Численное исследование 3-х мерных не изотермических течений несжимаемой жидкости в прямоугольной каверне с подвижной крышкой

Владимир Олегович Пиманов

xx.xx.xxxx

Аннотация

aaaaaaa

Введение

Система уравнений Навье-Стокса

Математическая постановка задачи

Ставится трехмерная (3-D) задача о расчете поля скорости $\vec{v}(t)$ в каверне с подвижной крышкой Θ . Каверна имеет форму траншеи, бесконечно длинной, с квадратным поперечный сечением $\Theta \times \mathbb{R}$, где $\Theta = (0,1) \times (0,1)$. Жидкости передается движение крышки $\Gamma_1 \times \mathbb{R}$, где $\Gamma_1 = (0,1) \times 1$. Крышка движется равномерно со скорость $\vec{v}_0 = (1,0,0)$. Схематически, каверна изображена на рисунке **??**. Считается, что жидкость вязкая, ньютоновская, несжимаемая, изотермическая, и описывается системой уравнений Навье-Стокса.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times \vec{\omega} - \nabla p - \nu(\nabla \times \vec{\omega}), \text{при } \vec{x} \in \Theta \times \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\vec{v} = (1,0,0), \text{при } \vec{x} \in \Gamma_1 \times \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\vec{v} = (0,0,0), \text{при } \vec{x} \in \Gamma_2 \times \mathbb{R} \tag{4}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 \tag{5}$$

Здесь $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ - завихренность, p - полное кинематическое давление, $\nu = 1/\operatorname{Re}$ - вязкость, Re - число Рейнольдса, $\Gamma_2 = \partial\Theta \setminus \Gamma_1$ - боковые стенки и дно каверны, $\partial\Theta = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - граница области, $\vec{v}_0$ - начальное распредиление скорости.

Решене данной задачи **??**–**??** обозначим, как $\{\vec{V}(x,y,z,t), P(x,y,z,t)\}$ — пара скорость-давление. Тогда $\{\vec{V}(x,y,z), P(x,y,z)\}$ — стационарное решение этой задачи.

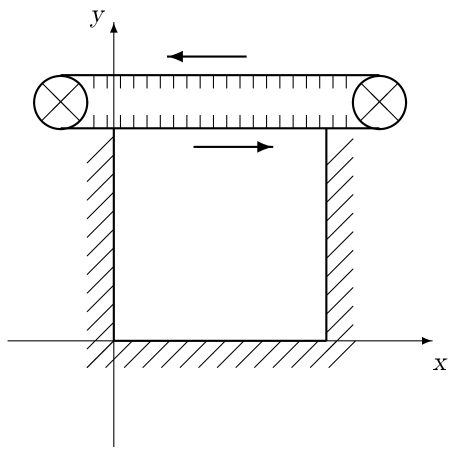

Рис. 1: Каверна с подвижной крышкой

Хорошо известно, что при достаточно малых числах Рейнольдса в каверне устанавливается двумерное стационарное течение

$$\{\vec{V}(x,y,z), \vec{P}(x,y,z)\} = \{[\vec{V}(x,y),0],[\vec{P}(x,y),0]\}$$

Здесь $\vec{V}(x,y)$ — двумерный вектор скороси, $\vec{P}(x,y)$ — давление (скаляр), величины зависять только от двух переменных. Для их нахождения существует двумерная задача, аналогичная задаче **??**–**??**.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times \vec{\omega} - \nabla p - \nu(\nabla \times \vec{\omega}), \text{при } \vec{x} \in \Theta \tag{7}$$

$$\vec{v} = (1,0), \text{при } \vec{x} \in \Gamma_1 \tag{8}$$

$$\vec{v} = (0,0), \text{при } \vec{x} \in \Gamma_2 \tag{9}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 \tag{10}$$

Здесь вектор $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = [0,0,\omega_z]$ имеет компоненту в напралении оси OZ (и только такую компоненту), но в уравнения $\vec{\omega}$ входит только в составе выражения $[(f_x,f_y),0]\times\vec{\omega} = [(f_y\omega_z,-f_x\omega_z),0]$, результат которого — двумерные вектор, лежащий в плоскости OXY. Систему уравнений **??**–**??** можно считать двумерной.

Решение двумерной задачи **??**–**??** $\{\vec{V},P\}$ далее будет называться *базовым течение.*

Зададимся вопросом: Когда решение двумерной задачи будет решением и трехмерной задачи? Для того, что бы получить ответ на него, исследуем базовое течение на устойчивость к малым трехмерным возмущениям.

Через $\{\vec{v}(x,y,z,t),p(x,y,z,t)\}$ обозначены трехмерные *малые возмущения*, наложенные на базовое течение.

$$\vec{V}(x,y,z,t) = \vec{V}(x,y) + \vec{v}(x,y,z,t)$$
$$P(x,y,z,t) = P(x,y) + p(x,y,z,t)$$

Новая система уравнений, линейная относительно неизвестных $\vec{v}(x, y, z, t), p(x, y, z, t)$, получена путем подставления выражения в систему уравнений **??**–**??**, сокращения принебрежимо малого слагаемого $\vec{v} \times \vec{\omega}$ и использования того факта, что $\vec{V}(x, y), P(x, y)$ — решение системы **??**–**??**.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{v} \times \vec{\Omega} - \nabla p - \nu(\nabla \times \vec{\omega}), \text{при } \vec{x} \in \Theta \times \mathbb{R} \tag{12}$$

$$\vec{v} = (0, 0, 0), \text{при } \vec{x} \in \partial\Theta \times \mathbb{R} \tag{13}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 \tag{14}$$

Здесь $\vec{V} = \vec{V}(x, y)$ — базовое течение, $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$, $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$ — завихренность малых возмущений и базового течения, соответственно, $\vec{v}_0$ — распредиление малых возмущений в начальный момент времени t=0.

Над системой уравнений **??**–**??** можно выполнить преобразование Фурье вдоль оси OZ и перейти от переменной z к вonовому числу α.

Функция, над которой было выполненл преобразование фурье, обозначены соответствующими буквами готического алфавита. Если f(x,y,z) — некоторая функция от трех переменных, тогда $\mathfrak{f}(x, y, \alpha)$ — соответствующая ей, преобразованная функция.

$$\mathfrak{f}(x_0, y_0, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x_0, y_0, z) e^{-i\alpha z} dz$$

Если считать, что $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\vec{V} = (V_x, V_y)$, $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$, то в скалярном виде преобразованную систему можно записать так

$$\frac{\partial \hat{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial y} + i\alpha \hat{v}_z = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \hat{v}_x}{\partial t} = \vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{v} \times \vec{\Omega} - \nabla p - \nu(\nabla \times \vec{\omega}), \text{при } \vec{x} \in \Theta \times \mathbb{R} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{v} \times \vec{\Omega} - \nabla p - \nu(\nabla \times \vec{\omega}), \text{при } \vec{x} \in \Theta \times \mathbb{R} \tag{17}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{v} \times \vec{\Omega} - \nabla p - \nu(\nabla \times \vec{\omega}), \text{при } \vec{x} \in \Theta \times \mathbb{R} \tag{18}$$

$$\vec{v} = (0, 0, 0), \text{при } \vec{x} \in \partial\Theta \times \mathbb{R} \tag{19}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 \tag{20}$$

Можно записать и в векторном виде Так же, введены следующие обозначения для некоторых линейных операторов.

$$\nabla_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -\alpha I), \qquad \nabla^*_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \alpha I)$$

В таких обозначения система уравнений **??**–**??**, над которой было выполнено преобразование фурье, имеет вид

$$\nabla^*_\alpha \cdot \vec{\mathfrak{v}} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{v}}}{\partial t} = \vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{\mathfrak{v}} \times \vec{\Omega} - \nabla_\alpha p - \nu(\nabla \times \vec{\omega}), \text{при } \vec{x} \in \Theta \tag{22}$$

$$\vec{v} = (0, 0, 0), \text{при } \vec{x} \in \partial\Theta \tag{23}$$

$$\vec{\mathfrak{v}}(0) = \vec{v}_0 \tag{24}$$

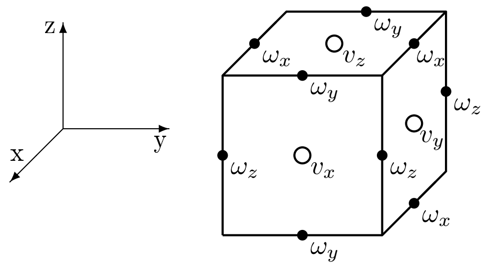

Рис. 2: Расположение узлов, к которым относятся компоненты векторов скорости и завихренности, на смещенных сетках. Изображена одная ячейка сетки. Давление p определяется в центре ячейки.

Здесь $\vec{\omega} = \nabla_\alpha \vec{\mathfrak{v}}$

Численный метод

Численный метод, использованный в работе, описан в [**?**]. Это конечно-разностный метод, позволяющий найти решение со вторым порядком точности по пространству и с третьим порядком точности по времени. В расчетной области вводится разнесенная, неравномерная сетка. Метод применим только в том случае, если в области можно ввести ортогональную систему координат в которой область представляет из себя паралеллепипед со стенками, параллельными координатным осям. То есть, если Ω — расчетная область, то существуют такие отрезки l_1, l_2, l_3, что $\Omega = l_1 \times l_2 \times l_3$.

Для того, что бы ввести неравномерную сетку, используется непрерывная монотонная функция преобразования $x = x(\xi)$, отображающая отрезок [0,1] в отрезок [0,1].

$$x(\xi) : [0,1] \longrightarrow [0,1] \tag{25}$$

Такая функция переведет одномерную равномерную стетку, введеную на отрезке [0,1] в неравномерную. Введем равномерную сетку из N_x ячеек

$$\Xi = \{\xi_i = ih, i = \overline{0..N_x}\}, \qquad h = 1/N_x \tag{26}$$

Под разностной схемой, построенной на разнесенных сетках[1], понимают такую, в которой разные неизвестные величины определины в разных узлах.

[1]так же разнесенные сетк называют перемежающиеся сетки, или смещенные сетки, Angl.: staggered mash.

В нашем случае одни неизвестные относятся к узлам сетки, то есть определены на множестве Ξ, а другие оносятся к центрам ячеек, и определены, соответственно, на множестве Ξ_f

$$\Xi_f = \{\xi_i = i * h - h/2, i = \overline{1..N_x}\}, \qquad h = 1/N_x \tag{27}$$

Неравномерные сетки X и X_f есть отображение сеток $x(\xi)$ на Ξ под действием преобразования $x(\xi)$

$$X = x(\Xi) = \{x_i = x(\xi_i), \xi_i \in \Xi\} \tag{28}$$
$$X_f = x(\Xi_f) = \{x_i = x(\xi_i), \xi_i \in \Xi_f\} \tag{29}$$

Если переменная определина в центрах ячеек, ее индекс соотвтствует номеру ячейки и меняется от 1 до N_x, а если переменная определена в узлах сетки, ее индекс соответствует номеру узла и меняется от 0 до N_x.

Далее используется обозначение $f_i = f(x_i) = f(x(\xi_i))$ — значение неизвестного f в i-ой точке сетки. Если сказанно, что переменная относится к центру ячейки, значит она определена на сетке Ξ_f.

Для произвольной функции f(x) справедливо утверждение:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Значение производной функии $x(\xi)$ может быть вычисленно точно,так как явный вид вункции известен. В соответствии с данным утверждением построен разностный оператор дифференцирования δ_x, аппроксимирующий производную со вторым порядко точности

$$\delta_x f_i = \frac{\partial x(\xi_i)}{\partial \xi}\frac{f(x(\xi_i + h/2)) - f(x(\xi_i - h/2))}{h} = \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + O(h^2) \tag{30}$$

В частном случае, если предположить, что переменная f определена в узлах сетки $f_i \in F = f(X)$, тогда $\delta_x f$ относится к центрам ячеек и определяется выражением

$$(\delta_x f)_i = (f_i - f_{i-1})\Delta_i, \text{ где } \Delta_i = \frac{1}{h}\frac{\partial x(h * i - h/2)}{\partial \xi}$$

Если, наоборот, f определена в центрах ячеек $f_i \in F = f(X_f)$, тогда $\delta_x f$ относится к узлам сетки и определяется выражением

$$(\delta_x f)_i = (f_{i+1} - f_i)\Delta_i, \text{ где } \Delta_i = \frac{1}{h}\frac{\partial x(h * i)}{\partial \xi}$$

Также, вводится вырадение для осреднения по пространству произвольной функции f(x) со вторым порядком точности. Оператор осреднения обозначается горизонтальной чертой над функцией.

$$\overline{f}_i^x = \frac{f(x(\xi_i - h/2)) + f(x(\xi_i + h/2))}{2} = f_i + O(h^2)$$

В нашем случае, если f определена в узлах сетки $f_i \in F = f(X)$, тогда $\overline{f}_i^x$ относится к центрам ячеек и определеляется выражением

$$\overline{f}_i^x = \frac{f_{i-1} + f_i}{2}$$

Если f определена в центрах ячеек $f_i \in F = f(X_f)$, тогда $\overline{f}_i^x$ относится к узлам сетки и определяется выражением

$$\overline{f}_i^x = \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$

Далее описанно ведение сетки в трехмерной области. По аналогии с парой $\{X, X_f\}$, введены пары сеток $\{Y, Y_f\}$ и $\{Z, Z_f\}$. В нашем случае необходимо вычислить три компоненты вектора скорости, три компоненты вектора завихренности и двление. Давление относится к центрам ячеек, что значит, что оно определено на множестве точек $X_f \times Y_f \times Z_f$.

$$P = \{p_{ijk} = p(x_i, y_j, z_k), \text{ при } x_i \in X_f, y_i \in Y_f, z_i \in Z_f\}$$

Компоненты вектора скорости относятся к центрам граней ячеек, вектор нормали которых сонаправлен с определяемым вектором.

$$V_x = \{v_{ijk}^x = v_x(x_i, y_j, z_k), \text{ при } x_i \in X, y_i \in Y_f, z_i \in Z_f\}$$
$$V_y = \{v_{ijk}^y = v_y(x_i, y_j, z_k), \text{ при } x_i \in X_f, y_i \in Y, z_i \in Z_f\}$$
$$V_z = \{v_{ijk}^z = v_z(x_i, y_j, z_k), \text{ при } x_i \in X, y_i \in Y_f, z_i \in Z\}$$

Компоненты вектора завихренности определяются в центрах ребер ячейки, соноправленных с определяемым вектором.

$$\Omega_x = \{\omega_{ijk}^x = \omega_x(x_i, y_j, z_k), \text{ при } x_i \in X_f, y_i \in Y, z_i \in Z\}$$
$$\Omega_y = \{\omega_{ijk}^y = \omega_y(x_i, y_j, z_k), \text{ при } x_i \in X, y_i \in Y_f, z_i \in Z\}$$
$$\Omega_z = \{\omega_{ijk}^z = \omega_z(x_i, y_j, z_k), \text{ при } x_i \in X, y_i \in Y, z_i \in Z_f\}$$

Иллюстрация на Рис **??**.

Этого достаточно для того, что бы записать разностную аппроксимацию исходной систм уравнений

$$\delta_x v_x + \delta_y v_y + \delta_z v_z = 0 \tag{31}$$
$$\omega_x = \delta_y v_z - \delta_z v_y \tag{32}$$
$$\omega_y = \delta_z v_x - \delta_x v_z \tag{33}$$
$$\omega_z = \delta_x v_y - \delta_y v_x \tag{34}$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{y'z'}\left(\overline{\overline{y'v_y}^x z'\omega_z}^y - \overline{\overline{z'v_z}^x y'\omega_y}^z\right) - \delta_x p - \nu(\delta_y \omega_z - \delta_z \omega_y) \tag{35}$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{x'z'}\left(\overline{\overline{z'v_z}^y x'\omega_x}^z - \overline{\overline{x'v_x}^y z'\omega_z}^x\right) - \delta_y p - \nu(\delta_z \omega_x - \delta_x \omega_z) \tag{36}$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{x'y'}\left(\overline{\overline{x'v_x}^z y'\omega_y}^x - \overline{\overline{y'v_y}^z x'\omega_x}^y\right) - \delta_z p - \nu(\delta_x \omega_y - \delta_y \omega_x) \tag{37}$$

Программная реализация

Результаты

Список литературы

[1] *N. Nikitin*, Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comput. Phys. 217 (2006) 759–781.

[2] *Etienne Non, Roger Pierre, and Jean-Jacques Gervais*, Linear stability of the three-dimensional lid-driven cavity // Physics of Fluids 18, 084103 (2006)