Complexidade de Algoritmos (parte 2)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

DAINF
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
CÂMPUS PATO BRANCO

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sumário

- Análise de Algoritmos
- Cálculo do Tempo de Execução

Introdução

- Aula anterior: análise assintótica
  - O
  - Ω
  - Θ
- Taxas de crescimento

Sumário

Análise de Algoritmos

Análise de Algoritmos

- Para proceder a uma análise de algoritmos e determinar as taxas de crescimento, necessitamos de um modelo de computador e das operações que executa

- Assume-se o uso de um computador tradicional, em que as instruções de um algoritmo são executadas sequencialmente
  - Com memória infinita, por simplicidade

Análise de Algoritmos

- Repertório de instruções simples: soma, multiplicação, comparação, atribuição, etc
  - Por simplicidade e viabilidade da análise, assume-se que cada instrução demora exatamente uma unidade de tempo para ser executada, ou seja, $O(1)$
  - Operações complexas, como inversão de matrizes e ordenação de valores, não são realizadas em uma única unidade de tempo
  - Operações complexas devem ser analisadas em partes

Análise de Algoritmos

- Considera-se somente o algoritmo e suas entradas (de tamanho n)
- Para uma entrada de tamanho n, pode-se calcular o tempo de execução para os seguintes casos
  - Melhor caso ($T_{melhor}(n)$)
  - Caso médio ($T_{media}(n)$)
  - Pior caso ($T_{pior}(n)$)
  - $T_{melhor}(n) \leq T_{media}(n) \leq T_{pior}(n)$
- Atenção: para mais de uma entrada, essas funções teriam mais de um argumento

Análise de Algoritmos

- Geralmente, utiliza-se somente a análise do pior caso ($T_{pior}(n)$)
  - Análise do melhor caso é de pouco interesse prático
  - O tempo médio pode ser útil, principalmente em sistemas executados rotineiramente
  - Dá mais trabalho calcular o tempo médio
  - Na análise do pior caso é verificado o máximo de esforço computacional que deve ser utilizado para o processamento da entrada

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
1.    int i;
2.    for (i = 0; i < n; i++)
3.      if (x == v[i])
4.        return i;
5.    return -1;
}
```

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
1.    int i;
2.    for (i = 0; i < n; i++)
3.      if (x == v[i])
4.         return i;
5.    return -1;
}
```

  - Como a linha 1 é apenas uma declaração de variável, a mesma não entra na contagem
  - Na linha 2, desconsiderando as linhas 3 e 4, podem ser realizadas até 2n + 2 operações (pior caso)
  - Na linha 3 são realizadas um total de n comparações (o comando está dentro do laço for)

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
1.    int i;
2.    for (i = 0; i < n; i++)
3.      if (x == v[i])
4.        return i;
5.    return -1;
}
```

  - Por fim, a linha 4 (item localizado) ou 5 (caso o item não seja localizado) será executada
    - Melhor caso e caso médio: a instrução da linha 4 será executada, que é o retorno da posição do item encontrado, ou seja, uma unidade de tempo
    - Pior caso: a instrução da linha 5 será executada

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
1.    int i;
2.    for (i = 0; i < n; i++)
3.      if (x == v[i])
4.        return i;
5.    return -1;
}
```

- Análise de complexidade para os três casos (melhor, médio e pior):
  - $T_{melhor}(n) = 4$ (iniciar a variável i, comparar i com n, comparar x com $v[i]$ e retornar i)
  - $T_{media}(n) = \frac{3n}{2} + 2$ (estimativa "aproximada", ou seja, supondo que geralmente, a chave procurada esteja ao redor do meio do arranjo)
  - $T_{pior}(n) = 3n + 3$ (quando a chave não é encontrada)

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
1.    int i;
2.    for (i = 0; i < n; i++)
3.      if (x == v[i])
4.        return i;
5.    return -1;
}
```

- Análise de complexidade para os três casos (melhor, médio e pior):
  - Melhor caso: $\Omega(1)$ ou $O_{\text{melhor}}(1)$
  - Caso médio: $O_{\text{médio}}(n)$
  - Pior caso: $O_{\text{pior}}(n)$ ou $O(n)$
  - Dizemos que a complexidade do algoritmo acima é de $O(n)$ (geralmente, o que nos interessa é o pior caso)

Análise de Algoritmos

- Idealmente, para um algoritmo qualquer de ordenação de vetores com n elementos:
  - Qual a configuração do vetor que você imagina que provavelmente resultaria no melhor tempo de execução?
  - E qual resultaria no pior tempo?
- Outro exemplo de problema: soma da subsequência máxima
  - Dada uma sequência de inteiros (possivelmente negativos) $a_1, a_2, ..., a_n$ encontre o valor da máxima soma de quaisquer números de elementos consecutivos
  - Se todos os inteiros forem negativos, o algoritmo deve retornar 0 como resultado da maior soma
  - Por exemplo, para a entrada -2, 11, -4, 13, -5 e -2, a resposta é 20 ($a_2 + a_3 + a_4$)

Análise de Algoritmos

- Assim como o problema de ordenação, há diversos algoritmos propostos para encontrar a subsequência máxima:
  - Alguns são mostrados abaixo juntamente com seus tempos de execução (n é o tamanho da entrada):

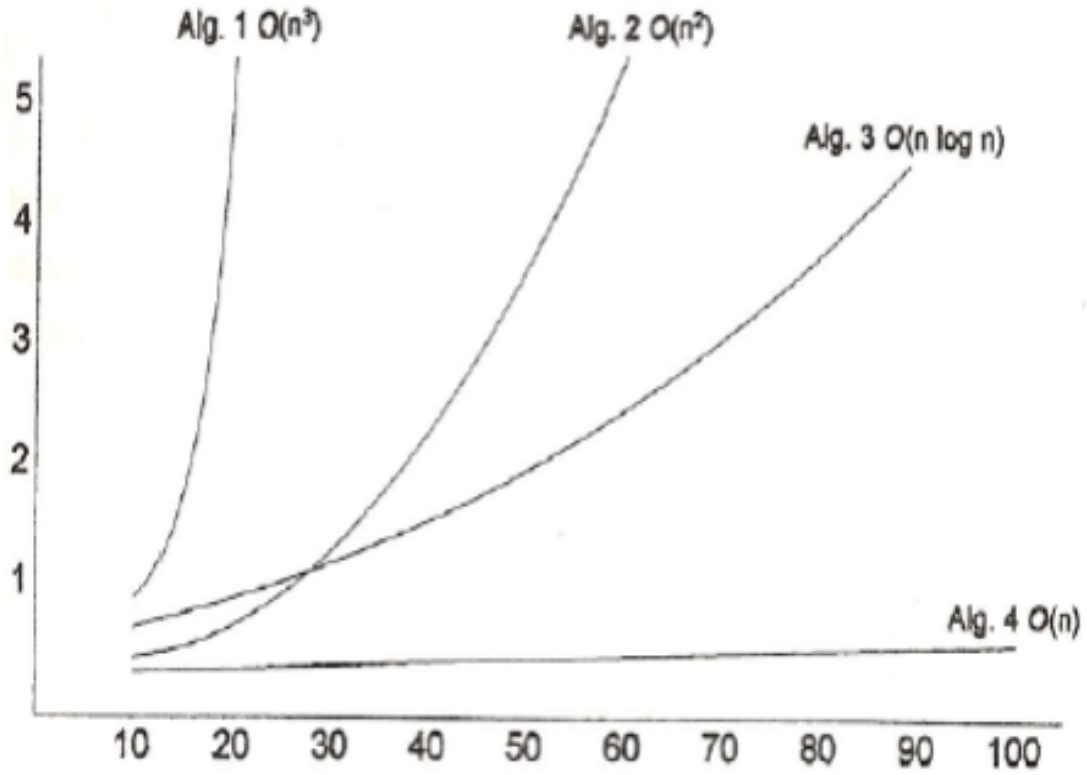
Algoritmo	1	2	3	4
tempo	$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
n = 10	0,00103	0,00045	0,00066	0,00034
n = 100	0,47015	0,01112	0,00486	0,00063
n = 1.000	448,77	1,1233	0,05843	0,00333
n = 10.000	-	111,13	0,68631	0,03042
n = 100.000	-	-	8,0113	0,29832

Análise de Algoritmos

- Deve-se notar que:
  - Para entradas pequenas, todas as implementações rodam num piscar de olhos
  - Para entradas grandes, o melhor algoritmo é o 4
  - Os tempos não incluem o tempo requerido para leitura dos dados de entrada

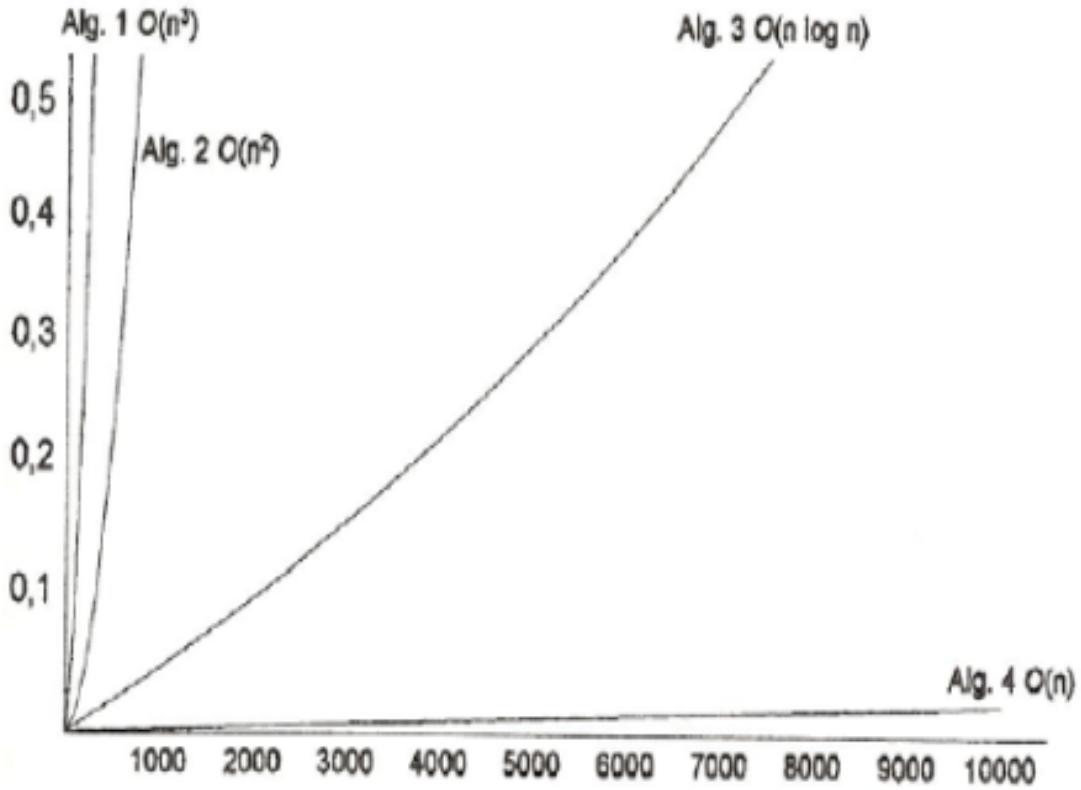
Análise de Algoritmos

- Gráfico (n vs. milisegundos) das taxas de crescimentos dos quatro algoritmos com entradas entre 10 e 100



Análise de Algoritmos

- Gráfico (n vs. segundos) das taxas de crescimentos dos quatro algoritmos para entradas maiores crescimento



Cálculo do Tempo de Execução

Cálculo do Tempo de Execução

- Existem basicamente 2 formas de estimar o tempo de execução de programas e decidir quais são os melhores:
  - Empiricamente
  - Teoricamente
- É desejável e possível estimar qual o melhor algoritmo sem ter que executá-los: função da análise de algoritmos

Cálculo do Tempo de Execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar e a linguagem de programação utilizada é a C, considere o programa abaixo para calcular o resultado de

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

1. Início
2. declare soma_parcial numérico;
3. soma_parcial $\leftarrow$ 0;
4. para $i \leftarrow 0$ até n faça
5. soma_parcial $\leftarrow$ soma_parcial+i*i*i;
6. escreva(soma_parcial);
7. Fim

1 instrução

1(inicializa soma) + 1(inicializa i)+n (1 (i<n)+4+1(i++)+1(falso)+1(print) =6n+4 0(n) ou Theta(n)

Cálculo do Tempo de Execução

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

3 1 unidade de tempo

4 1 unidade para iniciação de i, $n+1$ unidades para testar se $i = n$ e n unidades para incrementar $i = 2n + 2$

5 4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando "para") $= 4n$ unidades

6 1 unidade para escrita

- **Custo total**: $6n + 4$, ou seja, a função é $O(n)$!
  - Também podemos dizer que a complexidade do algoritmo acima é $\Theta(n)$, já que não há distinção entre o pior e o melhor caso

Cálculo do Tempo de Execução

- Ter que realizar todos esses passos para cada algoritmo (principalmente algoritmos grandes) pode se tornar uma tarefa cansativa

- Em geral, como se dá a resposta em termos do *big-oh*, costuma-se desconsiderar as constantes e elementos menores dos cálculos

- No exemplo anterior:
  - A linha 3 $soma\_parcial \leftarrow 0$ é insignificante em termos de tempo
  - É desnecessário ficar contando 2, 3 ou 4 unidades de tempo na linha 5 $soma\_parcial \leftarrow soma\_parcial + i * i * i$
  - O que realmente dá a grandeza de tempo desejada é a repetição na linha 4 "para $i \leftarrow 1$ até n faça"

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada

```
para i ← 0 até n faça
  x += 1;
```

1(ini i)+n(1(++)+1(i<n)+1(x+=))+1(falso) = 3n+2

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada

    - No exemplo abaixo são realizadas $3n + 2$ operações (uma unidade para iniciar i + n * (incremento na variável i + uma comparação + atribuição na variável x) + uma última comparação, que é o momento em que a variável i atinge o valor de n), ou seja, o seu custo é $O(n)$

    - Por mais que o operador $+=$ seja equivalente a duas operações (uma atribuição e uma soma), o mesmo é contado como uma unidade

```
para i ← 0 até n faça
  x += 1;
```

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada
    - No exemplo abaixo também são realizadas $3n + 2$ operações

$i \leftarrow 0$
enquanto $i < n$ faça
```
    x += 1;
    i += 1;
```

1(ini i)+n(1(i<n)+2(+=))+1(falso loop)= 3n+2

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas
    - A análise é feita de dentro para fora
    - Tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições
    - Exemplo de fragmento de código com custo de $O(n^2)$

```
para i ← 0 até n faça
   para j ← 0 até n faça
     k ← k + 1;
```

1(ini j)+Ninterno(1(j<n)+ 1(soma k)+1(atribuição k)+1(j++))+1(do flaso) = 4n+2 for interno

1(ini i)+ Nexterno(1(i<n)+(4n+2 do for interno)+1(i++))+1(do falso) = 4n+4n²+2 for externo e result final

O(n²) ou Theta (n²)

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas

```
para i ← 0 até n faça
  para j ← 0 até n faça
    k ← k + 1;
```

    - Nas duas últimas linhas do código acima (laço interno), são realizadas $4n + 2$ operações: uma atribuição para a variável j + n * (uma atualização de j + mais uma comparação entre i e n + uma atribuição na variável k + uma soma na variável k)

    - A operação acima é realizada n vezes, ou seja, o total de operações no fragmento de código acima é $n * (4n + 2 + 2) + 2 = 4n^2 + 4n + 2$

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Comandos consecutivos
    - É a soma dos tempos de cada um, o que pode significar o máximo entre eles
    - O exemplo abaixo é $O(n^2)$ apesar da primeira repetição ser $O(n)$

```
para i ← 0 até n faça
  k ← 0;
para i ← 0 até n faça
  para j ← 0 até n faça
    k ← k + 1;
```

$4n^2+4n+2+3n+2 = 4n^2+7n+4$

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:
    - Para uma cláusula condicional, o tempo de execução nunca é maior do que o tempo do teste (então) mais o tempo do senão
    - Em outras palavras, a complexidade é comando que leva o maior tempo
    - O exemplo abaixo é $O(n)$ no pior caso e $\Omega(1)$ no melhor caso:

```
se i < j
   então i ← i + 1
   senão para k ← 0 até n faça
     i ← i * k;
```

levar em conta se quer o melhor ou o pior caso

melhor caso
omega de 3 --> entra no se Omeg(1)-->constante

pior caso

1(se) + 1(ini k) +n(1(k<n)+1(atribição i)+1(i*k)+1(k++))+1(falso)

  - Chamadas de sub-rotinas: uma sub-rotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa/sub-rotina que a chamou

Cálculo do Tempo de Execução

- **Exercício 1**: Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo:

```
1  void função1(int v[], int n){
2    int i, j, auxA, auxB;
3    i = 1;
4    while (i <= n){
5         v[i - 1] += 0;
6         i = i + 1;
7    }
8    for (i = 0; i < n; i++)
9         for (j = 0; j < n; j++)
10             v[i] += v[i] + i + j;
11 }
```

1(ini i)+ n(1(i<=n)+1(i-1 do vet)+1(+=)+1(=)+1(+))+1(falso) = 5n+2

//aqui acaba a parte antes do for agora soma com o do for :
for interno 1(ini j)+n(1(j<n)+1(+=)+2(+)+1(j++))+1(falso) = 5n+2
for externo 1(ini i)+n(1(i<n)+for interno + 1(i++))+1(falso) = $5n^2+4n+2$

soma o do while com o dp for = $5n^2+9n+4$

Cálculo do Tempo de Execução

- **Resolução do exercício 1:**
  1. Linha 3: inicialização de i: 1 operação
  2. Linhas 4–7: $5n + 1$
     - n * (1 comparação + 1 subtração (v[i - 1]) + 1 atribuição com soma (+=) em v + 1 atribuição e 1 soma em i): $5n$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  3. Linhas 9–10 (*loop interno*): $5n + 1$
     - Inicialização de j: 1 operação
     - n * (1 comparação + 3 operações em A (1 atribuição e duas somas) + 1 incremento em j): $5n$ operações
     - Última comparação (quando $j > n$): 1 operação
  4. Linhas 8–10: $5n^2 + 4n + 2$
     - Inicialização de i: 1 operação
     - n * (1 comparação + $5n + 2$ (for interno) + 1 atribuição em i): $5n^2 + 4n$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  5. Soma dos itens 1, 2 e 3: $1 + 5n + 1 + 5n^2 + 4n + 2 = 5n^2 + 9n + 4$
     - Complexidade: $O(n^2)$

Cálculo do Tempo de Execução

- **Exercício 2**: Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo:

```
1  void função2(int n){
2    int i, j, auxA, auxB;
3    i = 0;
4    auxA = 0;
5    auxB = 0;
6    while (i <= n){
7        auxA += 1;
8        i = i + 1;
9    }
10   for (i = 0; i <= n; i++)
11       for (j = 0; j <= n; j++)
12           auxB += (auxA - i + j);
13 }
```

3(inicialização var)+(n+1//pq i=0)(4) +1 =4n+8 //while

for interno
1+(n+1)(5)+1 =5n+7
1+(n+1)(1+ 5n+7 +1)+1= 2+5n²+9n+5n+9=5n²+14n+11

Cálculo do Tempo de Execução

- **Resolução do exercício 2:**
  1. Linhas 3–9: $4n + 8$
     - Inicialização de i, auxA, AuxB: 3 operações
     - $(n + 1)$ * (1 comparação + 1 atribuição em auxA + 1 atribuição e 1 soma em i): $4n + 4$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  2. Linhas 11–12 (*loop* interno): $5n + 7$
     - Inicialização de j: 1 operação
     - $(n + 1)$ * (1 comparação + 3 operações em auxB (1 atribuição e duas somas) + 1 incremento em j): $5n + 5$ operações
     - Última comparação (quando $j > n$): 1 operação
  3. Linhas 10–12: $5n^2 + 14n + 11$
     - Inicialização de i: 1 operação
     - $(n + 1)$ * (1 comparação + $5n + 7$ (for interno) + 1 atribuição em i): $5n^2 + 14n + 9$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  4. Soma dos itens 1 e 3: $5n^2 + 18n + 19$
     - Complexidade: $O(n^2)$

Referências I


Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2012.


Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.


Rosa, J. L. G.
Análise de Algoritmos - parte 1. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.


Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.