目录

第一部分

创作中

第一章

创作中

第二章

修改审阅中

矢量叉乘

预备知识 右手定则[??]，三阶行列式[??]

叉乘的几何定义

两个矢量 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 的**叉乘**（**cross product**）[1]，是一个矢量 $\mathbf{C}$．叉乘用“$\times$”表示，且**不可省略**，即 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{C}$．要确定一个矢量，只需分别确定模长和方向．

1. $\mathbf{C}$ 的模长等于 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的模长之积与夹角 θ（$0\leq\theta\leq\pi$）的正弦值相乘．

$$|\mathbf{C}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \tag{1}$$

2. $\mathbf{C}$ 的方向垂直于 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 所在的平面，且由右手定则[??] 决定．

与点乘和数乘不同，叉乘**不满足交换律**．根据几何定义，$\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 模长相同，方向却相反．表示某个矢量的反方向，就是在前面加负号，所以有

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{B} \tag{2}$$

叉乘与数乘的混合运算

在 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 中，$\mathbf{C}$ 的方向仅由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的方向决定．当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的方向不变时，$\mathbf{C}$ 的模长正比 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的模长相乘．假设 λ 为常数（标量），显然有

$$(\lambda\mathbf{A})\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(\lambda\mathbf{B})=\lambda(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{3}$$

即标量的位置可以任意变换，但矢量与乘号的位置关系始终要保持不变．

[1] 也叫**叉积**（**cross product**），**向量积**（**vector product**）或**矢量积**

叉乘的分配律

叉乘一个最重要的特性，就是它满足分配律.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{4}$$

由式 2 及上式可以推出

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = -\mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{C} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \tag{5}$$

从几何的角度理解，这个结论并不显然（见矢量叉乘分配律的几何证明[??]）.

叉乘的坐标运算

按照上面的定义，在右手系中，三个坐标轴的单位矢量 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 满足

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \qquad \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \tag{6}$$

由关系式 6 可得

$$\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{z}} \qquad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}} \tag{7}$$

根据定义，一个矢量叉乘自身，模长为 0. 所以叉乘结果是零矢量 $\mathbf{0}$. 于是又有

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \qquad \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \qquad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \tag{8}$$

式 6，式 7 和式 8中共 9 条等式描述了 $\hat{\mathbf{x}}$，$\hat{\mathbf{y}}$，$\hat{\mathbf{z}}$ 中任意两个叉乘的结果.

把矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别在直角坐标系的三个单位矢量展开，得到

$$\mathbf{A} = a_x\,\hat{\mathbf{x}} + a_y\,\hat{\mathbf{y}} + a_z\,\hat{\mathbf{z}} \qquad \mathbf{B} = b_x\,\hat{\mathbf{x}} + b_y\,\hat{\mathbf{y}} + b_z\,\hat{\mathbf{z}} \tag{9}$$

(a_x, a_y, a_z) 和 (b_x, b_y, b_z) 分别是 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的坐标. 根据叉乘的分配律（式 4 式 5），可得到如下 9 项

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (a_x\,\hat{\mathbf{x}} + a_y\,\hat{\mathbf{y}} + a_z\,\hat{\mathbf{z}}) \times (b_x\,\hat{\mathbf{x}} + b_y\,\hat{\mathbf{y}} + b_z\,\hat{\mathbf{z}}) \\
&= + a_x b_x (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}}) + a_x b_y (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}) + a_x b_z (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}}) \\
&\quad + a_y b_x (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}}) + a_y b_y (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}}) + a_y b_z (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}) \\
&\quad + a_z b_x \,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}) + a_z b_y \,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}}) + a_z b_z \,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}})
\end{aligned} \tag{10}$$

注意每一项中的运算在式 6，式 7 和式 8 中都能找到答案，于是上式化为

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(a_yb_z-a_zb_y)\,\hat{\mathbf{x}}+(a_xb_z-a_zb_x)\,\hat{\mathbf{y}}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\hat{\mathbf{z}} \tag{11}$$

令 $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$，则 $\mathbf{C}$ 的分量表达式为

$$\begin{cases} c_x = a_yb_z - a_zb_y \\ c_y = a_xb_z - a_zb_x \\ c_z = a_xb_y - a_yb_x \end{cases} \tag{12}$$

式 11 可以用三阶行列式[??] 表示为

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{13}$$

与普通行列式不同的是，这个行列式中的元有部分是矢量，所以得出的结果也是矢量.

例 1

空间直角坐标系中三角形的三点分别为 $O(0,0,0)$，$A(1,1,0)$，$B(-11,1)$. 求三角形的面积和一个单位法向量.

令 O 到 A 的矢量和 O 到 B 的矢量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}&=(1,1,0)-(0,0,0)=(1,1,0) \\ \mathbf{b}&=(-1,1,1)-(0,0,0)=(-1,1,1) \end{aligned} \tag{14}$$

三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta \tag{15}$$

其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角. 根据叉乘的几何定义中的式 1

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| \tag{16}$$

令

$$\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}+2\,\hat{\mathbf{z}} \tag{17}$$

坐标为 $(1,-1,2)$，模长为 $|\mathbf{v}|=\sqrt{1+1+2^2}=\sqrt{6}$，所以面积为 $S=\sqrt{6}/2$.

根据叉乘的几何定义，$\mathbf{v}=(1,-1,2)$ 就是三角形的法向量，进行**归一化**[2]得单位法向量为

$$\hat{\mathbf{v}}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \tag{18}$$

[2]把矢量长度变为 1，方向不变

矩阵

预备知识 线性变换[??]

本书中**矩阵**符号用加粗的正体字母来表示，而对应的**矩阵元**一般用斜体加行标和列标表示．例如矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列的的**矩阵元**表示为 A_{ij}．

矩阵的转置

任意矩阵 $\mathbf{A}$ 的**转置**（**Transpose**）记为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$．转置操作把 $\mathbf{A}$ 的第 i 行变为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 列，相当于把矩阵沿对角线翻转 180°．即任意矩阵元满足

$$A^{\mathrm{T}}_{ij} = A_{ji} \tag{1}$$

行矢量和**列矢量**可看做特殊的矩阵，行矢量转置后变为列矢量，反之亦然

$$(x_1, x_2 \dots, x_n)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

为了排版方便，在正文中通常用 $(x_1, x_2 \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示列矢量．另外，若一个矩阵的行数等于列数，这个矩阵就是一个**方阵**．

矩阵的乘法

矩阵最常见的运算是矩阵的乘法．线性变换[??]

$$\begin{cases} y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n \\ y_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ y_m = A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n \end{cases} \tag{3}$$

可用矩阵与列矢量的乘法表示为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

令列矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{y} = (y_1, y_2 \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$，系数矩阵为 $\mathbf{A}$，上式可记为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5}$$

注意 $\mathbf{A}$ 的列数必须和 $\mathbf{x}$ 的行数相等．由此可以定义**矩阵乘以列矢量**的运算规则：$m \times n$ 矩阵乘以 $n \times 1$ 列矢量会得到 $m \times 1$ 的列矢量．要计算 y_i，就用 $m \times n$ 矩阵的第 i 行的 n 个数和 $x_1 \dots x_n$ 分别相乘再相加，即点乘[??] 的代数定义

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \tag{6}$$

若有 l 个不同的 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，第 k 个记为 $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk})^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{y}_k = (y_{1k}, \dots, y_{mk})^{\mathrm{T}}$，对应的变换为

$$\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} \tag{7}$$

可以将所有的 $\mathbf{x}_k$ 和 $\mathbf{y}_k$ 分别横向拼成 $n \times l$ 和 $m \times l$ 的矩阵

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nl} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{ml} \end{pmatrix} \tag{8}$$

现在把 l 组线性变换用一条式子表示为

$$\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nl} \end{pmatrix} \tag{9}$$

由此，可以定义一般的矩阵乘法：$m \times n$ 的矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $n \times l$ 的矩阵 $\mathbf{X}$ 相乘得到 $m \times l$ 的矩阵 $\mathbf{Y}$，Y_{ij} 等于 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和 $\mathbf{X}$ 的第 j 列点乘.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \tag{10}$$

矩阵元公式为

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} X_{kj} \tag{11}$$

再次注意两个相乘的矩阵，左边矩阵的列数必须等于右边矩阵的行数.

根据定义，容易证明矩阵乘法**满足分配律** $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C}$，但一般**不满足交换律**，举一个反例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

矩阵的乘法分配律

下面证明矩阵的乘法分配律

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C} \tag{13}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{C} \tag{14}$$

令式 13 左边等于矩阵 $\mathbf{D}$，则其矩阵元为

$$D_{ij} = \sum_{k} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \tag{15}$$

拆括号得

$$D_{ij} = \sum_{k} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k} A_{ik}C_{kj} \tag{16}$$

而这恰好是 $\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C}$ 的矩阵元．证毕．式 14 的证明类似.

矩阵乘法的结合律

现在来看三个矩阵相乘，令

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) \tag{17}$$

这里的括号是为了强调顺序．即使没有括号，习惯上也是从右向左计算．$\mathbf{D}$ 的矩阵元为

$$D_{ij} = \sum_l A_{il}(BC)_{lj} = \sum_l A_{il}\left(\sum_k B_{lk}C_{kj}\right) \tag{18}$$

拆括号，得

$$D_{ij} = \sum_k \sum_l (A_{il}B_{lk}C_{kj}) \tag{19}$$

对 C_{kj} 进行合并同类项，得

$$D_{ij} = \sum_k \left(\sum_l A_{il}B_{lk}\right) C_{kj} \tag{20}$$

括号中恰好是 $\mathbf{A}$ 乘以 $\mathbf{B}$ 所得矩阵的矩阵元 $(AB)_{ik}$ 所以

$$D_{ij} = \sum_k (AB)_{ik}C_{kj} \tag{21}$$

即

$$\mathbf{D} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \tag{22}$$

证毕．

单位矩阵

单位矩阵就是对角线上的元素全为 1，非对角线上的元素全为 0 的方阵．通常记为通常记为 $\mathbf{I}$．为了强调矩阵的维数 N，也可记为 $\mathbf{I}_N$．单位矩阵的矩阵元可用克罗内克 δ 函数（**??**[??]）表示为

$$I_{ij} = \delta_{ij} \tag{23}$$

任何矩阵左乘或右乘单位矩阵，仍然得到矩阵本身．单位矩阵的转置仍为单位矩阵．

逆矩阵

记 $\mathbf{M}$ 的**逆矩阵**为 $\mathbf{M}^{-1}$，且满足

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I} \tag{24}$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵．也就是说，任意一个矩阵 $\mathbf{A}$ 乘以矩阵 $\mathbf{M}$ 再乘以其逆矩阵 $\mathbf{M}^{-1}$ 仍然得到 $\mathbf{A}$ 本身．

逆矩阵 $\mathbf{M}^{-1}$ 所代表的线性变换就是 $\mathbf{M}$ 代表的线性变换的逆变换，令 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为列矢量，如果有

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \tag{25}$$

那么我们在等式两边左乘 $\mathbf{M}^{-1}$ 再把等式左右互换，则上式变为

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} \tag{26}$$

所以如果要求逆矩阵，我们只需要把式 25 看做 N 元一次方程组，解出所有的 x_i 即可得到式 26 进而得到 $\mathbf{M}^{-1}$．要注意的是，只有在 $\mathbf{M}$ 的行数大于等于列数时，才有可能得到唯一的解，具体讨论从略．

空间旋转矩阵

预备知识 平面旋转矩阵[??]

类比平面旋转矩阵[??]，空间旋转矩阵是三维坐标的旋转变换，所以应该是 3×3 的方阵．不同的是平面旋转变换只有一个自由度 θ，而空间旋转变换除了转过的角度还需要考虑转轴的方向．如果直接从转轴和转动角度来定义该矩阵，矩阵比较复杂，这里从略．

若已经知道空间直角坐标系中三个单位正交矢量

$$\hat{\mathbf{x}} = (1,0,0)^{\mathrm{T}} \quad \hat{\mathbf{y}} = (0,1,0)^{\mathrm{T}} \quad \hat{\mathbf{z}} = (0,0,1)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

经过三维旋转矩阵变换以后变为

$$(a_{11},a_{21},a_{31})^{\mathrm{T}} \quad (a_{12},a_{22},a_{32})^{\mathrm{T}} \quad (a_{13},a_{23},a_{33})^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

类比平面旋转矩阵[??]

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

简谐振子受迫运动

预备知识 受阻简谐振子[17]，振动的指数形式[??]

在受阻弹簧振子的基础上, 若给振子额外施加一个周期变化的力（驱动力），得到微分方程如下.

$$my'' = -\alpha y' - ky + f(t) \tag{1}$$

以下只讨论 $f(t)$ 为简谐函数的情况，令其振幅为 B，频率为 ω. 我们姑且假设经过足够长的时间后，该弹簧振子也会做简谐振动，振动频率等于 $f(t)$ 的频率. 若能找到一个这样的解，就说明该假设是对的.

为了方便计算，我们用指数形式表示振动，设

$$\tilde{y}(t) = \tilde{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad \tilde{f}(t) = \tilde{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{2}$$

由于我们的微分方程是线性的，如果复数形式的 $y(t)$ 和 $f(t)$ 能满足微分方程，那么它们的实部也能满足该微分方程. 将它们代入式 1，得

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{B}}{k - \omega^2 m - \mathrm{i}\alpha\omega} \tag{3}$$

由于弹簧振子的固有频率为 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$，上式可用 ω_0 表示为

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{B}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}\alpha\omega} \tag{4}$$

上式两边求模长，得到简谐振子的振幅 $A = |\tilde{A}|$ 与驱动力频率 ω 的关系，称为**幅频关系**

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 m^2 + \alpha^2\omega^2}} \tag{5}$$

假设 $\tilde{B}$ 的幅角为零，对 $\tilde{A}$ 求负幅角，得简谐振子初相位 φ_0 与驱动频率 ω 的关系，称为**相频关系**（arctan 2 的定义见）

$$\varphi_0 = -\arg\tilde{A} = \operatorname{arctan2}\left[m(\omega_0^2 - \omega^2), -\alpha\omega\right] \tag{6}$$

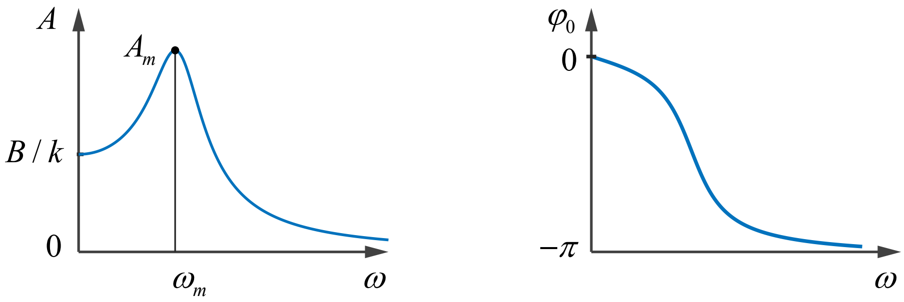

图 1: 幅频曲线和相频曲线

式 5 的根号内是关于 ω^2 的二次函数，求得二次函数最小值的位置为

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}} \tag{7}$$

幅频曲线可改写为

$$A = \frac{B}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_m^2)^2 + (\omega_0^4 - \omega_m^4)}} \tag{8}$$

所以 A 的最大值为

$$A_m = \frac{B}{m\sqrt{\omega_0^4 - \omega_m^4}} \tag{9}$$

由式 8 可得，当 $\omega = 0$ 和 $\omega \to +\infty$ 时，振幅分别为 B/k 和 0. 前者代表施加的是一个恒力，结论符合胡克定律.

再来观察相频曲线，注意初相位始终为负，说明简谐运动的相位始终落后于驱动力的相位，且频率越快，落后越多. 由式 6 可知当 $\omega \to +\infty$ 时相位恰好落后 π.

简谐振子

预备知识 胡克定律，牛顿第二定律[??]

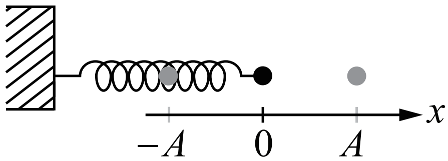

图 1: 简谐振子模型

如图 1，质量为 m 的质点固定在弹性系数为 k 的弹簧的一端，弹簧另一端固定．在 $t=0$ 时，若质点不在平衡位置，或者有一个初速度，则接下来会发生振动（忽略弹簧的质量，任何摩擦以及重力）．以质点拉伸弹簧的方向为 x 轴正方向，质点的平衡位置为 $x=0$．当质点在位置 x 时，根据胡克定律，受力为 $F=-kx$．根据牛顿第二定律[??] $F=ma=m\ddot{x}$（$\ddot{x}$ 代表对时间的二阶导数）．两式消去 F，得

$$m\ddot{x}=-kx \tag{1}$$

这是一个单变量函数与其二阶导数的关系式．我们把这样含有单变量函数及其导数或高阶导数的等式叫做**常微分方程**．由于上式中最高阶导数是二阶，所以叫做**二阶微分方程**．要解该方程，就是要寻找一个函数 $x(t)$，使它的二阶导数与 $-x(t)$ 成正比，比例系数为 k/m．注意到 $\cos'' t=-\cos t$ 具有类似的性质[3]，不妨继续猜测 $x=\cos(\omega t)$，则 $\ddot{x}=-\omega^2\cos\omega t$．所以只要令 $\omega=\sqrt{k/m}$ 即可满足方程．这说明，弹簧的震动可以用余弦函数来描述．但是这只是方程的一个解．任意情况的振动可以表示为以下函数（令 A 和 φ_0 为两个任意实数）

$$x=A\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)\qquad\left(\omega=\sqrt{k/m}\right) \tag{2}$$

这叫做微分方程式 1 的**通解**（系统的方法参考二阶常系数齐次微分方程的通解[19]），即无论常数 A,φ_0 取任意值，微分方程总能得到满足．

[3] $\sin t$ 也有同样的性质，所以以下讨论对 $\sin t$ 也成立

满足这种形式的运动叫做**简谐运动（或简谐震动）**. 其中 A 为**振幅**，$\omega t+\varphi_0$ 为**相位**，φ_0 为**初相位**（即 $t=0$ 时刻的相位）．但是如何决定 A 和 φ_0 呢？根据上面给出的条件还不能判断．由于有两个待定常数，我们需要两个额外条件才能解出．常见的情况是给出初始时刻 $t=0$ 时质点的位置 $x(0)$ 和速度 $\dot{x}(0)$，这就叫做**初值条件**.

例如给出 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=v_0$，把方程的通解代入，得 $A\cos\varphi_0=0$，$-A\omega\sin\varphi_0=v_0$，解得 $\varphi_0=\pi/2$，$A=-v_0\omega$．所以

$$x=-v_0\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=v_0\omega\sin\omega t \qquad (\omega=\sqrt{k/m}) \tag{3}$$

受阻简谐振子

预备知识 简谐振子[16]，二阶常系数齐次微分方程的[??]

结论

两个复数根（$\alpha^2-4km<0$，最常讨论和应用的情况）

$$y=C_1\mathrm{e}^{rx}\cos\left(\omega x+C_2\right) \tag{1}$$

其中

$$r=-\frac{\alpha}{2m} \qquad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\alpha^2}{4m^2}} \tag{2}$$

其中 $\omega_0=\sqrt{k/m}$ 为**固有振动频率**（$\alpha=0$ 时的振动频率）为，r 和 ω 满足

$$r^2+\omega^2=\omega_0^2 \tag{3}$$

推导

在弹簧振子的振动方程基础上，若振子还受到一个与速度成正比的阻力 $f=-\alpha v$，则振动方程如下（$\alpha\neq0$）.

$$my''=-\alpha y'-ky \tag{4}$$

之所以设为正比，是因为所得方程是线性方程，便于求解．根据二阶常系数齐次微分方程[??], 解特征方程 $mr^2+\alpha r+k=0$，可得通解分为三种情况.

1. 有两个不同的实根 r_1, r_2（$\alpha^2 - 4km > 0$），方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \tag{5}$$

这种情况下，阻力系数太大以至于质点直接减速回到平衡位置而无法发生任何振动.

2. 有一个重根 r（$\alpha^2 - 4km = 0$），方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} + C_2 x \mathrm{e}^{rx} \tag{6}$$

这是质点振动与不震动的临界点.

3. 两个复数根 r_1, r_2（$\alpha^2 - 4km < 0$，最常讨论和应用的情况）

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} \cos(\omega x + C_2) \tag{7}$$

其中

$$r = -\frac{\alpha}{2m} \qquad \omega = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - \alpha^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \tag{8}$$

这种情况下，质点做振幅不断衰减的振动，衰减系数 r 与阻力系数成正比．若令（见简谐振子[16] 的振动频率）

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \tag{9}$$

则

$$r = -\omega_0 \gamma, \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} \tag{10}$$

满足 $r^2 + \omega^2 = \omega_0^2$.

二阶常系数齐次微分方程

预备知识 常微分方程[??]，指数函数（复数）[??]

二阶常系数齐次微分方程形式如下

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

注意到指数函数 $y = C\mathrm{e}^{rx}$ 第 n 阶导数为 $r^n\mathrm{e}^{rx}$，不妨尝试把指数函数代入方程，得

$$\left(ar^2 + br + c\right)\mathrm{e}^{rx} = 0 \tag{2}$$

由于 $\mathrm{e}^{rx} \neq 0$，必有 $ar^2 + br + c = 0$．把这个二次函数叫做**特征方程**，解特征方程，就可以得到方程的解．根据根的分布，有如下四种情况

1. 有两个不同的实根 r_1 和 r_2（$b^2 - 4ac > 0$），方程的通解为
$$y = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x} \tag{3}$$
2. 有一个重根 r（$b^2 - 4ac = 0$），方程的通解为
$$y = C_1\mathrm{e}^{rx} + C_2x\mathrm{e}^{rx} \tag{4}$$
3. 有两个纯虚数根 $\pm\mathrm{i}\omega_0$（$b = 0,\ b^2 - 4ac < 0$），方程的通解为
$$y = C_1\cos(\omega_0x) + C_2\sin(\omega_0x) \tag{5}$$
或
$$y = C_1\cos(\omega_0x + C_2) \tag{6}$$
其中 $\omega_0 = \sqrt{c/a}$．
4. 有两个复数根 $r \pm \mathrm{i}\omega$（$b \neq 0,\ b^2 - 4ac < 0$），方程的通解为
$$y = \mathrm{e}^{rx}[C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)] \tag{7}$$
或
$$y = C_1\mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x + C_2) \tag{8}$$
其中
$$r = -\frac{b}{2a} \qquad \omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2} \tag{9}$$

详细推导

情况 1 的结论是显然的，我们先来看情况 3．根据 $y = C\mathrm{e}^{rx}$ 的假设，通解应该是

$$y = C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \tag{10}$$

如果这里的 C_1 和 C_2 取任意复数，那么上式就是方程在复数域的通解，其中包含了实数域的通解．这个通解还有另一种等效的形式，令

$$C_1 = \frac{C_3}{2} + \frac{C_4}{2\mathrm{i}} \qquad C_2 = \frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{2\mathrm{i}} \tag{11}$$

代入上式得

$$\begin{aligned} y &= C_3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2} + C_4\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}} \\ &= C_3\cos(\omega x) + C_4\sin(\omega x) \end{aligned} \tag{12}$$

注意如果 C_3, C_4 取任意复数，该式仍然是复数域的通解（因为任何 C_1, C_2 都可以找到对应的 C_3, C_4），但只要把 C_3, C_4 限制在实数域中，该式就是实数域的通解．

情况 4 的结论可以类比情况 3 得出，最后我们来看情况 2．我们可以把情况 2 看做情况 4 的一个极限，即 $\omega \to 0$ 时的情况．如果式 7 中的 C_1, C_2 都是普通常数，则取该极限时可以得到式 4 的第一项 $C_1\mathrm{e}^{rx}$．那如何得到第二项呢？我们不妨令式 7 中的 $C_1 = 0$，$C_2 = C_3/\omega$，再来取极限，得

$$\lim_{\omega\to 0} C_3\mathrm{e}^{rx}\frac{\sin(\omega x)}{\omega x}x = C_3 x\mathrm{e}^{rx} \tag{13}$$

这里用到了“小角正弦值极限[??]”中的结论．

本书编写规范

预备知识 本书编写规范[21]

软件使用规范

本书使用 TeXLive2016 软件中的 XeLaTeX 进行编译．如果 Windows 中编译卡在 eu1lmr.fd 上的时间较长，说明 font config 有问题，在 Windows 的控制行运行“fc-cache -fv”，重启 TeXLive，多试几次即可．TeXWork 编辑器中 Ctrl+T 编译，Ctrl+ 单击跳转到对应的 pdf 或代码，在 pdf 中 Alt+ 左箭头返回上一个位置．代码中\beq+Tab 生成公式环境，\sub+Tab 生成 subsection．Ctrl+F 进行查找，Ctrl+G 查找下一个．菜单中的 Edit>Preference 设置默认字体为 Microsoft YaHei UI（11pt），默认编译器为 XeLaTeX，编码选择 UTF-8．

搜索文件夹内所有文档的内容用 FileSeek 软件，搜索空格用“\空格”，搜索“$”用“\$”，以此类推．对比两个文档或文件夹用 WinMerge 软件．

画图用 Adobe Illustrator 和 Autodesk Graphics，用 MathType 在图中添加公式，希腊字母粗体正体矢量用从 Symbol 字体中插入，更简单的方法是，先输入希腊字母，选中，然后在 Style 里面选 Vector-Matrix．

文件版本管理

使用 GitHub Desktop，用 PhysWiki repository 管理所有文件，每次 commit 需要做的事情如下

- 用 FileSeek 替换所有文档中的空心句号．
- 确保所有文档可以顺利编译．
- 解决编译产生的 warning．
- 清除编译产生的中间文件，包括 content 文件夹中的非 tex 文件．
- 把 ManicTime 记录的写作时间记录到“计时.txt”．

- 检查变化的内容.

每次 commit 的标题必须是下列之一

- 常规更新：包括完善词条，新词条等.
- 词条统计：统计文件夹，对照表，和书中的词条，查看不一致或缺失.
- 模板更新：模板有更新.

词条统计的方法：首先把 contents 文件夹中的所有文件名按顺序排列，复制到表格中，然后把词条对照表中的所有标签在表格中找到对应项，做标记，并把对照表中的词条名粘贴到表格中．最后到 PhysWiki.tex 中逐个把标签在表格中找到对应项，做标记，对照词条名，并对照词条文件中第一行的词条名.

词条编写规范

词条标签必须限制在 6 个字符内，必须在 PhysWiki.tex，词条标签对照表和词条文件名中一致．词条的中文名必须在 PhysWiki.tex，词条标签对照表和词条文件的第一行注释中一致．如果不是超纲词条，在主文件中用 \entry 命令，否则用 \Entry 命令．非超纲词条放在 contents 文件夹，超纲词条放在 contents1 文件夹．引用词条用 \upref 命令，“预备知识”用 \pentry 命令，“应用实例”用 \eentry 命令，拓展阅读用 \rentry 命令．总文件 PhysWiki.tex 编译较慢，可以先使用 debug.tex 编译，然后再把 \entry 或 \Entry 指令复制到 PhysWiki.tex 中．注意 PhysWiki.tex 中 \entry 命令的后面可以用 \newpage 命令强制换页，但为了排版紧凑不推荐这么做.

黑色的小标题

正文必须使用中文的括号，逗号，引号，冒号，分号，问号，感叹号，以及全角实心的句号．所有的标点符号前面不能有空格，后面要有空格．行内公式用单个美元符号，且两边要有空格，例如 $a^2 + b^2 = c^2$，后面有标点符号的除外．方便的办法是先全部使用中文标点，最后再把所有空心句号替换成全角实心句号.

公式的 label 必须要按照“词条标签 _eq 编号”的格式，只有需要引用的公式才加标签，编号尽量与显示的编号一致，但原则上不重复即可．图表的标

签分别把 eq 改成 fig 和 tab 即可，例题用 ex．但凡是有 \caption 命令的，\label 需要紧接其后．

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \quad (n\text{为整数}) \tag{1}$$

引用公式和图表都统一使用 \autoref 命令，注意前面不加空格后面要加空格，例如式 1．如果要引用其他词条中的公式，可以引用“其他词条[21]”的式 1 也可以用“式 1[21]”，为了方便在纸质书上使用，词条页码是不能忽略的．

错别字替换

正文中常见的错别字如“他们”（它们），“一下”（以下），可以时常搜索替换．

公式规范

公式中的空格从小到大如 $a\,b\:c\quad d\qquad e$，微分符号如 $\mathrm{d}x$，自然对数底如 e，双重极限如

$$\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_i\to 0}} \sum_{i,j} f(x_i,y_i)\Delta x_i \Delta y_j \tag{2}$$

导数和偏导尽量用 Physics 宏包里面的

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \quad \mathrm{d}^2 f\big/\mathrm{d}x^2 \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \partial^2 f\big/\partial x^2 \tag{3}$$

复数如 $u+\mathrm{i}v$，复共轭如 a^*，行内公式如 a/b，不允许行内用立体分式．公式中的绝对值如 $|a|$，矢量如 $\mathbf{a}$，手写矢量如 $\vec{a}$，单位矢量如 $\hat{\mathbf{a}}$，矢量点乘如 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$（不可省略），矢量叉乘如 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$．量子力学算符如 $\hat{a}$，狄拉克符号如 $\langle a|\,,|b\rangle\,,\langle a|b\rangle$．梯度散度旋度拉普拉斯如 $\boldsymbol{\nabla} V$，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}$，$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$，$\nabla^2 V$，但最好用 $\boldsymbol{\nabla} V$，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}$，$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$，$\nabla^2 V$．单独一个粗体的 ∇ 用 $\boldsymbol{\nabla}$．行列式，矩阵 $\mathbf{A}$，转置 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$，厄米共轭 $\mathbf{A}^\dagger$ 如

$$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{\dagger} \tag{4}$$

行内的列矢量用行矢量的转置表示，如 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$．

行间公式换行及对齐用 aligned 环境，或用自定义的 \ali 命令

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab \\ &= a^2+b^2+2ab-4ab \\ &= (a+b)^2-4ab\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}d+e+f &= g \\ a+b &= c\end{aligned} \tag{6}$$

左大括号用自定义的 \leftgroup 命令，里面相当于 aligned 环境

$$\left\{\begin{aligned}d+e+f &= g \\ a+b &= c\end{aligned}\right. \tag{7}$$

可变化尺寸的斜分数线如下

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}\bigg/X+\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}\bigg/Y+\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}\bigg/Z=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}\bigg/T \tag{8}$$

希腊字母如下

$$\begin{aligned}&\alpha(a),\beta(b),\chi(c),\delta(d),\epsilon/\varepsilon(e),\phi(f),\gamma(g),\eta(h),\iota(i),\varphi(j),\kappa(k),\lambda(l),\mu(m),\\ &\nu(n),o(o),\pi(p),\theta(q),\rho(r),\sigma(s),\tau(t),\upsilon(u),\varpi(v),\omega(w),\xi(x),\psi(y),\zeta(z)\end{aligned} \tag{9}$$

以下是 script 字母，只有大写有效．所谓大写 ϵ 其实是花体的 E．

$$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{O},\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R},\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W},\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z} \tag{10}$$

另外，电介质常数一律用 ϵ 而不是 ε．

写单位，用 \si，如 $a=100\ \mathrm{m/s^2}$．

图表

现在来引用一张图片，图片必须以 eps 以及 pdf 两种格式放在 figures 文件夹中，代码中使用 pdf 图片．图片宽度一律用 cm 为单位．在图 1 中，label 只能放在 caption 的后面，否则编号会出错．由于图片是浮动的，避免使用“上图”，“下图”等词．

再来看一个表格，如表 1．注意标签要放在 caption 后面，使用 tb 命名．

下面我们举一个例子并引用

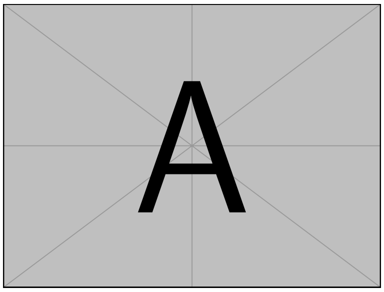

图 1: 例图

表 1: 极限 e 数值验证

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$(1+x)^{1/x}$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828

例 1　名称

在例子中，我们的字体可以自定义，包括公式的字号会保持与内容一致.

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} (n\text{为整数}) \tag{11}$$

引用例子同样使用 \autoref，如例 1.

以下给出一段 Matlab 代码，代码必须有“.m”和“.tex”两个版本，放在 codes 文件夹中.

Matlab 代码

显示 Command Window 中的代码

```
>> 1.2/3.4 + (5.6+7.8)*9 -1
ans = 119.9529
>> 1/exp(1)
ans = 0.3679
>> exp(-1i*pi)+1
ans = 0
```

显示 m 文件中的代码

代码必须以.tex 文件格式放在 code 文件夹中的中，并用 \input 命令导入正文．.tex 代码文件的命名与图片命名相同．禁止在正文中直接写代码．

```
% 验证二项式定理(非整数幂)
u = -3.5;
x = 0.6; % |x|<1 使级数收敛
N = 100; % 求和项数
Coeff = 1; % x^ii 项前面的系数
result = 1; % 求和结果
for ii = 1:N
    Coeff = Coeff*(u-ii+1) / ii;
    result = result + Coeff * x^(ii);
end
disp('直接计算结果为')
format long % 显示全部小数位
disp((1+x)^u)
disp('求和结果为')
disp(result)
format short % 恢复默认显示
```

应用举例 本书格式规范[21]

拓展阅读 本书格式规范[21]