**齐次亥姆霍兹方程**

2016/1/3

预备知识: [连续的分离变量法](#_连续的分离变量法_傅里叶变换法), [一维齐次亥姆霍兹方程](#_一维齐次亥姆霍兹方程), 拉普拉斯算符(链接未完成)

以三维空间为例, 齐次亥姆霍兹方程为

 (1)

其中是一正实数, 拉普拉斯运算(链接为完成)为

 (2)

**结论**

任意波数为*k*的平面波(满足, 见[平面波的复数表示](#_平面波的复数表示))的不含时部分都是(1)的一个解. 即

 (3)

实部为([平面波](#_平面波))

 (4) 或  (5)

求通解时, 对所有可能的解线性叠加(积分)即可.

**说明**

亥姆霍兹方程从波动方程的分离变量法中产生, 一般写成复数形式, 需要实数形式时取实部即可, 因为任何参数为实数的微分方程的复数解的实部和虚部都分别满足方程(链接未完成).

**推导**

[分离变量](#_连续的分离变量法_傅里叶变换法), 令, 且令

, ,  (6)

则

 (7)

[一维亥姆霍兹方程](#_一维齐次亥姆霍兹方程)解为, , , 对指定的,,亥姆霍兹方程的通解为

 (8)

这是平面波的不含时部分([平面波的复数形式](#_平面波的复数表示)为), 其中为复振幅, 为任意模长为*k*的波矢.

根据[连续的分离变量法](#_连续的分离变量法_傅里叶变换法), 通解为所有满足(7)的解(8)的线性组合(即积分), 任意常数变为的函数

 (9)

是立体角, 上式是对所有方向的积分.