**偏导数**

对一个多元函数，如果求导时只把看成自变量，剩下的都看做常数，得到的导数就叫函数(关于)的偏导数．以二元函数为例，对的偏导数常记为

，，，或 

最后一种记号在括号右下角声明了保持不变的自变量，这在许多情况下能避免混淆．

**例1**

对于函数 ，两个偏导数分别为

 

**例2**

对于函数 





**几何意义与微分关系**

类比导数的几何意义(一维曲线的斜率)，若在三维直角坐标系中画出曲面，则和分别是是某点处曲面延方向和方向的斜率．所以从某点延方向移动一个微小量，假设曲面平滑，则函数值增加



写成微分关系就是

 (不变)

**全微分**

在偏微分的几何意义中，若在某点附近的曲面光滑，那么如果考虑一个足够小的区域，可以把曲面近似为平面．设平面方程为



当，时显然有，求两个偏导，又有

 

令坐标增量，，，则平面方程变为



若令增量为无穷小，即



这就是**全微分**关系．全微分的意义是，从某一点开始向任意方向移动，函数的增量等于只向方向移动的增量加上只向方向移动的增量．类似地，多元函数的全微分关系为



事实上，偏微分也可以理解为是由该式定义的．

**复合函数的偏导**

若已知二元函数，是,的函数，但若和都是和的函数，则最终是和的函数，即



那如何求对和的偏微分呢? 我们先来看全微分关系．首先



而和的微小变化又都是由和的微小变化引起的

 



这就是关于和的全微分关系．根据定义





这也叫偏导的**链式法则**．

**高阶偏导**

由于多远函数的偏导必须指定一个变量，高阶偏导的每一次偏导也要指定一个变量．例如二元函数的二阶偏导可以是仅对或求两次偏导，也可以分别求一次偏导，记为

  

类似一元函数，这些记号的定义是

 

其中第三种属于**混合偏导数**，即包含不止一个变量的偏导．混合偏导一个最重要的性质就是不区分顺序，即



这个定理这里不做一般证明，请读者自行举例验证．