**复数域的三角函数**

2015/4/20

预备知识： [复数域的指数函数](#_复数域的指数函数)

**定义**

复数域的正弦函数为

 (1)

复数域的余弦函数为

 (2)

为什么三角函数要这么定义? 因为只有这么定义，才能既“[兼容](#_复变函数简介)”实数范围内的三角函数，同时满足[解析](#_复变函数的解析性)的要求．

**与实数函数的“兼容性”**

将(1)中的复数取实数，得



根据[复数域的指数函数](#_复数域的指数函数)(或[欧拉公式](#_复数域的指数函数))，





代入得



同理



证毕．

**两角和公式**

利用欧拉公式，容易证明，复数范围内的正余弦函数同样满足两角和公式

 (1)

 (2)

**实部和虚部**

利用两角和公式，令等于实数，等于虚数，则有





其中





代入得





这样，就把正余弦的实部和虚部分开来了(当然也可以根据定义直接得到两式)

，

，

**解析性**

### 由于是解析函数，而解析函数的线性组合也是解析函数，所以正余弦函数都是[解析函数](#_复变函数的解析性)．但也可以根据[柯西-黎曼公式](#_复变函数的解析性)直接证明．

### 复数域的三角函数

预备知识： [复数范域的指数函数](#_复数域的指数函数)

**定义**

复数域的正弦函数为

 (1)

复数域的余弦函数为

 (2)

为什么三角函数要这么定义? 因为只有这么定义，才能既“[兼容](#_复变函数简介)”实数范围内的三角函数，同时满足[解析](#_复变函数的解析性)的要求．

**与实数函数的“兼容性”**

将(1)中的复数取实数，得



根据[复数范域的指数函数](#_复数域的指数函数)(或[欧拉公式](#_复数域的指数函数))，





代入得



同理



证毕．

**两角和公式**

利用欧拉公式，容易证明，复数范围内的正余弦函数同样满足两角和公式

 (1)

 (2)

**实部和虚部**

利用两角和公式，令等于实数，等于虚数，则有





其中





代入得





这样，就把正余弦的实部和虚部分开来了(当然也可以根据定义直接得到两式)

，

，

**解析性**

由于是解析函数，而解析函数的线性组合也是解析函数，所以正余弦函数都是[解析函数](#_复变函数的解析性)．但也可以根据[柯西-黎曼公式](#_复变函数的解析性)直接证明．