Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов»

Вариант 4 / 1 / 3

Выполнил:

студент 103 группы

Ершов М. А.

Преподаватель:

Батузов К. А.

Москва 2016

Содержание:

Постановка задачи

Необходимо было реализовать программу, позволяющую найти площадь фигуры, ограниченной графиками трех функций

1) $f_1 = e^x + 2$
2) $f_2 = -\frac{1}{x}$
3) $f_3 = -\frac{2}{3}(x + 1)$

Вычисление абсцисс точек пересечения необходимо было выполнить методом деления отрезка пополам. Первое приближение требуется вычислить аналитически. Далее, использую формулу Симпсона, необходимо вычислить искомую площадь фигуры. Функции поиска корней и интегрирования должны были быть реализованы на Си, описание функций и их производных на языке ассемблера (NASM). Точность вычислений **ε** = 0.001

Математическое обоснование

Можно построить эскизы графиков функций и убедиться, что они пересекаются.

1) $f_1 = e^x + 2$

2) $f_2 = -\frac{1}{x}$

3) $f_3 = -\frac{2}{3}(x+1)$

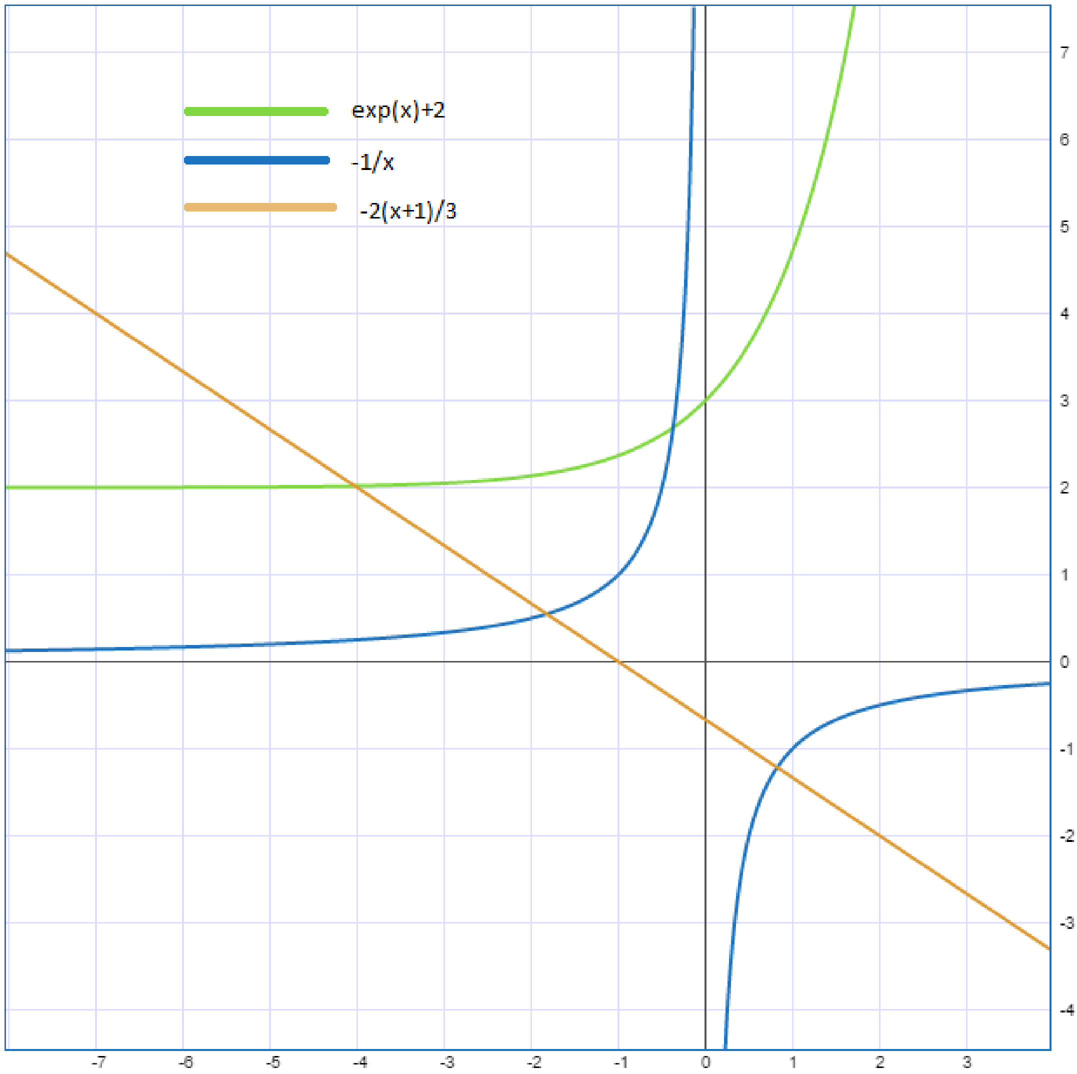

Рис.1 Графики функций

Метод деления отрезка пополам.

$f_1(x) = f_2(x)$

$F(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$

Для использования метода деления отрезка пополам F(a) и F(b) (где [a,b] - отрезок в котором присутствует только одна точка, в которой функция принимает значение 0), должны принимать значения с разными знаками. Также на всем отрезке [a, b] функция F(x) должна быть непрерывна. [1][2]

Выберем границы отрезков.

1) [-2, -0.1]: $f_1(-2) - f_2(-2) > 0$; $f_1(-0.1) - f_2(-0.1) < 0$;

2) [-5, -3]: $f_1(-5) - f_3(-5) < 0$; $f_1(-3) - f_3(-3) > 0$;

3) [-3, -1]: $f_2(-3) - f_3(-3) < 0$; $f_2(-1) - f_3(-1) > 0$;

Формула Симпсона.

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \approx \int_a^b \boldsymbol{p_2(x)dx} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{6}}(\boldsymbol{f(a)} + \boldsymbol{4f}(\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}) + \boldsymbol{f(b)})$$

Необходимо воспользоваться составной формулой для более точного вычисления значения интеграла:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \approx \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{f(a)} + \boldsymbol{2}\sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{f(a + 2ih)} + \boldsymbol{4}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(a + (2i+1)h)} + \boldsymbol{f(b)})$$

где $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{n}}$.

Отрезок [a, b] разбивается на n отрезков одинаковой длины и на каждой паре соседей применяется формула Симпсона.

Выбор точности:

Пусть абциссы были вычислены с точностью ε1 = 0.00002. Тогда площадь под графиком будет вычислены с точностью ε2 = 0.0002.

$$\int_{a+\varepsilon 1}^{b-\varepsilon 1} \boldsymbol{f_1(x)\,dx} \le \int_a^b \boldsymbol{f_1(x)\,dx} \le \int_{a-\varepsilon 1}^{b+\varepsilon 1} \boldsymbol{f_1(x)dx}$$

Пусть I – вычисленное значение интеграла. Докажем, что погрешность не превысит 0.001.

$$\boldsymbol{I-\ 0.0003 \le \int_{a+\varepsilon 1}^{b-\varepsilon 1} f_1(x)\,dx + \varepsilon 2 \le I \le \int_{a-\varepsilon 1}^{b+\varepsilon 1} f_1(x)dx +\ \varepsilon 2 \le I + 0.0003}$$

Докажем, например, правое равенство:

$$\boldsymbol{\int_{x_{13}-\varepsilon 1}^{x_{12}+\varepsilon 1} f_1(x)dx +\ \varepsilon 2 = \int_{x_{13}-\varepsilon 1}^{x_{13}} f_1(x)dx + \int_{x_{12}}^{x_{13}} f_1(x)dx + \int_{x_{12}}^{x_{12}+\varepsilon 1} f_1(x)dx +\ \varepsilon 2 \le}$$

$$\boldsymbol{\le\ \varepsilon 1 * f_1(x_{13})dx + I + \varepsilon 1 * f_1(x_{12})dx +\ \varepsilon 2 \le I + 5\varepsilon 1 + \varepsilon 2 = I + 0.0003}$$

Также можно показать:

$$\boldsymbol{I-\ 0.0003 \le \int_{a+\varepsilon 1}^{b-\varepsilon 1} f_1(x)\,dx + \varepsilon 2 \le I}$$

Аналогично доказывается для остальных интегралов. Таким образом каждый интеграл вычисляется с точностью 0.0003.

Следовательно погрешность в вычислении площади:

$$\boldsymbol{I_1 +\ 0.0003 - (I_2 - 0.0003 + I_3 - 0.0003) = S + 0.0009}$$

$$\boldsymbol{I_1 -\ 0.0003 - (I_2 + 0.0003 + I_3 + 0.0003) = S - 0.0009}$$

Таким образом, вычисленная площадь лежит в диапазоне ($S - \varepsilon\,, S + \varepsilon$), т.е. отличается от правильной не более, чем на ε.

Результаты экспериментов:

Точки пересечения кривых:

Кривые	x	y
Экспонента и гипербола	-0.37171	2.69001
Экспонента и прямая	-4.02687	2.01782
Гипербола и прямая	-1.82299	0.54865

Таблица 1. Координаты точек пересечения

Полученная площадь фигуры:

S = 3.5636

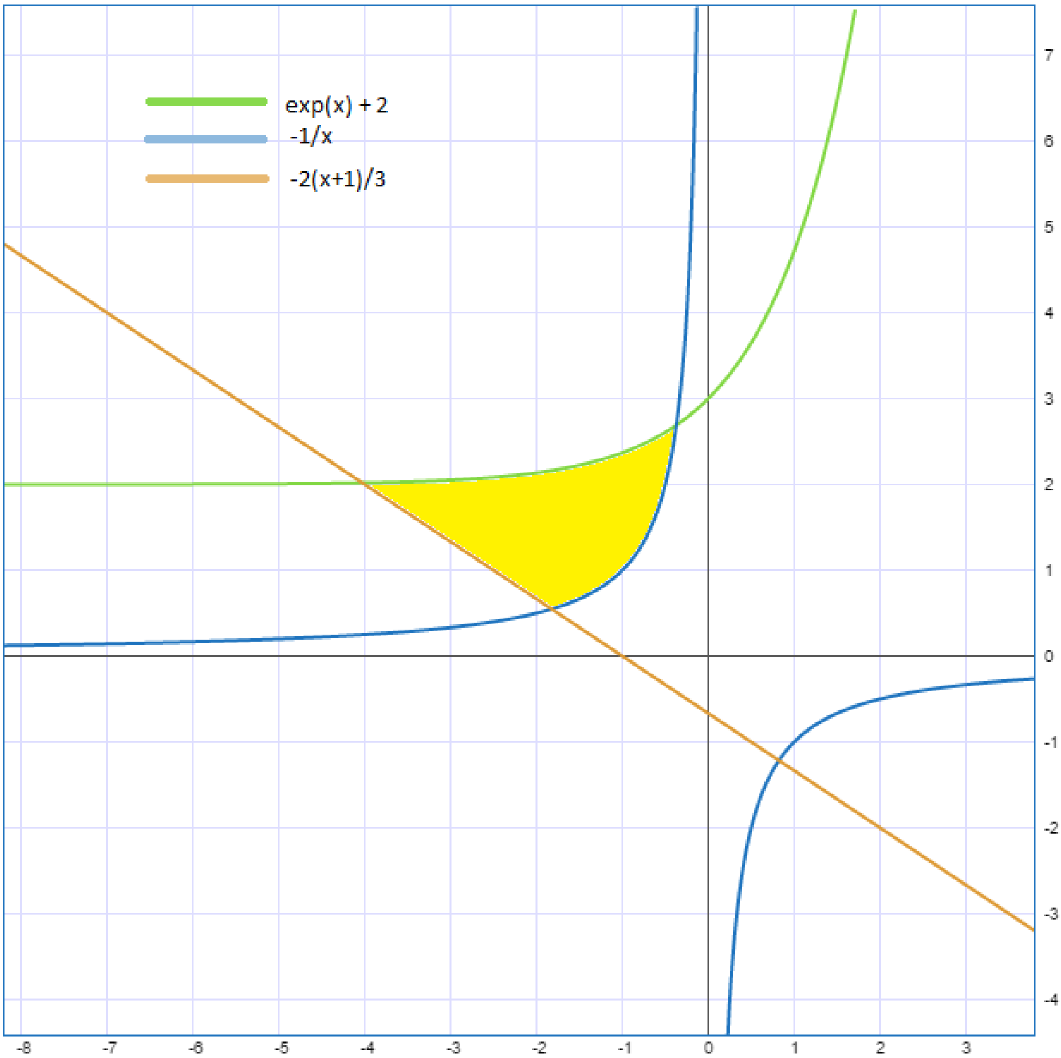

Рис.2 Плоская фигура, ограниченная графиками заданных функций

Структура программы и спецификация функций

Список функций на языке Assembler:

F1.asm, F2.asm, F3.asm

1) double f1 (double x) : $f_1 = e^x + 2$.
2) double f2 (double x) : $f_2 = -\frac{1}{x}$.
3) double f3 (double x) : $f_3 = \frac{2}{3}(x + 1)$.

Список функций для тестирования:

Func.asm

1) double f4 (double x): $\mathrm{f}_4 = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 1$
2) double f5 (double x): $\mathrm{f}_5 = (\mathrm{x} + 3)^3$
3) double f6 (double x): $\mathrm{f}_6 = 2\mathrm{x} + 10$

main.c

Список функций на языке Си:

1) double root (double (*pf)(double x), double (*pg)(double x),

   double (*df)(double x), double a, double b, double e) – функция, вычисляющая точки пересечения кривых. Возвращает абсциссу пересечения функций.
2) double integral (double (*pf)(double x), double a, double b, double e) – интегрирование по формуле Симпсона. Возвращает вычисленное значение.

Makefile

Makefile для UNIX. Содержит цели all, clean

Сборка программы (Make-файл)

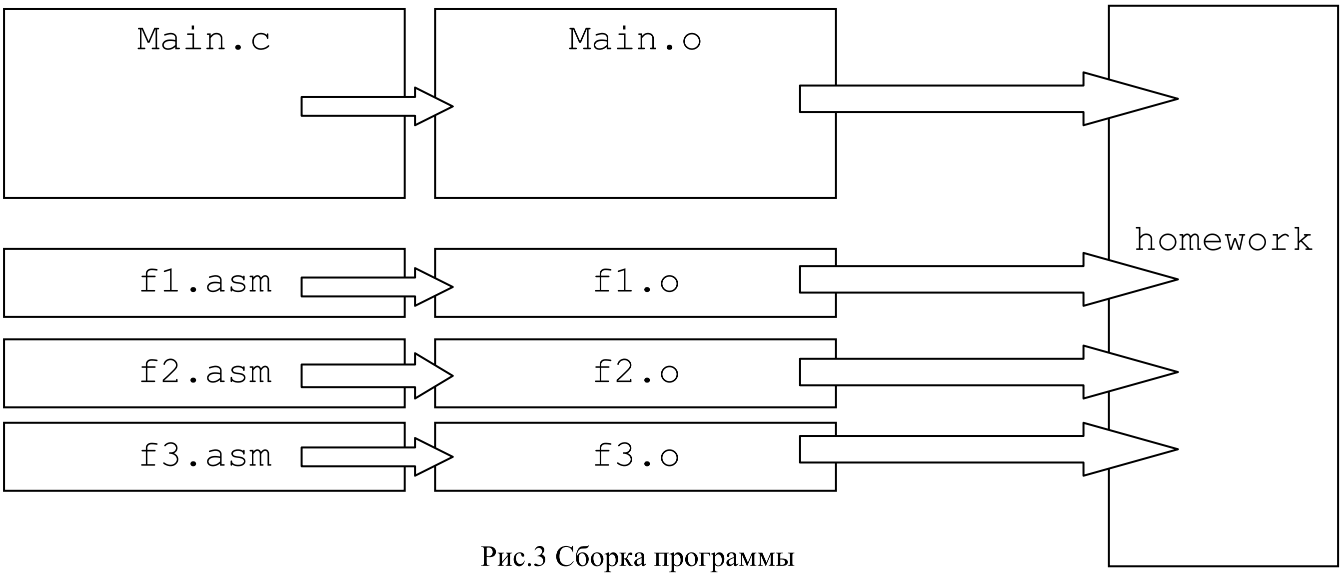

Рис.3 Сборка программы

```
all: prog
prog: main.o F1.o F2.o F3.o
	gcc main.o F1.o F2.o F3.o -o homework
main.o: main.c
	gcc -W -Wall -w -g -O2 -m32 -c main.c
F1.o: F1.asm
	nasm -g -f elf32 F1.asm -o F1.o
F2.o: F2.asm
	nasm -g -f elf32 F2.asm -o F2.o
F3.o: F3.asm
	nasm -g -f elf32 F3.asm -o F3.o
clean:
	rm -rf *.o
```

Отладка и тестирование функций

Тестирование проводилось на 3 функциях.

1) $f_4\,(x) = x^2 + \ 2x + 1$;

2) $f_5\,(x) = (x + 3)^3$;

3) $f_6\,(x) = 2x + 10$;

Тесты:

Найти абциссу пересечения функций (1) и (2) на отрезке [-4, 0].

$x^2 + \ 2x + 1 = \ (x + 3)^3$

Ответ: -2.00000

Найти абциссу пересечения функций (1) и (3) на отрезке [-4, -2.1].

$x^2 + \ 2x + 1 = \ 2x + 10$

Ответ: -3.00002

Найти абциссу пересечения функций (2) и (3) на отрезке [-3, 2].

$(x + 3)^3 \ = \ 2x + 10$

Ответ: -0.99001

Полученные результаты совпали с вычисленными ранее аналитически:

1) x = -2; 2) x = -3; 3) x = -1;

Интегралы:

Вычислить интеграл $\int_a^b (x^2 + \ 2x + 1)\, dx$ на отрезке [-4, -1].

Ответ: 9.00012.

Вычислить интеграл $\int_a^b (x + 3)^3\, dx$ на отрезке [-3, -2].

Ответ: 0.25003.

Вычислить интеграл $\int_a^b (2x + 10)\, dx$ на отрезке [-1, 1].

Ответ: 19.99988.

Полученные результаты совпали с вычисленными ранее аналитически:

1) 9.0; 2) 0.25; 3) 20.0

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программ на языке си и на языке ассемблера, а так же Makefile приложены в архиве к этому отчёту.

Анализ допущенных ошибок

В ходе выполнения задания была допущены следующие ошибки:

1) В Makefile не был выполнен переход от Windows к Linux.

2) Была допущена ошибка в вычислении экспоненты.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.

[2] Трифонов Н.П., Пильщиков В.Н. Задания практикума на ЭВМ (1 курс).

— Москва: МГУ, 2001.