目录

第一部分

创作中

第一章

创作中

一阶齐次线性微分方程

预备知识 常微分方程[6]

具有以下形式的微分方程叫做**一阶线性微分方程**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=f(x) \tag{1}$$

一般地，未知函数及其各阶导数都各占一项时，方程就是**线性**的．另外，如果 $f(x)$ 项不出现，方程就是**齐次**的，否则就是**非齐次**的．我们先来看以上方程对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0 \tag{2}$$

这是一个可分离变量的方程，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

两边积分得

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+C \tag{4}$$

两边取自然指数得

$$y=\pm\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{5}$$

把 $\pm\mathrm{e}^{C}$ 整体看做一个任意常数 C，上式变为．

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6}$$

这就是一阶线性齐次微分方程式 2 的通解，也叫式 1 的**齐次解**．

常数变易法

现在我们用所谓的**常数变易法**来解非齐次方程式 1．为书写方便，式 6 中令 $y_0(x)=\exp\bigl(-\int p(x)\,\mathrm{d}x\bigr)$．假设上式中的 C 是一个函数 $C(x)$ 而不是常数，代入式 1 得

$$C'y_0+C[y_0'+p(x)y_0]=f(x) \tag{7}$$

由于 y_0 是齐次解，上式方括号中求和为 0，分离变量得

$$\mathrm{d}C = \frac{f(x)}{y_0}\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

两边积分得

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

所以一阶线性非齐次微分方程的通解为

$$y = y_0 \int \frac{f(x)}{y_0}\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

其中

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{11}$$

注意待定常数包含在式 10 的不定积分中，式 11 中的不定积分产生的待定常数在代入式 10 后可消去.

第二章

修改审阅中

常微分方程

预备知识 简谐振子[??]

作为一个引入的例子，我们首先看“简谐振子[??]”中的**??**。一般来说，含有函数 $y(x)$ 及其高阶导数 $y^{(n)}$，和自变量 x 的等式叫做**常微分方程**（简称微分方程[1]），即

$$f(y^{(N)}, y^{(N-1)}, \ldots, y, x) = 0 \tag{1}$$

上式中的最高阶导数为 N 阶，所以可以把上式叫做 N 阶微分方程。注意方程中必须出现 $y^{(N)}$，剩下的 $y^{(N-1)}, \ldots, y, x$ 可以只出现部分或不出现。所有能使微分方程成立的函数 $f(x)$ 都是方程的**解**，如果能找到含有参数的函数 $f(x, C_1, \ldots, C_N)$，使所有可能的解都可以通过给 C_i 赋值来表示，那么这就是函数的**通解**。

有一些微分方程的解法是显然的，例如描述自由落体运动[??] 的微分方程为 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 = g$（假设 y 轴竖直向下）。要解这个方程，只需对等式两边进行两次不定积分即可得到通解为 $y = C_1 + C_2 t + gt^2/2$。一般来说，如果 N 阶微分方程具有 $y^{(N)} = f(x)$ 的形式，只需进行 N 次积分即可得到通解。

另一些方程是**可以分离变量**的，我们来看“受阻落体[17]”这个例子。若方程可分离变量，只需先分离变量，再对等式两边求不定积分即可找到通解。

一阶线性微分方程

二阶线性微分方程

[1]这里的“常”强调未知函数只有一个因变量，用于区别多元微积分中的“偏微分方程”。

一元函数的微分

预备知识　导数[??]

考察一个连续光滑的函数 $y = f(x)$，在 x 处函数值为 y，若此时函数增加一个无穷小量 $\mathrm{d}x$，函数值会相应增加无穷小量 $\mathrm{d}y$．根据导数的定义[??] $f'(x) = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$，我们将 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的关系记为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

这就是一元函数的**微分**．注意一元函数的求导和微分除了表达方式不同外并无太大区别．从形式上来看，微分是微小变化量之间的线性关系，而导数则强调变化率．

微分近似

严格来说，类似式 1 的微分关系式默认取极限 $\mathrm{d}x \to 0$ 才能使等号成立，但只要在一定范围 Δx 内导函数 $f'(x)$ 的变化非常小，就可以将函数值的变化量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 近似为

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \tag{2}$$

注意在近似式中不能出现微分符号 d，也不能使用等号．

例 1　测量误差

若测得立方体的边长为 a，测量的最大可能误差为 σ_a（可以假设 $\sigma_a \ll a$），估计立方体体积的最大误差 σ_V．

立方体的体积与边长的关系为 $V(a) = a^3$，根据微分近似，有

$$\sigma_V \approx V'(a)\sigma_a = 3a^2\sigma_x \tag{3}$$

积分表

预备知识 不定积分[??]

这里给出一个基本积分表和一个常用积分表，前者建议熟记．部分积分有的给出计算步骤，没有给出则是由基本初等函数的导数[??] 直接逆向得出．所有的不定积分公式都可以通过求导验证．

应用换元积分法[??]，表中任何积分都可以拓展为

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) \tag{1}$$

基本积分表

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad (a \in R, a \neq -1) \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad \text{（例 6）} \tag{3}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \tag{4}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{5}$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \quad \text{（例 2）} \tag{6}$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C \quad \text{（例 3）} \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C \tag{9}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \tag{10}$$

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x-1) + C \quad \text{（例 7）} \tag{11}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C \quad \text{（例 1）} \tag{12}$$

常用积分表

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \quad \text{（例 4）} \tag{13}$$

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C \quad \text{（例 5）} \tag{14}$$

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln |\tan x + \sec x| + C \quad \text{（例 10）} \tag{15}$$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C \quad \text{（例 8）} \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin(x) + C \quad \text{（例 9）} \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) = \sinh^{-1}(x) + C \quad \text{（例 11）} \tag{18}$$

例 1

$$\int a^x \, \mathrm{d}x \tag{19}$$

我们已经知道如何算 e^x 的积分，而 $a = \mathrm{e}^{\ln a}$，再根据式 1 就有

$$\int \mathrm{e}^{\ln(a)x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} \mathrm{e}^{\ln(a)x} + C = \frac{1}{\ln a} a^x + C \tag{20}$$

例 2

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x \tag{21}$$

这个积分用第一类换元积分法（**??**[??]）

$$\int f[u(x)]u'(x) \, \mathrm{d}x = F[u(x)] + C \tag{22}$$

首先 $\tan x = \sin x / \cos x$，令 $u(x) = \cos x$，则 $\sin x = -u'(x)$，对比得 $f(x) = -1/x$ 其原函数为 $F(x) = -\ln|x|$，所以

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = \int f[u(x)]u'(x) \, \mathrm{d}x = F[u(x)] + C = -\ln|\cos x| + C \tag{23}$$

例 3

类似例 2，$\cot x = \cos x / \sin x$，令 $u(x) = \sin x$，则 $\cos x = u'(x)$，对比得 $f(x) = 1/x$，原函数为 $F(x) = \ln|x|$ （式 3），所以

$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = F[u(x)] + C = \ln|\sin x| + C \tag{24}$$

例 4

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \tag{25}$$

用降幂公式（**??**[??]）和不定积分的线性（**??**[??]）把上式变为常数的积分和 $\cos 2x$ 的积分，再利用式 4 和式 1 计算后者即可

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\end{aligned} \tag{26}$$

例 5

$$\int \cos^2(x) \, \mathrm{d}x \tag{27}$$

与例 4 类似，用三角恒等式 $\cos^2(x) = [1 + \cos(2x)]/2$ 得

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C\end{aligned} \tag{28}$$

例 6

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \tag{29}$$

首先在区间 $(0, +\infty)$ 内，由于 $\ln x$ 的导数是 $1/x$，所以积分结果为 $\ln x + C$。现在再来考虑区间 $(-\infty, 0)$，注意 $\ln x$ 在这里没有定义，不妨看看 $\ln(-x)$，由复合函数求导，其导数恰好为 $1/x$。所以在除去原点的实数范围内，有

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{30}$$

事实上，由于 $1/x$ 在 $x=0$ 没有定义，更广义的原函数可以取

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + C_1 & (x>0) \\ \ln(-x) + C_2 & (x<0) \end{cases} \tag{31}$$

其中 C_1 和 C_2 是两个不相同的待定常数。

例 7

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \tag{32}$$

使用用分部积分**??**[??]

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

令 $F(x)=x$，求导得 $f(x)=1$，令 $g(x)=\mathrm{e}^x$，由式 10，$G(x)=\mathrm{e}^x$. 代入分部积分得

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int 1\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x-1)+C \tag{34}$$

例 8

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x \tag{35}$$

方法一： 使用第二类换元法**??**[??]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[x(t)]\,\mathrm{d}[x(t)] = \int f[x(t)]x'(t)\,\mathrm{d}t \tag{36}$$

令[2] $x=\mathrm{e}^t$，求导得 $x'(t)=\mathrm{e}^t$，换元得

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \tag{37}$$

由例 7 中的分部积分得

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t(t-1)+C = \mathrm{e}^{\ln x}(\ln x-1)+C = x(\ln x-1)+C \tag{38}$$

方法二： 直接使用分部积分法**??**[??]，对常数 1 积分，对 $\ln x$ 求导，得

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C \tag{39}$$

[2]注意被积函数只在 $x>0$ 区间有定义，否则使用 $x=\mathrm{e}^t$ 将会自动忽略 $x\le 0$ 的情况.

例 9

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{40}$$

使用第二类换元法??[??]，令 $x=\sin t$ 得

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\mathrm{d}(\sin t)=\int \mathrm{d}t=t+C=\arcsin x+C \tag{41}$$

例 10

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x \tag{42}$$

分子分母同时乘以 $\sec x+\tan x$，可以发现分子是分母的导数。再用第一类换元积分法（??[??]），令 $u(x)=\sec x+\tan x$，再使用式 3 即可

$$\begin{aligned}\int \sec x\,\mathrm{d}x&=\int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{u'(x)}{u}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\&=\ln|u|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C\end{aligned} \tag{43}$$

例 11

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{44}$$

使用第二类换元法??[??]，令 $x=\tan t$，再利用三角恒等式??[??] 和 式 3 得

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\,\mathrm{d}(\tan t)=\int \frac{1}{\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\ln|\tan t+\sec t|+C \tag{45}$$

由同一三角恒等式，$\sec t=\sqrt{1+\tan^2 t}=\sqrt{1+x^2}$，所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C \tag{46}$$

注意上式中 ln 后面的绝对值符号消失是因为 $x+\sqrt{1+x^2}\geq 0$ 恒成立。另外由 $\sinh^{-1}x$ 函数的定义可知上式又等于 $\sinh^{-1}x+C$。

质心 质心系

预备知识 体积分

质心的定义

对质点系，令第 i 个质点质量为 m_i，位置为 $\mathbf{r}_i$，总质量为 $M = \sum_i m_i$，则该质点系的**质心**定义为

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i \tag{1}$$

对连续质量分布，令密度关于位置的函数为 $\rho(\mathbf{r})$，总质量为密度的体积分

$$M = \int \rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V \tag{2}$$

质心定义为

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V \tag{3}$$

以下的讨论都对质点系进行，连续质量分布可看做由许多体积微元组成，也可看做质点系.

质心的唯一性

既然质心的定义取决于参考系（因为 $\mathbf{r}_i$ 取决于参考系），那么不同参考系中计算出的质心是否是空间中的同一点呢？我们只需要证明，在 A 坐标系中得到的质心 $\mathbf{r}_{Ac}$ 与 B 坐标系中得到的质心 $\mathbf{r}_{Bc}$ 满足关系

$$\mathbf{r}_{Ac} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{Bc} \tag{4}$$

首先根据定义

$$\mathbf{r}_{Ac} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_{Ai} \qquad \mathbf{r}_{Bc} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_{Bi} \tag{5}$$

由位矢的坐标系变换，$\mathbf{r}_{Ai} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{Bi}$，所以

$$\mathbf{r}_{Ac} = \frac{1}{M}\sum_i m_i(\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{Bi}) = \mathbf{r}_{AB} + \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_{Bi} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{Bc} \tag{6}$$

质心系

定义质点系的**质心系**为原点固定在质心上且没有转动的参考系（平动参考系）．根据质心的唯一性（式 4），在质心系中计算质心（式 1）仍然落在原点，即

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_{ci} = \mathbf{0} \tag{7}$$

其中 $\mathbf{r}_{ci}$ 是质心系中质点 i 的位矢．

注意质心系并不一定是惯性系，只有当合外力为零质心做匀速直线运动，质心系才是惯性系．在非惯性系中，每个质点受惯性力．

质心系中总动量

把式 7 两边对时间求导，得

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_{ci} = \mathbf{0} \tag{8}$$

注意到等式左边恰好为质心系中质点系的总动量，所以我们得到质心系的一个重要特点，**质心系中总动量为零**．

二体系统

预备知识 质心 质心系[13]

我们现在考虑两个仅受相互作用的质点 A 和 B，它们的质量分别为 m_A 和 m_B．由于不受系统外力，在任何惯性系中他们的质心都会做匀速直线运动．

现在定义他们的**相对位矢**（也叫**相对坐标**）为点 A 指向点 B 的矢量

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \tag{1}$$

且定义相对速度和**相对加速度**分别为 $\mathbf{R}$ 的导数 $\dot{\mathbf{R}}$ 和二阶导数 $\ddot{\mathbf{R}}$．在质心系中观察，由于质心始终处于原点，两质点的位矢 $\mathbf{r}_A$ 和 $\mathbf{r}_B$ 满足

$$m_A\mathbf{r}_A + m_B\mathbf{r}_B = \mathbf{0} \tag{2}$$

联立式 1 和式 2 可以发现在质心系中 $\mathbf{R}, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ 间始终存在一一对应的关系，所以不受外力的二体系统只有三个自由度

$$\mathbf{r}_A = \frac{m_B}{m_A + m_B}\mathbf{R} \qquad \mathbf{r}_B = \frac{m_A}{m_A + m_B}\mathbf{R} \tag{3}$$

运动方程

现在令质点 A 对 B 的作用力为 $\mathbf{F}$ （与 $\mathbf{R}$ 同向），则由牛顿第三定律，B 对 A 有反作用力 $-\mathbf{F}$．两质点加速度分别为（牛顿第二定律）$\mathbf{a}_A = -\mathbf{F}/m_A$，$\mathbf{a}_B = \mathbf{F}/m_B$．所以相对加速度为

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B}\mathbf{F} \tag{4}$$

若定义两质点的**约化质量**为

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \tag{5}$$

且将上式两边同乘约化质量，我们得到相对位矢的牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = \mu\ddot{\mathbf{R}} \tag{6}$$

也就是说，在质心系中使用相对位矢，二体系统的运动规律就相当于单个质量为 μ，位矢为 $\mathbf{R}$ 的质点的运动规律，我们姑且将其称为**等效质点**．而 A 对 B 的作用力可以看成原点对等效质点的有心力．

机械能守恒

再来看系统的动能．使用式 3 把系统在质心系中的总动能用相对位矢表示得

$$E_k = \frac{1}{2}(m_A\dot{\mathbf{r}}_A^2 + m_B\dot{\mathbf{r}}_B^2) = \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{R}}^2 \tag{7}$$

这恰好是等效质点动能．

若两质点间的相互作用力的大小只是二者距离 $R = |\mathbf{R}|$ 的函数，我们可以用一个标量函数 $F(R)$ 来表示力与距离的关系，即

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = F(R)\hat{\mathbf{R}} \tag{8}$$

注意 $F(R) > 0$ 时两质点存在斥力，$F(R) < 0$ 时存在引力．

根据“势能[??]”中的**??**，我们可以定义势能函数 $V(R)$ 为 $F(R)$ 的一个负原函数．现在写出二体系统在质心系中的机械能为

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{R}}^2 + V(R) \tag{9}$$

由于系统不受外力，机械能守恒．

受阻落体

预备知识 匀加速运动[??]

在自由落体的基础上，若假设质点受到的空气阻力的大小与其速度成正比，比例系数为 α，那么根据牛顿第二定律[??] 可以列出动力学方程（假设向下为正方向）

$$ma = F = mg - \alpha v \tag{1}$$

考虑到加速度是速度的导数，上式变为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\alpha}{m}v \tag{2}$$

这是速度关于时间的函数 $v(t)$ 与其一阶导数 $\dot{v}(t)$ 的关系式，即微分方程[6]．与自由落体问题不同的是，这个方程的右边含有未知函数 $v(t)$，所以不可能直接将等式两边积分解得 $v(t)$．我们可以根据微分与导数的关系，将上式两边同乘 $\mathrm{d}t$ 并整理得

$$\frac{1}{g - \alpha v/m}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}t \tag{3}$$

这样我们就得到了 v 和 t 的微分[7] 关系，即每当 t 增加一个微小量时，如何求 v 对应增加的微小量．注意等式左边仅含 v，右边仅含 t，所以这一步叫做**分离变量**，我们称式 2 为**可分离变量**的微分方程．假设 v 和 t 之间的关系可以表示为

$$F(v) = G(t) \tag{4}$$

那么对等式两边微分即可得到式 3 的形式．令 $f(v)$ 和 $g(t)$ 分别为 $F(v)$ 和 $G(t)$ 的导函数，有

$$f(v)\,\mathrm{d}v = g(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

对比式 3 可得 $f(v) = 1/(g - \alpha v/m)$ 和 $g(t) = 1$，把二者做不定积分得原函数．首先显然 $G(t) = t + C_1$．对 $f(v)$ 积分可用“积分表[8]”中的式 1 和 式 3 得

$$F(v) = -\frac{m}{\alpha}\ln\left|g - \frac{\alpha}{m}v\right| + C_2 = -\frac{m}{\alpha}\ln\left(g - \frac{\alpha}{m}v\right) + C_2 \tag{6}$$

上式中绝对值符号可去掉是因为在式 2 中根据物理情景可知 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 始终大于零．把两原函数代回式 4（这时可以把 C_1 和 C_2 合并为一个待定常数 C），整理可得

$$v = \frac{m}{\alpha}\left(g - \mathrm{e}^{-\alpha C/m}\mathrm{e}^{-\alpha t/m}\right) \tag{7}$$

这就是微分方程式 2 的通解，可代入原微分方程以验证是否成立．以后我们把以上这种由**??** 形式求式 4 形式的步骤简称为”对方程两边积分“．由于方程阶数为 1，通解仅含有一个待定常数．为了确定这个待定常数，我们用题目给出的**初值条件**，即 $t = 0$ 时 $v = 0$，代入通解可解得 C，再把 C 代回通解得满足初始条件的**特解**

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t/m}\right) \tag{8}$$

从该式可以看出，当 $t = 0$ 时，质点速度为 0，符合初始条件，而当 $t \to +\infty$ 时，$v(t) \to mg/\alpha$．可见质点的速度会无限趋近一个最大值，而这个最大值恰好可以使阻力 αv 等于重力 mg．利用这一条件，即使不解微分方程，也可以很快算出质点的末速度．

本书编写规范

预备知识 本书格式规范[19]

蓝色的小标题

本书使用 TeXLive2016 软件中的 XeLaTeX 进行编译．如果 Windows 中编译卡在 eu1lmr.fd 上的时间较长，说明 font config 有问题，在 Windows 的控制行运行“fc-cache -fv”，重启 TeXLive，多试几次即可．TeXWork 编辑器中 Ctrl+T 编译，Ctrl+ 单击跳转到对应的 pdf 或代码，在 pdf 中 Alt+ 左箭头返回上一个位置．代码中\beq+Tab 生成公式环境，\sub+Tab 生成 subsection．Ctrl+F 进行查找，Ctrl+G 查找下一个．菜单中的 Edit>Preference 设置默认字体为 Microsoft YaHei UI（11pt），默认编译器为 XeLaTeX，编码选择 UTF-8．

搜索文件夹内所有文档的内容用 FileSeek 软件，搜索空格用“\空格”，搜索“$”用“\$”，以此类推．对比两个文档或文件夹用 WinMerge 软件．

画图用 Adobe Illustrator 和 Autodesk Graphics，用 MathType 在图中添加公式，希腊字母粗体正体矢量用从 Symbol 字体中插入，更简单的方法是，先输入希腊字母，选中，然后在 Style 里面选 Vector-Matrix．

黑色的小标题

词条标签必须限制在 6 个字符内，必须记录在“词条标签对照表”中，如果不是超纲词条，在主文件中用 entry 命令，否则用 Entry 命令．词条的文件名和标签名相同．词条文件的首行必须注释词条的中文名，非超纲词条放在 contents 文件夹，超纲词条放在 contents1 文件夹．引用词条用 upref 命令，“预备知识”用 pentry 命令，“应用实例”用 eentry 命令，拓展阅读用 rentry 命令．总文件 PhysWiki.tex 编译较慢，可以先使用 debug.tex 编译，然后再把 entry 或 Entry 指令复制到 PhysWiki.tex 中．注意 PhysWiki.tex 中 entry 命令的后面可以用 newpage 命令强制换页，但为了排版紧凑不推荐这么做．

正文必须使用中文的括号，逗号，引号，冒号，分号，问号，感叹号，以及全角实心的句号．所有的标点符号前面不能有空格，后面要有空格．行内公

式用单个美元符号，且两边要有空格，例如 $a^2+b^2=c^2$，后面有标点符号的除外．方便的办法是先全部使用中文标点，最后再把所有空心句号替换成全角实心句号．

公式的 label 必须要按照“词条标签 _eq 编号”的格式，只有需要引用的公式才加标签，编号尽量与显示的编号一致，但原则上不重复即可．图表的标签分别把 eq 改成 fig 和 tab 即可，例题用 ex．但凡是有 caption 命令的，label 需要紧接其后．

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \quad (n\text{为整数}) \tag{1}$$

引用公式和图表都统一使用 autoref 命令，注意前面不加空格后面要加空格，例如式 1．如果要引用其他词条中的公式，可以引用“其他词条[19]”的式 1 也可以用“式 1[19]”，为了方便在纸质书上使用，词条页码是不能忽略的．

公式中的空格从小到大如 $a\,b\:c\quad d\qquad e$，微分符号如 $\mathrm{d}x$，自然对数底如 e，双重极限如

$$\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_i\to 0}} \sum_{i,j} f(x_i,y_i)\Delta x_i \Delta y_j \tag{2}$$

导数和偏导尽量用 Physics 宏包里面的

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \quad \mathrm{d}^2 f\big/\mathrm{d}x^2 \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \partial^2 f\big/\partial x^2 \tag{3}$$

复数如 $u+\mathrm{i}v$，复共轭如 a^*，行内公式如 a/b，不允许行内用立体分式．公式中的绝对值如 $|a|$，矢量如 $\mathbf{a}$，单位矢量如 $\hat{\mathbf{a}}$，矢量点乘如 $\mathbf{A}\boldsymbol\cdot\mathbf{B}$（不可省略），矢量叉乘如 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$．量子力学算符如 $\hat{a}$，狄拉克符号如 $\langle a|\,,|b\rangle\,,\langle a|b\rangle$．梯度散度旋度拉普拉斯如 $\boldsymbol\nabla V$，$\boldsymbol\nabla\boldsymbol\cdot\mathbf{A}$，$\boldsymbol\nabla\times\mathbf{A}$，$\nabla^2 V$，但最好用 $\boldsymbol\nabla V$，$\boldsymbol\nabla\boldsymbol\cdot\mathbf{A}$，$\boldsymbol\nabla\times\mathbf{A}$，$\nabla^2 V$．单独一个粗体的 ∇ 用 $\boldsymbol\nabla$．行列式，矩阵 $\mathbf{A}$，转置 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$，厄米共轭 $\mathbf{A}^\dagger$ 如

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{\dagger} \tag{4}$$

行内的列矢量用行矢量的转置表示，如 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$．

行间公式换行及对齐用 aligned 环境，或用自定义的 ali 命令

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab\\ &= a^2+b^2+2ab-4ab\\ &= (a+b)^2-4ab\end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{gathered}
d+e+f=g \\
a+b=c
\end{gathered} \tag{6}
$$

左大括号用自定义的 leftgroup 命令，里面相当于 aligned 环境

$$
\left\{
\begin{aligned}
d+e+f&=g \\
a+b&=c
\end{aligned}
\right. \tag{7}
$$

希腊字母如下

$$
\begin{gathered}
\alpha(a), \beta(b), \chi(c), \delta(d), \epsilon/\varepsilon(e), \phi(f), \gamma(g), \eta(h), \iota(i), \varphi(j), \kappa(k), \lambda(l), \mu(m), \\
\nu(n), o(o), \pi(p), \theta(q), \rho(r), \sigma(s), \tau(t), \upsilon(u), \varpi(v), \omega(w), \xi(x), \psi(y), \zeta(z)
\end{gathered} \tag{8}
$$

以下是 script 字母，只有大写有效．所谓大写 ϵ 其实是花体的 E．

$$
\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \tag{9}
$$

另外，电介质常数一律用 ϵ 而不是 ε．

现在来引用一张图片，图片必须以 eps 以及 pdf 两种格式放在 figures 文件夹中，代码中使用 pdf 图片．图片宽度一律用 cm 为单位．在图 1 中，label 只

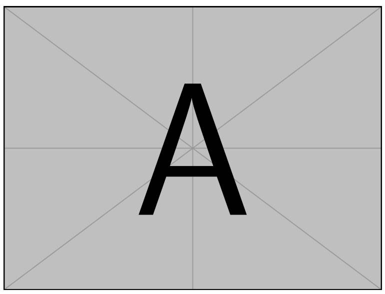

图 1: 例图

能放在 caption 的后面，否则编号会出错．由于图片是浮动的，避免使用“上图”，“下图”等词．

再来看一个表格，如表 1．注意标签要放在 caption 后面，使用 tb 命名．

下面我们举一个例子并引用

例 1　名称

在例子中，我们的字体可以自定义，包括公式的字号会保持与内容一致．

$$
(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} (n\text{为整数}) \tag{10}
$$

表 1: 极限 e 数值验证

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$(1+x)^{1/x}$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828

引用例子同样使用 autoref，如例 1.

以下给出一段 Matlab 代码，代码必须有“.m”和“.tex”两个版本，放在 codes 文件夹中.

Matlab 代码

显示 Command Window 中的代码

```
>> 1.2/3.4 + (5.6+7.8)*9 -1
ans = 119.9529
>> 1/exp(1)
ans = 0.3679
>> exp(-1i*pi)+1
ans = 0
```

显示 m 文件中的代码

代码必须以.tex 文件格式放在 code 文件夹中的中，并用 input 命令导入正文。.tex 代码文件的命名与图片命名相同。禁止在正文中直接写代码。

```
% 验证二项式定理(非整数幂)
u = -3.5;
x = 0.6; % |x|<1 使级数收敛
N = 100; % 求和项数
Coeff = 1; % x^ii 项前面的系数
result = 1; % 求和结果
for ii = 1:N
    Coeff = Coeff*(u-ii+1) / ii;
    result = result + Coeff * x^(ii);
end
```

```
disp('直接计算结果为')
format long % 显示全部小数位
disp((1+x)^u)
disp('求和结果为')
disp(result)
format short % 恢复默认显示
```

应用举例 本书格式规范[19]

拓展阅读 本书格式规范[19]