**二阶常系数非齐次微分方程的通解**

2015/11/15

预备知识： [二阶常系数齐次微分方程的通解](#_二阶常系数齐次微分方程的通解); [二阶行列式](#_二阶行列式_1)

**结论**

[在二阶常系数齐次微分方程](#_二阶常系数齐次微分方程的通解)的右端加上一个函数，即

 (1)

这就是[**二阶常系数非齐次微分方程**](file:///G:\学习\普通物理资料索引\普通物理资料索引(docx版,%2020131209)\二阶常系数齐次微分方程的通解.docx)．其解为

 (2)

其中  (3) 见([二阶行列式](#_二阶行列式))

其中，，，都是的函数，后面的括号和自变量被省略．和是对应齐次方程 (4) 的两个线性无关的解．

应用

(未完成)

**推导**

下面介绍的方法叫常数变易法，其主要思想可参考[一阶线性非齐次微分方程的通解](#_一阶线性非齐次微分方程的通解)：

设通解的形式为 (5) ，其中，也是关于的函数．对(5)式两边求导，得

 (6)

为了接下来计算方便，我们规定，满足关系

 (7)

(\*注释： 这么规定会不会丢失一部分解呢? 或许会，但是由于我们已经有了(1)式对应的齐次解和，根据[线性微分方程解的结构](#_线性微分方程解的结构)，只需要找到(1)式的任意一个解，就可以找到他的通解．)

把(7)代入(6)，得到

 (8)

继续对(8)求导，得到

 (9)

把(7)(8)(9)代回原方程(1)得

 (10)

化简，得

 (11)

由于和都是(4)式的解．所以(9)式化为

 (12)

总结一下，刚刚的推导说明，和在(5)的假设条件下，只要满足(10)即可满足(1)式．

联立(5)和(10)式，得到关于和的方程组

 (11)

解得，

 (13)

其中

 (14)

对(13)的两条式子积分，即可得到

 (15)

 (16)

(15)(16)代入(5)式，得到方程(1)的解为

(17)

由于上式满足线性[微分方程解的结构](#_线性微分方程解的结构)，所这已经是通解了．但是必须注意，根据常数变易法，我们只能找到没有零点的区间内找到方程(1)的通解．

拓展阅读： [一阶线性非齐次微分方程的通解](#_一阶线性非齐次微分方程的通解)．

### 二阶常系数非齐次微分方程的通解

预备知识： [二阶常系数齐次微分方程的通解](#_二阶常系数齐次微分方程的通解)

**结论**

[在二阶常系数齐次微分方程](#_二阶常系数齐次微分方程的通解)的右端加上一个函数，即

 (1)

这就是[**二阶常系数非齐次微分方程**](file:///G:\学习\普通物理资料索引\普通物理资料索引(docx版,%2020131209)\二阶常系数齐次微分方程的通解.docx)．其解为

 (2)

其中  (3) 见([二阶行列式](#_二阶行列式))

其中，，，都是的函数，后面的括号和自变量被省略．和是对应齐次方程 (4) 的两个线性无关的解．

应用

(未完成)

**推导**

下面介绍的方法叫常数变易法，其主要思想可参考[一阶线性非齐次微分方程的通解](#_一阶线性非齐次微分方程的通解)：

设通解的形式为 (5) ，其中，也是关于的函数．对(5)式两边求导，得

 (6)

为了接下来计算方便，我们规定，满足关系

 (7)

(\*注释： 这么规定会不会丢失一部分解呢? 或许会，但是由于我们已经有了(1)式对应的齐次解和，根据[线性微分方程解的结构](#_线性微分方程解的结构)，只需要找到(1)式的任意一个解，就可以找到他的通解．)

把(7)代入(6)，得到

 (8)

继续对(8)求导，得到

 (9)

把(7)(8)(9)代回原方程(1)得

 (10)

化简，得

 (11)

由于和都是(4)式的解．所以(9)式化为

 (12)

总结一下，刚刚的推导说明，和在(5)的假设条件下，只要满足(10)即可满足(1)式．

联立(5)和(10)式，得到关于和的方程组

 (11)

解得，

 (13)

其中

 (14)

对(13)的两条式子积分，即可得到

 (15)

 (16)

(15)(16)代入(5)式，得到方程(1)的解为

(17)

由于上式满足线性[微分方程解的结构](#_线性微分方程解的结构)，所这已经是通解了．但是必须注意，根据常数变易法，我们只能找到没有零点的区间内找到方程(1)的通解．

拓展阅读： [一阶线性非齐次微分方程的通解](#_一阶线性非齐次微分方程的通解)．