, že sazba R pro období δt sleduje stejný proces jako r .

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz$$

První krok

Prvním krokem při konstrukci úrokového stromu je zkonstruovat strom proměnné R^* , která má nulovou počáteční hodnotu a která sleduje proces

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma dz$$

Tento proces je symetrický kolem $R^* = 0$ a proměnná $R^*(t + \delta t) - R^*(t)$ má normální rozdělení. Jestliže zanedbáme členy vyššího řádu než δt , je očekávaná hodnota $R^*(t + \delta t) - R^*(t)$ rovna $-aR^*(t)$ a rozptyl této náhodné veličiny roven $\sigma^2\delta t$.

Definujeme δR jako mezery mezi úrokovými sazbami v rámci úrokového stromu a nechť platí

$$\delta R = \sigma\sqrt{3\delta t}$$

Nechť (i, j) je uzel, kde $t = i\delta t$ a $R^* = j\delta R$ (i musí být kladné, j může být kladné i záporné).

Další podmínkou, kterou je nutné splnit je, aby pravděpodobnost každé větve vedoucí z uvažovaného uzlu byla kladná. Toho lze docílit vhodnou volbou větvení. Ve většině případů je aplikovatelné standardní větvení. Pro $a > 0$ je pro dostatečně velká j nutné přejít na větvení klesající. Je-li naopak $a < 0$ je nutné pro dostatečně záporná j použít rostoucí větvení. Definujeme j_{max} jako hodnotu j , pro kterou je nutné přejít ze standardního na klesající větvení a hodnotu j_{min} jako hodnotu j , pro kterou je nutné přejít ze standardního na rostoucí větvení. Lze dokázat, že výsledné pravděpodobnosti jsou vždy kladné, jestliže nastavíme j_{max} na hodnotu odpovídající nejmenšímu celému číslu většímu než $0.184/(a\delta t)$ a j_{min} na hodnotu $-j_{max}$.

Definujeme p_u , p_d a p_m jako pravděpodobnosti, že se úroková sazba bude sledovat jednu ze tří uvažovaných větví. Tyto pravděpodobnosti by měly být vybrány tak, aby odpovídaly očekávané změně a rozptylu R^* v následujícím časovém intervalu δt . Další podmínkou je, že součet těchto pravděpodobností musí být roven 1. Tímto získáváme tři rovnice o třech neznámých.

Jak již bylo zmíněno, očekávaná změna R^* v čase δt je rovna $-aR^*\delta t$ a rozptyl této změny je roven $\sigma^2\delta t$. V uzlu (i, j) platí $R^* = j\delta R$. Jestliže se použije standardní větvení, musí pravděpodobnosti p_u , p_m a p_d v uzlu (i, j) splňovat následující tři rovnice.

$$p_u\delta R - p_d\delta R = -aj\delta R\delta t$$

$$p_u\delta R^2 + p_d\delta R^2 = \sigma^2\delta t + a^2j^2\delta R^2\delta t^2$$

$$p_u + p_m + p_d = 1$$

Jestliže $\delta R = \sigma\sqrt{3\delta t}$, získáváme

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2j^2\delta^2 - aj\delta t}{2}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2 j^2 \delta t^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \delta t^2 + a j \delta t}{2}$$

Jestliže bychom použili rostoucí větvení, byly pravděpodobnosti definovány jako

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \delta t^2 + a j \delta t}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \delta t^2 - 2a j \delta t$$

$$p_d = \frac{2}{6} + \frac{a^2 j^2 \delta t^2 + 3a j \delta t}{2}$$

Pro klesající větvení musí pravděpodobnosti splňovat podmínky

$$p_u = \frac{2}{6} + \frac{a^2 j^2 \delta t^2 - 3a j \delta t}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \delta t^2 + 2a j \delta t$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \delta t^2 - a j \delta t}{2}$$

Druhý krok

V kruhém kroku je třeba konvertovat strom pro R^* na strom pro R . Definujme

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$$

Protože R a R^* jsou definována jako

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz$$

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma dz$$

$d\alpha(t)$ je tedy možné definovat jako

$$d\alpha = [\theta(t) - a\alpha(t)]dt$$

Jestliže budeme ignorovat rozdíl mezi r a R , pak lze s pomocí (20.5) vyjádřit $\alpha(t)$ jako

$$\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (20.6)$$

Pro a limitně se blížíci nule platí

$$\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

Vzhledem k $R(t) = R^*(t) + \alpha(t)$, je možné použít rovnici (20.6) pro vytvoření stromu pro R .

Alternativní přístup

Ačkoliv je výše uvedená rovnice pro většinu účelů dostatečná, není zcela konzistentní s počáteční strukturou úrokových sazeb. Alternativním přístupem je iterativní výpočet parametrů α .

Definujme $\alpha(i\delta t)$ jako rozdíl mezi R a R^* v čase $i\delta t$. Definujme $Q_{i,j}$ jako současnou hodnotu investičního instrumentu, který generuje 1 USD v případě, že je dosaženo uzlu (i, j) a 0 USD v ostatních případech. Hodnoty $Q_{0,0}$ je tedy rovna 1. Hodnoty ostatních $Q_{i,j}$ jsou dány pravděpodobnostmi p_u , p_m a p_d . Parametr α_0 je zvolen tak, aby diskontní dluhopis se splatností v čase δt byl oceněn správně. Jestliže je tedy délka kroku v rámci stromu rovna jednomu roku, odpovídá α_0 jednorocní zero sazbě.

Předpokládejme, že $Q_{i,j}$ bylo vypočteno pro $i \leq m$ ($m \geq 0$). Dalším krokem je výpočet α_m , tak aby výsledný strom správně oceňoval diskontní dluhopisy se splatností v čase $(m+1)\delta t$. Úroková sazba v uzlu (m, j) je $\alpha_m + j\delta R$. Cena diskontního dluhopisu je tedy rovna

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-(\alpha_m + j\delta R)\delta t}$$

kde n_m je počet uzlů na každé straně centrálního uzlu v čase $m\delta t$. Hodnota α_m , které je řešením výše uvedené rovnice, je rovna

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\delta R\delta t} - \ln P_{m+1}}{\delta t}$$

Po té, co je vypočteno α_m , je možné dopočítat $Q_{i,j}$ pro $i = m+1$.

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) e^{-(\alpha_m + k\delta R)\delta t}$$

kde $q(k, j)$ představuje pravděpodobnost přesunu z uzlu (m, k) do uzlu $(m+1, j)$; sumace je provedena přes všechna nenulová k .

20.2.4 Kalibrace

Až dosud jsme uvažovali, že hodnoty parametrů a a σ , ať už se jedná o konstanty nebo o funkce času, jsou známé. V následujícím textu se budeme zabývat možnostmi jejich výpočtu.

Parametry volatility jsou určeny z tržních dat na aktivně obchodované opce. Tyto opce nazýváme kalibračními instrumenty. Obecně platí, že kalibrační nástroj by měl být vybrán tak, aby se v co největší míře shodoval s oceňovaným instrumentem. Prvním krokem kalibrace je volba vhodného měřítka dobré shody. Oblíbeným měřítkem je

$$\sum_{i=1}^n (U_i - V_i)^2$$

kde U_i je tržní cena i -tého kalibračního instrumentu a V_i je cena daná modelem pro tento instrument. Volbou parametrů modelu je pak možné dosáhnout minimalizace výše uvedeného výrazu.

Jestliže jsou a a σ konstanty, jsou k dispozici pouze dva zdroje volatility. To v řadě případů nestačí a je nutné uvažovat a a σ jako funkci času. Vhodným

způsobem, jak modelovat a a σ jako funkce času je použít krokovou funkci. Uvažujme například situaci, kdy a bude konstantní a σ funkcí času. Můžeme zvolit časy t_1, t_2, \dots, t_n a předpokládat, že $\sigma(t) = \sigma_0$ pro $t \leq t_1$, $\sigma(t) = \sigma_i$ pro $t_i < t \leq t_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$) a $\sigma(t) = \sigma_n$ pro $t > t_n$. Celkově tedy budeme mít k dispozici $n+2$ parametrů volatility a to $a, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$. Počet parametrů volatility musí být vždy menší než počet kalibračních nástrojů. Minimalizace měřítka dobré shody je možné dosáhnout pomocí Levenberg-Marquardtovy procedury.

Jsou-li a i σ funkcí času, je měřítko dobré shody často doplňováno o tzv. penalizační funkci. Měřítko dobré shody pak může vypadat například následovně

$$\sum_{i=1}^n (U_i - V_i)^2 + \sum_{i=1}^n w_{1,i} (\sigma_i - \sigma_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} w_{2,i} (\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1} - 2\sigma_i)^2$$

Druhý člen představuje penalizaci velkých změn parametru σ mezi jednotlivými kroky. Třetí člen představuje penalizaci za vysokou křivost. Vhodné hodnoty parametrů $w_{1,i}$ a $w_{2,i}$ jsou dány empirickou zkušeností a jsou voleny tak, aby poskytly přijatelnou úroveň hladkosti funkce parametru σ .

20.2.5 Zajištění a jednoparametrový model

Ačkoliv velice často používáme jednoparametrový model při oceňování úrokových derivátů, není tento model vhodný pro účely zajištění se. V praxi se velice často berou v úvahu nejen změny, které mohou v rámci modelu nastat, ale také změny, které nastat nemohou. Hovoříme o tzv. vnějším modelovém zajištění a jedná se o běžnou praxi mezi obchodníky. Platí totiž, že jednofaktorové modely, jsou-li vhodně aplikovány, mohou poskytovat relativně rozumné ocenění, avšak pro účely zajištění se je třeba uvažovat více faktorů. Klasickým příkladem je předpoklad konstantní volatility v rámci Black-Scholes modelu, kdy však obchodníci sledují hodnotu řeckého písmene vega pro své portfolio a zajišťují se proti možným změnám volatility.

20.2.6 Forwardové a futures sazby

Jak bylo zmíněno v kapitole 5.9, nejsou forwardové a futures sazba totožné. Platí, že futures sazba je vždy vyšší než forwardová sazba.

Uvažujme futures kontrakt na úrokovou sazbu, který trvá od t_1 do t_2 . V souladu s výše uvedeným je v rámci Ho-Lee modelu spojitá forwardová úroková sazba pro danou periodu rovna spojitě futures úrokové sazbě méně $\sigma^2 t_1 t_2 / 2$. Typická hodnota σ je 0.012. Pro eurodolarové futures obchodované na CME platí $t_2 = t_1 + 0.25$. Typická korekce, kterou musíme provést pro splatnosti 2, 4, 6, 8 a 10 let je proto 3, 12, 27, 48 a 74 bazických bodů.

V rámci Hull-Whitova modelu je hodnota korekce, kterou je třeba odečíst od spojitě futures úrokové sazby, abychom získali spojitou forwardovou úrokovou sazbu, rovna

$$\frac{B(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} [B(t_1, t_2)(1 - e^{-2at} + 2aB(0, t)^2) \frac{\sigma^2}{4a}]$$

kde B je definováno jako

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{a(T-t)}}{a}$$

20.3 Swapové obchody

20.3.1 Deriváty swapových obchodů

V předchozích kapitolách jsme uvažovali pouze základní (tzv. plain vanilla) typy swapových obchodů. Tyto základní typy obchodů je pak možné nejrozličnějším způsobem modifikovat. Například u některých swapových obchodů se nominál mění deterministicky v čase. Swapy, kde je nominál rostoucí funkcí času, nazýváme rostoucí swapy (step-up swap). Swapy, jejichž nominál je naopak klesající funkcí času, označujeme jako amortizační swapy (amortizing swap). Tento typ swapů je pak možné např. použít pro zajištění anuitně spláceného úvěru. Další možnou modifikací je různý nominál nebo frekvence plateb na každé ze swapových nohou. Referenční floatová sazba také nemusí být vždy LIBOR. Například v rámci tzv. basis swapu dochází k výměně cash-flow počítaného podle jedné floatové sazby za cash-flow počítaný podle jiné floatové sazby.

Následující podkapitoly popisují základní modifikace klasického úrokového swapového obchodu.

Složený swap

V případě složeného swapu (compounding swap) existuje pouze jedno výplatní datum pro fixní a floatovou nohu. Výplata je realizována v den splatnosti swapu. Úroky jsou namísto toho, aby byly průběžně vypláceny, složeny úročené do konce životnosti příslušného swapu. Jako příklad uvažujme složený swap, jehož fixní sazba je 6% a úrok, namísto toho, aby byl vyplácen, je dále úročen fixní sazbou 6.3%. Floatová sazba uvažovaného swapu je LIBOR navýšený o 20 bazických bodů a úrok z floatové nohy je úročen sazbou LIBOR plus 10 bazických bodů.

Tento typ swapu je možné ocenit za předpokladu, že se budoucí úrokové sazby budou rovny forwardovým sazbám. Uvažujme t_0 jako datum bezprostředně předcházející datu ocenění. Předpokládejme, že výplatní data po datu ocenění jsou t_1, t_2, \dots, t_n . Definujme $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ kde $0 \leq i \leq n-1$ a následující proměnné jako

- L nominál floatové swapové nohy
- Q_i hodnota floatové nohy složené úročené k t_i (Q_0 je známo)
- R_i LIBOR sazba pro časový horizont t_i až t_{i+1} (R_0 je známo)
- F_i forwardová sazba aplikovaná na periodu t_i až t_{i+1} pro $i \geq 1$ (všechny hodnoty jsou známy)
- s_1 spread nad referenční sazbou LIBOR, který je použit pro výpočet úroku
- s_2 spread nad referenční sazbou LIBOR, kterým je složené úročen úrok

Výpočet hodnoty fixní nohy je triviální, protože cash-flow generované touto nohou je dopředu známo. Hodnota floatové nohy v čase t_1 je známa.

$$Q_1 = Q_0[1 + (R_0 + s_2)\tau_0] + L(R_0 + s_1)\tau_0$$

Hodnota floatové nohy v čase t_2 není známá a závisí na R_1 .

$$Q_2 = Q_1[1 + (R_1 + s_2)\tau_1] + L(R_1 + s_1)\tau_1$$

Je však možné vstoupit do dvou FRA

- v rámci prvního FRA vyměnit $R_1 + s_2$ za $F_1 + s_2$ ve vztahu k nominálu Q_1
- v rámci druhého FRA vyměnit $R_1 + s_1$ za $F_1 + s_1$ ve vztahu k nominálu L

S využitím výše zmíněných FRA lze hodnotu floatové nohy v čase t_2 vyjádřit jako

$$Q_2 = Q_1[1 + (F_1 + s_2)\tau_1] + L(F_1 + s_1)\tau_1$$

Obecně pak platí

$$Q_{i+1} = Q_i[1 + (F_i + s_2)\tau_i] + L(F_i + s_1)\tau_i$$

Výsledná hodnota složeného swapu je tak dána současnou hodnotou rozdílu fixní a floatové nohy.

Dopředný swap

U klasického swapového obchodu je výše referenční floatové sazby pozorovaná k jednomu výplatnímu datu použita pro určení výše cash-flow k následujícímu výplatnímu datu. V případě dopředného swapu je k výpočtu výše cash-flow pro daný výplatní den použita hodnota referenční sazby pozorovaná v tento den.

Uvažujme datum t_i pro stanovení floatové sazby, kde $i = 0, 1, \dots, n$ a $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Definujme R_i jako LIBOR sazbu platnou pro periodu t_i až t_{i+1} , F_i jako forwardovou hodnotu R_i a σ_i jako volatilitu forwardové sazby². V případě dopředného swapu je platba na floatové noze v čase t_i založena na R_i spíše než na R_{i-1} jak je tomu u klasického swapu. Jak již bylo vysvětleno dříve, je nutné pro účely stanovení cash-flow provést konvexní úpravu forwardové sazby. Výpočet cash-flow z floatové nohy by měl být založen na předpokladu, že forwardová sazba je rovna

$$F_i + \frac{F_i^2 \sigma_i^2 \tau_i t_i}{1 + F_i \tau_i}$$

spíše než F_i . Pro účely diskontování je však použita sazba F_i .

CMS swap

CMS swap (constant maturity swap) je úrokový swap, kde je jako referenční floatová sazba zvolena swapová sazba plain vanilla úrokového swapu s určitou splatností (např. swapová sazba z pětiletého úrokového swapu). Podobně jako u úrokového swapu dochází také u CMS swapu zpravidla k fixaci úrokových sazeb na floatové noze. To znamená, že cash-flow generované floatovou nohou k určitému datu se odvíjí od swapové sazby přecházejícího výplatního data.

Předpokládejme, že sazby na floatové noze jsou fixovány k datům t_0, t_1, t_2, \dots a že odpovídající platby jsou realizovány k datům t_1, t_2, t_3, \dots . Cash-flow generované floatovou nohou ve výplatní den t_{i+1} je tak rovno $\tau_i L S_i$, kde $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ a S_i je referenční swapová sazba v čase t_i . Dále předpokládejme, že y_i je forwardová hodnota swapové sazby S_i . Abychom správně ocenili platbu v čase t_{i+1} ,

²Hodnota σ_i je typicky získávána z cen capletů.

je žádoucí vzít v potaz konvexitu a to, že platby vypočtené na základě S_i jsou realizovány až v čase t_{i+1} . Uvažovaná swapová sazba je tak rovna

$$S_i = y_i - \frac{1}{2} y_i^2 \sigma_{y,t_i}^2 \frac{G''(y_i)}{G'(y_i)} - \frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1 + F_i \tau_i}$$

kde druhý sčítanec na pravé straně rovnice představuje úpravu z titulu konvexity a třetí sčítanec pak úpravu z titulu časového posunu plateb. Ve výše uvedené rovnici figuruje $\sigma_{y,i}$ jako volatilita forwardové swapové sazby, F_i je současnou forwardovou úrokovou sazbou pro období t_i až t_{i+1} a $\sigma_{F,i}$ je její volatilitou. Proměnná ρ_i představuje korelaci mezi forwardovou swapovou sazbou a forwardovou úrokovou sazbou. Funkce $G_i(x)$ je cenou v čase t_i pro dluhopis s výnosovou mírou x . Tento modelový dluhopis vyplácí kupóny odpovídající sazbě y_i a má stejnou životnost a frekvenci plateb jako úrokový swap, od kterého je odvozena CMS swapová sazba. Volatilita $\sigma_{y,i}$ může být odvozena ze swapcí, volatilita $\sigma_{F,i}$ z cen capletů a korelace ρ_i může být vypočtena na základě historických dat.

Akciový swap

U akciového swapu dochází ke směně výnosu z akciového indexu za pevnou popř. pohyblivou úrokovou sazbou. Tento swap tak umožňuje portfolio manažerům zvýšit nebo snížit expozici na index bez toho aniž by prodávali nebo nakupovali akcie. Výnos akciového indexu je zpravidla počítán za předpokladu, že dividendy jsou reinvestovány zpět do akcií tvořících index.

Uvažujme swap, je jehož rámci dochází ke směně výnosu z akciového indexu za pohyblivou refereční sazbou. Takovýto swap má na začátku své životnosti nulovou tržní hodnotu. Důvodem je to, že finanční instituce může velice snadno replikovat cash-flow z akciového swapu tak, že si půjčí příslušný nominál ve výplatní den za sazbu odpovídající LIBOR, použije ji na nákup akciového indexu do dalšího výplatního dne a případné dividendy reinvestuje zpět do indexu. Tato úvaha mimojiné implikuje, že tržní hodnota takového swapu je bezprostředně po každém výplatním dni nulová.

Pro ocenění akciového swapu mezi dvěma výplatními daty definujeme

R_0	floatová sazba aplikovaná k příštím výplatnímu datu (fixována v poslední výplatní den)
L	nominální hodnota akciového swapu
τ_0	čas mezi výplatním dnem a příštím výplatním dnem
τ	časová perioda mezi současností a následujícím platebním dnem
E_0	hodnota akciového indexu k poslednímu datu fixace
E	současná hodnota akciového indexu
R	sazba LIBOR platná pro období mezi současností a příštím výplatním dnem

Jestliže si půjčíme $\frac{E}{E_0} L$ za sazbu R na časové období τ a tuto částku investujeme do akciového indexu, jedná se výměnu $\frac{E_1}{E_0} L$ za $\frac{E}{E_0} L(1 + R\tau)$, která proběhne k příštím výplatnímu dni. Vzhledem k tomu, že tato výměna je pro případného investora spojena s nulovými náklady, je její současná hodnota rovna nule. V

rámci akciového swapu dojde k příštímú výplatnímu dni v faktické výměně $\left(\frac{E_1}{E_0} - 1\right)L$ za $R_0 L \tau$, což je identické s výměnou $\frac{E_1}{E_0}$ za $L(1 + R_0 \tau_0)$. Porovnáním obou směn získáme, že hodnota akciového swapu pro stranu, která obdrží cash-flow z floatové nohy, je rovna

$$L(1 + R_0 \tau_0) - L \frac{E}{E_0} (1 + R \tau)$$

neboli

$$L \frac{1 + R_0 \tau_0}{1 + R \tau} - L \frac{E}{E_0}$$

Podobně, hodnota akciového swapu pro stranu, která obdrží cash-flow z fixní nohy, je rovna

$$L \frac{E}{E_0} (1 + R \tau) - L(1 + R_0 \tau_0)$$

Akruální swap

Akruální swap je swap, kdy úrok z jedné nohy “nabíhá” pouze tehdy, nachází-li se referenční sazba určitým předem stanoveným koridorem.

Uvažujme swap v rámci kterého je fixní sazba Q směňována za tříměsíční LIBOR na konci čtvrtletí. Předpokládejme, že cash-flow z fixní nohy je vypláceno pouze v případě, že tříměsíční LIBOR pro daný den nepřesáhne 8% p.a. Nechť je nominál swapu L . V případě klasického swapu by fixní noha generovala ve výplatní den cash-flow $Q L n_1 / n_2$, kde n_1 je počet dní v předcházejícím čtvrtletí a n_2 je počet dní v roce. V případě akruálního swapu je toto cash-flow rovno $Q L n_3 / n_2$, kde n_3 je počet dní v předchozím čtvrtletí, kdy referenční sazba nepřesáhla 8%. Cash-flow z akruálního swapu je tak možné replikovat pomocí klasického swapu a sérií binárních opcí (jednou pro každý den života swapového obchodu). Binární opce by generovaly cash-flow $Q L / n_2$ za každý den, kdy je referenční sazba nad stanoveným limitem 8%.

Zobecněme výše uvažovaný příklad. Uvažujme limit pro referenční sazbu R_K (tj. 8% ve výše uvažovaném příkladě). Předpokládejme, že platby jsou směněny každých τ let. Dále uvažujme den i v rámci života swapu. Definujme t_i jako čas do dne i . Nechť τ -roční sazba LIBOR v den i je R_i . Úrok pak nabíhá v případě, že $R_i < R_K$. Definujme F_i jako forwardovou sazbu a σ_i jako volatilitu F_i . Ve světě, který je forwardově rizikově neutrální vzhledem k dluhopisu se splatností v $t_i + \tau$, je za předpokladu lognormálního rozdělení sazeb pravděpodobnost, že sazba LIBOR bude větší než R_K , rovna $N(d_2)$, kde

$$d_2 = \frac{\ln(F_i / R_K) - \sigma_i^2 t_i / 2}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$$

Výplata z binární opce je realizována ve výplatní den akruálního swapu, který následuje den i . Označme tento den jako s_i . Ve světě, který je forwardově rizikově neutrální s ohledem na diskontní dluhopis se splatností v čase s_i , je pravděpodobnost, že sazba LIBOR je větší než R_K , dána $N(d_2^*)$, kde d_2^* je počítáno podle stejného vzorce jako d_2 s tím, že je třeba provést drobnou korekci F_i , která odráží rozdíl mezi $t_i + \tau$ a s_i . Hodnota binární opce odpovídající dni i je pak

$$\frac{Q L}{n_2} P(0, s_i) N(d_2^*)$$

Celková hodnota binárních opcí je pak získána součtem výše uvedeného výrazu přes všechny dny životnosti swapu. Časová korekce (náhrada d_2 za d_2^*) je tak malá, že je v praxi často ignorována.

Svolatelný swap

Svolatelný swap (cancelable swap) je klasický swap, kde jedna strana má právo ukončit obchod v jeden popř. vícero výplatních dní. Ukončení swapového obchodu je ekvivaletní k souběžnému uzavření identického protiswapu. Jestliže je existuje pouze jeden den, ke kterému je možné obchod ukončit, je možné svolatelný swap replikovat pomocí klasického swapu a pozicí v evropské swapové opci.

Svolatelný složený swap

Někdy je možné složené swapy ukončit v určitý výplatní den. V tomto případě hovoříme o tzv. svolatelném složeném swapu (cancelable compounding swap). V den ukončení generuje floatová noha složené úročené cash-flow do dne svolání swapového obchodu. Fixní noha pak generuje složené úročené cash-flow, které odpovídá fixní sazbě do téhož dne.

Předpokládejme nejprve, že floatová sazba je LIBOR a že úroky jsou úročeny také sazbou LIBOR. Dále předpokládejme, že na konci životnosti swapu je vyplácen nominál na fixní i floatové noze. Tento předpoklad, který nezmění hodnotu swapu, má za následek, že hodnota floatové nohy je ve výplatní den vždy rovna nominálu swapového obchodu. Pro účely rozhodování se o zrušení swapového obchodu je tedy možné se soustředit pouze na fixní nohu.

Nejprve je třeba zkonstruovat úrokový strom tak, jak bylo popsáno v předchozí kapitole. Pak se fixní noha oceňuje pomocí tohoto stromu od jeho konce směrem k vrcholu stejně jako v případě amerických opcí. V každém uzlu, ve kterém může být swap zrušen, se kontroluje, zda-li je jeho zrušení optimální. Jestliže jsme stranou, která plní z fixní nohy, je cílem minimalizovat hodnotu fixní nohy. Jestliže plníme z floatové nohy, je naopak cílem hodnotu fixní nohy maximalizovat.

Jestliže je floatová sazba definovaná jako LIBOR navýšená o spread, je možné odečíst cash-flow odpovídající tomuto spreadu od fixní nohy. Swap pak lze ocenit stejně jako ve výše uvedeném případě.

Jestliže je složené úročení cash-flow prováděné sazbou LIBOR navýšenou o spread, je postup následující:

- vypočteme hodnotu floatové nohy pro každé datum, ke kterému je možné zrušit obchod, za předpokladu, že budoucí úrokové sazby jsou rovny forwardovým sazbám
- vypočteme hodnotu floatové nohy pro každé datum, ke kterému je možné zrušit obchod, za předpokladu, že floatová sazba je LIBOR a že úroky jsou složené úročeny opět sazbou LIBOR
- definujeme rozdíl mezi hodnotou swapu podle bodu (1) a (2) jako hodnotu spreadu pro dané datum, ke kterému je možné zrušit obchod

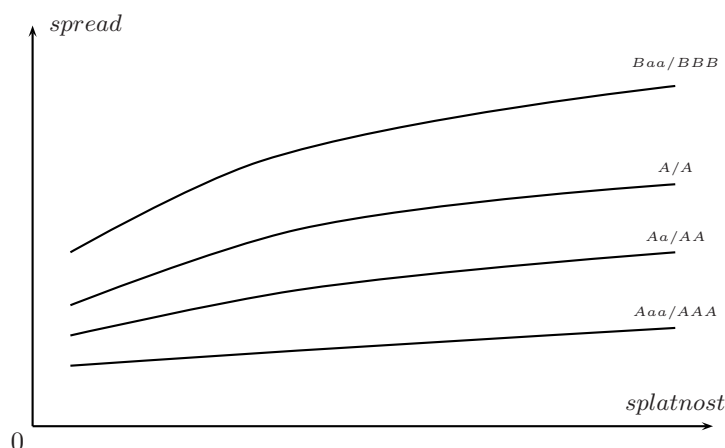
- posuzujeme vnořenou opci stejným způsobem jako ve výše popsaném postupu; v případě, že se budete rozhodovat o zrušení opce, odečtete hodnotu spreadu od hodnot vypočtených pro fixní nohu

Kapitola 21

Kreditní riziko

Hodnocením kreditního rizika korporátních dluhopisů se zabývají společnosti Moody's a S&P. Například podle ratingové stupnice používané společností Moody's je nejlepší rating Aaa. U dluhopisů s tímto ratingem se předpokládá téměř nulová pravděpodobnost vzniku defaultní události. Jinými slovy investování do těchto dluhopisů by mělo obnášet nulové kreditní riziko. Další ratingové stupně jsou Aa, A, Baa, Ba, B a Caa. Pouze ratingové stupně Baa a vyšší jsou považovány za investiční stupně. Ratingová stupnice společnosti S&P je velmi podobná výše uvedené. Odpovídající ratingové stupně jsou AAA, AA, A, BBB, BB, B a CCC.

Obchodníci shromažďují data pro aktivně obchodované dluhopisy, ze kterých pak pro každou ratingovou skupinu počítají zero křivku. Tyto křivky jsou pak použity při oceňování jiných dluhopisů ve stejné ratingové skupině. Následující graf zobrazuje spread zero křivek pro různé ratingové skupiny proti bezrizikové zero křivce zkonstruované ze státních dluhopisů.



Spread zero křivek pro vybrané ratingové skupiny
proti bezrizikové zero křivce

Tento spread se zvětšuje s zhoršujícím se ratingovým stupněm a prodlužující se splatností. Spread také roste rychleji se splatností pro horší ratingové stupně než pro lepší ratingové stupně.

21.1 Očekávaná ztráta z dluhopisů

Prvním krokem při odhadování pravděpodobnosti defaultu dluhopisů je výpočet očekávané ztráty z korporátních dluhopisů pro různé splatnosti. Obvyklým předpokladem je, že současná hodnota očekávané ztráty se rovná rozdílu ceny ekvivalentního bezrizikového dluhopisu a ceny uvažovaného korporátního dluhopisu. Vyšší výnosová míra korporátního dluhopisu tak v rámci této úvahy představuje kompenzaci za případné ztráty z titulu defaultní události.

Splatnost (roky)	Bezriziková zero křivka	Korporátní zero křivka	Očekávaná ztráta (% z nezdefaultované hodnoty)
1	5.00	5.25	0.2497
2	5.00	5.50	0.9950
3	5.00	5.70	2.0781
4	5.00	5.85	3.3428
5	5.00	5.95	4.6390

Hodnota ročního bezrizikového dluhopisu s nominální hodnotou 100 je $100e^{-0.05} = 95.1229$. Hodnota obdobného korporátního dluhopisu je $100e^{-0.0525} = 94.8854$. Současná hodnota očekávané ztráty z titulu defaultní události je tedy $95.1229 - 94.8854 = 0.2375$. Očekávaná relativní ztráta je tedy $0.2375/95.1229 = 0.2497\%$.

21.2 Pravděpodobnost defaultu za předpokladu nulové míry náhrady

Definujeme

- $y(T)$ výnosová míra T -ročního korporátního diskontního dluhopisu
- $y^*(T)$ výnosová míra T -ročního bezrizikového diskontního dluhopisu
- $Q(T)$ pravděpodobnost defaultu společnosti v časovém období 0 až T

Hodnota T -ročního bezrizikového diskontního dluhopisu s nominální hodnotou 100 je $100e^{-y^*(T)T}$ a hodnota obdobného korporátního dluhopisu je $100e^{-y(T)T}$. Očekávaná ztráta z titulu defaultní události za předpokladu nulové míry náhrady je proto

$$100(e^{-y^*(T)T} - e^{-y(T)T})$$

Výpočet pravděpodobnosti $Q(T)$ je tedy relativně snadný. Korporátní dluhopis bude mít v době splatnosti za předpokladu nulové míry náhrady s pravděpodobností $Q(T)$ hodnotu nula a s pravděpodobností $1 - Q(T)$ hodnotu 100. Platí tedy

$$Q(T) \cdot 0 + [1 - Q(T)] \cdot 100e^{-y^*(T)T} = 100[1 - Q(T)]e^{-y^*(T)T}$$

Výnosová míra uvažovaného korporátního dluhopisu je $y(t)$, a proto zároveň platí

$$100e^{-y(T)T} = 100[1 - Q(T)]e^{-y^*(T)T}$$

Pravděpodobnost $Q(T)$ je tedy možné vyjádřit jako

$$Q(T) = \frac{e^{-y^*(T)T} - e^{-y(T)T}}{e^{-y^*(T)T}}$$

21.2.1 Kvantifikace pravděpodobnosti defaultu

Existují dva způsoby kvantifikování pravděpodobnosti defaultu - míra hazardu a hustota pravděpodobnosti defaultu

Míra hazardu $h(t)$ v čase t je definována tak, že $h(t)\delta t$ je pravděpodobnost defaultu v časovém období t až $t + \delta t$ za podmínky, že před tímto obdobím nedošlo k defaultu. Hustota pravděpodobnosti defaultu $q(t)$ je definována tak, že $q(t)\delta t$ je nepodmíněná pravděpodobnost defaultu v období t až $t + \delta t$ tak, jak se jeví v časovém bodě nula. Jak míra hazardu, tak hustota mohou být použity k popisu pravděpodobnosti defaultu - obě poskytují shodnou informaci. Platí totiž

$$q(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}$$

V následujícím textu budeme spíše než míru hazardu používat hustotu pravděpodobnosti defaultu.

Rok	Kumulativní pravděpodobnost defaultu (%)	Pravděpodobnost defaultu v roce (%)
1	0.2497	0.2497
2	0.9950	0.7453
3	2.0781	1.0831
4	3.3428	1.2647
5	4.6390	1.2962

Na výše uvedené tabulce budeme demonstrovat souvislost mezi pravděpodobnostmi defaultu a mírou hazardu. Uvažujme pátý rok. Nepodmíněná pravděpodobnost defaultu je dle této tabulky 1.2962%. Pravděpodobnost, že default nenastane v průběhu prvních čtyř let je pak $1 - 0.033428 = 96.66572\%$. Míra hazardu pro čtyři roky je tedy $0.012962/0.966572 = 1.3410\%$.

21.2.2 Míra náhrady

Až dosud jsme uvažovali nulovou míru náhrady (recovery rate). To znamená, že v případě defaultní události klesla hodnota dluhopisu na nulu. V praxi je však běžnější, že investor získá nazpět alespoň část prostředků. Procento nárokané hodnoty, které takto investor získá, nazýváme mírou náhrady.

Označme míru náhrady jako R . Alternativně k výše uvedené rovnici můžeme pravděpodobnost defaultu $Q(T)$ definovat jako

$$Q(T) = \frac{e^{-y^*(T)T} - e^{-y(T)T}}{(1 - R)e^{-y^*(T)T}} \quad (21.1)$$

Přiblížení se realitě

Rovnice (21.1) je velice často používána jako rychlá aproximace pravděpodobnosti defaultu. Tato rovnice však v sobě nezahrnuje naběhlý úrok a předpokládá, že cena diskontního korporátního dluhopisu je kotovaná na trhu nebo alespoň odvoditelná na základě modelu. V praxi musí být většinou pravděpodobnosti defaultu vypočteny na základě kupónových dluhopisů.

V následujícím textu si popíšeme způsob výpočtu pravděpodobnosti defaultu. Uvažujme skupinu N kupónových dluhopisů, které spadají do stejné

ratingové skupiny. Předpokládejme, že splatnost i -tého dluhopisu je t_i a že platí $t_1 < t_2 < \dots < t_N$.

Definujeme

B_j	dnešní cena j -tého dluhopisu
G_j	dnešní cena j -tého dluhopisu za předpokladu nulové pravděpodobnosti defaultu
$F_j(t)$	forwardová cena j -tého dluhopisu v rámci forwardového kontraktu se splatností v čase t ($t < t_j$) za předpokladu nulové pravděpodobnosti defaultu
$v(t)$	diskontní faktor pro čas t
$C_j(t)$	částka nárokováná majiteli j -tého dluhopisu za předpokladu defaultu v čase t
$R_j(t)$	míra náhrady pro majitele j -tého dluhopisu v případě defaultu v čase t ($t < t_j$)
α_{ij}	současná hodnota ztráty z titulu defaultu j -tého dluhopisu v čase t_i
p_i	pravděpodobnost defaultu v čase t_i

Pro zjednodušení předpokládejme, že úrokové sazby jsou deterministické a že jak míra náhrady tak nárokováná částka jsou známy s jistotou. Cena nezdefaultované hodnoty j -tého dluhopisu v čase t je $F_j(t)$. Jestliže dojde v čase t k defaultu, získá investor část nárokové částky $C_j(t)$ zpět. Tato částka je dána mírou náhrady $R_j(t)$. Z toho vyplývá

$$\alpha_{ij} = v(t_i)[F_j(t_i) - R_j(t_i)C_j(t_i)] \quad (21.2)$$

Pravděpodobnost ztráty α_{ij} je p_i . Celková současná hodnota ztrát z j -tého dluhopisu je tedy dána vztahem

$$G_j - B_j = \sum_{i=1}^j p_i \alpha_{ij}$$

Tato rovnice umožňuje, aby příslušné pravděpodobnosti byly vypočteny rekurzivně. První pravděpodobnost p_1 lze vypočítat na základě

$$p_1 = \frac{G_1 - B_1}{\alpha_{11}}$$

Ostatní pravděpodobnosti jsou definovány jako

$$p_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} p_i \alpha_{ij}}{\alpha_{jj}} \quad (21.3)$$

Jak již bylo řečeno dříve, všechny ze skupiny N dluhopisů musí spadat do stejné ratingové skupiny. To by mělo zajistit, že budou z hlediska pravděpodobnosti defaultu představovat homogenní skupinu. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že míra náhrady bude stejná pro všechny dluhopisy emitované danou společností a bude nezávislá na čase. Označme tuto míru náhrady jako \hat{R} . Rovnice (21.2) se tedy změní na

$$\alpha_{ij} = v(t_i)[F_j(t_i) - \hat{R}C_j(t_i)]$$

Default v libovolném časovém okamžiku

Rovnice (21.3) předpokládá, že k defaultu může dojít pouze v době splatnosti dluhopisu. Nyní tento předpoklad opustíme. Definujme $q(t)$ jako hustotu pravděpodobnosti defaultu. Předpokládejme, že $q(t)$ je konstantní a rovno q_i pro $t_{i-1} < t < t_i$. Jestliže definujeme současnou hodnotu ztráty jako

$$\beta_{ij} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(t)[F_j(t) - \hat{R}C_j(t)]dt$$

pak rovnice

$$q_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} q_i \beta_{ij}}{\beta_{jj}} \quad (21.4)$$

je zobecněním (21.3).

Parameter β_{ij} může být odhadnut pomocí Simpsonova pravidla, které se používá pro výpočet hodnoty určitých integrálů.

Následující tabulky představují porovnání hodnot pravděpodobnosti defaultu vypočtených za předpokladu, že dluhopis může zdefaultovat pouze v okamžiku splatnosti, a předpokladu, že k defaultu může dojít v libovolný okamžik.

Rok	Bezriziková zero křivka (%)	Kupón (%)	Výnosová míra (%)
1	5.0	7.0	6.60
2	5.0	7.0	6.70
3	5.0	7.0	6.80
4	5.0	7.0	6.90
5	5.0	7.0	7.00
10	5.0	7.0	7.20

Informace o korporátním dluhopisu

Rok	Nároková částka (bez naběhlého úroku)	Nároková částka (včetně naběhlého úroku)
1	0.0224	0.0224
2	0.0249	0.0247
3	0.0273	0.0269
4	0.0297	0.0291
5	0.0320	0.0312
10	0.1717	0.1657

Pravděpodobnost defaultu za předpokladu, že k defaultu může dojít pouze v době splatnosti dluhopisu

Rok	Nároková částka (bez naběhlého úroku)	Nároková částka (včetně naběhlého úroku)
0-1	0.0220	0.0219
1-2	0.0245	0.0242
2-3	0.0269	0.0264
3-4	0.0292	0.0285
4-5	0.0315	0.0305
5-10	0.295	0.0279

Pravděpodobnost defaultu za předpokladu, že k defaultu může dojít v libovolný časový okamžik

Nárokovaná částka a aditivita

Jestliže budeme předpokládat, že forwardová cena dluhopisu $F_j(t)$ odpovídá částce $C_j(t)$ nárokované investory v případě defaultu, lze dokázat, že hodnota B_j kupónového dluhopisu je rovna součtu hodnot pokladových diskontních dluhopisů. Tuto vlastnost označujeme jako aditivitu. Aditivita implikuje, že je teoreticky správné vypočítat zero křivku z likvidních dluhopisů a tu následně použít pro ocenění nelikvidních dluhopisů.

Jestliže přijmeme realističtější předpoklad, že $C_j(t)$ je rovno součtu nominální hodnoty a naběhlého úroku v čase t , výše uvedená aditivita neplatí. To v praxi znamená, že neexistuje zero křivka, kterou by bylo možné použít pro ocenění korporátních dluhopisů při dodržení předpokladů o pravděpodobnostech defaultu a míry náhrady.

Asset swapy

V praxi používají obchodníci velice často kotace asset swapů jako kvantifikaci pravděpodobnosti defaultu pro dluhopisy za předpokladu, že LIBOR křivka je bezriziková.

Předpokládejme, že investor vlastní fixní pětiletý korporátní dluhopis, který se momentálně obchoduje za par a vyplácí půlroční kupón 6%. Dále předpokládejme, že LIBOR křivka je plochá na úrovni 4.5% při půlročním úročení. V rámci úrokového swapu by tedy půlroční sazba 6% byla vyměněna za sazbu LIBOR navýšenou o 150 bazických bodů. Investor tedy jako kompenzaci za kreditní riziko obdrží 150 bazických bodů vyplácených pololetně. Současná hodnota této kompenzace je v případě uvažovaného pětiletého dluhopisu rovna 6.65 USD na 100 USD nominální hodnoty. Hodnoty parametrů B_j resp. G_j je tedy 100 USD resp. 106.65 USD. Pro výpočet pravděpodobnosti defaultu je možné použít rovnice (21.3) a (21.4).

Dále uvažujme dluhopis, který má hodnotu 95 USD na 100 USD nominální hodnoty a pololetně vyplácí kupón výši 5% p.a. Opět předpokládejme, že LIBOR křivka je plochá na úrovni 4.5% při půlročním úročení. V tomto případě můžeme uvažovat, že investor nejprve zaplatí 5 USD na 100 USD nominální hodnoty a následně vymění kupón dluhopisu za LIBOR křivku navýšenou o 50 bazických bodů. Platba 5 USD na začátku životnosti swapu odpovídá částce 1.1279 USD za rok vyplácené pololetně po dobu pěti let. Investor tedy požaduje dalších 112.79 bazických bodů jako kompenzaci za tuto platbu. Výsledná platba z floatové nohy asset swapu by tedy byla LIBOR křivka navýšená o 162.79 bazických bodů. Uvažovaných 162.79 USD ročně vyplácených pololetně po dobu pěti let odpovídá ekvivalentu 7.22 USD v současné hodnotě. V tomto případě je tedy $B_j = 95$ a $G_j = 102.22$.

Jestliže máme k dispozici asset swap spready pro dluhopisy s různými splatnostmi, je možné použít rovnice (21.3) a (21.4) pro odhad pravděpodobností defaultu. Kreditní spread závisí na ratingové skupině dluhopisu a jeho splatnosti. Teoreticky by kreditní spread měl záviset také na výši kupónu. V praxi jsou však dluhopisy často málo likvidní a proto se předpokládá, že kreditní spread je stejný pro všechny výše kupónů. Také pravděpodobnosti defaultu jsou velice často určovány na základě historických dat spíše než na základě kreditních spreadů.

21.3 Rizikově neutrální vs. reálný svět

Uvažujme pětiletý dluhopis s nulovou mírou náhrady, jehož výnosové procento je 50 bazických bodů nad LIBOR křivkou a který spadá do ratingové skupiny A. Podle rovnice (21.1) je pravděpodobnost defaultu tohoto dluhopisu $1 - e^{-0.005 \cdot 5} = 0.0247$ neboli 2.47%. Podle historických dat je pravděpodobnost defaultu pouze 0.57%. Za vypočtenou pravděpodobností defaultu se totiž skrývají dva základní předpoklady

- dluhopis je obchodován 50 bazických bodů nad bezrizikovou křivkou
- míra náhrady je rovna nula

V praxi jsou dluhopisy ratingové skupiny A obchodovány často i s vyšší přírážkou než 50 bazických bodů a míra náhrady bývá vyšší než nula. Jestliže bychom zvýšili spread nebo míru náhrady, dojde v rámci výpočtu paradoxně k dalšímu navýšení pravděpodobnosti defaultu. Naše výpočty tedy implikují, že

- hodnota očekávaného cash-flow z korporátního dluhopisu je na konci pětiletého období je o 2.47% nižší než v případě ekvivalentního bezrizikového dluhopisu
- diskontní faktory jsou shodné pro korporátní i bezrizikový dluhopis

Druhý z předpokladů platí v tzv. rizikově neutrálním světě, kde investoři nepožadují dodatečný výnos za podstupované riziko. Jestliže však budeme předpokládat, že

- hodnota očekávaného cash-flow z korporátního dluhopisu je na konci pětiletého období je o 0.57% nižší než v případě ekvivalentního bezrizikového dluhopisu
- sazba, ze které jsou vypočteny diskontní faktory, je o 0.38% vyšší bezriziková sazba

bude rozdíl v ocenění korporátního a bezrizikového dluhopisu opět 2.47 USD na 100 USD nominální hodnoty. Zvýšená diskontní sazba totiž znamená snížení hodnoty korporátního dluhopisu o přibližně $5 \cdot 0.38 = 1.9\%$. V kombinaci s očekávaným nižším cash-flow je výsledný rozdíl $0.019 + 0.0057 = 2.47\%$. Odhadovaná pravděpodobnost defaultu ve výši 0.57% je tedy konzistentní s reálným světem, kde investoři požadují kompenzaci za podstupované riziko.

Logickou otázkou je, zda-li při analýze kreditních rizik používat pravděpodobnost defaultu vypočtenou pro rizikově neutrální nebo reálný svět. Jestliže budeme oceňovat kreditní deriváty nebo odhadovat dopad rizika defaultu na oceňování instrumentů, je třeba použít rizikově neutrální pravděpodobnost defaultu. Důvodem je, že oceňovací techniky jsou založeny na předpokladech rizikově neutrálního světa. Jestliže však budeme připravovat scénáře s cílem kvantifikovat možné dopady ztrát z titulu defaultu, je vhodnější použít pravděpodobnost defaultu pro reálný svět.

21.4 Využití cen akcií pro odhad pravděpodobnosti defaultu

Až dosud jsme pravděpodobnosti defaultu společností odvozovali na základě jejich ratingu. Bohužel ne vždy je tento rating s dostatečnou periodicitou aktualizován.

V roce 1974 představil Merton model, ve kterém je akcie opcí na aktiva společnosti. Pro zjednodušení předpokládáme, že aktiva společnosti tvoří jeden diskontní dluhopis se splatností v čase T . Definujeme

V_0	dnešní hodnota aktiv společnosti
V_T	hodnota aktiv společnosti v čase T
E_0	dnešní hodnota akcie společnosti
E_T	hodnota akcie společnosti v čase T
D	objem úroků a jistiny splatných v čase T
σ_V	volatilita aktiv
σ_E	volatilita akcií

Jestliže $V_T < D$, je (alespoň z teoretického pohledu) pro společnost lepší zdefaultovat v čase T - hodnota akcií je v takovémto případě rovna nula. Jestliže naopak $V_T > D$, společnost by měla v čase T splatit svůj dluh - hodnota akcií je pak $V_T - D$. Platí tedy

$$E_T = \max(V_T - D, 0)$$

Akcie je tedy v podání tohoto modelu kupní opcí na hodnotu aktiv s realizační cenou odpovídající požadované splátce dluhu. S použitím rovnice Black-Scholes pro výpočet ceny opcí pak dostáváme

$$E_0 = V_0 N(d_1) - D e^{-rT} N(d_2) \quad (21.5)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln V_0/D + (r + \sigma_V^2/2)T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

Hodnota dluhu dnes je $V_0 - E_0$. Rizikově neutrální pravděpodobnost, že společnost zdefaultuje je $N(-d_2)$. Pro výpočet této hodnoty je zapotřebí V_0 a σ_V . Jestliže je společnost veřejně obchodovatelná, je E_0 kotováno na trhu. Rovnice (21.5) tak představuje podmínku, kterou musí V_0 a σ_V splňovat. Dále je třeba odhadnout σ_E a to například na základě historického vývoje cen akcie. Z Itô lemmy dále vyplývá

$$\sigma_E E_0 = N(d_1) \sigma_V V_0$$

Tímto jsme získali druhou rovnici, která je zapotřebí pro výpočet parametrů V_0 a σ_V .

Až dosud jsme předpokládali, že všechny dluh společnosti je splatný v jeden okamžik. V praxi však k splácení dluhu dochází ve vícero různých okamžiků. To výše uvedený model poněkud komplikuje, nicméně v zásadě je stále možné uplatňovat opční oceňovací princip pro odhad hodnot parametrů V_0 a σ_V . V návaznosti na to je pak možné odhadovat pravděpodobnost defaultu v různých časech.

Mezi pravděpodobnostmi defaultu dle Mertonova modelu a pravděpodobnostmi defaultu pozorovanými v praxi existuje rozdíl. Nicméně pravděpodobnosti vypočtené dle výše uvedeného modelu mohou být použity jako odhad skutečných pravděpodobností.

21.5 Odhad výše ztráty z titulu defaultu

Uvažujme předpokládanou výši ztráty v případě defaultu. Tato ztráta je označována jako LGD (loss given default). Jestliže tuto ztrátu vynásobíme pravděpodobností defaultu, získáme očekávanou výši ztráty. Předpokládaná ztráta z titulu defaultu je v případě půjčky obvykle definována jako

$$V - R(L + A)$$

kde L je nesplacená jistina, A naběhlý úrok, R míra náhrady a V představuje nezdefaultovanou hodnotu půjčky.

Předpokládaná ztráta z dluhopisu je počítána obdobným způsobem s tím, že L je rovno nominální hodnotě dluhopisu. V případě derivátů je výpočet předpokládané ztráty komplikovanější. Pro tyto účely je možné rozdělit deriváty do tří skupin - (a) deriváty, které jsou vždy závazkem (např. prodaná opce), (b) deriváty, které vždy představují aktivum (např. nakoupené opce) a (c) deriváty, které mohou být jak závazkem, tak aktivem (např. forward). Deriváty spadající do první skupiny neimplikují žádné kreditní riziko - v případě defaultu protistrany nevzniká žádná škoda. Naproti tomu deriváty druhé skupiny s sebou nesou vždy kreditní riziko. V případě poslední skupiny záleží na momentální tržní hodnotě derivátu.

21.5.1 Netting

Další komplikací při odhadování předpokládané ztráty, je tzv. "netting". Tento pojem znamená, že jestliže protistrana zdefaultuje na jeden kontrakt, musí zdefaultovat na všechny nezmaturované kontrakty. Princip nettingu se nejčastěji používá ve finančním sektoru.

Uvažujme finanční instituce A a B. Necht' finanční instituce A má s finanční institucí B uzavřeny tři kontrakty, jejichž tržní hodnoty jsou -5, 2 a 8 miliónů USD z pohledu finanční instituce A. Jestliže by finanční instituce B zdefaultovala, zdefaultovala by pouze na poslední dva kontrakty. Ztráta pro společnost A by tak činila -10 miliónů USD. V případě, že by obě finanční instituce měly uzavřen netting, byla by ztráta pro společnost A pouze -5 miliónů USD.

Předpokládejme, že finanční instituce uzavřela N derivátových obchodů s určitou protistranou. Dále předpokládejme, že nezdefaultovaná hodnota i -tého kontraktu je V_i a míra náhrady je R . Bez nettingu je hodnota tohoto portfolia

$$(1 - R) \sum_{i=1}^N \max(V_i, 0)$$

S nettingem je pak hodnota portfolia rovna

$$(1 - R) \max \left(\sum_{i=1}^N V_i, 0 \right)$$

21.5.2 Snižování expozice na kreditní riziko

Jedním ze způsobů snižování expozice vůči kreditními riziku je tzv. kolateralizace. Uvažujme společnosti A a B. V rámci kolateralizace může být po společnosti A požadováno složení zástavy u společnosti B popř. třetí strany. Účelem této zástavy je krýt případné ztráty z titulu kreditního rizika. Výše požadované zástavy se periodicky reviduje s tím, jak se mění tržní hodnota kontraktu mezi společnostmi A a B.

Dalším způsobem, jak snížit kreditní riziko, jsou tzv. defaultní události. Příkladem takovéto události může být např. snížení ratingu externí ratingovou společností nebo pokles podílu vlastního mění pod stanovenou úroveň. V případě realizace defaultní události se kontrakt stává splatným popř. je zavázaná strana povinna zaplatit smluvní pokutu.

Za způsob snížení kreditního rizika lze považovat také diverzifikaci, která může být vedena v rovině jednotlivých společností, odvětví nebo geografických oblastí. Diverzifikace je také součástí podmínek stanovených nařízením BASEL, které upravuje kapitálové požadavky kladané na finanční instituce.

21.6 Změna kreditního ratingu

Čas od času může dojít k tomu, že se dluhopisy přesunou z jedné ratingové skupiny do jiné. Ratingové společnosti na základě historických map publikují tzv. ratingovou přechodovou matici. Tato matice vyjadřuje pravděpodobnost přesunu z jedné ratingové skupiny do jiné v rámci určitého časového období (obvykle se jedná jeden rok).

Počáteční rating	Rating na konci roku							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	93.66	5.83	0.40	0.09	0.03	0.00	0.00	0.00
AA	0.66	91.72	6.94	0.49	0.06	0.09	0.02	0.01
A	0.07	2.25	91.76	5.18	0.49	0.20	0.01	0.04
BBB	0.03	0.26	4.83	89.24	4.44	0.81	0.16	0.24
BB	0.03	0.06	0.44	6.66	83.23	7.46	1.05	1.08
B	0.00	0.10	0.32	0.46	5.72	83.62	3.84	5.94
CCC	0.15	0.00	0.29	0.88	1.91	10.28	61.23	25.26
Default	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

Pro účely oceňování derivátů, jejichž výplata závisí na kreditním ratingu, je zapotřebí rizikově neutrální ratingové přechodové matice. Její konstrukce je relativně obtížná. Jeden z možných přístupů je založen na ceně dluhopisů. Pro zjednodušení uvažujme pouze tři ratingové skupiny - A, B a C. Písmenem D pak budeme označovat stav defaultu. Následující tabulka obsahuje hypotetické údaje o kumulativní rizikově neutrální pravděpodobnosti defaultu.

Počáteční rating	1 rok	2 rok	3 rok	4 rok	5 rok
A	0.67	1.33	1.99	2.64	3.29
B	1.66	3.29	4.91	6.50	8.08
C	3.29	6.50	9.63	12.69	15.67
D	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

Nechť M je matice 4×4 obsahující rizikově neutrální pravděpodobnosti přechodu z jedné ratingové skupiny do jiné. To znamená, že např. M_{11} představuje pravděpodobnost, že společnost s ratingem A zůstane v této ratingové skupině i po roce. Definujme d_i jako vektor, který představuje i -tý sloupec výše uvedené tabulky. Tento vektor je tak kumulativní pravděpodobností defaultu pro všechny ratingové skupiny v i -tém roce. Z toho vyplývá, že $d_2 = Md_1$, $d_3 = Md_2 = M^2d_1$, $d_4 = Md_3 = M^3d_1$ a $d_5 = Md_4 = M^4d_1$. Existuje devět neznámých členů matice M . Jedná se o členy M_{ij} pro $1 \leq i, j \leq 3$ ¹. Výše uvedená tabulka kumulativních pravděpodobností definuje patnáct rovnic, které musí platit (dluhopisy s rating A, B a C a defaultem v prvním až pátém roce). Proto si vybere uvažovaných devět členů pro minimalizaci součtu rozdílů čtverců pro patnáct vztahů, které jsou dány rozdílem $M^{i-1}d_1$ a odpovídajících členů vektoru d_i ($1 \leq i \leq 5$). Výsledky jsou zobrazeny v následující tabulce.

Počáteční rating	Rating na konci roku				
	A	B	C	D	
A	98.4	0.9	0.0	0.0	0.7
B	0.5	97.1	0.7	0.7	1.7
C	0.0	0.0	96.7	96.7	3.3
D	0.0	0.0	0.0	0.0	100.0

Poznámka: V tomto jsou výsledky dané rizikově neutrální přechodovou tabulkou přijatelné. V praxi toto bohužel není vždy pravidlem. Proto jsou velice často navrhovány metody, které rizikově neutrální přechodovou tabulku odvozují z přechodové tabulky vypočtené na základě historických dat.

21.7 Korelace defaultních událostí

21.7.1 Míry korelace

Korelace jsou v případě kreditního rizika používány pro vyjádření možnosti, že dvě společnosti zdefaultují přibližně v stejný okamžik. Korelace je v tomto případě vypočtena jako korelace mezi dvěma proměnnými, kde každá z těchto proměnných nabývá hodnoty nula nebo jedna podle toho, zda-li u zkoumané společnosti došlo ve sledovaném období k defaultu či nikoliv. Pro období nula až T je tak možné korelaci defaultních událostí vyjádřit jako

$$\beta_{AB}(T) = \frac{P_{AB}(T) - Q_A(T)Q_B(T)}{\sqrt{[Q_A(T) - Q_A(T)^2][Q_B(T) - Q_B(T)^2]}}$$

kde $P_{AB}(T)$ je sdružená pravděpodobnost, že společnost A a B zdefaultují v časovém období 0 až T . Obdobně $Q_A(T)$ resp. $Q_B(T)$ představuje kumulativní pravděpodobnost, že společnost A resp. B zdefaultují v časovém období 0 až T . Vypočtená korelace β_{AB} obvykle závisí na uvažovaném časovém období - s rostoucí délkou se tato korelace zvyšuje.

Dále je možné korelaci defaultních událostí získat z pravděpodobnostního rozdělení času do defaultu. Předpokládejme, že t_A a t_B jsou časy do defaultu

¹Platí totiž $M_{i,4} = 1 - M_{i,1} - M_{i,2} - M_{i,3}$ a $M_{4,j} = 1$ pro $j = 4$. Pro ostatní j jsou tyto členy rovny nule.

společností A a B. Proměnné t_A a t_B nejsou normálně rozdělené, nicméně funkce proměnných t_A a t_B

$$u_A(t_A) = N^{-1}[Q_A(t_A)]$$

$$u_B(t_B) = N^{-1}[Q_B(t_B)]$$

mají normální rozdělení. Korelaci pak definujeme jako

$$\rho_{AB} = \text{corr}[u_A(t_A), u_B(t_B)]$$

Předpokládáme, že proměnné $u_A(t_A)$ a $u_B(t_B)$ mají bivariální normální rozdělení. To znamená, že sdružená pravděpodobnostní funkce časů do defaultu může být popsána pomocí kumulativního pravděpodobnostního rozdělení $Q_A(t_A)$, $Q_B(t_B)$ a ρ_{AB} . Výše popsanou sérii předpokladů označujeme jako Gausovu kopulu.

Přístup pomocí Gausovy kopuly může být použit také v situaci vícero společností. Uvažujme N společností. Označme čas do defaultu i -té společnosti jako t_i . Definujme $Q_i(t_i)$ jako kumulativní pravděpodobnostní rozdělení proměnné t_i a

$$u_i(t_i) = N^{-1}[Q_i(t_i)]$$

pro $1 \leq i \leq N$. Předpokládáme, že proměnné $u_i(t_i)$ mají multivariální normální rozdělení.

21.7.2 Vztahy mezi jednotlivými měřítky korelace

Definujme $M(a, b; \rho)$ jako pravděpodobnost v rámci standardizovaného bivariálního normálního rozdělení, že první proměnná bude menší než a a druhá proměnná menší než b při vzájemné korelaci ρ . Nechť ρ_{AB} je defaultní korelaci mezi A a B v modelu Gausovy kopuly. Předpokládejme, že $u_A(t)$ a $u_B(t)$ jsou transformované časy do defaultu pro společnosti A a B v modelu Gausovy kopule. Z toho vyplývá

$$P_{AB}(T) = M(u_A(T), u_B(T); \rho_{AB})$$

a

$$\beta_{AB}(T) = \frac{M(u_A(T), u_B(T); \rho_{AB}) - Q_A(T)Q_B(T)}{\sqrt{[Q_A(T) - Q_A(T)^2][Q_B(T) - Q_B(T)^2]}}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že je-li známo $Q_A(T)$ a $Q_B(T)$, lze vypočítat $\beta_{AB}(T)$ z ρ_{AB} a naopak. Obvykle je ρ_{AB} výrazně vyšší než $\beta_{AB}(T)$.

21.7.3 Modelování korelace

Pro modelování korelací defaultních událostí se používají dva typy modelů - makroekonomický model a strukturální model.

Makroekonomický model předpokládá, že míra hazardu pro různé společnosti sleduje stochastický proces a je korelována s makroekonomickými ukazateli. Korelace mezi jednotlivými společnostmi je tak dána vývojem vybraných makroekonomických ukazatelů. Tyto modely jsou matematicky atraktivní a odrážejí závislost pravděpodobnosti defaultu na vývoji ekonomických cyklů. Makroekonomické modely je možné nakalibrovat tak, aby odpovídaly historickým defaultním pravděpodobnostem nebo rizikově neutrálním pravděpodobnostem defaultu odvozených z cen korporátních dluhopisů. Hlavní nevýhodou těchto modelů je omezený rozsah korelací, které je možné modelovat.

Strukturální model vychází z myšlenky, že společnost je souborem aktiv. Společnost pak zdefaultuje, jestliže cena jejích aktiv klesne pod určitou kritickou hranici. Korelace defaultních událostí pro jednotlivé společnosti jsou pak dány cenovou korelací mezi portfolii aktiv, které tyto společnosti vlastní. Předpokládá se, že ceny jednotlivých aktiv sledují stochastický proces. Výhodou těchto modelů je, že korelace je možné namodelovat v požadované výši. Nevýhodou je naopak fakt, že tyto modely nejsou konzistentní s pravděpodobnostmi defaultu vypočtenými z historických hodnot nebo cen dluhopisů.

21.8 CVaR

CVaR (Credit Value at Risk) představuje maximální ztrátu, která může s $X\%$ pravděpodobností ve stanoveném časovém období vzniknout z titulu realizace kreditního rizika. V případě CVaR je zkoumané období zpravidla delší než u dříve diskutovaného VaR (běžně jeden rok oproti deseti dnům).

Ztráty z titulu kreditního rizika nevznikají pouze v případě, že dojde k defaultu společnosti. Ke ztrátám může dojít např. při poklesu ratingu společnosti, v důsledku čehož klesne tržní cena jí emitovaných dluhopisů. Při výpočtu CVaR je vhodné vycházet z historických hodnot spíše než z pravděpodobností defaultu odvozených na základě kotací korporátních dluhopisů.

21.8.1 Credit Risk Plus

Credit Risk Plus je metodologií, kterou vyvinula Credit Suisse Financial Products v roce 1997.

Předpokládáme, že finanční instituce má N protistran určitého typu a že pravděpodobnost defaultu každé z těchto protistran do časového okamžiku T je p . Pro očekávaný počet defaultů μ tedy platí

$$\mu = Np$$

Jestliže je p malé a jednotlivé defaulty vzájemně nezávislé, řídí se pravděpodobnost realizace n defaultů ve zkoumaném období Poissonovým rozdělením.

$$P(n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

Náhodná veličina představující počet defaultních událostí v portfoliu protistran může být kombinována s modelem výše ztráty na jednu událost. Tímto způsobem lze snadno odvodit pravděpodobnostní rozdělení celkové ztráty z titulu kreditního rizika.

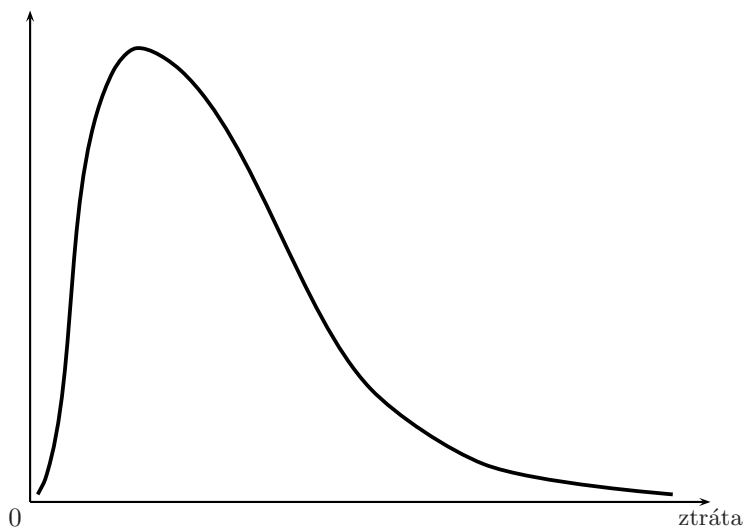
V praxi musí každá finanční situace rozdělovat své protistrany do několika skupin. V tomto případě je třeba provést výše popsanou analýzu pro každou skupinu zvlášť a výsledky zkombinovat.

Výše popsaný postup je možné reaktivně snadno implementovat formou Monte-Carlo pomocí následujících kroků

- simulace celkových defaultních sazeb
- výpočet pravděpodobnosti defaultu pro jednotlivé kategorie protistran
- simulace počtu defaultů v rámci kategorií

- simulace výše ztráty pro každou defaultní událost
- výpočet celkové ztráty

Opakovaným prováděním těchto kroků získáme vektor hodnot náhodné veličiny ztrát z titulu kreditních rizik. Na základě vektoru hodnot je pak možné sestavit pravděpodobnostní rozdělení této náhodné veličiny.



Pravděpodobnostní rozdělení ztráty z realizovaných kreditních rizik

21.8.2 CreditMetrics

J.P.Morgan vyvinul metodu pro výpočet CVaR nazývanou CreditMetrics. Podobně jako Credit Risk Plus využívá tento model metody Monte-Carlo. Pro ilustraci tohoto modelu předpokládáme, že nás zajímá pravděpodobnostní rozdělení kreditních ztrát pro období jednoho roku. V každém kroku simulace se nejprve nasimulují změny ratingu jednotlivých protistran v průběhu roku. Dále se simuluje vývoj rozhodujících tržních ukazatelů. Na základě nasimulovaných hodnot pak přeceníme portfolio. Výhodou tohoto modelu je velká flexibilita², nevýhodou je naopak vysoká náročnost na výpočetní zdroje. V rámci modelu je využívána Gausova kopule k modelování změn ratingů mnoha protistran. Model předpokládá, že korelace mezi normálními proměnnými uvažovaných společností odpovídá korelaci cen jejich akcií.

Modelování změny ratingu

Uvažujme simulaci změny ratingu společnosti s ratingem AAA a BBB v rámci jednoho roku. Pro simulaci použijeme přechodovou matici z kapitoly 21.6 odvozenou na základě historických hodnot. Předpokládáme, že korelace mezi cenou akcií uvažovaných společností je 0.2. V každém kroku simulace vygenerujeme dvě proměnné x a y z normovaného normálního rozdělení a korelaci 0.2.

²Relativně snadno je možné např. implementovat netting.

Proměnná x představuje nový rating společnosti AAA, proměnná y pak nový rating společnosti BBB. Protože

$$N^{-1}(0.9366) = 1.527$$

$$N^{-1}(0.9366 + 0.0583) = 2.569$$

$$N^{-1}(0.9366 + 0.0583 + 0.0040) = 3.062$$

zůstane společnost AAA ve stejné ratingové skupině, pokud $x < 1.527$. Jestliže $1.527 \leq x < 2.569$, přesune se tato společnost do skupiny AA. Pokud $2.569 \leq x < 3.062$, získá tato společnost rating A atd. Podobně pro společnost BBB platí

$$N^{-1}(0.0003) = -3.432$$

$$N^{-1}(0.0003 + 0.0026) = -2.759$$

$$N^{-1}(0.0003 + 0.0026 + 0.0483) = -1.633$$

Proto se společnost přesune do ratingové skupiny AAA pro $y < -3.432$, do skupiny AA pro $-3.432 \leq y < -2.759$ a do skupiny A jestliže $-2.759 \leq y < -1.633$.

Přínos Gausovy kopuly je, že umožňuje aplikovat multivariální normální rozdělení pro účely simulace migrace mezi ratingovými skupinami pro mnoho společností.

Kapitola 22

Kreditní deriváty

Kreditní deriváty jsou kontrakty, kde výplata závisí na vzniku předem definovaných kreditních událostí jedné nebo více entit. Typickými kreditními událostmi jsou vedle již zmiňovaného defaultu např. zhoršení kreditního ratingu, zpoždění s prováděním plateb atd.

22.1 Kreditní swap

Kreditní swap je ve své podstatě pojištěním proti vzniku defaultní události konkrétní protistrany. Majitel tohoto "pojištění" má v případě vzniku kreditní události právo prodat dluhopis emitovaný touto protistranou za jeho nominální hodnotu. Cena kreditního swapu má formu periodických plateb ve prospěch prodejce swapu prováděných až do konce jeho životnosti¹. Jestliže dojde ke kreditní události, je kreditní swapu vypořádán fyzickým dodáním nebo v hotovosti. V případě fyzického dodání získá prodejce dluhopis a majitel swapu hotovost ve výši jeho nominální hodnoty. Jestliže má narovnanou formu hotovosti, je stanovený počet dní po vzniku kreditní události z dostupných kotací na trhu určena průměrná cena dluhopisu Z . Částka, kterou získá majitel swapu, je pak dána $(100 - Z)\%$ z nominální hodnoty dluhopisu.

Cena kreditních swapů, jak ukazuje následující tabulka, je kotována v bazických bodech a odvíjí se od kreditního ratingu a zbytkové doby splatnosti.

Společnost	Rating	Splatnost			
		3 roky	5 let	7 let	10 let
Toyota Motor Corp	Aa1/AAA	16/24	20/30	26/37	32/53
Merrill Lynch	Aa3/AA-	21/41	40/55	41/83	56/96
Ford Motor Company	A+/A-	59/80	85/100	95/136	118/159
Enron	Baa1/BBB+	105/125	115/135	117/158	182/233
Nissan Motor Co. Ltd.	Ba1/BB+	115/145	125/155	200/230	244/274

Namísto toho, aby se banky zbavovaly části svých úvěrů, umožňují kreditní deriváty převod kreditního rizika z jedné společnosti na jinou. Kreditní deriváty tak umožňují aktivně řídit kreditní riziko a měnit jeho strukturu nejen z pohledu jednotlivých společností ale také odvětví nebo geografického rozložení.

¹V případě vzniku kreditní události je poslední platba provedena v poměrné části.

22.1.1 Ocenění

Předpokládejme vzájemnou nezávislost defaultních událostí, úrokových sazeb a měr náhrady. Necht' je nárokováná částka v případě vzniku kreditní události rovna součtu nominální hodnoty a naběhlého úroku. Dále předpokládejme, že ke vzniku kreditní události může dojít pouze v časové okamžiky t_1, t_2, \dots, t_n . Definujme

T	životnost kreditního swapu v letech
p_i	rizikově neutrální pravděpodobnost defaultu v čase t_i
\hat{R}	očekávaná míra náhrady v rizikově neutrálním světě pro daný dluhopis (předpokládá se, že míra náhrady je nezávislá na okamžiku defaultu)
$u(t)$	současná hodnota periodických ročních plateb ve výši 1 USD vyplacených v průběhu časového období nula až t
$e(t)$	současná hodnota plateb v čase t rovna $t - t^*$ USD, kde t^* představuje okamžik platby, která bezprostředně předchází t (t a t^* jsou vyjádřeny v letech)
$v(t)$	současná hodnota 1 USD vyplaceného v čase t
w	roční částka placená majitelem kreditního swapu na 1 USD nominální hodnoty podkladového dluhopisu
s	hodnota w , která má následek nulovou hodnotu kreditního swapu
π	rizikově neutrální pravděpodobnost, že v průběhu životnosti kreditního swapu nedojde ke vzniku kreditní události
$A(t)$	naběhlý úrok z podkladového dluhopisu v čase t jako procento nominální hodnoty

Hodnota π může být odvozena na základě znalosti p_i . Platí totiž

$$\pi = 1 - \sum_{i=1}^n p_i$$

Majitel kreditního swapu hradí ročně částku w a to do konce životnosti swapu nebo do vzniku kreditní události. Současná hodnota těchto plateb je

$$w \sum_{i=1}^n [u(t_i) + e(t_i)] p_i + w \pi u(T)$$

Jestliže dojde v čase t_i ke kreditní události, rizikově neutrální hodnota podkladového dluhopisu jako procenta jeho nominální hodnoty je $[1 + A(t_i)]\hat{R}$. Rizikově neutrální hodnota výplaty generované kreditním swapem je proto

$$1 - [1 + A(t_i)]\hat{R} = 1 - \hat{R} - A(t_i)\hat{R}$$

Současná hodnota očekávané výplaty generované tímto swapem je tak

$$\sum_{i=1}^n [1 - \hat{R} - A(t_i)\hat{R}] p_i v(t_i)$$

Hodnota kreditního swapu z pohledu kupce je tak současná hodnota plateb generovaná swapem snižena o současnou hodnotu plateb hrazených kupcem.

$$\sum_{i=1}^n [1 - \hat{R} - A(t_i)\hat{R}] p_i v(t_i) - w \sum_{i=1}^n [u(t_i) + e(t_i)] p_i + w \pi u(T)$$

Spread kreditního spreadu s odpovídá hodnotě w , pro kterou je níže uvedený výraz roven nule.

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n [1 - \hat{R} - A(t_i)\hat{R}]p_i v(t_i)}{\sum_{i=1}^n [u(t_i) + e(t_i)]p_i + \pi u(T)}$$

Hodnota parametru s odpovídá roční částce, kterou musí hradit majitel nově uzavřeného kreditního spreadu.

Dále je možné analýzu rozšířit o předpoklad, že defaultní události může dojít v libovolném časovém okamžiku. Předpokládejme, že $q(t)$ je rizikově neutrální hustota pravděpodobnost defaultu v čase t . Výše uvedená rovnice pak přejde do tvaru

$$s = \frac{\int_0^T [1 - \hat{R} - A(t)\hat{R}]q(t)v(t)dt}{\int_0^T q(t)[u(t) + e(t)]dt + \pi u(T)} \quad (22.1)$$

22.1.2 Argumenty neexistence arbitráže

Faktory ovlivňující výši spreadu kreditního swapu s lze vysvětlit pomocí předpokladu neexistence arbitráže. Předpokládejme, že investor koupí T -roční dluhopis emitovaný danou protistranou za jeho nominální hodnotu a zároveň nakoupí odpovídající T -roční kreditní swap. Tímto způsobem investor eliminoval většinu kreditního rizika. Dále předpokládejme, že výnosová míra dluhopisu je y . Jestliže nedojde k defaultní události, získá investor roční výnos $y - s$. V případě defaultu získá investor do doby defaultu roční výnos $y - s$ a době defaultu pak získá nominální hodnotu dluhopisu.

Výše uvedené úvahy vedou k závěru, že kombinací dluhopisu a kreditního swapu získává investor bezrizikovou výnosovou míru $y - s$. Předpokládejme, že par výnosová míra² bezrizikového státního dluhopisu je x . V případě neexistence arbitráže by tedy mělo platit $x = y - s$. Nicméně bližší analýza problému ukazuje, že by případná arbitráž nebyla zcela dokonolá a to z následujících důvodů:

- Kreditní swap generuje výplatu nominální hodnoty sniženou o hodnotu dluhopisu po vzniku defaultní události. Pro dokonalou arbitráž by bylo zapotřebí, aby kreditní swap navíc zahrnoval také naběhlý úrok z dluhopisu.
- Dalším předpokladem dokonalé arbitráže je, že investor by musel být schopen získat bezrizikovou výnosovou míru x v období mezi vznikem defaultní události a časem T . Jestliže však struktura úrokových sazeb není plochá nebo úrokové sazby jsou dány stochastickým procesem, budou se skutečné bezrizikové úrokové sazby v době defaultu odlišovat od x .

Definujme $s^* = y - x$. Také definujme průměrný naběhlý úrok a z daného referenčního dluhopisu a průměrný naběhlý úrok a^* z par dluhopisu³ emitovaný stejnou entitou jako referenční dluhopis. Hull a White dokázali, že

$$s = \frac{s^*(1 - \hat{R} - a\hat{R})}{(1 + \hat{R})(1 + a^*)}$$

poskytuje lepší odhad s než samotné s^* .

²Par výnosovou mírou dluhopisu rozumíme takovou výnosovou míru, pro kterou je tržní hodnota dluhopisu rovna 100% jeho nominální hodnoty.

³Par dluhopis je takový dluhopis, jehož tržní hodnota je rovna jeho nominální hodnotě.

22.1.3 Implikované pravděpodobnosti defaultu

Trh kreditních swapů je natolik likvidní, že je mnohými analytiky používán pro výpočet implikovaných pravděpodobností defaultu. Jedná se analogii k opčním trhům, kdy jsou ceny opcí použity pro výpočet implikovaných volatilit.

Předpokládejme, že kreditní swapy pro splatnosti t_1, t_2, \dots, t_n jsou s_1, s_2, \dots, s_n . Uvažujme krokovou funkci pro pravděpodobnost defaultu a definujme q_i jako hustotu pravděpodobnosti defaultu pro časový interval t_{i-1} až t_i . Použijme dřívější označení s tím rozdílem, že $A_i(t)$ představuje naběhlý úrok na i -tý referenční dluhopis v čase t . S použitím (22.1) získáváme

$$s_i = \frac{\sum_{k=1}^i q_i \int_{t_{k-1}}^{t_k} [1 - \hat{R} - A_i(t) \hat{R}] v(t) dt}{\sum_{k=1}^i q_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t) + e(t)] dt + u(t_i) [1 - \sum_{k=1}^i q_k (t_k - t_{k-1})]}$$

Parameter q_i může být iteračně vypočten z výše uvedené rovnice. Definujme $\delta_k = t_k - t_{k-1}$ a

$$\alpha_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (1 - \hat{R}) v(t) dt$$

$$\beta_{k,i} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_i(t) \hat{R} v(t) dt$$

$$\gamma_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t) + e(t)] dt$$

Z toho vyplývá

$$q_i = \frac{s_i u(t_i) + \sum_{k=1}^{i-1} q_k [s_i \gamma_k - s_i u(t_i) \delta_k - \alpha_k + \beta_{k,i}]}{\alpha_j - \beta_{i,j} - s_i \gamma_i + s_i u(t_i) \delta_i}$$

22.1.4 Odhad míry náhrady

Jediný parametrem, který není přímo pozorovatelný na trhu a který je nutný pro oceňování kreditních swapů, je míra náhrady. Naštěstí je ocenění kreditního swapu závislé na míře náhrady pouze okrajově. To je způsobeno tím, že dopad míry náhrady na ocenění kreditního swapu je dvojitý. Míra náhrady totiž ovlivňuje nejen odhad rizikově neutrální pravděpodobnosti defaultu ale také výši výplaty v případě vzniku defaultní události. Tyto dva faktory se do značné míry vzájemně eliminují.

22.1.5 Binární kreditní swapy

Nestandardní kreditní swapy mohou být naopak relativně senzitivní na změnu míry náhrady. Uvažujme binární kreditní swap (binary credit default swap). Binární kreditní swap je podobný klasickému kreditnímu swapu s tím rozdílem, že výplata v případě vzniku kreditní události je konstatní. V tomto případě tak míra náhrady ovlivňuje pouze pravděpodobnost defaultu, avšak nevstupuje do výpočtu výplaty. Například hodnota binárního kreditního swapu s mírou náhrady 50% je přibližně o 80% vyšší než v případě binárního kreditního swapu s mírou náhrady 10%.

22.1.6 Portfoliový kreditní swap

V případě portfoliového kreditního swapu (basket credit default swap) není výplata odvozována od jednoho pokladového aktiva ale od koše podkladových aktiv. Tento swap pak může být nastaven tak, že k výplatě dochází vždy v případě defaultní události libovolného pokladového aktiva. Jedná se tedy o ekvivalent souboru kreditních swapů. Další možností výplata generovaná pouze v případě vzniku první defaultní události - po té swap zaniká.

22.1.7 Risk defaultu na straně prodávajícího

Až dosud jsme v našich úvahách předpokládali, že riziko defaultu společnosti, která prodává kreditní swap, je nulové. Uvažujme pozici majitele kreditního swapu bezprostředně po té, co došlo k defaultu referenční protistrany⁴. Aby byl kupující zajištěn proti defaultu této protistrany, musí koupit nový kreditní swap od nového prodávajícího. Životnost tohoto swapu bude $T - t_D$, kde T je splatnost původního kreditního swapu a t_D je okamžik defaultu původního prodávajícího. Kupující tak ponese ztrátu v případě, jestliže roční cena nového kreditního swapu bude vyšší než cena původního kreditního swapu. Riziko defaultu prodávajícího tedy závisí na

- míře, s jakou trh očekává zhoršení ratingu referenční protistrany
- korelaci pravděpodobnosti defaultu prodávajícího a referenční protistrany

Dopad defaultu prodávajícího je možné kvantifikovat metodou Monte Carlo. Definujme Y jako současnou hodnotu výplaty generované kreditním swapem a C jako současnou hodnotu ročních plateb ve výši 1 USD od současnosti do konce životnosti kreditního swapu nebo do okamžiku defaultu. V každém cyklu simulace budeme modelovat čas defaultu prodávajícího a referenční protistrany. To umožňuje výpočet modelových hodnot parametrů Y a C .

Jestliže nedojde k defaultu prodávajícího kreditního swapu ani referenční protistrany, pak $Y = 0$ a C je rovno současné hodnotě annuity 1 USD vyplácené po celou dobu životnosti swapu. Jestliže dojde nejprve k defaultu referenční protistrany, pak Y představuje výplatu z kreditního swapu a C současnou hodnotu annuity 1 USD vyplácené od současnosti do okamžiku defaultu. Jestliže jako první zdefaultuje prodávající, pak $Y = 0$ a C je opět rovno současné hodnotě annuity 1 USD vyplácené do okamžiku defaultu. Výše kreditního spreadu je průměrnou hodnotou podílu Y a C .

22.2 Totální swap

Totální swap (total return swap) je dohodou o výměně kompletních výnosů z dluhopisu nebo jiného podkladového aktiva za LIBOR sazbu navýšenou o spread. Totální swap tedy zahrnuje kupóny, úroky a zisk resp. ztrátu z pokladového aktiva po dobu životnosti swapu. Totální swap tak umožňuje přenést kreditní riziko.

Totální swap je velmi často používán jako finanční nástroj. Jestliže investor potřebuje finanční prostředky na nákup dluhopisu, je možné namísto klasické

⁴Pojmem "referenční protistrana" budeme rozumět entitu, proti jejíž defaultu se chce majitel kreditního swapu primárně zajistit.

půjčky řešit tuto situaci pomocí totálního swapu. Předpokládejme situaci, kdy finanční instituce uzavře s tímto investorem totální swap. Investor bude platit sazbu LIBOR navýšenou o spread a výměnou za to získá veškeré výnosy generované dluhopisem po dobu životnosti swapu. V praxi to pak zpravidla probíhá tak, že finanční instituce nakoupí dluhopis, ten drží a investorovi vyplácí kupóny po podobu životnosti totálního swapu. Na konci životnosti uvažovaného totálního swapu pak dojde navíc k platbě, která odráží změnu tržní hodnoty dluhopisu po dobu trvání kontraktu. Z pohledu investora je tedy lhostejné, zda-li získal úvěr, za který daný dluhopis nakoupil, nebo zda-li uzavřel totální swap. Z pohledu finanční instituce je však výhodnější totální swap a to z důvodu nižší expozice vůči kreditnímu riziku investora⁵. Z tohoto pohledu se totální swap velice blíží repo operacím⁶, jejichž cílem je také snížit kreditní riziko podstupované věřitelem.

Jestliže budeme předpokládat, že neexistuje riziko defaultu na žádné ze zúčastněných stran, byla by hodnota totálního swapu v libovolném časovém okamžiku rovna hodnotě pokladového dluhopisu snižené o současnou hodnotu plateb odvíjejících se od referenční sazby.

V okamžiku uzavření totálního swapu by jeho hodnota měla být rovna nule. To znamená, že současná hodnota plateb navázaných na referenční sazbu je rovna tržní hodnotě dluhopisu v okamžiku uzavření obchodu. Tyto platby totiž představují “splátku” úvěru ve výši tržní hodnoty dluhopisu. Teoreticky by tak výše spreadu, o kterou se navyšuje referenční sazba LIBOR, měla být rovna nule. V praxi však finanční instituce požadují spread, který má kompenzovat kreditní riziko protistrany. Ta by totiž utrpěla ztrátu v případě defaultu investora a poklesu tržní hodnoty pokladového dluhopisu. Výše tohoto spreadu tak závisí na pravděpodobnosti defaultu investora a emitenta dluhopisu a korelaci mezi těmito dvěma pravděpodobnostmi.

22.3 Opce na kreditní spread

V případě opcí na kreditní spread závisí výplata na výši kreditního spreadu popř. na ceně defaultně senzitivního aktiva. Nejčastěji jsou tyto opce konstruovány tak, že v případě defaultu zanikají. Jestliže chce tedy investor současnou ochranu před zvýšením kreditního spreadu a defaultu protistrany, musí kromě opce na kreditní spread nakoupit také kreditní swap.

Výplata jednoho z typů opcí na kreditní spread je definován jako

$$Dmax(K - S_T, 0)$$

popř.

$$Dmax(S_T - K, 0)$$

kde S_T je specifikovaný kreditní spread v době splatnosti opce a K je realizační spread. Parametr D představuje duraci, která je použita pro převod spreadu

⁵Připomeňme, že pokladový dluhopis je v držení finanční instituce a že kupóny jsou vypláceny postupně proti platbě odpovídající sazbě LIBOR navýšené o dohodnutý spread.

⁶Repo operace je dohodou dvou zúčastněných stran o nákupu a zpětném prodeji pokladového aktiva. Objem pokladového aktiva je při obou transakcích totožný. Cena nákupu a prodeje jsou fixovány v okamžiku sjednání obchodu.

na cenu. Tato opce může být s příslušnou úpravou konvexity oceněna pomocí Black-Scholova modelu za předpokladu, že budoucí spready jsou v případě, že nedojde k defaultní události, lognormálně rozděleny. Klasický Black-Scholův vzorec musí být vynásoben pravděpodobností, že v průběhu životnosti opce nedojde ke vzniku defaultní situace.

Dalším typem opce na kreditní swap je evropská kupní popř. prodejní opce na aktivum, jehož cena je závislá na vzniku defaultní události. Klasickým příkladem takového aktiva je floatový dluhopis. V tomto případě je výplata dána vzorcem

$$\max(K - S_T, 0)$$

popř.

$$\max(S_T - K, 0)$$

kde S_T je cena aktiva v době splatnosti opce a K je realizační cenou aktiva. Pro ocenění takovéto opce je opět možné použít Black-Scholův model za předpokladu, že cena pokladového aktiva má v době splatnosti opce za předpokladu, že nedojde k defaultní události, lognormální rozdělení. Stejně jako v předchozím případě musí být příslušný vzorec vynásoben pravděpodobností, že nedojde ke vzniku defaultní události.

Opce na kreditní spread jsou někdy součástí jiný produktů. Příklady těchto produktů jsou následující:

- garance, že spread nad referenční sazbou v případě půjčky nepřesáhne určitou limitní úroveň
- předplacitelnou půjčku s fixním spreadem nad referenční sazbou
- právo vstoupit do asset swapu
- právo ukončit asset swap
- právo vstoupit do kreditního swapu
- právo ukončit kreditní swap

22.4 Sekuritizované dluhopisy

Sekuritizované dluhopisy, nebo-li CDO (collateralized debt obligation), jsou dluhové cenné papíry, které byly emitovány proti portfoliu úvěrů⁷. Cash-flow generované z těchto pokladových úvěrů je rozděleno do několika skupin - tzv. tranší. Kromě cash-flow se mezi jednotlivé tranše dělí také potenciální ztráty z titulu realizace kreditního rizika. Kreditní riziko jednotlivých tranší je dáno způsobem, kterým se dělí případné kreditní ztráty mezi tranše, a korelací mezi pravděpodobnostmi defaultu jednotlivých dlužníků podkladových půjček.

Jako příklad uvažujme sekuritizovaný dluhopis, který se skládá ze čtyř tranší. První tranše představuje 5% nominální hodnoty pokladových půjček a generuje výnos 35%. První tranše zároveň absorbuje kreditní ztráty až do výše 5% nominálu - jedná se tedy o poměrně rizikové aktivum. Druhá tranše pak

⁷Nejčastěji se jedná o spotřebitelské úvěry, úvěry z kreditních karet nebo hypotéky.

představuje 10% nominální hodnoty, absorbuje kreditní ztráty v rozmezí 5% - 15% nominálu a generuje výnos 15%. Podobně třetí tranše představuje 10% nominálu sekuritizovaného dluhopisu a na její vrub jdou kreditní ztráty v rozmezí 15% - 25% nominální hodnoty. Výnos této tranše je 7.5%. Poslední čtvrtá tranše představuje objemově 75% nominálu a absorbuje kreditní ztráty přesahující 25% nominální hodnoty sekuritizovaného dluhopisu. Její výnos je 6%.

Z výše uvedeného příkladu je patrné, že jednotlivé tranše se liší nejenom výnosem ale také kreditním rizikem. První tranše s sebou přináší nejvyšší výnos ale také nejvyšší kreditní riziko. Čtvrtá tranše naopak generuje nejnižší výnos a nejnižší kreditní riziko. Jednotlivé tranše je možné opatřit ratingem a prodávat samostatně. Sekuritizace tak představuje možnost, jak proti portfoliu půjček s nižším ratingem emitovat cenné papíry s vysokým ratingem. Sekuritizací půjček se zabývají finanční instituce - ty nejčastěji prodávají vyšší tranše s nižším kreditním rizikem a nižší tranše si ponechá ve své portfoliu.

22.5 Úprava cen derivátů o riziko defaultu

Úprava ceny derivátu o riziko defaultu může být poměrně komplikovaná a to z důvodu nettingu, existence zástavních instrumentů, definování tzv. defaultních událostí apod. V této kapitole budeme od těchto případných komplikací odhlížet.

Předpokládejme, že následující dvě skupiny proměnných jsou vzájemně nezávislé

- proměnné ovlivňující hodnotu derivátu v modelovém světě bez existence defaultu
- proměnné ovlivňující výskyt defaultu protistrany a míra náhrady v případě defaultu

Dále předpokládejme, že nárokováná částka v případě defaultu je rovna nezdefaultované hodnotě derivátu a definujeme

$f(t)$ hodnota derivátu v čase t , která zahrnuje možnost defaultu protistrany
 $f^*(t)$ hodnota totožného derivátu v čase t v modelovém světě bez existence defaultu

22.5.1 Deriváty, které jsou aktivy

Příkladem derivátu, který pro jednu ze zúčastněných stran představuje vždy aktivum, je např. opce.

Je možné dokázat, že

$$f(0) = f^*(0)e^{-[y(T)-y^*(T)]T}$$

V této rovnici představuje $y(T)$ výnosovou míru z T -ročního diskontního dluhopisu emitovaného protistranou se stejným ratingem jako protistrana v námi uvažovaném derivátovém kontraktu. $y^*(T)$ reprezentuje výnosovou míru ekvivalentního bezrizikového dluhopisu. Jestliže dojde k defaultu, je ztráta jako procento nezdefaultované hodnoty stejná v případě dluhopisu i derivátu. Protože nezdefaultovaná hodnota dluhopisu a derivátu je nezávislá na pravděpodobnosti defaultu, je procentní snížení ceny derivátu z důvodů rizika defaultu stejné jako

v případě dluhopisu. Hodnota dluhopisu je $e^{[-y(T)-y^*(T)]T}$ krát jeho nezdefaultovaná hodnota. Ten samý závěr platí také pro derivát.

Výše uvedená rovnice demonstruje možnost využití diskontní sazby $y - y^*$ pro výpočet hodnoty $f^*(0)$. Protože $f^*(t)$ je získáno diskontováním očekávaného cash-flow v rizikově neutrálním světě sazbou y^* , je možné f analogicky vypočítat diskontováním očekávaného cash-flow v rizikově neutrálním světě sazbou $y^* + (y - y^*) = y$. Jedna z interpretací této rovnice tedy zní, že bylo použito vyšší diskontní sazby, která odráží riziko defaultu.

Je důležité si uvědomit, že bezriziková sazba vstupuje do klasického ocenění derivátů dvěma způsoby a to (a) při definování očekávaného výnosu podkladového aktiva a (b) při diskontování tohoto očekávaného výnosu. Ve výše uvažovaného rovnici jsme však změnili pouze diskontní sazbu. To znamená, že např. při ocenění derivátů pomocí binomického stromu je třeba jako míru růstu podkladového aktiva použít bezrizikovou sazbu, ale pro diskontování očekávaného cash-flow je třeba použít sazbu, která zohledňuje riziko defaultu.

22.5.2 Deriváty, které mohou být aktivy i pasivy

Příkladem derivátu, který může být pro jednu ze zúčastněných stran jako aktivem tak pasivem, je např. forward a swap.

Nechť k defaultu může dojít pouze v čase t_1, t_2, \dots, t_n . Definujme v_i jako hodnotu kontraktu, který v čase t_i vyplácí $\max[f^*(t_i), 0]$ a u_i jako $u_i = p_i(1-R)$, kde p_i je pravděpodobnost defaultu v čase t_i a R je mírou náhrady. Z rovnice (21.1) vyplývá, že přibližné vyjádření u_i je

$$u_i = e^{-[y(t_{i-1})-y^*(t_{i-1})]t_{i-1}} - e^{-[y(t_i)-y^*(t_i)]t_i} \quad (22.2)$$

kde $y(t)$ resp. $y^*(t)$ jsou výnosovou mírou z korporátních resp. státních dluhopisů se splatností v čase t . Jestliže budeme, stejně jako v předchozí podkapitole, předpokládat, že nároková částka z derivátů je rovna jejich nezdefaultované hodnotě, představuje u_i procentní ztrátu z titulu defaultu v čase t_i . Proměnná v_i představuje současnou hodnotu nároku v čase t_i . Z toho plyne

$$f^*(0) - f(0) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

Demonstrace na příkladě měnového swapu

Předpokládejme, že finanční instituce vstoupí do fixního měnového swapu. V rámci tohoto swapu obdrží úrokové platby v USD a platí úrokové platby v GBP. Nominály v obou měnách jsou vyměněny na konci životnosti swapu. Bližší údaje týkající se tohoto swapu jsou

životnost swapu	5 let
frekvence plateb	roční
GBP úroková sazba	10% ročně
USD úroková sazba	5% ročně
GBP nominál	50 miliónů GBP
USD nominál	100 miliónů USD
počáteční měnový kurz	2.000
volatilita měnového kurzu	15%

Předpokládejme, že USD a GBP zero křivky jsou ploché a konstantní po celou dobu životnosti měnového swapu. Dále předpokládejme, že jedno, dvou, tří, čtyř a pětiroční nezajištěné dluhopisy emitované uvažovanou protistranou by měli spread 25, 50, 70, 85 a 95 bazických bodů nad odpovídající bezrizikovou sazbou. Pro zjednodušení také předpokládejme, že k defaultu protistrany může dojít pouze v den, kdy jsou směňovány úrokové platby. To znamená, že $n = 5$ a $t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_5 = 5$.

Protože úrokové sazby jsou konstantní, víme, že hodnota fiktivního podkladového GBP dluhopisu⁸ je v libovolný platební den t_i 55 miliónů GBP. Podobně hodnota fiktivního pokladového USD dluhopisu je v libovolný platební den t_i 105 miliónů USD. Hodnota swapu v čase t_i je tedy $105 - 55S(t_i)$ USD, kde $S(t)$ je měnový kurz v čase t . Proměnná v_i je hodnotou derivátu, který vyplácí

$$v_i = \max[105 - 55S(t_i), 0]$$

$$v_i = 55 \max[105/55 - S(t_i), 0]$$

miliónů dolarů v čase t_i . To je 55 násobek hodnoty měnové prodejní opce s realizačním kurzem $105/55 = 1.90909$, počátečním měnovým kurzem 2.000, domácí úrokovou sazbou 5% při ročním úročení (4.897% při spojitém úročení), cizoměnovou úrokovou sazbou 10% při ročním úročení (9.531% při spojitém úročení), volatilitou 15% a maturitou t_i . Například hodnota této opce je pro t_3 rovna 0.246403 a v_3 je tedy rovno $55 \cdot 0.246403 = 13.5522$. Parametry u_i je možné vypočíst podle (22.2).

Maturita t_i	u_i	v_i	$u_i v_i$
1	0.002497	5.9758	0.0149
2	0.007459	10.2140	0.0761
3	0.010831	13.5522	0.1468
4	0.012647	16.2692	0.2058
5	0.012962	18.4967	0.2398
Celkem			0.6834

Celkové ocenění rizika defaultu je tedy 0.6834 miliónů USD. Níže uvedená tabulka zobrazuje data pro analogickou kupní měnovou opci.

Maturita t_i	u_i	v_i	$u_i v_i$
1	0.002497	5.9785	0.0149
2	0.007459	5.8850	0.0439
3	0.010831	5.4939	0.0595
4	0.012647	5.0169	0.0634
5	0.012962	4.5278	0.0587
Celkem			0.2404

Celkové ocenění rizika defaultu je oproti prodejní opci výrazně nižší a to na úrovni 0.2404 miliónů USD. Tento příklad demonstruje obecné pravidlo, že finanční instituce má větší expozici na kreditní riziko, když obdrží platby v měně s nižší úrokovou sazbou a platí platby v měně s vyšší úrokovou sazbou. Důvod je ten, že měna s nižší úrokovou sazbou by měla vůči měně s vyšší úrokovou sazbou posilovat. To má v případě měnového swapu za následek relativní posilování

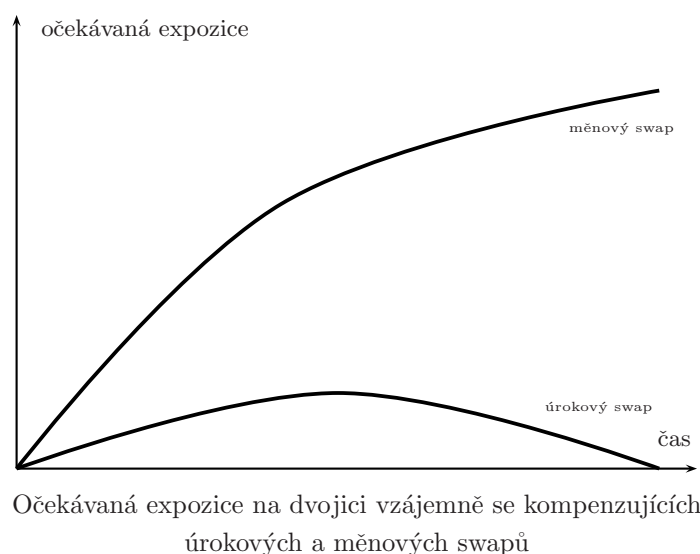
⁸Pouze připomeňme, že každý swap lze rozložit na dvojici fiktivních podkladových dluhopisů, které reprezentují jednotlivé nohy.

hodnoty fiktivního podkladového dluhopisu v měně s nižší úrokovou sazbou vůči hodnotě fiktivního podkladového dluhopisu v měně s vyšší úrokovou sazbou.

Z celkových nákladů rizika defaultu je pak možné na anuitní bázi vypočítat vypočítat roční kreditní spread. Jestliže bychom např. uvažovali výše popsaný měnový swap, který by byl uzavřen ekvivalentním měnovým swapem, pak by celkové náklady rizika defaultu z pohledu finanční instituce byly $0.6834 + 0.2404 = 0.9238$ miliónů USD nebo-li 0.924% nominálu⁹. To, při konstantní úrokové sazbě 5%, odpovídá ročnímu kreditnímu spreadu 21 bazických bodů. Finanční instituce byt tak měla nabízet tento měnový swap dané protistraně s minimálním spreadem 21 bazických bodů.

Úrokový vs. měnový swap

Uvažujme výše popsanou dvojici vzájemně se kompenzujících měnových swapů. Dále uvažujme podobnou dvojici vzájemně se kompenzujících úrokových swapů¹⁰. Dopad kreditního rizika na ocenění úrokových swapů je výrazně nižší než v případě měnových swapů. Důvod je ten, že očekávaná expozice na úrokové swapy začíná na nule, s v průběhu jejich životnosti vrcholí a postupně konverguje zpět k nule. V případě měnových swapů však očekávaná expozice narůstá po celou dobu životnosti. Důvodem vyšší expozice v případě měnových swapů je především finální směna nominálů v době splatnosti.



22.6 Konvertibilní dluhopisy

Majitel konvertibilního dluhopisu je zároveň majitelem opce, která mu umožňuje vyměnit dluhopis za akcie emitenta. Počet akcií, které lze získat za jeden dluhopis nazýváme konverzním poměrem. Konverzní poměr je nejčastěji konstantní,

⁹Implicitní podmínkou je, že se protistrana původního měnového swapu neshoduje s protistranou, se kterou byl sjednán uzavírací obchod.

¹⁰Za podobný úrokový swap považujeme swap se stejným nominálem, frekvencí plateb a fixní popř. pohyblivé úrokové sazby na shodnou měnu.

někdy může být funkcí času. Konvertibilní dluhopisy jsou také většinou svolatelné. To znamená, že jejich emitent je majitelem opce, která mu umožňuje dluhopis odkoupit za předem stanovenou cenu. Majitel dluhopisu má pak v případě jeho svolání právo provést výměnu dluhopisu za akcie. Svolání dluhopisu tak plní funkci vynucené konverze.

Kreditní riziko hraje v ocenění konvertibilního dluhopisu významnou roli. Jestliže bychom ignorovali kreditní riziko, získali bychom nízkou cenu konverzní opce, protože cash-flow generované dluhopisem by bylo za předpokladu, že nedojde k jeho konverzi, nadhodnocené. Důvodem je, že toto cash-flow by bylo diskontováno bezrizikovou úrokovou mírou.

22.6.1 Ocenění konvertibilního dluhopisu

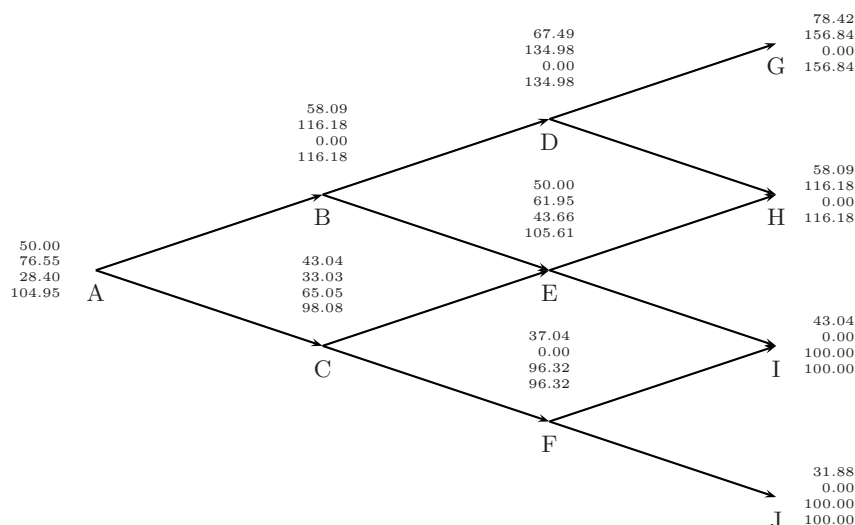
Nejčastěji používaný model pro ocenění konvertibilního dluhopisu vychází z modelování ceny akcie emitenta konvertibilního dluhopisu. Cena akcie se stejně jako v případě opcí modeluje pomocí binomického stromu. Délka binomického stromu se shoduje s životností konvertibilního dluhopisu. Pro konečné uzly binomického stromu je nejprve určena hodnota konvertibilního dluhopisu s ohledem na konverzní opci, kterou vlastní majitel dluhopisu. Následně se v binomickém stromu pokračuje směrem k prvnímu uzlu. V těch uzlech binomického stromu, se kterými je spojeno právo konverze, se testuje zda-li uplatnění konverze optimální. Dále se také testuje, zda-li je z pohledu emitenta konvertibilního dluhopisu vhodné tento dluhopis svolat. V případě, že emitent provede svolání dluhopisu, je třeba znovu testovat optimálnost případné konverze. Tento postup je ekvivalentní stanovení hodnoty konvertibilního dluhopisu v příslušném uzlu jako

$$\max[\min(Q_1, Q_2), Q_3]$$

kde Q_1 je hodnota získaná zpětným průchodem jednotlivých uzlů binomického stromu za předpokladu, že dluhopis nebyl konvertován ani svolán, Q_2 je svolací cena dluhopisu a Q_3 je hodnota dluhopisu v případě provedené konverze.

Jednou z komplikací výše uvedeného postupu je volba vhodné diskontní úrokové sazby. V případě, že by konverzní opce nebyla uplatněna, měla by být použita úroková míra, která by zohledňovala kreditní riziko emitenta. Naopak v případě, že by konverzní opce byla uplatněna, měla by být použita bezriziková úroková míra, protože konvertibilní dluhopis by byl ve skutečnosti akcií. V praxi však dopředu nevíme, zda-li bude konverzní opce uplatněna či nikoliv. Hodnota dluhopisu je tak v každém uzlu binomického stromu rozdělena na dvě části a to (a) cena za předpokladu, že dluhopis bude konvertován na akcii a (b) cenu za předpokladu, že konverzní opce nebude uplatněna.

Příklad: Uvažujme devíti měsíční diskontní dluhopis s nominální hodnotou 100 USD emitovaný společností XYZ. Předpokládejme že tento dluhopis můžeme vyměnit za dvě akcie firmy XYZ v libovolný okamžik v průběhu devítiměsíčního horizontu. Dále předpokládejme, že tento dluhopis může být svolán v libovolný okamžik za cenu 115 USD. Počáteční cena akcie je 50 USD, její roční volatilita 30% a z akcie není ve sledovaném období vyplácena dividendy. Bezriziková úroková sazba je konstantní na úrovni 10% p.a. Úroková míra zohledňující kreditní riziko emitenta XYZ je 15% p.a. Níže uvedený obrázek představuje binomický strom, který může být použit pro ocenění konvertibilního dluhopisu.



Binomický strom pro ocenění konvertibilního dluhopisu

U každého uzlu jsou uvedena čtyři čísla. První z těchto čísel je cenou akcie, druhé číslo reprezentuje hodnotu dluhopisu v případě jeho konverze za akcii (tzv. akciová složka konvertibilního dluhopisu) a třetí číslo představuje hodnotu dluhopisu v případě, že není uplatněna konverzní opce (tzv. dluhová složka konvertibilního dluhopisu). Poslední čtvrté číslo je výslednou hodnotou konvertibilního dluhopisu. Parametry výše uvedeného stromu jsou $u = 1.1618$, $d = 0.8607$, $a = 1.0253$ a $p = 0.5467$.

V konečných uzlech je hodnota konvertibilního dluhopisu rovna $\max[100, 2S_T]$. V uzlu G je hodnota akcie 78.48 USD. Konverzní opce tedy bude uplatněna a hodnota konvertibilního dluhopisu je rovna jeho akciové složce 156.84 USD¹¹. V uzlu I je hodnota akcie 43.04 USD. Konverzní opce tedy nebude uplatněna a hodnota akciové složky konvertibilního dluhopisu je nulová. Hodnota konvertibilního dluhopisu je tak zcela dána jeho dluhovou složkou a je rovna 100.00 USD. S tím, jak postupujeme binomickým stromem směrem k jeho vrcholu, je třeba v každém uzlu provést kontrolu, zda-li je z pohledu majitele optimální uplatnit konverzní opci a z pohledu emitenta provést svolání dluhopisu.

V uzlu D je hodnota akciové složky konvertibilního dluhopisu rovna

$$(0.5467 \cdot 156.84 + 0.4533 \cdot 116.18)e^{-0.10 \cdot 0.25} = 134.98$$

¹¹ $2 \cdot 78.48 = 156.84$ USD

Vzhledem k tomu, že by racionální investor v uzlu D vždy uplatnil konverzní opci, je hodnota dluhové složky konvertibilního dluhopisu nulová. Svolání dluhopisu nebo uplatnění konverzní opce nemění v uzlu D jeho hodnotu, protože se již v podstatě jedná o akcii¹².

Naopak v uzlu F nebude konverzní opce uplatněna a konverzní dluhopis je tak možné považovat za standardní dluhopis. Hodnota akciové složky je tedy nulová a hodnota dluhové složky je rovna

$$(0.5467 \cdot 100.00 + 0.4533 \cdot 100.00)e^{-0.15 \cdot 0.25} = 96.32$$

V případě uzlu E je situace o něco složitější. Hodnota akciové složky je totiž rovna

$$(0.5467 \cdot 116.18 + 0.4533 \cdot 0.00)e^{-0.10 \cdot 0.25} = 61.95$$

a hodnota dluhové složky je rovna

$$(0.5467 \cdot 0.00 + 0.4533 \cdot 100)e^{-0.15 \cdot 0.25} = 43.66$$

Celková hodnota konvertibilního dluhopisu je tedy rovna $61.95 + 43.66 = 105.61$ USD. Je zřejmé, že v uzlu E by dluhopis neměl být svolán ani konvertován na akcie.

V uzlu B je ma akciová složka konvertibilního dluhopisu hodnotu

$$(0.5467 \cdot 134.98 + 0.4533 \cdot 61.95)e^{-0.10 \cdot 0.25} = 99.36$$

a dluhová složka hodnotu

$$(0.5467 \cdot 0 + 0.4533 \cdot 43.66)e^{-0.15 \cdot 0.25} = 19.06$$

Celková hodnota konvertibilního dluhopisu je tak $99.36 + 19.06 = 118.42$ USD. V tomto uzlu je z pohledu emitenta racionální svolat dluhopis, protože to má za následek konverzi dluhopisu a pokles jeho hodnoty na $2 \cdot 58.09 = 116.18$ USD.

Jestliže budeme výše naznačenou logikou postupovat ke špičce binomického stromu, získáme v uzlu A hodnotu konvertibilního dluhopisu rovnou 104.95 USD. Jestliže by dluhopis nebyl svolán, jeho hodnota je $100e^{-0.15 \cdot 0.75} = 89.36$ USD. Hodnota konverzní opce je tedy $104.95 - 89.35 = 15.59$ USD.

V případě, že jsou z akcie ve sledovaném období vypláceny dividendy nebo konvertibilní dluhopis přináší svému majiteli kupóny, je třeba toto cash-flow zohlednit ve výpočtech. Nejprve v každém uzlu předpokládáme, že nebude uplatněna konverzní opce. Do dluhové složky započteme současnou hodnotu všech kupónů vyplácených v následujících uzlech. Po té v průběhu testování, zda-li je optimální uplatnit konverzi dluhopisu, je třeba zohlednit současnou hodnotu dividend vyplácených v následujících uzlech.

¹²Jestliže se emitent rozhodne v uzlu D konvertibilní dluhopis svolat, uplatní jeho vlastní konverzní opci. Jestliže emitent dluhopis nesvolá, bude konverzní opce uplatněna v uzlu G nebo H.

Kapitola 23

Opce na reálná aktiva

23.1 Oceňování budoucího cash-flow současnou hodnotou

Nejčastější způsob oceňování reálných aktiv je pomocí metod, které vycházejí ze současné hodnoty očekávaného cash-flow. Nejznámější oceňovací metodou, která spadá do této skupiny, je NPV (net present value). Nejslabším místem metody NPV je odhad očekávaného cash-flow, který může být v případě některých aktiv, jako např. výrobní podnik, značně komplikovaný.

V rámci metody NPV je nejprve určeno očekávané cash-flow. To je následně diskontováno úrokovou sazbou odrážející rizikovost daného aktiva. Diskontní úrokovou sazbu je možné získat pomocí modelu oceňování kapitálových aktiv (CAPM model). Postup určení úrokové sazby je následující

- Vybereme skupinu společností, jejichž předmět podnikání odpovídá uvažovanému aktivu.
- Vypočteme parametry beta pro dané společnosti. Tyto parametry zprůměrujeme a průměr použijeme jako odhad pro parametr beta uvažovaného aktiva.
- Riziková sazba aktiva je rovna bezrizikové sazbě navýšené o součin parametru beta a rozdílu mezi výnosem akciového indexu a bezrizikové sazbou.

$$r_A = r_f + \beta_A(i_{index} - r_f)$$

Další komplikací NPV metody jsou vnořené opce, které řada aktiv obsahuje. Ty například umožňují investorovi daný projekt předčasně ukončit nebo naopak rozšířit. Vnořené opce s sebou kromě problémů s predikcí očekávaného cash-flow přinášejí také problém při stanovení rizikové úrokové sazby pro základní projekt (tj. projekt bez vnořených opcí). Společnosti, které byly použity pro odhad parametru beta, mají své vlastní vnořené opce, které se ve výpočtu promítají, a nemusí být proto z tohoto pohledu srovnatelné s uvažovaným aktivem.

23.2 Rozšíření rizikově neutrálního ocenění

23.2.1 Jedna podkladová proměnná

Uvažujme aktivum, jehož cena f je funkcí proměnné θ a času t . Předpokládejme, že proměnná θ sleduje proces

$$\frac{d\theta}{\theta} = mdt + sdz$$

kde dz je Wienerův proces. Parametr m je očekávanou mírou růstu a s volatilitou proměnné θ . Cena aktiva f pak sleduje proces

$$df = \mu f dt + \sigma f dz$$

Dle kapitoly 18 platí

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

kde r je bezriziková úroková míra a λ je tržní cenou rizika θ . Protože f je funkcí θ a t , je možné použít Itô lemu k vyjádření μ a σ pomocí parametrů m a s .

$$\begin{aligned}\mu f &= m\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}s^2\theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ \sigma f &= s\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{aligned}$$

Substitucí do první ze dvou uvedených rovnic získáváme diferenciální rovnici

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}(m - \lambda s) + \frac{1}{2}s^2\theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (23.1)$$

Tato rovnice je velmi podobná Black-Scholově diferenciální rovnici (10.7). Jedná se totiž o totožnou rovnici s tím rozdílem, že θ nahrazuje S , tj. cenu akcie s nulovým dividendovým výnosem. Protože θ je dle této diferenciální rovnice cenou aktiva a protože platí $m - r = \lambda s$, lze upravit druhý člen pravé strany rovnice (23.1) do tvaru

$$r\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

Rovnice (23.1) po této substituci odpovídá diferenciální rovnici klasického Black-Scholes modelu, kdy cena derivátu závisí na ceně podkladového aktiva S s dividendovým výnosem q . Cena podkladového aktiva S je v tomto případě představována parametrem θ a pro výnos plynoucí z θ platí $q = r - m - \lambda s$. Očekávaná míra růstu parametru θ je tedy rovna $r - q = m - \lambda s$. Očekávané cash-flow generované derivátem diskontujeme bezrizikovou sazbou r . Obecně platí, že libovolné aktivum, které závisí na θ , můžeme ocenit tak, že snížíme očekávanou míru růstu θ o λs a budeme předpokládat rizikově neutrální svět.

23.2.2 Vícero podkladových proměnných

Uvažujme n proměnných $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_3$, které sledují stochastický proces

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde dz_i představuje Wienerův proces. Parametry m_i a s_i představují očekávanou míru růstu a volatilitu a mohou být funkcí θ_i popř. času t . Korelaci mezi θ_i a θ_j označme jako ρ_{ij} . Proces, který sleduje cena aktiva f závislého na θ_i , má formu

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dz_i$$

Ve výše uvedené rovnici představuje μ očekávanou míru růstu aktiva a $\sigma_i dz_i$ je rizikovou složkou výnosu z titulu parametru θ_i . V kapitole 18 jsme prokázali

$$\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \quad (23.2)$$

kde λ_i je tržní cenou rizika θ_i . S využitím Itô lemy lze μ a σ_i vyjádřit pomocí m_i a s_i . Rovnice (23.2) pak přejde do tvaru

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} (m_i - \lambda_i s_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \rho_{ik} s_i s_k \theta_i \theta_k \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_k}$$

Libovolné aktivum tedy může být oceněno, jako kdyby svět byl rizikově neutrální, za předpokladu, že očekávaná míra růstu každého podkladového parametru je $m - \lambda_i s_i$. Dalším nezbytným předpokladem jsou konstantní volatility s_i a korelační koeficienty ρ_{ij} .

23.2.3 Odhad tržní ceny rizika

Oceňování v rizikově neutrálním světě obchází nutnost stanovení rizikových diskontních faktorů. Nicméně je zapotřebí určit tržní cenu rizika pro jednotlivé parametry θ_i . Jestliže jsou pro daný parametr k dispozici historická data, je možné tržní cenu rizika odvodit pomocí modelu CAPM. Pro zjednodušení předpokládejme, že cena aktiva je výhradně závislá na parametru θ a definujme

μ	očekávaná míra růstu aktiva
σ	volatilita očekávané míry růstu aktiva
λ	tržní cena rizika parametru θ
ρ	korelace mezi procentní změnou ceny aktiva a akciového indexu
μ_m	očekávaná míra růstu akciového indexu
σ_m	volatilita očekávané míry růstu akciového indexu
r	krátkodobá bezriziková úroková sazba

Ze spojitého modelu CAPM získáváme

$$\mu - r = \frac{\rho \sigma}{\sigma_m} (\mu_m - r)$$

Dále v souladu s kapitolou 18 platí

$$\mu - r = \lambda \sigma$$

Z toho vyplývá

$$\lambda = \frac{\rho}{\sigma_m} (\mu_m - r)$$

Tuto rovnici je možné použít pro odhad tržní ceny rizika parametru θ . V případě, že nejsou k dispozici historická data, je možné použít data pro podobné parametry.

Dalším problematickým místem je hodnota korelace ρ , která musí být často stanovena odhadem.

23.3 Postup při oceňování nového projektu

Klasické metody oceňování jako např. P/E pro dané odvětví násobené aktuálními tržbami nemusí být v případě nových projektů aplikovatelné¹. Vhodnější je projekt ocenit pomocí odhadu budoucích tržeb a cash-flow v rámci několika scénářů možného vývoje (projekce prodejů, nákladů, marží atd.). Možný vývoj klíčových parametrů by měl být popsán pomocí stochastických procesů. Hodnota projektu je určena jako současná hodnota očekávaného cash-flow diskontovaná bezrizikovou sazbou.

V roce 2000 Schwartz a Moon aplikovali tento postup na ocenění tehdy začínající firmy Amazon. Předpokládali, že tržby R jsou dány stochastickým procesem

$$\frac{dR}{R} = \mu dt + \sigma(t) dz_1$$

kde

$$d\mu = \kappa(\tilde{\mu} - \mu)dt + \eta(t)dz_2$$

Očekávaná míra tržeb je tedy μ , která sama sleduje stochastický proces s dlouhodobým průměrem $\tilde{\mu}$ a kovergencí κ k tomuto dlouhodobému průměru. Volatilita tržeb $\sigma(t)$ v rámci modelu klesala z původní hodnoty 10% za čtvrtletí na 5% za čtvrtletí. Směrodatná odchylka růstu tržeb $\eta(t)$ je také deterministická a klesá z 3% za čtvrtletí na nulu. Počáteční úroveň tržeb byla 356 miliónů USD za čtvrtletí a počáteční míra růstu tržeb byla 11% za čtvrtletí. Hodnoty parametrů κ a $\tilde{\mu}$ byly nastaveny na 7% a 1.5% za čtvrtletí. Uvažované Wienerovy procesy dz_1 a dz_2 nejsou korelované. Schwartz a Moon dále předpokládali, že náklady na prodané zboží představuje 75% tržeb, ostatní variabilní náklady představují 19% z tržeb a fixní náklady jsou ve výši 75 miliónů USD za čtvrtletí. Počáteční daňově uznatelná ztráta z titulu založení podniku představovala 559 miliónů USD a míra zdanění byla uvažována na úrovni 35%. Tržní cena rizika λ_R parametru R byla odhadnuta s pomocí historických dat. Tržní cena rizika parametru μ byla odhadnuta na nulu. Rizikově neutrální proces pro R je tedy

$$\frac{dR}{R} = (\mu - \lambda_R \sigma)dt + \sigma dz_1$$

zatímco rizikově neutrální proces sledovaný μ zůstal beze změny.

Časový horizont analýzy byl stanoven na 25 roků a konečná hodnota projektu byla odhadnuta na desetinásobek operačního zisku před zdaněním. Dále bylo uvažováno, že počáteční hotovost v rámci projektu je 906 miliónů USD a že projekt zbankrotuje v případě, že kumulativní ztráta přesáhne tuto částku. Jednotlivé budoucí scénáře byly modelovány pomocí metody Monte Carlo.

¹Jedním z důvodů je také to, že nové projekty mívají často zpočátku záporné cash-flow.

23.4 Ceny komodit

V řadě případů je možné pro odhad rizikově neutrálního procesu, který sledují ceny komodit, použít ceny futures. Komodity jsou tedy podobné dosud uvažovaným investičním aktivům v tom, že je možné obejít přímý výpočet tržní ceny rizika. V rizikově neutrálním světě je očekávaná budoucí cena komodit rovna ceně futures této komodity. Jestliže budeme předpokládat, že míra růstu ceny komodity je funkcí času a že volatilita je konstantní, je rizikově neutrální proces ceny komodity S dán vztahem

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)dt + \sigma dz \quad (23.3)$$

a cena futures vztahem

$$F(t) = \hat{E}[S(t)] = S(0)e^{\int_0^t \mu(\tau)d\tau}$$

kde \hat{E} značí očekávanou cenu komodity v rizikově neutrálním světě. Dalšími úpravami získáváme

$$\ln F(t) = \ln S(0) + \int_0^t \mu(\tau)d\tau$$

$$\mu(t) = \frac{\partial}{\partial t} [\ln F(t)]$$

23.4.1 Modelování ceny komodit pomocí trinomického stromu

Rovnice (23.3) může být považována za zjednodušenou. V praxi totiž ceny komodit zpravidla oscilují kolem dlouhodobého průměru. Jako vhodnější by se pak jevila rovnice

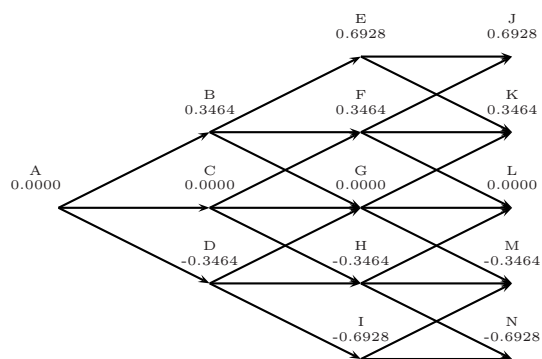
$$d \ln S = [\theta(t) - a \ln S]dt + \sigma dz \quad (23.4)$$

Rovnice (23.4) je tak analogií k modelům krátkodobých úrokových sazeb. Pro modelování tohoto procesu je možné použít trinomický strom a dlouhodobý průměr $\theta(t)$ je možné odhadnout ze vztahu $F(t) = \hat{E}[S(t)]$.

Ilustrujme tento postup pomocí trinomického stromu pro ropu. Předpokládejme, že spotová cena ropy je 20 USD za barel a jednoroční, dvouroční a tříleté futures mají cenu 22 USD, 23 USD a 24 USD. V rovnici (23.4) použijme parametry $a = 0.1$, $\sigma = 0.2$. Nejprve definujme pomocnou proměnnou X , jejíž počáteční hodnota je nula a která sleduje proces

$$dX = -adt + \sigma dz$$

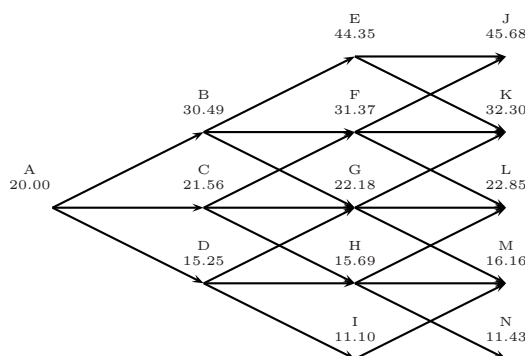
S využitím postupu popsaného v kapitole 20.1.6 je možné zkonstruovat trinomický strom.

Trinomický strom proměnné X

Proměnná S sleduje stejný proces jako X navýšený o trend, který je funkcí času. Trinomický strom náhodné veličiny S je tak možné získat posunutím trinomického stromu náhodné veličiny X . Počáteční cena ropy je 20 USD. Výchozí bod pro modelování náhodné veličiny S tak bude $\ln 20$. Hodnoty náhodné veličiny X na konci prvního roku jsou 0.3464, 0.0000, -0.3464. Uvažujme, že posunutí náhodné veličiny S proti náhodné veličině X na konci prvního roku je α_1 . Odpovídající hodnoty $\ln S$ jsou tak $3.464 + \alpha_1$, α_1 a $-3.464 + \alpha_1$. Modelované hodnoty S jsou tak rovny $e^{3.464+\alpha_1}$, e^{α_1} a $e^{-3.464+\alpha_1}$. Zároveň požadujeme, aby se očekávaná hodnota S rovnala ceně futures. Musí tedy platit

$$0.1667e^{3.364+\alpha_1} + 0.6666e^{\alpha_1} + 0.1667e^{-3.364+\alpha_1} = 22$$

Řešením této rovnice je $\alpha_1 = 3.071$. Modelované hodnoty S na konci roku jsou tedy 30.49, 21.56 a 15.25. Stejným způsobem lze vypočítat parametry posunu α_2 a α_3 pro druhý a třetí rok.

Trinomický strom proměnné S

23.5 Ocenění opcí v investičním projektu

Řada investičních projektů obsahuje vnořenou opci, která může mít významný vliv na jeho výsledné ocenění. Opce mají často charakter rozšíření popř. ukončení projektu.

Uvažujme firmu, která se rozhodla investovat 15 miliónů USD do těžby 6 miliónů barelů ropy. Uvažovaný projekt trvá tři roky a během každého roku vytěží 2 milióny barelů ropy. Fixní náklady projektu jsou 6 miliónů USD ročně a variabilní náklady jsou 17 USD na vytěžený barel. Předpokládejme, že bezriziková úroková sazba je 10% p.a. po celou dobu životnosti projektu. Dále předpokládejme, že spotová cena ropy je 20 USD za barel a ceny futures po následující tři roky jsou 22 USD, 23 USD a 24 USD za barel. Vývoj ceny ropy je dán (23.4) s parametry $a = 0.1$ a $\sigma = 0.2$. Pro modelování vývoje ceny ropy v rizikově neutrálním světě je tedy možné použít výše odvozený trinomický strom.

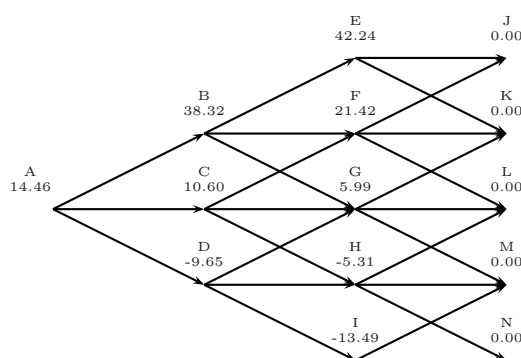
23.5.1 Projekt bez vnořené opce

Nejprve předpokládejme, že projekt nemá vnořenou opci. Očekávaná cena ropy v rizikově neutrálním světě odpovídá cenám futures, tj. 22 USD, 23 USD resp. 24 USD v prvním, druhém resp. třetím roce životnosti projektu. Očekávaná výplata generovaná projektem tedy může být na základě údajů o nákladech a trinomického stromu vývoje cen ropy stanovena na 4.0, 6.0 a 8.0 miliónů USD v prvním, druhém a třetím roce životnosti projektu. Hodnota projektu je tedy

$$-15.0 + 4.0e^{-0.1 \cdot 1} + 6.0e^{-0.1 \cdot 2} + 8.0e^{-0.1 \cdot 3} = -0.54$$

Uvažovaný projekt by tedy neměl být realizován.

Následující trinomický strom představuje hodnotu projektu v jednotlivých uzlech. Tento trinomický strom by zkonstruován na základě údajů o nákladech projektu a trinomického stromu ceny ropy S .



Projekt bez vnořené opce

Níže uvedená tabulka představuje pravděpodobnosti přesunu mezi jednotlivými uzly. V trinomickém stromě je možné se z každého uzlu přesunout do tří sousedících vyšších uzlů.

Uzel	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Uvažujme uzel H. V tomto uzlu je pravděpodobnost 0.2217, že cena ropy bude na konci třetího roku 22.85 USD za barel, což představuje zisk $2 \cdot 22.85 - 2 \cdot 17 - 6 = 5.70$ miliónů USD. Obdobně pravděpodobnost, že cena se posune na 16.16 USD za barel, je 0.6566 a pravděpodobnost, že cena bude na úrovni 11.43 USD je 0.1217. Při těchto cenách skončí projekt ve ztrátě -7.68 resp. -17.14 miliónů USD. Hodnota projektu v uzlu H je tedy

$$[0.2217 \cdot 5.70 + 0.6566 \cdot (-7.68) + 0.1217 \cdot (-17.14)]e^{-0.1 \cdot 1} = -5.31$$

Hodnotu projektu je nutné analogicky počítat od koncových uzlů až k vrcholu trinomického stromu. Ve výchozím uzlu A je hodnota projektu 14.46 miliónů USD. Vezmeme-li v potaz prvotní investici 15 miliónů USD, je výsledná hodnota projektu -0.54 miliónů USD.

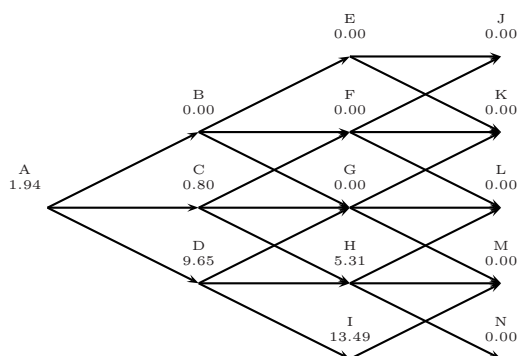
23.5.2 Projekt s vnořenou opcí

Ukončení projektu

Předpokládejme, že máme možnost ukončit projekt s nulovými náklady v libovolný čas. Jedná se tedy o americkou opci s nulovou realizační cenou. Cena této opce je namodelována v níže uvedeném trinomickém stromě. Trinomický strom opce lze snadno odvodit od trinomického stromu projektu bez vnořené opce. Hodnota opce v jednotlivých uzlech je

$$v = -\text{MIN}(0, P)$$

kde P je hodnota projektu bez vnořené opce v odpovídajícím uzlu.



Vnořená americká prodejní opce

Pomocí trinomického stromu projektu bez vnořené opce a trinomického stromu pro vnořenou opci je možné ocenit projekt s uvažovanou vnořenou opcí. Jestliže se podíváme na trinomický strom projektu bez vnořené opce, je zřejmé že by vnořená opce s ohledem na hodnotu projektu neměla být uplatněna v uzlech E, F a G a naopak měla být uplatněna v uzlech H a I. V bodech H a I je hodnota 5.31 a 13.49 miliónů USD. V uzlu D je hodnota opce, pokud nebude uplatněna, rovna

$$(0.1217 \cdot 13.49 + 0.6566 \cdot 5.31 + 0.2217 \cdot 0)e^{-0.1 \cdot 1} = 4.64$$

Hodnota uplatnění vnořené opce v uzlu D je 9.65^2 , a proto by mělo dojít k uplatnění opce. Podobně hodnota opce v uzlu C je rovna

$$(0.1667 \cdot 0 + 0.6666 \cdot 0 + 0.1667 \cdot 5.31)e^{-0.1 \cdot 1} = 0.80$$

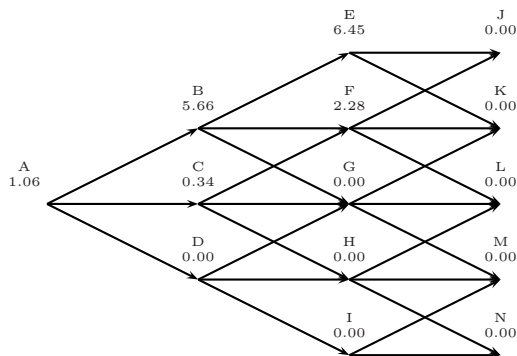
a v uzlu A rovna

$$(0.1667 \cdot 0 + 0.6666 \cdot 0.80 + 0.1667 \cdot 9.65)e^{-0.1 \cdot 1} = 1.94$$

Hodnota vnořené opce na začátku projektu je tedy rovna 1.94 miliónů USD. Hodnota projektu je tedy $1.94 - 0.54 = 1.40$ miliónů USD.

Rozšíření projektu

Předpokládejme, že máme možnost zvýšit těžbu o 20%, tj. o 0.40 miliónů barelů. Variabilní náklady zůstanou na úrovni 17 USD za barel ropy a fixní náklady vzrostou o 20%, tj. o 2 milióny USD.



Vnořená americká prodejní opce

V uzlu E by měla být opce uplatněna. Výplata z jejího uplatnění je $0.2 \cdot 42.24 - 2 = 6.45$. Podobně uplatnění opce v uzlu F generuje výplatu $0.2 \cdot 21.42 - 2 = 2.28$. V uzlech G, H a I by opce uplatněna být neměla. U uzlu B generuje okamžité uplatnění opce vyšší platbu než její případné uplatnění v budoucnu, a proto je hodnota opce v tomto uzlu dána

$$0.2 \cdot 38.32 - 2 = 5.66$$

²Uplatnění opce umožní vyhnout se očekávané ztrátě ve výši -9.65 miliónů USD.

Naopak v uzlu C je hodnota opce v případě jejího možného pozdějšího uplatnění

$$(0.1667 \cdot 2.28 + 0.6666 \cdot 0 + 0.1667 \cdot 0.00)e^{-0.1 \cdot 1} = 0.34$$

zatímco hodnota v případě jejího okamžitého uplatnění je pouze

$$0.2 \cdot 10.80 - 2 = 0.16$$

V uzlu C tedy není optimální uplatnit opci a její hodnota je rovna 0.34 miliónů USD. V bodě A je hodnota opce v případě jejího neuplatnění rovna

$$(0.1667 \cdot 5.66 + 0.6666 \cdot 0.34 + 0.1667 \cdot 0.00)e^{-0.1 \cdot 1} = 1.06$$

zatímco v případě jejího neuplatnění pouze $0.2 \cdot 14.46 - 2 = 0.89$. Okamžité uplatnění opce není tedy v bodě A optimální a celková hodnota projektu s touto vnořenou opcí je tedy $1.06 - 0.54 = 0.52$ miliónů USD.

23.5.3 Vícero vnořených opcí

V případě, že má projekt vícero vnořených opcí, nejsou tyto opce zpravidla nezávislé. Hodnota portoflia opcí A a B tak zpravidla neodpovídá součtu hodnot opce A a B. Jako příklad uvažujme situaci, kdy společnost má možnost realizovat projekt s vnořenou opcí na jeho ukončení popř. rozšíření. Je logické, že projekt nemůže být rozšířen, jestliže byl před tím ukončen. Vzájemné iterace vnořených opcí lze vyřešit tak, že v každém uzlu trinomického stromu budeme definovat čtyři možné stavy

- projekt nebyl rozšířen ani ukončen
- projekt byl rozšířen a nebyl ukončen
- projekt nebyl rozšířen a byl ukončen
- projekt byl rozšířen a ukončen

S tím, jak postupujeme od koncových uzlů trinomického stromu k jeho vrcholu, je třeba vypočítat hodnotu opcí pro všechny čtyři varianty. Z těchto dílčích výsledků je pak možné "poskládat" výsledný trinomický strom.

Složitost výpočtu roste exponenciálně s počtem vnořených opcí. V těchto případech je vhodnější ocenit projekt pomocí metody Monte Carlo.