**导数简介**

2014/11/24

**导数的几何理解**

一个一元函数 ，在直角坐标系中表示为一条曲线．在这个曲线的光滑部分取一点A，并作其切线．



若切线存在，该切线与轴的夹角的正切值就叫点A的导数．当函数在A点递增时，可能的取值为，即．递减时，取，即．当切线水平时，．

若函数曲线在的某一开区间每一点都可导，则这个区间上每一个对应一个导数．将其写成关于的函数，就是该区间上的导函数． 通常将导函数记为

，，，，．（后3种记号的来源见下文）

另外，若切线不存在(例如折线的棱角处，但也有其他更复杂的情况)，我们说点A不可导．



若函数曲线在某一点附近是光滑的，那么在这点附近取一小段，当这一段取得**足够小**，可以近似认为它是线段且与切线重合（如下图）．以这条线段为斜边，作一直角三角形，令其底边长为(在微积分中，通常把非常小的一段记为，是一不能分割的整体符号，而不是两个量相乘)，竖直边的边长为(当函数递增时，取正值，反之取负值)．根据上面导数的定义，就是函数的导数．所以导数通常表示为，导数的倒数则为．



由上面的讨论可得，当*x*增加一小段时， y轴的增量约为，且当越小，这条式子就越精确成立．这个关系就叫函数的微分(看到这里，你可能会觉得，原来微分这么简单! 其实“微积分”基本就是在讲“微分”和“积分” 而一元函数的微分及其基本原理的几何理解基本上就可以认为是上面这张图所表示的)．

**导数的代数理解**

导数的代数理解就是： 一个量关于另一个量的变化率． 例如质点直线运动时，速度的大小就是其路程对时间的导数．把这种描述用数学符号表达出来就是



其中表示极限(limit)，其下方是极限的内容．可以大概理解为，"当趋近于无穷小的时候"．由于在上图的第三张图中，的始末位置并不非常重要，既可以从取到，也可以从取到等等 (因为当非常小的时候，附近的曲线基本处处跟切线重合，他们的斜率都是一样的)．所以导数的定义也有其他类似的形式



注意到上面我用了诸如"近似"等词，但一个极限是精确的．例如上面的极限，虽然对于任意一个确定的(例如0．0001)，等式都不精确地成立，但是只要不断地让更小，就能取得更加精确的值，这就是极限的思想(极限的严格数学定义翻译成通俗语言就是这个意思)．例如，数列 3．1，3．14，3．1415，3．14159．．．中，第n项只是的前n位小数近似，并不能等于，但是我们说，当n趋近于无穷大时，第n项的**极限**是．所以从这个观点来看，无穷大或无穷小并不是能表示出来的数，而是一个过程．

这里有一个关于上面极限表达式的[数值实验](#_导数定义的小实验)，有兴趣的读者可以看一下．

这里是一些常用函数的导数，建议熟记

[基本初等函数的导数](#_基本初等函数的导数)

**物理实例**

一维运动的速度定义(未完成)

一维运动的加速度定义(未完成)

**拓展阅读**

[求导法则](#_求导法则)；[高阶导数](#_高阶导数)；