Facultad de Economía, UPC

Taller de modelos macroeconómicos en Matlab

Clase 2

Mg. Carlos Rojas Quiroz
www.carlos-rojas-quiroz.weebly.com
pcefcroj@upc.edu.pe

7 de agosto de 2018

Manteniendo la estructura básica de nuestro modelo (sin incorporar más agentes o introducir fricciones), podemos modificarlo en, por lo menos, tres dimensiones:

- Otras formas funcionales para la función de utilidad (GHH, KPR, CRRA, CARA, etc.)
- Otras formas funcionales para la función de producción (CES, con costos fijos, etc.)
- Añadiendo choques (preferencias, oferta de trabajo, etc.)

$$\boxed{U_t = \frac{1}{1-\sigma}\left(C_t - \kappa\frac{L_t^{1+\eta}}{1+\eta}\right)^{1-\sigma}} \tag{1}$$

- Si $\sigma = 1$, entonces: $U_t = \ln\left(C_t - \kappa\frac{L_t^{1+\eta}}{1+\eta}\right)$.
- Condición intratemporal (no hay efecto ingreso!):

$$W_t = \kappa L_t^{\eta} \tag{2}$$

- Condición intertemporal:

$$\left(C_t - \kappa\frac{L_t^{1+\eta}}{1+\eta}\right)^{-\sigma} = \beta\mathbb{E}_t\left\{\left(C_{t+1} - \kappa\frac{L_{t+1}^{1+\eta}}{1+\eta}\right)^{-\sigma}(1+r_{t+1})\right\} \tag{3}$$

- Estado Estacionario:

$$L = \left(\frac{\alpha Y}{\kappa} \right)^{\frac{1}{(1+\eta)}} \tag{4}$$

- Para poder comparar este modelo con el de utilidad logarítmica, pasaremos (de ahora en adelante) a mantener el mismo valor de estado estacionario para el trabajo L y cambiamos κ, luego:

$$\kappa = \left(\frac{1}{L} \right)^{1+\eta} \alpha Y \tag{5}$$

Donde $L = 0{,}3942$.

$$\boxed{U_t = \frac{[C_t^{\theta}(1 - L_t)^{1-\theta}]^{1-\sigma}}{1 - \sigma}} \tag{6}$$

- Consistente con la **senda de crecimiento balanceada (SBC)** (todas las variables crecen a una tasa constante). Hasta ahora habíamos visto un caso especial de SCB: en el Estado Estacionario todas las variables crecen 0.
- Note que si $\sigma = 1$ entonces $U_t = \theta \log C_t + (1 - \theta) \log L_t$.
- ¿Qué valor de σ utilizar?

- Condición intratemporal (note que si C_t y W_t crecen a la misma tasa, L_t no crece):

$$1 - L_t = \frac{1-\theta}{\theta}\left(\frac{C_t}{W_t}\right) \tag{7}$$

- Condición intertemporal:

$$\begin{aligned} (C_t^{\theta}(1-L_t)^{(1-\theta)})^{-\sigma}(1-L_t)^{(1-\theta)}C_t^{(\theta-1)} &= \\ \beta\mathbb{E}_t\left\{(C_{t+1}^{\theta}(1-L_{t+1})^{(1-\theta)})^{-\sigma}(1-L_{t+1})^{(1-\theta)}C_{t+1}^{(\theta-1)}(1+r_{t+1})\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

- Estado estacionario (igual que antes salvo para L):

$$L = \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}\frac{C}{Y}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)} \tag{9}$$

$$\boxed{U_t = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \kappa \frac{L_t^{1+\eta}}{1+\eta}} \tag{10}$$

- Función de utilidad con coeficiente de aversión relativa al riesgo constante. Recordemos que dicho coeficiente es: $\rho_r = -\frac{Ucc}{Uc} C = \sigma$.
- Donde σ también es conocido como la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal. Si $\sigma = 1$, entonces $U_t = \log C_t - \kappa \frac{L_t^{1+\eta}}{1+\eta}$.
- Muy utilizada en modelos neokeynesianos de mediana escala (bancos centrales).

- Condición intratemporal (note que aquí sí hay efecto ingreso):
$$W_t = \kappa L_t^{\eta} C_t^{\sigma} \tag{11}$$
- Condición intertemporal
$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left\{ C_{t+1}^{-\sigma} (1 + r_{t+1}) \right\} \tag{12}$$
- Estado Estacionario (igual que antes salvo para L):
$$L = \left[\frac{\alpha Y^{(1-\eta\sigma)}}{\kappa \left(1 - \frac{(1-\alpha)\beta\delta}{1-\beta+\beta\delta} - \frac{G}{Y}\right)^{\sigma}} \right]^{\left(\frac{1}{1+\eta}\right)} \tag{13}$$

Índice

- Mecanismos que permiten capturar hechos empíricos (dinámica de las variables) en modelos DSGE. Por ejemplo, se observa que ante algún choque en particular, variables como el consumo o la inversión muestran una respuesta tipo “joroba” o *hump-shaped*. A su vez, la dinámica de las variables ante una perturbación exógena puede no ser instantánea sino demorar en el tiempo.
- Estudiaremos (por el momento) tres tipos de rigideces reales:
  1. Hábitos de consumo.
  2. Ratio de uso de capital.
  3. Costos de ajuste de la inversión.

- La satisfacción del individuo no sólo se explica por el consumo actual sino también por su relación con el consumo pasado.
- Buscamos capturar hechos empíricos. Ante un choque, el consumidor busca suavizar su nivel de consumo.

$$U_t = U_t(C_t, C_{t-1}, L_t)$$

- Observe que ahora la función de utilidad instantánea ya no es separable en el tiempo.
- Se puede entender como un costo de ajuste en el consumo, medido en términos de utilidad.
- Si $\Uparrow C_t$ entonces $\Downarrow UMg_t$ pero $\Uparrow UMg_{t+1}$.

1. Hábitos de consumo interno: hábitos determinados por el propio consumo del individuo.

$$U_t = \theta log(C_t - \phi C_{t-1}) + (1-\theta) log(1 - L_t) \tag{14}$$

2. Hábitos de consumo externo: hábitos no dependen de las decisiones pasadas del individuo respecto a su consumo, sino del consumo agregado.

$$U_t = \theta log(C_t - \phi \bar{C}_{t-1}) + (1-\theta) log(1 - L_t) \tag{15}$$

El lagrangiano en valor presente es:

$$\ell_t = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\theta log(C_t - \phi C_{t-1}) + (1-\theta) log(1 - L_t) + ... \\ \lambda_t (C_t + A_{t+1} + T_t - (1 + r_t) A_t - W_t L_t)] \tag{16}$$

La utilidad marginal del consumo es:

$$U_{C,t} = \frac{\theta}{C_t - \phi C_{t-1}} - \beta \mathbb{E}_t \left\{ \frac{\theta \phi}{C_{t+1} - \phi C_t} \right\} \tag{17}$$

Con esto, el Estado Estacionario de las horas trabajadas es:

$$L = \frac{1}{1 + \frac{C}{\alpha}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\phi}\right)} \tag{18}$$

Sin embargo, si queremos comparar con el modelo base, debemos "fijar" L en el mismo valor, por lo que la variable de ajuste en este caso es θ:

$$\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-L}{L}\right)\left(\frac{\alpha}{C}\right)\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\phi}\right)} \tag{19}$$

Y $L = 0{,}3942$.

El lagrangiano en valor presente es:

$$\ell_t = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\theta log(C_t - \phi \bar{C}_{t-1}) + (1-\theta) log(1 - L_t) + ... \\ \lambda_t (C_t + A_{t+1} + T_t - (1 + r_t) A_t - W_t L_t)] \quad (20)$$

La utilidad marginal del consumo es:

$$U_{C,t} = \frac{\theta}{C_t - \phi C_{t-1}} \quad (21)$$

Con esto, el Estado Estacionario de las horas trabajadas es:

$$L = \frac{1}{1 + \frac{C}{\alpha}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(1-\phi)} \tag{22}$$

"Fijando" L , θ se ajusta tal que:

$$\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-L}{L}\right)\left(\frac{\alpha}{C}\right)\left(\frac{1}{1-\phi}\right)} \tag{23}$$

Y $L = 0{,}3942$.

Costo de ajuste al capital o a la inversión

- Ante una determinada perturbación, los agentes pueden alterar sus decisiones de inversión de forma que el capital obtenido sea el óptimo en cada período.
- Pero modificar los planes de inversión tiene, implícitamente, un costo que genera rigideces en el proceso de acumulación de capital.
- Es decir, que ante un choque el proceso de acumulación de capital va a ser más gradual.
- Dos posibilidades técnicas: costos de ajuste al capital o costos de ajuste a la inversión.

- Hasta el momento hemos supuesto que el precio de los bienes de capital relativo al de los bienes de consumo (q_t) es 1, lo que significa que el valor de la firma es igual al valor del stock de capital físico.
- Introducimos costos de ajuste del stock de capital convexos.
- Existe un costo al variar el capital, lo que implica que ahora $q \neq 1$.

- Definimos el costo de ajuste del capital como una función:

$$\psi(\cdot) = \psi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) \tag{24}$$

- El costo de ajuste depende del volumen de inversión respecto al stock de capital instalado. Esta función cumple con: $\psi(\delta) = 0$, $\psi'(\delta) > 0$ y $\psi''(\delta) > 0$.
- Usaremos la siguiente forma funcional cuadrática para $\psi(\cdot)$:

$$\psi(\cdot) = \frac{\psi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t} - \delta\right)^2 K_t \tag{25}$$

- Dos puntos importantes: (i) el costo está denominado en unidades de capital físico actual y (ii) es simétrico.

Problema de maximización del consumidor:

$$\max_{\{C_t, L_t, K_{t+1}, I_t\}_{t=0}^{\infty}} V_t = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\theta log(C_t) + (1-\theta) log(1-L_t)) \quad (26)$$

Sujeto a:

$$C_t + I_t = W_t L_t + (r_t + \delta) K_t \quad (27)$$

$$K_{t+1} = I_t - \frac{\psi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t} - \delta\right)^2 K_t + (1-\delta) K_t \quad (28)$$

El lagrangiano de valor presente:

$$\begin{aligned}\ell_t = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big[\theta log(C_t) + (1-\theta) log(1-L_t) + ...\\ \lambda_t((r_t+\delta)K_t + W_t L_t - C_t - I_t - T_t) + ...\\ \mu_t \left(I_t - \frac{\psi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t} - \delta\right)^2 K_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1}\right)\Big]\end{aligned} \tag{29}$$

CPO's:

$$[C_t] : \frac{1}{C_t} = \lambda_t \tag{30}$$

$$[L_t] : \frac{1-\theta}{1-L_t} = \lambda_t W_t \tag{31}$$

$$[K_{t+1}] : \begin{array}{l} \mu_t = \beta \mathbb{E}_t \left[(r_{t+1} + \delta)\lambda_{t+1} - \mu_{t+1} \frac{\psi}{2} \left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta \right)^2 + \right. \\ \left. \quad \mu_{t+1} \psi \left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta \right) \frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} + \mu_{t+1}(1-\delta) \right] \end{array} \tag{32}$$

$$[I_t] : \lambda_t = \mu_t \left(1 - \psi \left(\frac{I_t}{K_t} - \delta \right) \right) \tag{33}$$

Definiendo $q_t = \frac{\mu_t}{\lambda_t}$, tenemos:

$$q_t = \left(1 - \psi\left(\frac{I_t}{K_t} - \delta\right)\right)^{-1} \tag{34}$$

Esta ecuación establece que mientras mayor sea el ratio $\frac{I_t}{K_t}$ respecto a δ, mayor es q_t.

$$\begin{aligned} q_t = \beta \mathbb{E}_t \left\{ \frac{C_t}{C_{t+1}} \left[(r_{t+1} + \delta) + \right.\right. \\ \left.\left. q_{t+1}\left((1-\delta) + \psi\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta\right)\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} - \frac{\psi}{2}\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta\right)\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{35}$$

La ecuación muestra que q_t es el valor descontado del producto marginal futuro del capital, de los costos de ajuste futuros y del precio del capital futuro, q_{t+1}, donde el descuento se realiza mediante el factor de descuento estocástico $\beta \mathbb{E}_t \frac{C_t}{C_{t+1}}$.

Interpretación de q_t: es la utilidad marginal de invertir una unidad adicional de capital respecto a la utilidad marginal de consumir una unidad adicional. Por tanto, q_t mide a cuánto consumo renuncias para obtener capital extra futuro o, en otras palabras, es el precio relativo del capital en términos de consumo. Si $\psi = 0$ entonces $q_t = 1$ o $\lambda_t = \mu_t$.

- Hay un costo por "mover" inversión: (i) el costo de ajuste es medido en términos de unidades de inversión y (ii) el costo de ajuste no depende del tamaño de la inversión respecto al stock de capital, sino de la tasa de crecimiento de la inversión.
- La forma funcional general es:

$$\psi(\cdot) = \psi\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) \tag{36}$$

Donde $\psi(1) = 0$, $\psi'(1) > 0$ y $\psi''(1) > 0$.

- La forma específica a utilizar es:

$$\psi(\cdot) = \frac{\psi}{2}\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2 I_t \tag{37}$$

Problema de maximización del consumidor:

$$\max_{\{C_t, L_t, K_{t+1}, I_t\}_{t=0}^{\infty}} V_t = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\theta log(C_t) + (1-\theta) log(1-L_t)) \quad (38)$$

Sujeto a:

$$C_t + I_t = W_t L_t + (r_t + \delta) K_t \quad (39)$$

$$K_{t+1} = \left[1 - \frac{\psi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t} - \delta\right)^2\right] I_t + (1-\delta) K_t \quad (40)$$

El lagrangiano de valor presente:

$$\ell_t = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\theta log(C_t) + (1-\theta) log(1-L_t) + ... \right.$$
$$\lambda_t((r_t + \delta)K_t + W_t L_t - C_t - I_t - T_t) + ... \tag{41}$$
$$\left. \mu_t \left(\left[1 - \frac{\psi}{2} \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right)^2 \right] I_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1} \right) \right]$$

CPO's:

$$[C_t] : \lambda_t = \frac{\theta}{C_t} \tag{42}$$

$$[L_t] : \frac{1-\theta}{1-L_t} = \lambda_t W_t \tag{43}$$

$$[K_{t+1}] : \mu_t = \beta \mathbb{E}_t(\lambda_{t+1}(r_{t+1}+\delta) + \mu_{t+1}(1-\delta)) \tag{44}$$

$$[I_t] : \begin{aligned} \lambda_t = \mu_t \left(1 - \frac{\psi}{2}\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2 - \psi\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) + \\ \beta \mathbb{E}_t \left\{ \mu_{t+1}\psi\left(\frac{I_{t+1}}{I_t} - 1\right)\left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)^2 \right\} \end{aligned} \tag{45}$$

Definiendo $q_t = \frac{\mu_t}{\lambda_t}$, tenemos:

$$q_t = \beta \mathbb{E}_t \left\{ \frac{C_t}{C_{t+1}} ((r_{t+1} + \delta) + (1 - \delta) q_{t+1}) \right\} \tag{46}$$

Ahora la ecuación de la "q" de Tobin es más simple: q_t es el valor presente descontado de la renta del capital neto de depreciación.

$$\begin{aligned} 1 = q_t & \left(1 - \frac{\psi}{2} \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right)^2 - \psi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right) \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) + \\ & \beta \mathbb{E}_t \left\{ \frac{C_t}{C_{t+1}} q_{t+1} \psi \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} - 1 \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 \right\} \end{aligned} \tag{47}$$

Si I_t es mayor a su estado estacionario, entonces, q_t será mayor a 1.

Ratio de uso del capital

- Uso del capital varía en el tiempo (es procíclico).
- Idea de “eficiencia marginal a la inversión” (EMI).
- $\Uparrow$ EMI implica mayor uso del capital instalado.
- Introducir el ratio de uso de capital nos permite capturar evidencia empírica sobre la dinámica del capital y, a la vez, introducir un nuevo mecanismo de transmisión al modelo.
- En nuestro modelo los consumidores son dueños del capital, por lo que ellos van a decidir su uso.

$$Y_t = Z_t L_t^{\alpha} (u_t K_t)^{1-\alpha}$$

Llamaremos u_t al ratio de uso del capital, tal que $u_t > 0$ y $u_t \in [0, 1]$. Se puede interpretar u_t como la intensidad de uso del capital o el número de horas por período en el que el capital es usado o el porcentaje de capital que se usa directamente en el proceso productivo. Hay, por lo menos, 2 formas de introducirlo:

1. Como un costo dependiente del grado de utilización: $\xi(u_t)$, tal que $\xi'(u_t) > 0$, $\xi''(u_t) > 0$ y $\xi(1) = 0$.
2. Como depreciación variable: $K_t = (1 - \delta(u_t))K_t + I_t$, donde $0 < \delta(u_t) < 1$, $\delta'(u_t) > 0$ y $\delta''(u_t) > 0$.

Problema del Consumidor:
La restricción presupuestaria se escribe así:

$$C_t + I_t + T_t = W_t L_t + r_t u_t K_t$$

Reemplazando $K_{t+1} = (1 - \delta(u_t))K_t + I_t$ se llega a:

$$C_t + K_{t+1} + T_t = W_t L_t + (1 + r_t u_t - \delta(u_t))K_t \tag{48}$$

Note que ahora el consumidor es a quien va a afectarle la depreciación (antes esto afectaba las ganancias de la empresa) debido a que suponemos que es el consumidor quien decide el grado de utilización del capital.

El programa a resolver es:

$$\max_{\{C_t, K_{t+1}, L_t, u_t\}} V_t = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_t$$

Sujeto a la ecuación 48. El lagrangiano de valor presente es:

$$\ell_t = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\theta log(C_t) + (1-\theta) log(1-L_t) + \ldots$$
$$\lambda_t((1 + r_t u_t - \delta(u_t))K_t + W_t L_t - C_t - K_{t+1} - T_t)] \tag{49}$$

Luego, las CPOs son:

$$[C_t] : \frac{\theta}{C_t} - \lambda_t = 0 \tag{50}$$

$$[L_t] : -\frac{1-\theta}{1-L_t} + \lambda_t W_t = 0 \tag{51}$$

$$[K_{t+1}] : -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (1 + r_{t+1} u_{t+1} - \delta(u_{t+1})) = 0 \tag{52}$$

$$[u_t] : r_t - \delta'(u_t) = 0 \tag{53}$$

Problema del productor:

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \Pi = Z_t L_t^{\alpha}(u_t K_t)^{1-\alpha} - r_t u_t K_t - W_t L_t$$

Donde las CPO's son:

$$[K_t] : (1-\alpha)\frac{Y_t}{K_t} - r_t u_t = 0 \tag{54}$$

$$[L_t] : \alpha\frac{Y_t}{L_t} - W_t = 0 \tag{55}$$

Note de nuevo que la depreciación ya no afecta a las ganancias del productor, sino a los ingresos del consumidor (este agente es el dueño del capital, por lo que decide cuánto utilizar).

Forma funcional:
Teniendo en cuenta $0 < \delta(u_t) < 1$, $\delta'(u_t) > 0$ y $\delta''(u_t) > 0$, hay varias formas funcionales que podemos imponer para la depreciación.

$$\delta(u_t) = \frac{1}{\eta} u_t^{\eta} \tag{56}$$

$$\delta(u_t) = \delta u_t^{\eta} \tag{57}$$

$$\delta(u_t) = \delta_0 + \phi_1(u_t - 1) + \phi_2(u_t - 1)^2 \tag{58}$$

Nosotros utilizaremos la ecuación 57, teniendo en cuenta que para cumplir con las restricciones $\eta > 1$.

Estado Estacionario
Imponemos $u = 1$ en EE con el fin de evitar modificar los valores de las otras variables. Luego, debemos imponer una restricción sobre el parámetro η. De la ecuación (53), se tiene:

$$r = \delta \eta u^{\eta - 1}$$

Si $u = 1$ en EE, entonces $r = \delta\eta$, por lo que

$$\eta = \frac{r}{\delta} \tag{59}$$

Debemos tener en cuenta, por la ecuación 52 que en Estado Estacionario $r = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\beta}$, entonces:

$$\eta = \frac{1 - \beta + \beta\delta}{\beta\delta} \tag{60}$$

Utilizar la expresión 58 para modelar la depreciación variable. Señale cuáles son las implicancias, en términos de volatilidad macroeconómica, ante distintos valores del parámetro ϕ_2.