**开普勒第一定律的证明**

2015/4/20

预备知识： [圆锥曲线的极坐标方程](#_圆锥曲线的极坐标方程)；[极坐标加速度](#_极坐标中的加速度)；[牛顿第二定律](#_牛顿第二定律)；[微分方程简介](#_微分方程简介)；[二阶常系数非齐次微分方程的通解](#_二阶常系数非齐次微分方程的通解)；

数学模型： 由于太阳质量远大于其他行星，近似认为太阳不动．由于太阳和行星相对于行星轨道来说大小可以忽略，把他们当做[质点](#_质点)(另见[球体的平方反比力](#_球体的平方反比力_1))．以太阳为原点建立平面极坐标系，行星在该平面上运动，且仅受万有引力一个外力．现证明行星的运动轨迹是椭圆，且焦点在原点．

求解思路：

1．先在极坐标中写出轨道方程(1)．

2．利用牛顿第二定律和万有引力定律列出行星的动力学方程(6)(7)，从中消去*t*，得到*r*关于的微分方程(12)．

3．证明轨道方程(1)是微分方程(12)的解．

1．[平面极坐标中，圆锥曲线的方程](#_圆锥曲线的极坐标方程)为(事实上，轨道也可以是双曲线或者抛物线，所以这里证明普遍情况)

 (1)

令太阳(中心天体)在坐标原点，则行星沿该轨道运行．

2．[极坐标中的加速度公式](#_极坐标中的加速度)为

径向:  (2)

法向:  (3)

根据牛顿第二定律和[万有引力定律](#_牛顿万有引力定律)，由于行星只受到沿径向的万有引力，则有

 (4)

 (5)

在(4)，(5)式中同除*m*，代入(2)，(3)式可得

 (6)

 (7)

现在用(6)，(7)消去*t*．

(7)式两边乘以*r*得 

可知括号内不随时间变化, 即 (8) 其中*h*为任意常数．

现在我们根据式(8)，即 (9)，即可把式(6)中含有*t*的项消去，得到*r*关于的微分方程．

(6)左边第一项可用[链式法则](#_求导的链式法则)和[求导法则](#_求导法则)使其含有.



 (10)

所以(6)式变为

 (11)

将(9)式代入,得r关于的微分方程.



化简得

 (12)

这就是*r*关于的微分方程

3．将(1)代入，可验证(1)是该方程的解．

当然，在事先不知道轨道方程的情况下，也可以通过解该方程，得到(1)式．过程如下．

为了使方程变为更简单的形式, 令 (13), 代入(12), 得到u关于的微分方程

 (14) (见[比耐公式](#_比耐公式))

即 (15) 这是一个[二阶常系数非齐次微分方程](#_二阶常系数非齐次微分方程的通解), 通解为

 其中. 为任意常数. 写成关于*r*的函数, 即得到(1)式.

所以行星轨道不一定是椭圆, 也可以是抛物线或者双曲线, 取决于*e*的值. 但是抛物线或双曲线轨道是从无穷远来到无穷远去的轨道, 不会绕太阳旋转. 所以绕太阳旋转的行星轨道必然为椭圆轨道.

拓展阅读: [比耐公式](#_比耐公式);

### 开普勒第一定律的证明

2014/11/17

预备知识： [圆锥曲线的极坐标方程](#_圆锥曲线的极坐标方程)；[极坐标加速度](#_极坐标中的加速度)；[牛顿第二定律](#_牛顿第二定律)；[微分方程简介](#_微分方程简介)；[二阶常系数非齐次微分方程的通解](#_二阶常系数非齐次微分方程的通解)；

数学模型： 由于太阳质量远大于其他行星，近似认为太阳不动．由于太阳和行星相对于行星轨道来说大小可以忽略，把他们当做[质点](#_质点)(另见[球体的平方反比力](#_球体的平方反比力_1))．以太阳为原点建立平面极坐标系，行星在该平面上运动，且仅受万有引力一个外力．现证明行星的运动轨迹是椭圆，且焦点在原点．

求解思路：

1．先在极坐标中写出轨道方程(1)．

2．利用牛顿第二定律和万有引力定律列出行星的动力学方程(6)(7)，从中消去*t*，得到*r*关于的微分方程(12)．

3．证明轨道方程(1)是微分方程(12)的解．

1．[平面极坐标中，圆锥曲线的方程](#_圆锥曲线的极坐标方程)为

 (1)

令太阳(中心天体)在坐标原点，则行星沿该轨道运行．

2．[极坐标中的加速度公式](#_极坐标中的加速度)为

径向:  (2)

法向:  (3)

根据牛顿第二定律和[万有引力定律](#_牛顿万有引力定律)，由于行星只受到沿径向的万有引力，则有

 (4)

 (5)

在(4)，(5)式中同除*m*，代入(2)，(3)式可得

 (6)

 (7)

现在用(6)，(7)消去*t*．

(7)式两边乘以*r*得 

可知  (8) 其中*h*为任意常数．

现在我们根据式(8)，即 (9)，即可把式(6)中含有*t*的项消去，得到*r*关于的微分方程．

(6)左边第一项可用[链式法则](#_求导的链式法则)和[求导法则](#_求导法则)使其含有.



 (10)

所以(6)式变为

 (11)

将(9)式代入,得r关于的微分方程.



化简得

 (12)

这就是*r*关于的微分方程

3．将(1)代入，可验证(1)是该方程的解．

当然，在事先不知道轨道方程的情况下，也可以通过解该方程，得到(1)式．过程如下．

为了使方程变为更简单的形式, 令 (13), 代入(12), 得到u关于的微分方程

 (14) (见[比耐公式](#_比耐公式))

即 (15) 这是一个[二阶常系数非齐次微分方程](#_二阶常系数非齐次微分方程的通解), 通解为

 其中. 为任意常数. 写成关于*r*的函数, 即得到(1)式.

所以行星轨道不一定是椭圆, 也可以是抛物线或者双曲线, 取决于*e*的值. 但是抛物线或双曲线轨道是从无穷远来到无穷远去的轨道, 不会绕太阳旋转. 所以绕太阳旋转的行星轨道必然为椭圆轨道.

拓展阅读: [比耐公式](#_比耐公式);